Punto 5

Antonio Vargas y Thomas Gomez

February 4, 2024

1 Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u, u(0) = u_0 \tag{1}$$

Muestre que aplicando iterativamente se obtiene:

$$u_k = (1 + \alpha \Delta t)^k u_0 \tag{2}$$

Entonces, aplicando método de Euler:

$$u_1 = u_0 + hu(0) = u_0 + \alpha \Delta t u_0 \tag{3}$$

$$u_2 = u_1 + hu(1) = u_0 + \alpha \Delta t u_0 + \alpha \Delta t(u_0 + \alpha \Delta t u_0) \tag{4}$$

$$u_2 = u_0 + \alpha \Delta t u_0 + \alpha \Delta t u_0 + (\alpha \Delta)^2 t u_0 \tag{5}$$

$$u_2 = u_0(1 + 2\alpha \Delta t + (\alpha \Delta)^2 t) = (1 + \alpha \Delta t)^2 u_0 \tag{6}$$

Ahora, usando el principio de inducción y teniendo en cuenta lo obtenido:

$$u_n = (1 + \alpha \Delta t)^n u_0 \tag{7}$$

Para u_{n+1}:

$$u_{n+1} = u_n + \alpha \Delta t u_n = (1 + \alpha \Delta t)^n u_0 + \alpha \Delta t(1 + \alpha \Delta t)^n u_0 \tag{8}$$

$$u_{n+1} = (1 + \alpha \Delta t)^n u_0 * (1 + \alpha \Delta t) \tag{9}$$

$$u_{n+1} = (1 + \alpha \Delta t)^{n+1} u_0 \tag{10}$$

Finalmente, dado que esto se cumple para u_n y u_{n+1}, se puede concluir que también se cumple para u_k, entonces:

$$u_k = (1 + \alpha \Delta t)^k u_0 \tag{11}$$