Tarea 3 Punto 4

Antonio Vargas y Thomas Gomez

February 26, 2024

c) Muestre que la distancia Nave-Luna está dada por:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2r(t)dcos(\phi - \omega t)} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que d es la distancia entre la Tierra y la Luna, teniendo en cuenta la figura de las notas, podemos tomar d como:

$$d = \sqrt{x_L^2 + y_L^2} \tag{2}$$

El vector posición de la nave con respecto a la Tierra lo podemos expresar como:

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3}$$

Para hallar la distancia entre la nave y la luna en función del tiempo podemos restar ambos vectores y hallar su magnitud:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{(x_L - x)^2 + (y_L - y)^2} \tag{4}$$

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{x_L^2 - 2x_L x + x^2 + y_L^2 - 2y_L y + y^2} \tag{5}$$

Reorganizamos la expresión:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{x_L^2 + y_L^2 - 2(x_L x + y_L y) + x^2 + y^2} \tag{6}$$

Reemplazamos las expresiones que ya conocemos:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{d^2 - 2(x_L x + y_L y) + r(t)^2} \tag{7}$$

Tal como se puede ver, la expresión $(x_L x + y_L y)$ es el producto punto entre los vectores d y $r(t)$, y por definición sabemos que el producto punto entre dos vectores se puede expresar como el producto de sus magnitudes por el coseno del ángulo entre ambos vectores, y observando la imagen podemos ver que el ángulo entre estos dos vectores es: $\phi - \omega t$, entonces:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{d^2 - 2dr(t)cos(\phi - \omega t) + r(t)^2} \tag{8}$$

Organizando la expresión, mostramos que:

$$r_L(r,\phi,t) = \sqrt{r(t)^2 + d^2 - 2r(t)dcos(\phi - \omega t)} \tag{9}$$

d) Usando esta distancia muestre que el Hamiltoniano de la nave está dado por:

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} \tag{10}$$

donde L (el lagrangiano del sistema) es la energía cinética menos la energía potencial de la nave en coordenadas polares.

Entonces, para resolver esto, primero tenemos que tener en cuenta que:

$$L = T - U \tag{11}$$

donde T es la energía cinética y U es la energía potencial.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{12}$$

donde:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{v}_r + r\dot{\phi}sin\phi\hat{v}_\phi \tag{13}$$

Entonces:

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} \tag{14}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \tag{15}$$

Entonces:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \tag{16}$$

Entonces:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U \tag{17}$$

y

$$H = T + U \tag{18}$$

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U \tag{19}$$

Ahora:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \tag{20}$$

dado que solo una parte del lagrangiano depende de $\dot{r}$, obtenermos que:

$$p_r = m\dot{r} \tag{21}$$

Ahora:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \tag{22}$$

igual que en el caso anterior, dado que solo una parte del Lagrangiano depende de $\dot{\phi}$, tenemos que:

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} \tag{23}$$

Entonces, de las expresiones anteriores tenemos que:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \tag{24}$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \tag{25}$$

Finalmente tenemos que:

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - G\frac{mm_T}{r} - G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} \tag{26}$$

donde L es:

$$L = G\frac{mm_T}{r} + G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)} \tag{27}$$

e) Muestre que las ecuaciones de Hamilton, que son las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \tag{28}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \tag{29}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_L}{r^2} - G\frac{mm_L}{r_T(r,\phi,t)^3}[r - dcos(\phi - \omega t)] \tag{30}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3} rdsin(\phi - \omega t) \tag{31}$$

El momento lineal y el momento angular que son las primeras 2 expresiones a mostrar, fueron mostradas en el inciso (c).

Ahora, para mostrar las siguientes 2 expresiones derivamos el hamiltoniano obtenido en el inciso anterior y tomamos r_L en función de r tal como la hallamos en el primer inciso:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\phi^2}{mr^3} + G\frac{mm_L}{r^2} + G\frac{mm_L}{r_T(r,\phi,t)^3}[r - dcos(\phi - \omega t)] \tag{32}$$

Entonces, teniendo en cuenta que:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} \tag{33}$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - G\frac{mm_L}{r^2} - G\frac{mm_L}{r_T(r,\phi,t)^3}[r - dcos(\phi - \omega t)] \tag{34}$$

Ahora, repetimos el proceso para la siguiente expresión:

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3} rdsin(\phi - \omega t) \tag{35}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} \tag{36}$$

$$\dot{p}_\phi = -G\frac{mm_L}{r_L(r,\phi,t)^3} rdsin(\phi - \omega t) \tag{37}$$

f) Para reducir el error de redondeo se pueden definir nuevas variables normalizadas a la distancia lunar: $\tilde{r} = r/d, \phi, \tilde{p_r} = p_r/md$ y $\tilde{p_\phi} = p_\phi/md^2$. Muestre que el sistema se puede escribir como sigue:

$$\dot{\tilde{r}} = \tilde{p_r}, \tag{38}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\tilde{p_\phi}}{\tilde{r}^2}, \tag{39}$$

$$\dot{\tilde{p}}_r = \frac{\tilde{p}_\phi^2}{\tilde{r}^3} - \Delta\left\{\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\mu}{\tilde{r}'^3}[\tilde{r} - cos(\phi - \omega t)]\right\} \tag{40}$$

$$\dot{\tilde{p}}_\phi = -\frac{\Delta\mu\tilde{r}}{\tilde{r}'^3} sin(\phi - \omega t) \tag{41}$$

donde $\Delta \equiv Gm_T/d^3, \mu \equiv m_L/m_T$ y $\tilde{r}' \equiv \sqrt{1 + \tilde{r}^2 - 2\tilde{r}cos(\phi - \omega t)}$.

g) Resolver el sistema de ecuaciones usando el algoritmo Runge-Kutta 4 con las siguientes condiciones iniciales: El radio inicial es el radio terrestre, ϕ es la latitud sobre el planeta, la velocidad inicial está dada por: $\vec{v} = [vcos\theta, vsin\theta]$ no hay un método general para asignar v, θ, ϕ. La magnitud de la velocidad debe ser cercana a la velocidad de escape de la Tierra para que la nave se pueda poner rumbo a la Luna. Finalmente, para asignar los momentos canónicos iniciales muestre lo siguiente: