Tarea 2 Punto 2

Antonio Vargas y Thomás Gomez

February 11, 2024

1 Estabilidad II:

Para el algoritmo de Verlet:

a) Muestre que el error del método está descrito por:

$$\epsilon_{n+1} - (2 + h^2 a_n^{'})\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{1}$$

con

$$a_n^{'} = \frac{\partial a}{\partial x} \tag{2}$$

Entonces:

Dado que, para $x(t)$, el algoritmo de Verlet es la expansión en Taylor en $x(t + \Delta t)$ y en $x(t - \Delta t)$:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + ... \tag{3}$$

$$x(t - \Delta t) = x(t) - \frac{\partial x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} - ... \tag{4}$$

Ahora, si tomamos $\Delta t = h$ y sumamos (3) y (4):

$$x(t + h) + x(t - h) = 2x(t) + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}h^2 \tag{5}$$

Esta expresión se puede expresar de la siguiente manera:

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n + a_n h^2 \tag{6}$$

Ahora, para incluir el error en el algoritmo, se expresa $x_n = \bar{x}_n + \epsilon_n$:

$$x_{n+1} + \epsilon_{n+1} + x_{n-1} + \epsilon_{n-1} = 2(x_n + \epsilon_n) + a_n h^2 \tag{7}$$

Reducimos la expresión para dejar unicamente el error:

$$\epsilon_{n+1} + \epsilon_{n-1} = 2(\epsilon_n) + a_n h^2 \tag{8}$$

$$\epsilon_{n+1} - 2(\epsilon_n) - a_n h^2 + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{9}$$

$$a_n = a_n^{'} \epsilon_n \tag{10}$$

Finalmente:

$$\epsilon_{n+1} - 2(\epsilon_n) - a_n^{'} \epsilon_n h^2 + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{11}$$

$$\epsilon_{n+1} - (2 + h^2 a_n^{'})\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{12}$$

b) Para el caso de un oscilador armónico clásico muestre que:

$$\epsilon_{n+1} - 2(1-R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{13}$$

donde $2R = h^2\omega^2$
Dado que para un oscilador armónico clásico: $a(t) = -\omega^2 x$. Para este caso:

$$a_n^{'} = \frac{\partial a}{\partial x} = -\omega^2 \tag{14}$$

Entonces:

$$\epsilon_{n+1} - (2 + h^2 a_n^{'})\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{15}$$

$$\epsilon_{n+1} - (2 - h^2\omega^2)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{16}$$

$$\epsilon_{n+1} - (2 - 2R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{17}$$

$$\epsilon_{n+1} - 2(1-R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{18}$$

c) Usando la suposición de función potencia $\epsilon_n = \epsilon_0 \lambda^n$, muestre que las raíces son:

$$\lambda_{\pm} = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R} \tag{19}$$

$$\epsilon_{n+1} - 2(1-R)\epsilon_n + \epsilon_{n-1} = 0 \tag{20}$$

$$\epsilon_0\lambda^{n+1} - 2(1-R)\epsilon_0\lambda^n + \epsilon_0\lambda^{n-1} = 0 \tag{21}$$

$$\lambda^{n+1} - 2(1-R)\lambda^n + \lambda^{n-1} = 0 \tag{22}$$

$$\lambda^2 - 2(1-R)\lambda + 1 = 0 \tag{23}$$

$$\lambda = \frac{2(1-R) \pm \sqrt{(2(1-R))^2 - 4}}{2} \tag{24}$$

$$\lambda = \frac{2(1-R) \pm \sqrt{4(1-R)^2 - 4}}{2} \tag{25}$$

$$\lambda = \frac{2(1-R) \pm 2\sqrt{R^2 - 2R}}{2} \tag{26}$$

$$\lambda_{\pm} = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R} \tag{27}$$

d) El valor de $|\lambda_{\pm}| \leq 1$ define la estabilidad del algoritmo. Muestre que el paso de integración debe cumplir:

$$h \leq \frac{2}{\omega} \tag{28}$$

Tomando $|\lambda_{\pm}| = 1$

$$-1 = 1 - R \pm \sqrt{R^2 - 2R} \tag{29}$$

$$R - 2 = \sqrt{R^2 - 2R} \tag{30}$$

$$(R-2)^2 = R^2 - 2R \tag{31}$$

$$R^2 - 4R + 4 = R^2 - 2R \tag{32}$$

$$4 = 2R \tag{33}$$

$$R = 2 \tag{34}$$

Dado que $2R = h^2\omega^2$:

$$4 = h^2\omega^2 \tag{35}$$

$$h^2 = \frac{4}{\omega^2} \tag{36}$$

$$h = \frac{2}{\omega} \tag{37}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad inicial:

$$h \leq \frac{2}{\omega} \tag{38}$$