Tarea 3 Punto 1

Antonio Vargas y Thomas Gómez

b) Encuentre la matriz de estabilidad del sistema autónomo lineal:

$$x' = 2x - y$$

$$y' = x + 2y$$

Este sistema también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y$$

Y en forma matricial se puede expresar así:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Siendo la matriz M la matriz de estabilidad

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Encuentre numéricamente los valores y vectores propios.

Para hallar los valores propios:

$$\det|M - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda) - (1)(-1) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = 2 + i$$

$$\lambda_2 = 2 - i$$

Ahora, se hallan los vectores propios:

Para $\lambda_1 = 2 + i$:

$$(M - \lambda_1 I)\overrightarrow{V_1} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-2-i & -1 \\ 1 & 2-2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Se divide la fila 1 por $-i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x - iy = 0$$

$$x = iy$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2 - i$:

$$(M - \lambda_2 I)\overrightarrow{V_2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-2+i & -1 \\ 1 & 2-2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Se multiplica la fila 1 por $-i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x + iy = 0$$

$$x = -iy$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$