Realice el Problema 2.36 del libro de Sipser: es decir, dé un lenguaje L que no es independiente de contexto, pero que satisface la conclusión del Lema de Bombeo para lenguajes independientes de contexto (``existe un entero p tal que para todo $w \in L$ de longitud por lo menos p, se puede escribir $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$, $|vy| > 0$, y $uv^ixy^iz \in L$ para todo $i \in \mathrm{N}$'').

Aclaración

Antes de proseguir un dato interesante:

"Estos lemas pueden ser usados para determinar si un lenguaje no está en una clase de lenguajes. Sin embargo, no pueden ser usados para determinar si un lenguaje está en una clase, puesto que satisfacer el lema del bombeo es una condición necesaria, pero no una suficiente, para ser miembro de una clase."(https://es.wikipedia.org/wiki/Lema_del_bombeo#:~:text=En%20la%20teor%C3%ADa%20de%20lenguajes%20formales%20de%20la,msclkid=1c2dd871b21611ec85645d9072492544)

Lo anterior viene del hecho de que el Lema es una implicación, por ende existen Lenguajes no independientes de contexto o no regulares que cumplen la conclusión del lema. Adicionalmente para demostrar que un lenguaje no es independiente de contexto o no es regular, se realiza por contradicción. Se supone primero que el lenguaje es regular o independiente de contextos y luego se mira que no existe ninguna descomposición posible que cumpla el lema de bombeo, así se niega la conclusión y tenemos una contradición, por ende necesariamente el lenguaje no debe ser regular o independiente de contexto.

Construyendo el ejemplo

Lema 1: $L'' = \{ab^nc^nd^n : n \in \mathrm{N}\}$ no es independiente de contexto

Demostración:

Sea $L'' = \{ab^nc^nd^n : n \in \mathrm{N}\}$ entonces L2 no es independiente de contexto

Tomé P como en el lema de bombeo sea $w = ab^nc^nd^n$ y $w = uvxyz$, $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$

Note que vxy no contiene más de 2 simbolos

- Caso1 * vxy contiene solo c's o b's o d's o a entonces $w = uv^2xy^2z \notin L''$
- Caso2 * vxy contiene solo c's y d's o b's y c's o a y b's entonces $w = uv^2xy^2z \notin L''$

(Lo anterior se justifica porque ya no hay igualdad entre el número de b's, c's, d's o no hay solo un a)

$Q.E.D$

Ahora modificaremos el ejemplo de la clase, donde se demuestra un lenguaje que no es regular y cumple el lema de bombeo para lenguajes regulares.

Sea $L = \{a^ib^jc^kd^m : i, j, k, m \in \mathrm{N} \ \wedge \ i = 1 \rightarrow j = k = m\}$

El Lema de bombeo se cumple para p igual a 2(esto implica que hay un simbolo que se repite o una cantidad igual o mayor a 2 de simbolos) siga además el siguiente proceso:

- coloque x igual a la cadena vacía.
- (caso 1, más de un simbolo): Como hay más de un simbolo entonces la cadena cumple que tiene longitud mayor o igual a 2, elija 2 símbolos que estén cerca(esto hace que sus "potencias" sean por lo menos 1),(suponemos que el primer simbolo está mas a la izquierda que el el segundo simbolo)descomponga de la siguiente manera:

$w = u\, simbolo1^{\ 1}\, \varepsilon\, simbolo2^{\ 1}\, z$

Como el simbolo 1 y el simbolo 2 estan uno seguido del otro x puede ser epsilon, se elijé a u y z tal que "terminen" la cadena simbolo, se tiene que La longitud de vxy es menor igual a dos, además la longitud de vy es mayor que 0 y para todo numero natural k, $w = u\, simbolo1^{\ k}\, \varepsilon\, simbolo2^{\ k}\, z \in L$

- (caso 2, 1 simbolo):

Como la longitud de la cadena es mayor o igual 2.

Elija y, z igual a vacío y elija v igual al único simbolo que está en la cadena, elija u, tal que u complemete la cadena, como en el caso anterior, así $usimbolo^k$ está en el lenguaje para todo k en los naturales.

Vemos entonces que L cumple el lema de bombeo

Lema 2: Si L es un lenguaje independiente de contextos y L' es un lenguaje regular. Entonces su intersección L'' es independiente de contexto.(Teorema dado en clase)

Lema 3: L no es independiente de contexto

Demostración:

Definamos $L^{'} = a \cdot b^* \cdot c^* \cdot d^* = \{ab^ic^jd^k : i, j, k \in \mathrm{N}\}$. L obedece a una expresión regular por ende es una lenguaje regular.

Suponga además que L es independiente de contexto. Entonces, la intersección entre L y L' también debe ser independiente de contexto.

Pero $L^{''} = L^{'} \cap L = \{ab^nc^nd^n : n \in \mathrm{N}\}$

Por lema 1 L'' no es independiente de contexto(contradicción), entonces L no es independiente de contexto.

$Q.E.D$

Sea $\Sigma = \{x, y, z\}$, y sea

$$L_1 = \{x^iy^iz^{i+1} : i \in \mathrm{N}\}$$

Construya una gramática independiente de contexto G tal que $L_1 = L(G)$. Explique por qué su gramática sirve. Construya un autómata de pila (``pushdown automaton'') M tal que $L_1 = L(M)$. Explique por qué M sirve.

La gramática es la siguiente:

G:

$S \to xAz/yBz/\varepsilon$

$A \to xAz/B/\varepsilon$

$B \to yBz/\varepsilon$

Explicación:

- Si queremos obtener la cadena vacía, entonces pasamos de S a la cadena vacía.
- Si queremos solamente símbolos en x y z entonces pasamos de S a xAz y después de A a xAz, cuando tengamos todos los x que queramos, pasamos da A a la cadena vacía.
- Si queremos nada más símbolos que contengan a y entonces pasamos de S a yBz y después de B a yBz, por último cuando tengamos los y que queramos, pasamos de B a la cadena vacía.
- Adicionalmente, si queremos una cadena que contenga $x^{'}s$ $y^{'}s$ y $z^{'}s$, pasamos de S a xAzy después de A a xAz cuando tengamos los $x^{'}s$ deseados pasamos de A a b. Después pasamos de B a yBz y cuando tengamos los $y^{'}s$ deseados pasamos de B a la cadena vacía.

Demuestre que si L_1 es independiente de contexto y $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo $sobreyectivo$, entonces L_2 también es independiente de contexto.

Suponga que $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo sobreyectivo y que L_2 es independiente de contexto.

¿Es verdad que L_1 tiene que ser independiente de contexto también, o no? Dé una demostración (en caso que sí) o un contraejemplo concreto (en caso que no).

Demostración:

Por hipótesis $L1$ la genera una gramática independiente de contexto, sea w en $L1$ arbitrario, Entonces hay al menos una derivación a la izquierda(hecho de la clase) que genera w, al final se generea $w = a1, .. am$

En cada derivación a la izquierda se agregan símbolos ai, evidentemente, en cada derivación podemos reemplazar cada ai por $h(ai)$ y así al final obtener $h(w) = h(a1), ... h(am)$.

Lo anterior es equivalente a "codificar" o "remplazar" cada el alfabeto de simbolos terminales $\{a1, ... am\}$ por $\{h(a1), ... h(am)\}$ en la gramática de $L1$ para generar otra grámatica independiente de contexto.

Además al ser la función sobreyectiva entonces cada cada cadena en $L2$ tiene al menos una cadena asociada en $L1$, esto nos indica que la grámatica anterior genera a $L2$, por ende $L2$ tambien es independiente de contexto.

Por último, dado que la función no necesariamente es inyectiva, puede dar el caso que 2 cadenas diferentes de $L1$ generen a una cadena en $L2$, esto se explica por el hecho de que cada $h(ai)$

es una cadena y puede haber el caso de que diferentes combinaciones de los $h(ai)^{'}s$ generen a la misma cadena en $\sum_2^*$, por ejemplo:

sea $x = 101$,$y = 1$ y $z = 01$ entonces $x = yz$

si se suma lo anterior al hecho de que los equivalente en el $\sum_1^*$ de las combinaciones $h(ai)^{'}s$ que generan la misma cadena en $L2$, estan en $L1$, entonces se cumple que $L2$ es

ambiagüa, por ende $L2$ no es puede ser ambigüa,tambien puede ser ambigua si hay más de una derivación a la izquierda en $L1$.

$Q.E.D$

Demostración:

Contraejemplo:

Sea $\sum_1 = \{a, b, c\}$ y $\sum_2 = \{a\}$

Sea $L1 = \{a^n b^n c^n : n \in \mathrm{N}\}$ (No es independiente de contexto, se mostró en clase.)

Sea $L2 = \{a^n : n \in \mathrm{N}\}$ (Es independiente de contexto.)

considere:

$h : L1 \to L2$ tal que:

si $w = a^p b^p c^p,\ p \in \mathrm{N}$, (evidentemente $w \in L_1$), entonces:

$h(w) = a^p$

defina:

$h(a) = a$

$h(b) = \varepsilon$

$h(c) = \varepsilon$

entonces es fácil demostrar que h es un homomorfismo, además a simple vista se ve que L1 es sobreyectiva, sin embargo L2 es independiente de contexto y L1 no lo es.

$Q.E.D$

Demostraremos que ambos son enumerables automátas con pila y automátas finitos deterministas.

Fije un estado un número de estados r, evidentemente existen finitos autómatas con estados r, ya que si existieran infinitos automátas para un número fijo de estados entrariamos en una contradicción, ya que cada automáta solo se puede asociar con un número finito de otros estados. Análogamente se cumple algo parecido para automátas de pila.

Si hacemos una unión indexada $A = \bigcup_{r \in \mathrm{N}} automatas\ r\ estados$ y $B = \bigcup_{r \in \mathrm{N}} automátas\ de\ pila\ con\ r\ estados$

Tenemos que la cardinalidad de las anteriores uniones indexadas es $\aleph_0$.

Podemos notar que cualquier subconjunto infinito de los anteriores conjuntos tambien tiene cardinalidad $\aleph_0$.

Por ende el subconjunto A' de A, tal que cada automáta en A' reconoce un lenguaje diferente al resto tiene cardinalidad $\aleph_0$, analogámente podemos elejir un subconjunto B' de B tal que cada automáta con pila reconoce una gramática independiente de contexto diferente del resto, teniendo de nuevo B' cardinalidad $\aleph_0$. Como tienen la misma cardinalidad debe existir una biyección.

$Q.E.D$