

Estabilidad de la ecuación de onda

Thomas Gomez, Antonio Vargas

March 15, 2024

Solución:

La ecuación de onda para una dimensión se reduce a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

La estabilidad de una ecuación diferencial se refiere, suponga ahora que el método se resuelve a través del método de diferencias finitas, la solución con diferencias finitas es:

$$u_i^{l+1} = 2(1 - \lambda^2)u_i^l + \lambda^2(u_{i+1}^l + u_{i-1}^l) - u_i^{l-1} \quad (2)$$

donde $\lambda := \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$

Note que $1 - \lambda^2$ dicta el factor de amplificación, de clase se sabe que la magnitud de este valor debe ser menor a uno para que la solución sea estable, además dado que λ^2 es un número real positivo, se tiene

$$\begin{aligned} 2(1 - \lambda^2) &\leq 1 \\ 1 - \lambda^2 &\leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Suponga que $\lambda > 1$, entonces se tiene que $|1 - \lambda^2| > 0$ lo que implica que el factor de amplificación