

# 大雾二寄结论速寄 v1.1

九鸟

## 1 序 - 食用指南

这是一份总结二级结论以及一些难记的概念的笔记，主要是为了方便复习，所以几乎无推导，只会有一些重要的结论和一些重要的公式。当然在源文件里面保留了一点过程，如有需要自行取消注释进行编译或找我要。当然中间也有一丁点的私货题目来解释自己的私货结论。要是错误的话欢迎指正。但本人对于这份笔记的正确性不会负任何的责任，以及其中出现不能保证是考点，如果因为笔记的错误记错了什么丢分的话，找阿 giao 会帮你补的。莲祝你食用愉快。

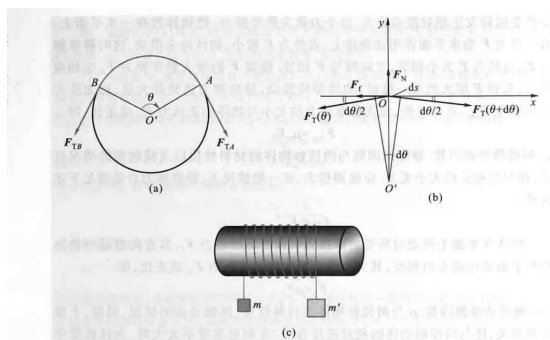
v1.1 修正内容：修复了部分的 typo。鸣谢 @alphabet 找出的 typo，鸣谢 @Zjl37 提供的排版建议。



图 1: 只要你也喜欢莲那我们就是情敌朋友了

## 2 第二章

### 2.1 “欧拉公式”



将绳子绕在一个固定的轴上，给其一端  $F_1$  的力，若想在另一端施加一个  $F_2$  的力想使得绳子与轴发生滑动，则

$$F_{2min} = F_1 e^{\mu\theta}$$

### 2.2 圆周运动

在圆周运动中，有：

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

对于匀变速圆周运动，类比直线运动，有：

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$2\alpha\theta = \omega^2 - \omega_0^2$$

### 3 第三章

#### 3.1 质量相等的物体的弹性碰撞

当两物体发生正碰时，有：

$$\begin{cases} \vec{v}_1' = \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2' = \vec{v}_1 \end{cases}$$

当两物体发生斜碰时(这里指一个动物体去碰撞另一个静止的物体)，有：

$$\vec{v}_1' \perp \vec{v}_2$$

#### 3.2 质量不等的物体的弹性碰撞

由动量守恒和动能守恒，可以得到：

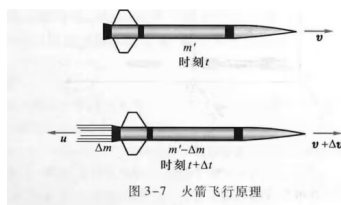
$$\begin{cases} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ v_1' - v_2' = v_2 - v_1 \end{cases}$$

<sup>1</sup> 接下来可得：

$$\begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

如果记忆不住，可以考虑记忆上上面的式子，然后用行列式进行推导。<sup>2</sup>

#### 3.3 系统内的质量转移



<sup>1</sup> 请注意这里的方向，我们其实知道，对于上面的方程，一定是两个解，那么易知， $|v_1 - v_2|$  对应的两个解是方向相反的

<sup>2</sup> 这个行列式非常简单，现推完全来得及

当火箭系统受到的外力为  $F$  时，喷出气体的速度为  $u$  时有：

$$m(t)v'(t) = F + um'(t)$$

解得：

$$v(t) = v_0 + \int_0^t \frac{F}{m(t)} dt + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

特别的，如果  $F = 0$ ，那么有：

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

当最后火箭燃烧后的质量为  $m'$  时，那么火箭的最终速度为：

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m'}$$

其中  $\frac{m_0}{m'}$  被称为质量比  $N$ ，而这便是齐奥尔科夫斯基公式。

## 4 第四章

### 4.1 转动惯量与力矩与角动量

对于一个质点系，其转动惯量为：

$$J = \iint_D \rho r^2 d\sigma$$

一个力的力矩为：

$$M = \vec{r} \times \vec{F}$$

转动定理表述为：

$$M = J\alpha$$

角动量为：

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = J\vec{\omega}$$

有：

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

故可以类比冲量定理使用冲量矩定理：

$$\Delta \vec{L} = J_2 \omega_2 - J_1 \omega_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

式子的后半部分更具有普适性，故更常用。

力矩做功的公式为：

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

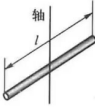

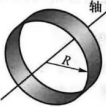
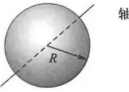
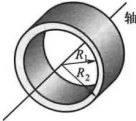
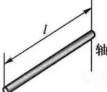
力矩的功率为：

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

刚体的转动动能为：

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2$$

### 4.2 各种形状的物体的转动惯量

 <p>细棒 (转动轴通过中心与棒垂直)</p> $J = \frac{ml^2}{12}$ <p>(a)</p>	 <p>圆柱体 (转动轴沿几何轴)</p> $J = \frac{mR^2}{2}$ <p>(b)</p>	 <p>薄圆环 (转动轴沿几何轴)</p> $J = mR^2$ <p>(c)</p>
 <p>球体 (转动轴沿球的任一直径)</p> $J = \frac{2mR^2}{5}$ <p>(d)</p>	 <p>圆筒 (转动轴沿几何轴)</p> $J = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2)$ <p>(e)</p>	 <p>细棒 (转动轴通过棒的一端与棒垂直)</p> $J = \frac{ml^2}{3}$ <p>(f)</p>

### 4.3 滑轮的等效质量

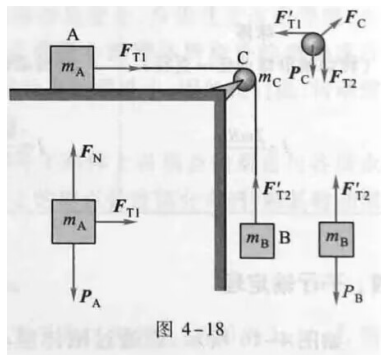


图 4-18

对于如图所示的滑轮，当其上面的绳子没有发生相对滑动的时候，可以认为绳子连接了一个质量为  $\frac{m_c}{2}$  的物体。证明：

$$J = \frac{1}{2} m_c r^2$$

$$M = (F_A - F_B)r$$

$$M = J\alpha$$

$$a = \alpha r$$

$$\begin{aligned} m_{eq} &= \frac{F_A - F_B}{a} = \frac{J}{R^2} \\ &= \frac{m_c}{2} \end{aligned}$$

### 4.4 转动惯量的平行轴定理

设通过质心的轴的转动惯量为  $J_0$ ，质心到平行轴的距离为  $d$ ，则有：

$$J = J_0 + md^2$$

证明:

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \iint_D \rho \vec{r}^2 d\sigma \\
 J &= \iint_D \rho (\vec{r} + \vec{d})^2 d\sigma \\
 &= \iint_D \rho \vec{r}^2 d\sigma + 2\vec{d} \iint_D \rho \vec{r} d\sigma + \vec{d}^2 \iint_D \rho d\sigma \\
 &= J_0 + md^2
 \end{aligned}$$

3

## 4.5 圆盘纯滚动的等效质量

当一个圆盘既有滚动又有平动的时候, 可以认为其等效质量为

$$\frac{3m}{2}。$$

<sup>4</sup> 证明:

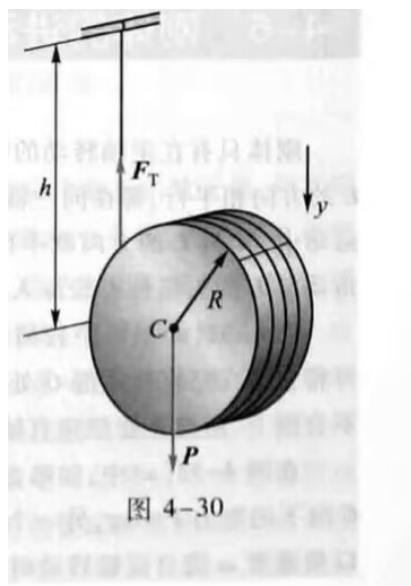
假设现有一圆盘, 放在粗糙的地面上, 当施加一个水平力  $F$  时, 运动的时候与地面无打滑, 则有:

$$\begin{aligned}
 F - f &= ma \\
 M &= fR \\
 M &= J\alpha \\
 a &= \alpha R \\
 m_{eq} &= \frac{F}{a} \\
 &= m + \frac{J}{R^2} \\
 &= \frac{3m}{2}
 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>这里因为是形心, 所以有:  $\iint_D \rho \vec{r} d\sigma = 0$

<sup>4</sup>请好好理解这里的等效, 这里是指当物体的外力为  $F$  时, 速度为  $v_c$  时, 其运动状态等效于一个质量为  $\frac{3m}{2}$  的物体, 在对应光滑表面, 速度为  $v_c$  的情况。其中速度, 能量等都是等效的。



如图，由此易知  $a = \frac{P}{m_{eq}}$ ，即  $a = \frac{2}{3}g$

## 5 流体力学

### 5.1 伯努利方程

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = C$$

### 5.2 泊肃叶方程

对于在圆管中稳定流动的流体，有：

$$Q_v = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$

$$\bar{v} = \frac{Q_v}{\pi R^2} = \frac{\Delta P R^2}{8\eta L}$$

$$w = \frac{8\eta L}{R^2} \bar{v} = \Delta P$$

$Q_v$  为流体的流量， $\bar{v}$  为流体的平均速度， $w$  为损失的功率。



### 5.3 斯托克斯公式

对于一个小球在黏性流体中的运动，当小球的半径和速度均不大的时候有：

$$F = 6\pi\eta r v$$

## 6 第九章

### 6.1 单摆与复摆

单摆的角频率和周期为：

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

复摆的角频率和周期为：

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

### 6.2 两个同方向不同频率简谐振动的合成

设现有两个简谐振动：

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t)$$

那么合成之后的振动方程为：

$$x = (2A \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t)) \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t)$$

由于我们认为  $|\omega_1 + \omega_2| \gg |\omega_1 - \omega_2|$ ，故我们将式子中的  $|2A \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})|$  视为和振动的振幅。而和振幅的频率为  $\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi}$

## 7 波动

### 7.1 波的传播速度

理论和实验证明，在固体中，横波和纵波的传播速度为：

$$v_{\text{横}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$
$$v_{\text{纵}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

G、E 分别为剪切模量和杨氏（弹性）模量， $\rho$  为材料的密度。在气体中，声速为：

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

### 7.2 波的能量

波的能量密度为：

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

取一个周期的平均值，有：

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

平均能流为：

$$\bar{P} = \bar{w} u S$$

而平均能流密度为：

$$I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$$

### 7.3 驻波

驻波的波函数为：

$$y = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$$

两个相邻的波节之间的距离为：

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

## 7.4 多普勒效应

当波源和观察者相对运动时，波的频率和波长会发生变化，这种现象被称为多普勒效应。接受到的频率为：

$$\nu' = \frac{u \pm v_0}{u \mp v_s} \nu$$

在上式中， $v_0$  为波源的速度， $v_s$  为观察者的速度， $u$  为波的传播速度。当观察者向波源靠近时， $v_0$  取正号，否则取负号。当波源向着观察者靠近时， $v_s$  取负号，否则取正号。

## 7.5 惠更斯原理

惠更斯原理是波动光学的基础原理之一，它的内容是：波的每一点都可以看作是次波源，次波源发出的波是原波的波前，波前是由无数个次波源发出的波构成的。

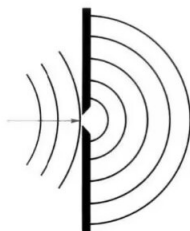
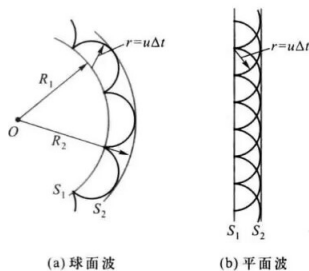


图 10-13 障碍物上的小孔成为新的波源



(a) 球面波 (b) 平面波

图 10-14 用惠更斯原理求波前

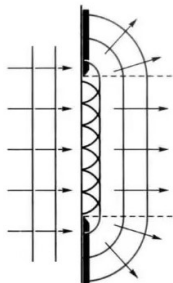


图 10-15 波的衍射

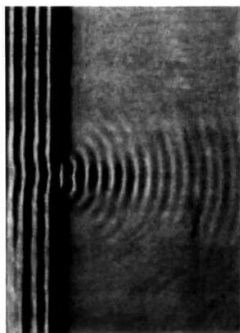


图 10-16 水波通过狭缝后的衍射现象

## 7.6 半波损失

介质的密度  $\rho$  与波速  $v$  的乘积为波阻  $Z$ ，即  $Z = \rho v$ 。 $Z$  大的称为波密介质， $Z$  小的称为波疏介质。当波从波疏介质传播到波密介质时，反射波的相位会发生  $\pi$  的跃变，这种现象被称为半波损失。

# 8 相对论

## 8.1 洛伦兹变换

洛伦兹变换为：

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

速度为：

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2})} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2})} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

洛伦兹变化的关键是认为光速是时空变换的特征向量，即光速不变。而伽利略变换的关键是一个同时性。故于此相对的，洛伦兹变换有在一个参考系中同时发生的事，可能在另一个参考系中不同时发生。

## 8.2 \* 时空矢量

时空矢量  $R$  在一维的情况下可以表示为：

$$R = (ct, x)$$

$c$  为光速， $t$  为时间， $x$  为距离。而时空矢量的长度为：

$$R^2 = c^2 t^2 - x^2$$

我们有以下的结论，在洛伦兹变换下，时空矢量的长度不变。即：

$$\begin{aligned} R^2 &= R'^2 \\ c^2 t^2 - x^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 \end{aligned}$$

请自行用洛伦兹变换的结果验算。

其的理解是，在某一个  $S$  系中，我们有一个事件发生在  $(ct, x)$  处，而在另一个  $S'$  系中，我们有一个事件发生在  $(ct', x')$  处，那么这两个事件将满足上面的式子。例题：

14-15 在惯性系  $S$  中观察到有两个事件发生在同一地点，其时间间隔为  $4.0 \text{ s}$ ，从另一惯性系  $S'$  中观察到这两个事件的时间间隔为  $6.0 \text{ s}$ ，试问从  $S'$  系测量到这两个事件的空间间隔是多少？设  $S'$  系以恒定速率相对  $S$  系沿  $xx'$  轴运动。

14-16 在惯性系  $S$  中，有两个事件同时发生在  $xx'$  轴上相距为  $1.0 \times 10^3 \text{ m}$  的两处，从惯性系  $S'$  观测到这两个事件相距为  $2.0 \times 10^3 \text{ m}$ ，试问由  $S'$  系测得此两事件的时间间隔为多少？

我们都以其中一个事件作为坐标原点，那么有：

- 14.15:

$$\begin{aligned} (ct)^2 - x^2 &= (ct')^2 - x'^2 \\ (4c)^2 - 0 &= (6c)^2 - x'^2 \\ x' &= \sqrt{20}c \\ &= 1.34 \times 10^9 \text{ m} \end{aligned}$$

- 14.16:

$$\begin{aligned}(ct)^2 - x^2 &= (ct')^2 - x'^2 \\ 0 - (1 \times 10^3)^2 &= (t')^2 - (2 \times 10^3)^2 \\ t' &= \sqrt{\frac{3 \times 10^6}{9 \times 10^{16}}} \\ &= 5.77 \times 10^{-6} s\end{aligned}$$

### 8.3 相对论的时空观

在相对论中，我们三个效应，即：

- 尺缩效应
- 钟慢效应
- 增重效应

只需要知道，上面的三个效应的放缩比都为  $\gamma$  即可。(原长最长，原时最短，原重最轻)

### 8.4 光的多普勒效应

光的多普勒效应为：

$$\frac{\nu_a}{\nu_b} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \text{ (B 离 A 而去)}$$

$\beta = \frac{v}{c}$ ,  $v$  为观察者相对光源的速度。同理，相靠近的话， $\beta$  取负号。

### 8.5 相对论的动量与能量

相对论中的动量和动能有以下的关系：

$$\begin{aligned}(pc)^2 + E_0^2 &= E^2 \\ E_k &= E - E_0\end{aligned}$$

光子的动量为：

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

## 9 静电场

### 9.1 电偶极子

电偶极子是指由两个等量异号的电荷组成的系统。

我们有以下的结论：

由电偶极子组成的系统的电势为：

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

而任意处的电场为：

$$\vec{E} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(1 - 3\cos^2 \theta)}{r^3}, \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p \sin \theta \cos \theta}{r^3} \right)$$

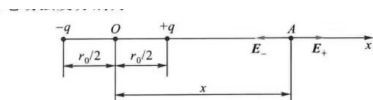


图 5-8

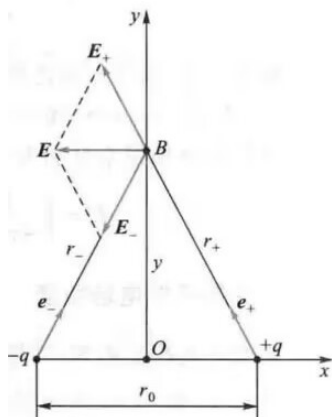


图 5-9

由此便非常易得图 5-8 和 5-9 的结果，带入即可。

$$\vec{E}_{5-8} = \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}, 0\right)$$

$$\vec{E}_{5-9} = \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}, 0\right)$$

## 9.2 几种常见的电场，电势分布

### • 带电圆环：

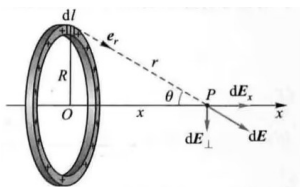


图 5-10

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

### • 带电圆盘：

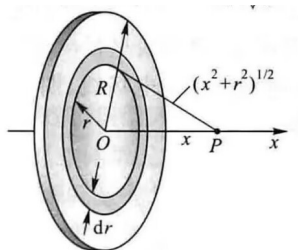


图 5-12

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{x^2 + R^2} - x)$$



- 无限长带电直线:

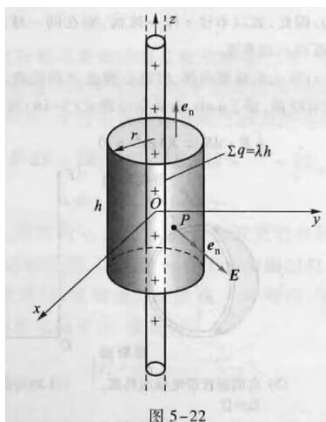
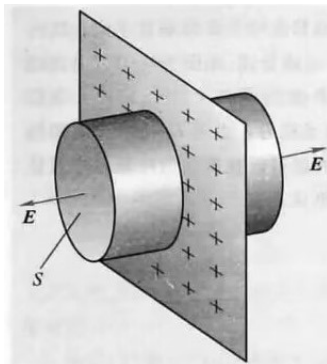


图 5-22

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

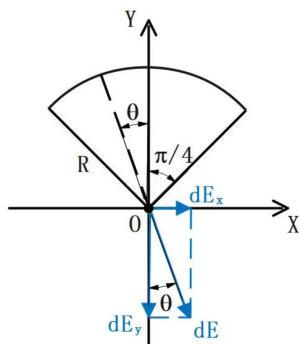
- 无限大均匀带电平面:



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

即对应的带电圆盘当  $R \rightarrow \infty$  时的情况。

- 带电圆弧:

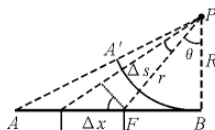


圆心处的电场强度方向沿圆弧的角平分线方向

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \theta$$

- 带电直线:



对于带电直线，我们有以下的结论：

如图，其的电场强度可以被等效为一段带电圆弧产生的电场强度。<sup>5</sup>

那么，就不难求出一般情况下的电场强度。特别的，当其在延长线上时，电场强度为：

$$E = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4r^2 - L^2}$$

当其中垂线上时，电场强度为：

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r\sqrt{4r^2 + L^2}}$$

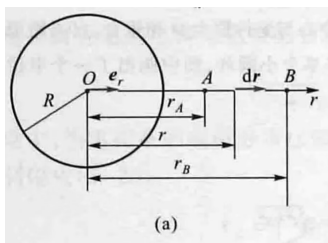
<sup>5</sup>请注意电势是不等效的！对于二维的情况，即带电圆盘，电场强度也不等效

可自行验证在中垂线上的情景是符合对应的圆弧的电场强度的。

再特别的，当直线为无限长时，即  $\lim_{\theta \rightarrow \pi}$  时，有：

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

- 带电球体：



$$\begin{cases} E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\rho r}{3} & r < R \\ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\rho R^3}{3r^2} & r > R \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\rho r^2}{3} & r < R \\ V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\rho R^3}{3r} & r > R \end{cases}$$

### 9.3 高斯定理

高斯定理为：

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

其中  $Q_{\text{enc}}$  为闭合曲面内的净电荷量。

### 9.4 电场力的相似三角形

众所周知，高中如果在分析受力平衡的时候，如果采用相似三角形的方法，那么这个题里面的力要么是恒定的、方向不变的、或与距离成正比的。

电场一般很难满足这些条件，但也有特殊情况。

5-20 如图所示,在电荷体密度为  $\rho$  的均匀带电球体中,存在一个球形空腔. 如将带电体球心  $O$  指向球形空腔球心  $O'$  的矢量用  $\mathbf{a}$  表示, 试证明球形空腔中任意点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$$

我们可以认为球形空腔是由于此处存在负的  $\rho$ , 那么易知, 两种电荷的电场力是能够构造相似三角形的, 即与距离成正比。那么不难求得 5-20 和 5-21 的结果, 请自行练手计算。

## 10 静电场中的导体与介质

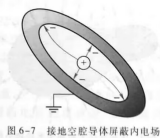
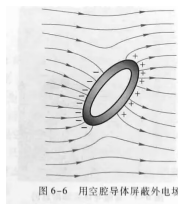
### 10.1 导体的静电平衡

导体的静电平衡有以下的特点:

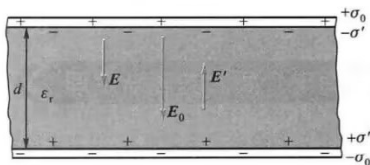
- 导体内部的电场为 0
- 导体表面的电场垂直于表面
- 导体的电荷分布只可能分布在内外表面

静电平衡的两种应用:

- 用空腔导体屏蔽外电场
- 用接地空腔导体屏蔽内电场



### 10.2 电位移, 极化强度, 极化电荷



有:

$$\vec{E}' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

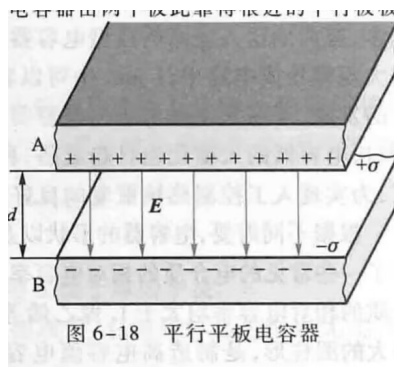
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

<sup>6</sup> 在电介质中, 高斯定理为:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}}$$

## 10.3 各种电容器的电容

- 平行板电容器:

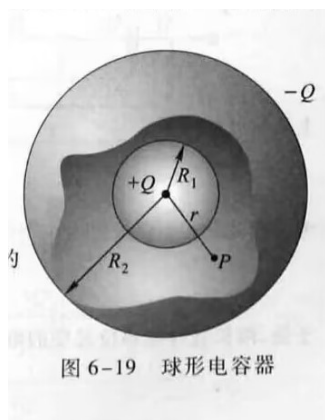


$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

- 球形电容器:

---

<sup>6</sup>请自行对照书本死记硬背



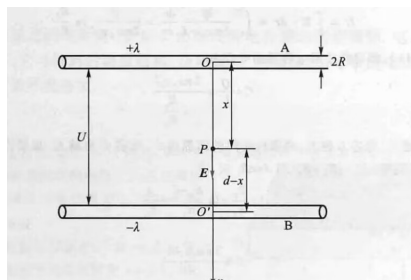
$$C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

特别的，当  $R_2 \rightarrow \infty$  时，有：

$$C = 4\pi\epsilon R_1$$

即孤立球形导体的电容。

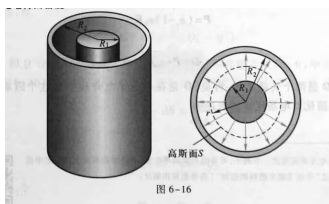
- 长直导线：



单位长度的电容为：

$$C \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{R}}$$

- 圆柱形电容器：



$$C = 2\pi\epsilon \frac{L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

当两极板之间的间隙极小，即  $R_2 \rightarrow R_1$  时，有：

$$C \approx \epsilon \frac{S}{d}$$

即认为其是平行板电容器。

## 10.4 电容的串并联

- 串联：

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

- 并联：

$$C = C_1 + C_2 + \dots$$

## 10.5 电容器的能量

电容器的能量为：

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

而单位体积中的能量密度为：

$$w = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

故电容器的能量为：

$$W = \iiint w dV$$

## 10.6 \* 电容器的冲放电

电容的充电过程为:

$$U = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

电容的放电过程为:

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

其中,  $RC$  为电容器的时间常数  $\tau$ 。

## 11 第七章

### 11.1 电流密度

由微观有:

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

则有:

$$I = neSv$$

$$j = env$$

### 11.2 欧姆定律微分形式

欧姆定律微分形式为:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$\sigma$  为电导率。

### 11.3 比奥-萨伐尔定律

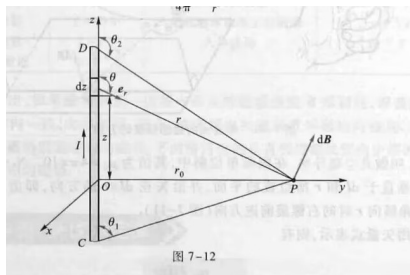
比奥-萨伐尔定律为:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \sin \theta}{r^2}$$



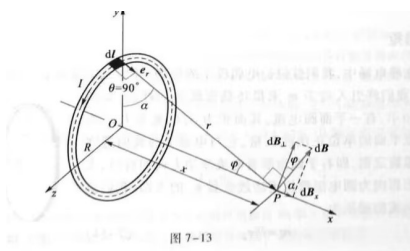
## 11.4 各种常见的磁场分布

### • 直导线



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

### • 圆环



$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

当  $x = 0$  时, 有:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

特别的, 当  $x \gg R$  时, 有:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{x^3}$$

亦可写成磁矩形式:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{x^3}$$

- 密绕螺线管

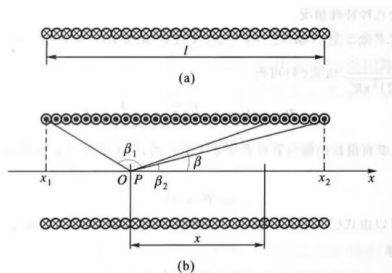


图 7-15

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

当认为螺线管是无限长时，有：

$$B = \mu_0 n I$$

而在其的一端，有：

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$

- 旋转圆盘

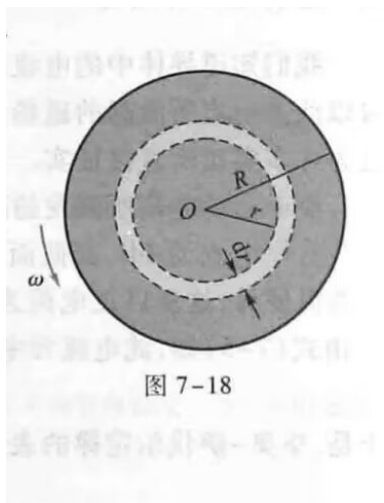
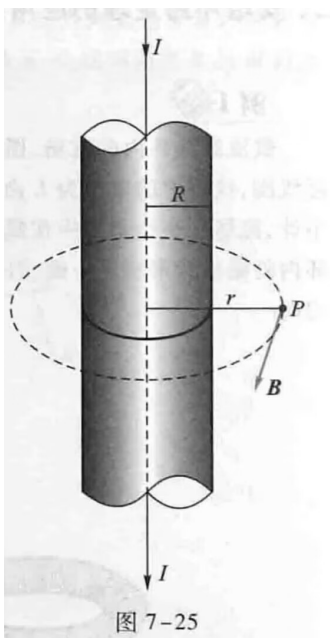


图 7-18

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}$$

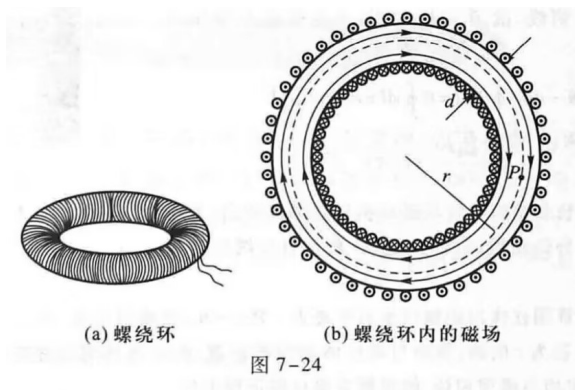
- 无限长直导线



在其内部，有：

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} (r < R)$$

- 圆形密绕线圈



$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

对于圆环中心轴线上的磁场，有：

$$B = \mu_0 n I$$

## 11.5 磁场的高斯定理

磁场的高斯定理为：

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

## 11.6 安培环路定理

安培环路定理为：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

## 11.7 带电粒子在磁场中的运动

带电粒子在电磁场中的运动有以下的特点：

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}$$

- 粒子的轨道是一个圆
- 粒子的轨道半径为：

$$r = \frac{mv}{qB}$$

- 粒子的周期为：

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

- 粒子的角频率为：

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

- 磁场力 ~~never gonna you up~~ 不做功
- 以及请自行回忆起高中的正则动量的知识 or 配速法 or 大学的解微分方程的知识以防考察带电粒子在速度选择器中的运动

## 11.8 霍尔效应

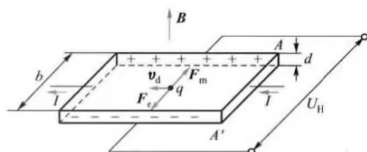


图 7-36 霍尔效应示意图

霍尔电压为：

$$U_H = \frac{IB}{nqd}$$

霍尔系数为：

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

## 11.9 载流导线在磁场中的受力

载流导线在磁场中的受力为：

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

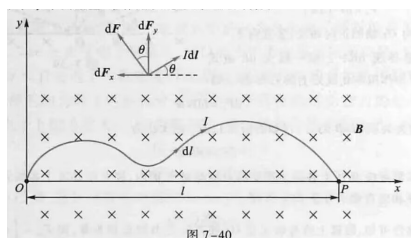


图 7-40

对于在磁场中的闭合线圈，有：

$$\vec{F}_{\text{合}} = 0$$

故对于这种不规则的导线，我们可以选择一条更合适的路径来计算。

## 11.10 线圈的磁力矩

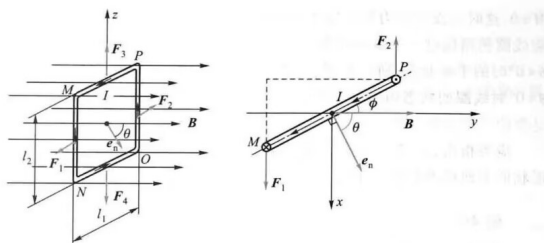


图 7-42 矩形载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩

线圈的磁力矩为：

$$\vec{M} = NIS\vec{e}_n \times \vec{B} = N\vec{m} \times \vec{B}$$

## 11.11 磁介质

磁介质表面的磁化电流面密度为：

$$I_s = M$$

$M$  为磁化强度。磁场强度为：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

在线性磁介质中，有：

$$M = \chi_m H$$

$\chi_m$  为磁化率。称  $1 + \chi_m$  为相对磁导率。则有：

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

那么安培环路定理为：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}}$$

## 12 第八章

### 12.1 电磁感应定律

电磁感应定律为：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

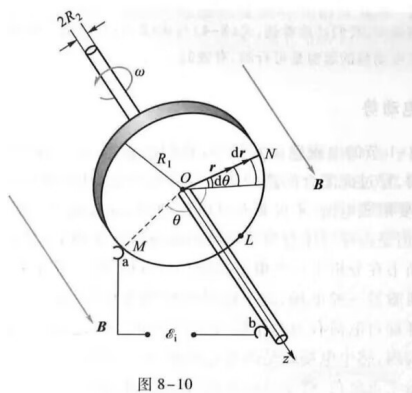
### 12.2 动生电动势

动生电动势为：

$$\varepsilon = vBl$$

方向可以用右手定则来判断。

例如圆盘发电机，有：



$$U = \frac{1}{2}B(R_1^2 - R_2^2)\omega$$

高中学过的线圈发电机，有：

$$U = NBS\omega$$

### 12.3 感生电动势

感生电动势用  $E_k$  表示，有：

$$\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

## 12.4 自感与互感

穿过回路的磁通量与电流成正比，称为自感。

$$\Phi = LI$$

长直螺线管的自感为：

$$L = \mu n^2 V$$

互感即一个线圈的电流激发的磁场对另一个线圈产生的感应电动势。

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1$$

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2$$

$$M_{21} = M_{12}$$

注意，一般而言，计算互感和自感系数的时候，都是用  $L = \frac{\Psi}{I}$  计算的，而  $\Psi = N\Phi$  称为磁链。注意，这里的  $N$  是指线圈的匝数。对于一些特殊的线圈， $N$  不一定是整数，例如对于后面的一对导线的内自感的计算，其的  $N = 0.5$ ，故更加推荐用计算磁场能量的方法来计算自感和互感。

## 12.5 电磁场的能量

磁场的能量可以表示为：

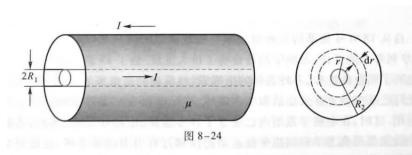
$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

磁场的能量密度为：

$$w_m = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH$$

## 12.6 一些自感

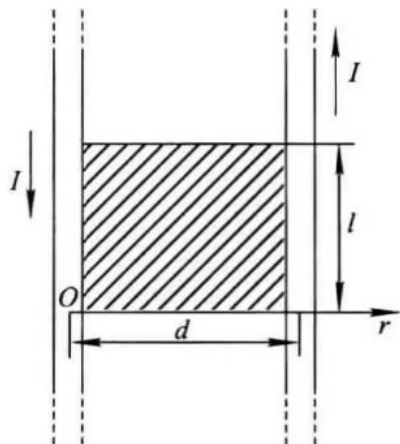
- 同轴电缆





$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

- 一对导线



题 8-21 图

其的自感  $L = L_1 + 2L_2$ ,  $L_1$  称为内自感,  $L_2$  称为外自感。

$$L_1 = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

## 12.7 位移电流

电位移通量为:

$$\Psi = SD$$

位移电流为:

$$I_d = \frac{d\Psi}{dt}$$

位移电流密度为:

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

故将安培环路定理改为：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enc}} + I_d = \int (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦方程组为：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

积分形式为：

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \iint -\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \\ \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \iint (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{\text{enc}} \\ \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned}$$



图 2: 事已至此，先吃饭吧