组合数学（3&7&11）

2019.12.18

第三次作业

2.9 （1）从整数1，2，…，100中选出两个数，使得它们的差正好是7，有多少种不同的选法？

（2）如果要求选出的两个数之差小于等于7，又有多少种不同的选法？

（1）第一个数选择n，则第二个数只能选n+7，共93种选法。

（2）选出的两个数之差小于等于7：93种选法；

选出的两个数之差小于等于6：94种选法；

选出的两个数之差小于等于5：95种选法；

选出的两个数之差小于等于4：96种选法；

选出的两个数之差小于等于3：97种选法；

选出的两个数之差小于等于2：98种选法；

选出的两个数之差小于等于1：99种选法；

共672种选法。

2.13 求(0, 0)到(n, n)不穿过对角线的非降格路径数？

定义向右走为**1**，向上走为**0**，则(0, 0)到(n, n)的非降格路径数为一个01序列

满足条件的序列可分为两类：

（1）任何时刻，1的数量≥0的数量（一直在对角线的下方走）

（2）任何时刻，1的数量≤0的数量（一直在对角线的上方走）

两类序列的数量相等，下面仅求第一类序列的数量：

定义三个集合：

（1）集合A：n个0，n个1组成的序列，集合大小为 C_{2n}^{n}

（2）集合B：n个0，n个1组成的序列,

且该序列存在某个时刻, 0的数量 ＞ 1数量

|A| - |B| 即为第一类序列的数量

（3）集合C：n+1个0，n-1个1组成的序列，集合大小为 $C_{2n}^{\mathrm{n}-1}$

下面证明集合**B**与集合**C**的大小相等:

任取 B 中的一个元素， b = 1010001…011

1010001…011

第一次出现, 0的数量>1的数量

10100 01…011

不变　　反转

得到一个新序列 c:　10100　10…100

c中有n-1个1 和 n+1个0, 所以,　$c \in C$

所以，B中任何一个元素都可以唯一地映射到C中的一个元素

任取 C 中的一个元素， c_0 = 10011…011，必然存在某一个时刻0的数量比1多

c_0中，第一次出现0比1多的位置之后的01进行反转，必然得到一个B中的元素

所以，C中任何一个元素都可以唯一地映射到B中的一个元素

所以集合A与集合B的大小相等

$|B| = |C| = C_{2n}^{n-1}$

第一类路径数量 = $|A| - |B| = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$

总的路径数量 = $2 * (|A| - |B|) = 2 * (C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}) = 2 * C_{2n}^{n} / (n+1)$

物理含义：第一次出现，0的数量>1的数量，表示从对角线下方走的时候第一次接触到 y=x+1 的直线，将后面的序列都反转表示，第一次接触到y=x+1后，将后续的线路沿着 y=x+1 对折，则集合 C 表示，从（0,0）到（n−1,n+1）的非降格路径数。

2.23 5封不同的信通过通信信道传输，两封信之间至少放入3个空格，一共加入15个空格，求方法数？

Step1. 确定5封信的发送顺序，5!

Step2. 15个空格插入到4个间隔中

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \quad x_{\mathrm{i}} \geq 3$$

等价于 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \quad x_{\mathrm{i}} \geq 0$

上式的非负整数解的数量 $C_{4+3-1}^{3} = C_6^3$

综上， 5! * C_6^3

3.3 证明：

(2) 设 n 为正整数，则

$$1+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\frac{1}{4}\binom{n}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

(2)等式左边

$$=\frac{1}{n+1}\left[(n+1)\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

3.4 给出

$$\binom{n}{m}\binom{r}{0}+\binom{n-1}{m-1}\binom{r+1}{1}+\binom{n-2}{m-2}\binom{r+2}{2}+\cdots+\binom{n-m}{0}\binom{r+m}{m}$$
$$=\binom{n+r+1}{m}$$

的组合意义。

4. 等式右边相当于从$(0,0)$到$(m,n-m+r+1)$点的非降路径数，可以将这些路径分为如下$m+1$类：第$i(i=1,2,\cdots,m)$类路径是从$(0,0)$点到$(m-i,n-m)$点，然后到$(m-i,n-m+1)$点，最后到$(m,n-m+r+1)$点，路径数为$\binom{n-i}{m-i}\binom{r+i}{i}$。由加法原则，得等式成立。

第七次作业

4.25 5名旅客$\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \cdots, \boldsymbol{P_5}$要去5个地方$\boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{C_1}, \cdots, \boldsymbol{C_5}$, 其中$\boldsymbol{P_1}$不愿意$\boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{C_3}$；$\boldsymbol{P_2}$不愿意$\boldsymbol{C_4}$；$\boldsymbol{P_3}$不愿意$\boldsymbol{C_2}, \boldsymbol{C_5}$；$\boldsymbol{P_4}$不愿意 $\boldsymbol{C_2}$；$\boldsymbol{P_5}$不愿意$\boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{C_3}$。问$\boldsymbol{P_1}$去$\boldsymbol{C_5}$的概率有多少？

本题棋盘如图 1 所示，将其变换后如图 2 所示

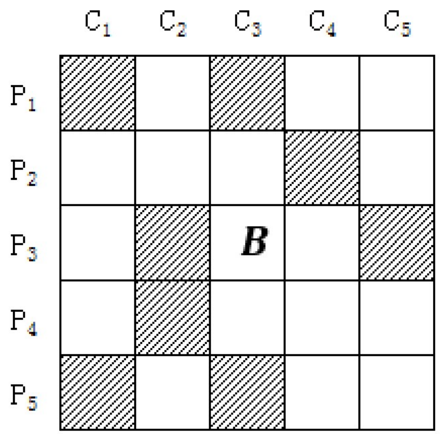


图1

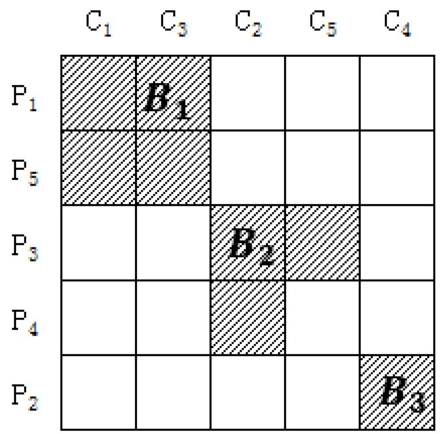


图2

则

$$R(x, B_1) = 1 + 4x + 2x^2, R(x, B_2) = 1 + 3x + 2x^2, R(x, B_3) = 1 + x.$$

$$R(x, B) = R(x, B_1) \cdot R(x, B_2) \cdot R(x, B_3)$$

$$= 1 + 8x + 22x^2 + 25x^3 + 12x^4 + 2x^5.$$

所以 5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N(0) = 5! - 8 \cdot 4! + 22 \cdot 3! - 25 \cdot 2! + 12 \cdot 1! + 2 \cdot 0! = 20.$$

如果P_1去C_5，原棋盘变为B'，如图 3 所示，将其变换后如图 4 所示。

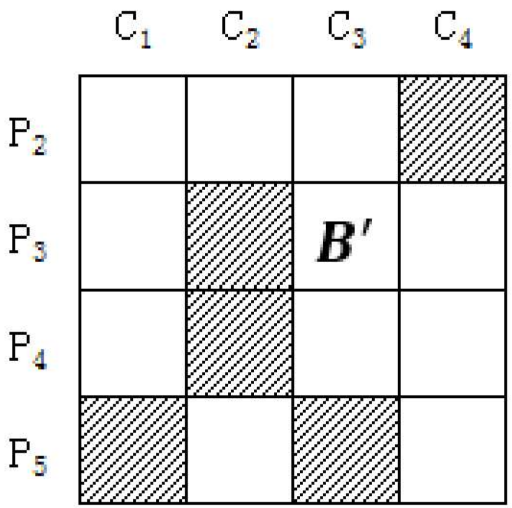


图3

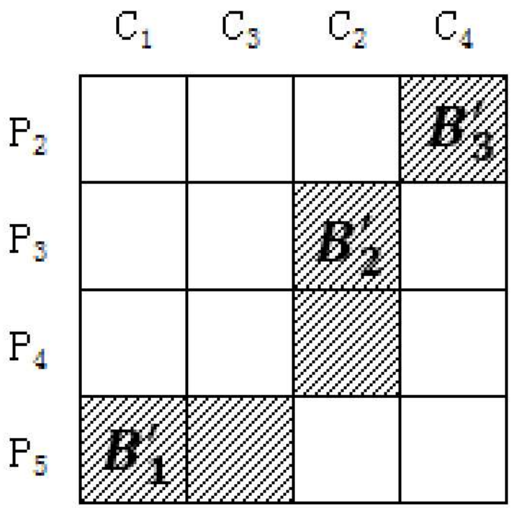


图4

则

$$R(x,B_1')=1+2x,R(x,B_2')=1+2x,R(x,B_3')=1+x.$$

$$\begin{aligned}R(x,B')&=R(x,B_1')\cdot R(x,B_2')\cdot R(x,B_3')\\&=1+5x+8x^2+4x^3.\end{aligned}$$

所以已知P_1去C_5，5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N'(0)=4!-5\cdot 3!+8\cdot 2!-4\cdot 1!+0\cdot 0!=6.$$

综上所述，P_1去C_5的概率为$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$。

4.29 一部由1楼上升到10楼的电梯内共有n个乘客，该电梯从5楼开始每层都停，以便让乘客决定是否离开电梯。

（1）求n个乘客离开电梯的不同方法的种数。

（2）求每层楼都有人离开电梯的不同方法的种数。

(1) 6^n。

(2) 设S为全部方法集合，P_i: 第i层没有人下，$i=5,6,\cdots 10$

则所求为$N(0)=|S|-\sum N(P_i)+\sum N\left(P_i,P_j\right)-\cdots$

得$N(0)=6^n-C_6^1 5^n+C_6^2 4^n-C_6^3 3^n+C_6^4 2^n-C_6^5 1^n+C_6^6 0^n$

5.1 求下列序列的生成函数：

(3) $0, 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, \cdots, n(n+2), \cdots$;

$$G\{n(n+2)\} = G\{n(n+1)\} + G\{n\}$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

5.2 利用生成函数计算下列和式：

(2) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + n(n+2)$；

由上题可知$G\{n(n+2)\} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$

故$G\{\sum_k^n k(k+2)\} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^4}$

$$= (3x - x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^n$$

其中x^n的系数为所求和：

$$3 \cdot \binom{n+2}{n-1} - \binom{n+1}{n-2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

第十一次作业

6.11 $1\times n$棋盘用红、白、蓝三种颜色着色，不允许相邻两格都着红色，求着色方案数满足的递推关系，并求出着色方案数。

11.若第一格着红色，则第二格只能着白色或蓝色，设余下$n-2$个格的涂色方法数为$f(n-2)$。若第一格不着红色，则或着白色或着蓝色，余下$n-1$个格的涂色方法数为$f(n-1)$。又当$n=1$时，$f(1)=3$.定义$f(0)=1$.

$$\therefore\quad f(n)=2f(n-1)+2f(n-2)\qquad f(0)=1, f(1)=3,$$

解得$f(n)=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$

6.13 从1到n的自然数中选取k个不同且不相邻的数，设此选取的方案数为$f(n,k)$。

（1）求$f(n,k)$满足的递推关系；

（2）用归纳法求$f(n,k)$；

（3）若设1与n算是相邻的数，并在此假定下从1到n的自然数中选取k个不同且不相邻的数的方案数为$g(n,k)$, 试利用$f(n,k)$求$g(n,k)$。

（1）若n在这k个数中，则其余$k-1$个数从$1,2,\cdots,n-2$中选，方案数为$f(n-2,k-1)$；

若 n不在这k个数中，则其余$k-1$个数$1,2,\cdots,n-1$中选，方案数为$f(n-1,k)$ 。

综上所述， $f(n,k)$满足的递推关系为：

$$f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-2,k-1)$$

(2)对$n \geq 1$，$f(n,1) = n = \binom{n+1-1}{1}$；

对$n \geq 2$，$f(n,n) = n = \binom{n+1-n}{n}$。

假设对于$i \leq j \leq n$，$f(j,i) = \binom{j+1-i}{i}$成立，则

$$\begin{aligned} f(n+1,k) &= f(n,k) + f(n-1,k-1) \\ &= \binom{n+1-k}{k} + \binom{n-1+1-(k-1)}{k-1} \\ &= \binom{(n+1)+1-k}{k}. \end{aligned}$$

所以

$$f(n,k) = \binom{n+1-k}{k}.$$

(3) 若 n 在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 2，3，⋯，$n-2$中选，方案数为$f(n-3,k-1)$；若 n 不在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 1，2，⋯，$n-1$中选，方案数为$f(n-1,k)$。则

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n-1,k)+f(n-3,k-1) \\ &= \binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}. \end{aligned}$$

6.14 利用生成函数求解下列递推关系：

(1) $\begin{cases} f(n) = 4f(n-2), \\ f(0) = 0,\ f(1) = 1; \end{cases}$

令$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$

则$A(x) - f(0) - f(1)x = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+2)x^{n+2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 4f(n)x^{n+2} = 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$

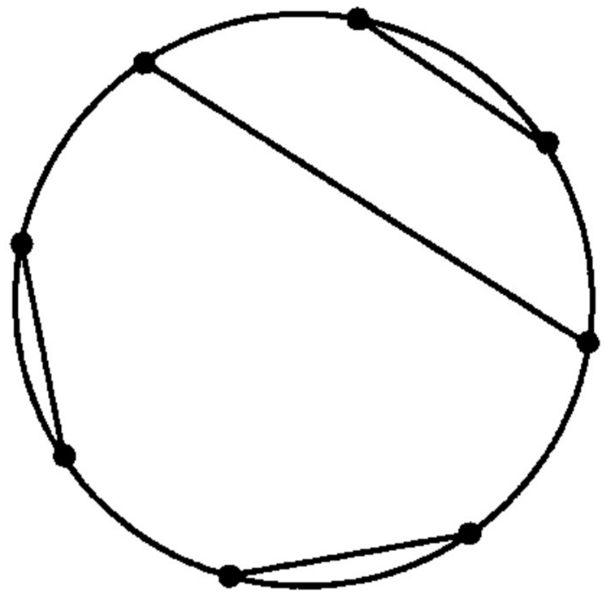
$= 4x^2 A(x)$

$\rightarrow A(x) = \frac{x}{1-4x^2} = \frac{x}{(1-2x)(1+2x)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-2x)} - \frac{1}{(1+2x)}\right]$

$= \frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}[2^n - (-2)^n]x^n$

$$\rightarrow f(n) = \frac{1}{4}[2^n - (-2)^n]$$

7.4 $2n$个点均匀分布在一个圆周上，我们要用n条不相交的弦将这$2n$个点配成n对，证明不同的配对方法数是第$n+1$个Catalan$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。 例如，本题图就给出了8个点的一 种配对方案。



习题 4 图

4. 设不同的配对方法数为$f(n)$，将这 $2n$ 个点分别用$1,2,\cdots,2n$标记。取点 1，再任取一偶数点 $2k$，连接点 1 与点 $2k$，则该弦将圆分成两部分K_1和K_2。对K_1，有$k-1$对点，故不同的配对方法数为$f(k-1)$；对K_2，有$n-k$对点，故不同的配对方法数为$f(n-k)$。则

$$\begin{cases} f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k) \ (n\geq 1), \\ f(0)=1. \end{cases}$$

令$g(n)=f(n-1)$，则

$$g(n+1)=f(n)=\sum_{k=1}^{n} g(k)g(n-k+1)=h(n+1)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

即不同的配对方法数为第$n+1$个 Catalan 数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。