Tarea 3 Punto 3

Antonio Vargas y Thomas Gomez

February 26, 2024

a) Muestre con detalle que: $I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + md^2$.

Teniendo en cuenta el teorema de los ejes paralelos, que nos dice que el momento de inercia de un objeto cuyo eje de rotación no es su centro de masa, está dado por:

$$I_0 = I_{CM} + md^2, \tag{1}$$

donde I_{CM} es el momento de inercia del objeto en su centro de masa, y md^2 es el producto de la masa con la distancia al cuadrado, donde d es la distancia que hay entre el centro de masa con respecto al eje de rotación del objeto, el cual es paralelo al centro de masa de este.

Dado que el momento de inercia para un disco con respecto a un eje diametral, es decir, que el eje no es perpendicular al centro de masa del objeto, está dado por:

$$I_{CM} = \frac{1}{4}mr^2 \tag{2}$$

Entonces, se mostró que el momento de inercia para este caso, es el siguiente:

$$I_0 = \frac{1}{4}mr^2 + md^2 \tag{3}$$

b) Calcule el momento de inercia del disco: $I_z = \frac{1}{2}mr^2$.

Para calcular el momento de inercia del disco con respecto al eje z, el cual es perpendicular al centro de masa del disco, planteamos la siguiente integral:

$$I_z = \int r^2 dm, \tag{4}$$

para resolver esto consideremos la densidad de superficie del disco dada por: $\rho = \frac{m}{A}$, donde A es el área del disco, entonces:

$$m = \rho A \tag{5}$$

y

$$dm = \rho dA \tag{6}$$

donde, podemos reemplazar dA por:

$$dm = \rho 2\pi r dr \tag{7}$$

Entonces, reemplazando dm en la ecuación planteada inicialmente, nos queda la siguiente expresión:

$$I_z = \int_0^r r^2 \rho 2\pi r dr \tag{8}$$

$$I_z = 2\pi\rho \int_0^r r^3 dr \tag{9}$$

$$I_z = 2\pi\rho \frac{r^4}{4} \tag{10}$$

$$I_z = \pi\rho \frac{r^4}{2} \tag{11}$$

como sabemos que: $\rho = \frac{m}{A}$ y que $A = \pi r^2$, entonces $\rho = \frac{m}{\pi r^2}$

$$I_z = \pi \frac{m}{\pi r^2} \frac{r^4}{2} \tag{12}$$

Finalmente, obtenemos que:

$$I_z = \frac{mr^2}{2} = \frac{1}{2} mr^2 \tag{13}$$

c) Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange muestre que las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(I_0 sin^2\theta + I_z cos^2\theta) + I_z \psi cos\dot{\theta} = p_\phi \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_z(\dot{\psi} + \dot{\phi} cos\theta) = p_\psi \tag{15}$$

$$I_0\ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 sin\theta cos\theta (I_0 - I_z) - \dot{\phi}\dot{\psi} I_z sin\theta + mgd sin\theta \tag{16}$$

donde p_ϕ y p_ψ son los momentos canónicos conjugados de las variables ϕ y ψ.

Sabiendo que:

$$L = \frac{1}{2} I_0(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z(\dot{\phi} cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgd cos\theta \tag{17}$$

podemos derivar L de las siguientes maneras:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2} I_0(2\dot{\phi} sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z(2\dot{\phi} cos^2\theta + 2\dot{\psi} cos\theta) \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_0\dot{\phi}sin^2\theta + I_z(\dot{\phi}cos^2\theta + \dot{\psi}cos\theta) \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(I_0 sin^2\theta + I_z cos^2\theta) + I_z\psi cos\dot{\theta} = p_\phi \tag{20}$$

Ahora:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{2}I_z(2\dot{\phi}cos\theta + 2\dot{\psi}) \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_z(\dot{\psi} + \dot{\phi}cos\theta) = p_\psi \tag{22}$$

Ahora, tomando:

$$I_0\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) \tag{23}$$

Y teniendo en cuenta las ecuaciones de Euler-Lagrange en la que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{25}$$

$$I_0\ddot{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_0\dot{\phi}^2 sin\theta cos\theta - \dot{\phi}^2 I_z cos\theta sin\theta - I_z\dot{\phi}\dot{\psi}sin\theta + mgdsin\theta \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\phi}^2 sin\theta cos\theta(I_0 - I_z) - I_z\dot{\phi}\dot{\psi}sin\theta + mgdsin\theta \tag{28}$$

Entonces:

$$I_0\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 sin\theta cos\theta(I_0 - I_z) - I_z\dot{\phi}\dot{\psi}sin\theta + mgdsin\theta \tag{29}$$