МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторные работы для студентов 4 курса
ПМ-41

Преподаватель:
Лебедев С.А.

ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

Оформление отчета по лабораторной работе

Имя файла:

<Номер группы>_<Фамилия и инициалы>_<Номер лабораторной работы>.doc(docx)

1. ***Объект исследования***
   - Описание объекта исследования
   - Задачи исследования
2. ***Содержательная постановка задачи***
3. ***Концептуальная постановка задачи***
   - Какие предположения относительно объекта исследования используются для упрощения задачи
4. ***Теоретические основы***
   - Математическая постановка задачи
5. ***Реализация***
   - Составление технического задания
   - Программная реализация задачи
   - Исследование задачи
6. ***Качественный анализ задачи***
7. ***Численное исследование модели***

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

МИЭТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторные работы для студентов 4 курса

Этапы построения математической модели

1. Содержательная постановка задачи

2. Концептуальная постановка задачи

3. Математическая постановка задачи

4. Качественный анализ и проверка конкретности модели

5. Выбор и обоснование методов решения

6.1. Аналитические методы
6.2. Алгоритм в виде программ для ЭВМ

7. Проверка адекватности модели

8. Практическое использование построенной модели

Процесс построения любой математической модели можно представить последовательностью этапов.

Этапы построения математической модели

1. Содержательная постановка задачи

На данном этапе формируется пе5речень основных вопросов в совестной форме об объекте моделирования. Этап может включать следующие виды работ:

- *Аналитический обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей.*
- *Обследование объекта моделирования с целью выявленная основных факторов, механизмов, влияющих на его поведение.*
- *Сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах – аналогах.*

Результат – разработка общего плана создание математической модели (техническое задание).

Этапы построения математической модели

1. Содержательная постановка задачи

Задача о баскетболисте

Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в корзину. Модель должна позволять:

- Вычислять положение мяча в любой момент времени;
- Определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.

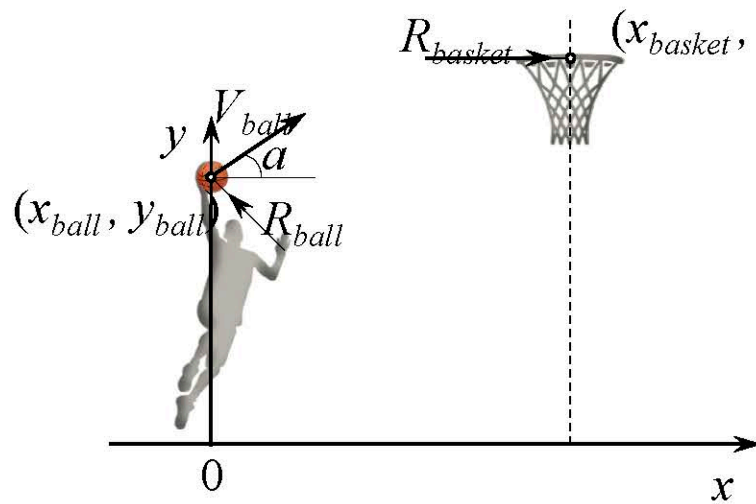
Исходные данные:

- масса m_{ball} и радиус мяча R_{ball},
- начальные координаты мяча (x_{ball}, y_{ball}),
- скорость V_{ball} и угол броска мяча α,
- координаты центра корзины (x_{basket}, y_{basket}) и ее радиус R_{basket}

Этапы построения математической модели

1. Содержательная постановка задачи

<u>Задача о баскетболисте</u>



Исходные данные:

- масса m_{ball} и радиус мяча R_{ball},
- начальные координаты мяча (x_{ball}, y_{ball}),
- скорость V_{ball} и угол броска мяча a,
- координаты центра корзины (x_{basket}, y_{basket}) и ее радиус R_{basket}

Этапы построения математической модели

2. Концептуальная постановка задачи

На данном этапе формируется перечень основных вопросов в терминах конкретных дисциплин (физики, химии и т.д.), а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта. Также формируются все принимаемые допущения.

Этапы построения математической модели

2. Концептуальная постановка задачи

<u>Задача о баскетболисте</u>

Движение баскетбольного мяча может быть описана в соответствии с законами классической механике Ньютона. Применим следующие гипотезы:

- Объектом моделирования является баскетбольный мяч радиусом R_{ball};
- Баскетбольный мяч будем считать материальной точкой массой m_{ball} ;
- Движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения g;
- Движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
- Пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча вокруг центра масс.

Этапы построения математической модели

2. Концептуальная постановка задачи

<u>Задача о баскетболисте</u>

На основании гипотез имеем следующие выводы:

- В качестве параметров движение мяча можно использовать координаты (x, y) и его скорость (ее проекции V_x, V_y) центра масс мяча.
- Для определение положения мяча в любой момент времени достаточно найти зависимость координат (x, y) и проекции вектора скорости (V_x, V_y) центра мяча от времени t.
- В качестве оценки точности броска Δ можно рассматривать величину расстояния по горизонтали вдоль оси $0x$ от центра корзины до центра мяча в момент времени, когда мяч пересекает горизонтальную плоскость. Проходящую через плоскость кольца корзины.

Этапы построения математической модели

2. Концептуальная постановка задачи

<u>Задача о баскетболисте</u>

Сокращенная формулировка концептуальной постановки задачи о баскетболисте

Определить закон движения материальной точки массой m под действием силы тяжести, если известны начальные координаты точки (x_{ball}, y_{ball}), начальная скорость V_{ball} и угол бросания α. Центр корзины имеет координаты (x_{basket}, y_{basket}). Вычислить точность броска по формуле:

$$\Delta = x\left(t_{basket}\right) - x_{basket}$$

где $t = t_{basket} > 0$ и $y(t_{basket}) = y_{basket}$.

Этапы построения математической модели

3. Математическая постановка задачи

На данном этапе отделяют совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования. Среди математических соотношений выделяют два класса:

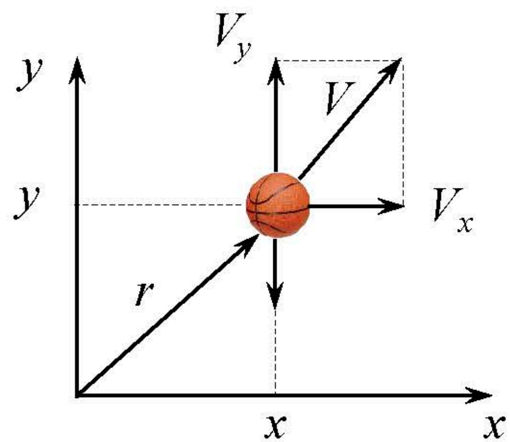
- *Уравнения, подтвержденные экспериментов, хорошо изученные и потому справедливы при определенных условиях для любых материальных тел, независимо от их конкретного строения, структуры, состояния, химического состава.*
- *Определяющие или физические уравнения (уравнения состояния). Они устанавливают особенности поведения материальных объектов или их совокупности при воздействии различных внешних факторов. Здесь определяющие соотношения должны отражать реальное атомно – молекулярное строение исследуемых материальных объектов.*

Этапы построения математической модели

3. Математическая постановка задачи

Задача о баскетболисте

Математическую постановку в данном случае может представить как в векторной форме, так и координатной форме:



Векторная форма – найти зависимость векторных параметров от времени $r(\ t\ )$, $V(\ t\ )$ используя систему обыкновенный дифференциальных уравнений:

$$m\frac{\partial V}{\partial t} = mg, \qquad V = \frac{\partial r}{\partial t}$$

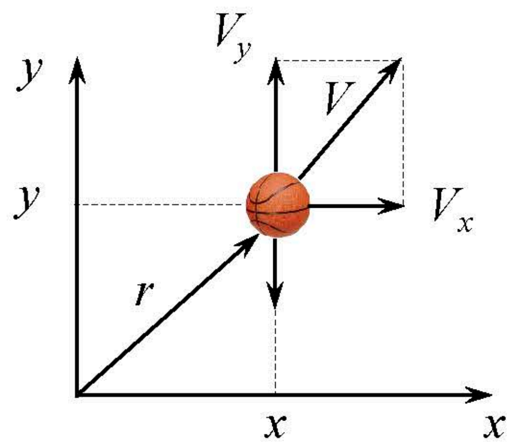
при начальных условиях: $r\left(t_0\right) = 0, \qquad V\left(t_0\right) = V_{ball}$

Этапы построения математической модели

3. Математическая постановка задачи

Задача о баскетболисте

Векторная форма



Вычислим параметр Δ по формуле:

$$\Delta = r\left(t_{basket}\right) - r_{basket},$$

где t_{basket} определяется из следующих условий:

$$t_{basket} > 0, \quad V_y\left(t_{basket}\right) < 0,$$

$$y\left(t_{basket}\right) = y_{basket}.$$

Этапы построения математической модели

3. Математическая постановка задачи

<u>Задача о баскетболисте</u>

<u>Координатная форма</u> – найти зависимость $x(t)$, и $V_x(t)$, $V_y(t)$ из решения системы дифференциальных уравнений:

$$m\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0, \quad V_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad m\frac{\partial V_y}{\partial t} = -mg, \quad V_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

при начальных условиях:

$$x(t_0) = x_{ball}, \quad y(t_0) = y_{ball},$$

$$V_x(t_0) = V_{ball}\cos\alpha, \quad V_y(t_0) = V_{ball}\sin\alpha$$

Вычислить параметры по формуле:

$$\Delta = x(t_{basket}) - x_{basket}$$

где t_{basket} определить из условия:

$$t_{basket} > 0, \quad V_y(t_{basket}) < 0, \quad y(t_{basket}) = y_{basket}.$$

Этапы построения математической модели

4. Качественный анализ и проверка корректности модели

Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок:

- *Контроль размерности, включающий правила, согласно кото-рому приравниваться и складываться могут только величины финансо-вой размерности;*
- *Контроль порядков, состоящей из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключением малозначимых порядков;*
- *Контроль граничных условий, включающий проверку того, что они наложены и на самом деле удовлетворяют данным условием;*

Этапы построения математической модели

4. Качественный анализ и проверка корректности модели

- *Контроль физического смысла;*
- *Контроль математической замкнутости, состоящей в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, при том. Однозначно решить поставленную задачу.*

Если задача свелась к отысканию n-неизвестной из некоторой системы уравнений, то контроль замкнутости состоит в том, чтобы число уравнений было n.

Если их меньше, то надо установить недостающие уравнения.

А если их больше, то либо уравнение зависимо, либо уравнение составлено ошибочно.

Этапы построения математической модели

4. Качественный анализ и проверка корректности модели

<u>Задача о баскетболисте</u>

С математической точкой зрения задача свелась к задачи Коши для системы дифференциальных уравнений 1-ого порядка с заданными начальными условиями. Полученная система является замкнутой, т.к. число независимых уравнений числу искомых параметров задачи $(x, y, V_x, V_y, \ , t_{basket})$.

Выполним контроль размерности задач:

$$m\frac{\partial V}{\partial t} = mg \quad \Rightarrow \quad [\text{кг}]\frac{[\text{м}/\text{с}]}{[\text{с}]} = \left[\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right], \qquad [\text{кг}]\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right] = \left[\text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$$

$$V = \frac{\partial r}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] = \frac{[\text{м}]}{[\text{с}]} = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]$$

Этапы построения математической модели

5. Выбор и обоснование выбора метода решения задач

Все методы можно разделить на ***аналитические*** *и* ***алгоритмические (численные)****.*

Этапы построения математической модели

6.1. Аналитические методы

Алгоритмические, как правило, более трудоемкие в реализации, по большим успехом применяется к системам высоких порядков с использованием ЭВМ.

Этапы построения математической модели

6.1. Аналитические методы

<u>Задача о баскетболисте</u>

<u>Аналитическое решение</u>

Проинтегрируем дифференциальные уравнения задачи

$$m\frac{\partial V_x}{\partial t}=0,\quad V_x=\frac{\partial x}{\partial t},\quad m\frac{\partial V_y}{\partial t}=-mg,\quad V_y=\frac{\partial y}{\partial t}$$

по времени:

$$V_x=C_1,\quad x=V_x t+C_2,\quad V_y=-gt+C_3,\quad y=V_x t+C_4.$$

или

$$V_x=C_1 t,\quad x=C_1 t+C_2,$$

$$V_y=-gt+C_3,\quad y=-gt^2+C_3 t+C_4.$$

Этапы построения математической модели

6.1. Аналитические методы

<u>Задача о баскетболисте</u>

<u>Аналитическое решение</u>

Константы интегрирования найдем из начальных условий.

$$V_x(t_0) = V_{ball} \cos\alpha, \qquad x(t_0) = x_{ball},$$

$$V_y(t_0) = V_{ball} \sin\alpha, \qquad y(t_0) = y_{ball}$$

Тогда решение задачи можно будет записать в следующем виде:

$$V_x(t) = V_{ball} \cos\alpha, \qquad x(t) = x_{ball} + V_{ball}\, t\cos\alpha$$

$$V_y(t) = V_{ball} \sin\alpha - gt, \qquad y(t) = y_{ball} + V_{ball}\, t\sin\alpha - gt^2/2$$

Этапы построения математической модели

1. Содержательная постановка задачи
2. Концептуальная постановка задачи
3. Математическая постановка задачи
4. Качественный анализ и проверка конкретности модели
5. Выбор и обоснование методов решения
6.1. Аналитические методы
6.2. Алгоритм в виде программ для ЭВМ
7. Проверка адекватности модели
8. Практическое использование построенной модели

6.1. Аналитические методы

<u>Задача о баскетболисте</u>

<u>Аналитическое решение</u>

Примем для простоты, что в момент броска мяч находится в начале координат и на одном уровне с корзиной (т.е $x_{ball} = y_{ball} = y_{basket} = 0$). Пор дальностью броска L будем понимать расстояние вдоль оси абсцисс, которое пролетит мяч от точки броска до пересечения с горизонтальной плоскостью, проходящей через корзины. Из последнего соотношения дальность броска выразится в следующем образом:

$$L = V_{ball}^2 / \left(g \sin^2 \alpha\right),$$

тогда точность броска $\Delta = L - x_{basket}$

Этапы построения математической модели

6.2. Алгоритм в виде программ для ЭВМ

*Можно выделить следующие группы **численных методов** по объектам, к которым они применяются численное дифференцирование интегрирование, определение корней линейных и нелинейных уравнений.*

*Процесс создания **программного обеспечения** можно разбить на следующие этапы:*

- *составление технического задания на на разработку;*
- *проектирование структуры программного комплекса;*
- *кодирование алгоритма;*
- *тестирование отладка;*
- *сопровождение и эксплуатации.*

Этапы построения математической модели

6.2. Алгоритм в виде программ для ЭВМ

Техническое задание *на разработку программного обеспечения оформляют в виде* ***спецификации****, которая в основном включает следующие темы разделов:*

- ***название задачи*** *– дается краткое описание решаемой задачи, название программного комплекса, указывается система программирования для его реализации и требования к аппаратному обеспечению;*
- ***описание*** *– подробно излагается математическая постановка задачи, описываются применяемая математическая модель для задач вычислительного характера, метод обработки входящих данных для задач не вычислительного (логического) характера;*

Этапы построения математической модели

6.2. Алгоритм в виде программ для ЭВМ

- ***управление режимами работы программ*** *– формирует-ся основные требования и способу взаимодействия пользователя с про-граммой (интерфейс пользователь - компьютер);*
- ***входные данные*** *– описываются входящие данные, указываются пределы, в которых они могут изменяться, значения, ко-торые они не могут принимать;*
- ***выходные данные*** *– описываются выходящие данные, указываются в каком виде они должны быть представлены (в числовом, графическом или текстовом), приводятся сведения о точности и объеме выходящих данных, способов их сохранения и т.д.*

27

Этапы построения математической модели

6.2. Алгоритм в виде программ для ЭВМ

- ***ошибки*** *– перечисляются возможные ошибки пользо-вателя при работе с программой (пример: ошибки при вводе входных данных), указываются способы диагностики (в данном случае, под диагностикой понимается выявление обнаружения ошибки) и защита от этих ошибок, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочный действий и реакция программного комплекса компьютера на эти действия;*
- ***тестовые задачи*** *– приводится один или несколько те-стовых примеров. На которых обычно проводится откладка и тестиро-вание программного комплекса.*

Этапы построения математической модели

6.2. Алгоритм в виде программ для ЭВМ

ошибки – перечисляются возможные ошибки пользователя при работе с программой (пример: ошибки при вводе входных данных), указываются способы диагностики (в данном случае, под диагностикой понимается выявление обнаружения ошибки) и защита от этих ошибок, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочный действий и реакция программного комплекса компьютера на эти действия;
тестовые задачи – приводится один или несколько *те-стовых примеров. На которых обычно проводится откладка и тестиро-вание программного комплекса.*

Этапы построения математической модели

7. Проверка адекватности моделей

Под адекватностью математической модели понимается степень соответствия результатов, полученных при разработки модели данным экспериментом или тестовой задачей.

Проверка адекватности преследует две цели:

- *убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановках. Переходить к проверке гипотез следует или после проверки методов решения комплексной откладки и устранения всех ошибок, связанных с программным обеспечением;*
- *установить, что точность полученных результатов соответствует точности, сформулированной в технической задании.*

Этапы построения математической модели

7. Проверка адекватности моделей

Проверка разработанной математической модели выполняется путем сравнения с экспериментальными данными о реальном объекте или с результатами других, созданных раннее и хорошо зарекомендовавших себя модели.

В одном случае говорят о проверке, путем сравнения с экспериментом, во втором – о сравнении с результатами решения тестовой задачи.

Решения вопроса о точности моделирования зависит от требований, предъявляемых к модели и ее назначений. В моделях предназначенных для выполнения оценочных и прикидочных расчетов удовлетворительной точностью считается 10-20%. В моделях, используемых в управляющих и контролирующих системах – требуемая точность 1-2% и даже более.

Этапы построения математической модели

7. Проверка адекватности моделей

*Различают **качественное** и **количественное совпадение** результатов сравнения:*

*При **качественном сравнении** требуется лишь совпадение некоторых характерных особенностях в распределении следующих параметров.*

*При **количественном сравнении** большое значение следует придавать точности исходных данных для моделирования и соответствующих им значений сравниваемых параметров.*

Этапы построения математической модели

7. Проверка адекватности моделей

Неадекватность результатов моделирования возможно по трем причинам:

- *значения задаваемых параметров модели не соответствует допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез.*
- *принятая система гипотез верна, но константа и параметры установлено не точно.*
- *неверная исходная совокупность букв.*

Все три случая требуют дополнительного исследования как моделируемого объекта с целью накопления новой дополнительной ин-формации о его поведении, так и исследование самой модели с целью уточнения границ ее применимости.

Этапы построения математической модели

8. Практическое использование построенной модели

Независимо от области применения созданной модели проводится анализ результатов моделирования, который позволяет:

- *выполнить модификацию рассматриваемого объекта, найти его оптимальные характеристики или лучшим образом учесть его поведение и свойства;*
- *обозначить область применения модели;*
- *проверить обоснованность гипотез, принятых на этом этапе математической подстановки, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сокращении требуемой точности;*
- *показать в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.*

Задачи для самостоятельно решения

- ***Задача о волейболисте.***

1. Сформулировать условие перелета мяча на площадку соперника
2. Найти на площадке область из которой игрок попадает на площадку соперника при заданном угле броска, скорости броска, роста игрока изменяя угол между линией сетки и плоскостью броска

- ***Задача о футболисте.***

1. Сформулировать условие попадания мяча в створ ворот
2. Найти на поле область из которой игрок попадает в ворота соперника при заданном угле удара и скорости удара изменяя угол между линией ворот и плоскостью удара