Алгоритмы и Алгоритмические Языки

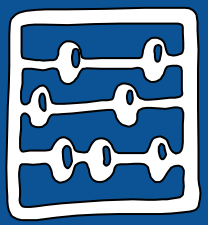
Семинар #10:

1. Разбор задач контрольной работы.
2. Наивный алгоритм поиска подстроки.
3. Алгоритм Рабина-Карпа.
4. Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта.
5. Сравнение алгоритмов поиска подстроки.

22.10.2024

HSE University

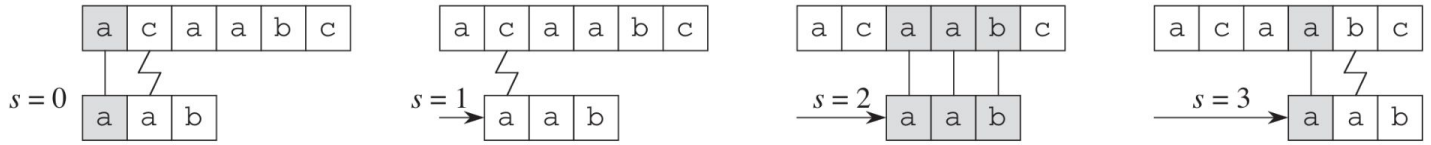
Разбор задач контрольной работы



Наивный алгоритм поиска подстроки

Наивный алгоритм

```
NAIVE-STRING-MATCHER(T, P)
1  n = T.length
2  m = P.length
3  for s = 0 to n − m
4      if P[1..m] == T[s + 1..s + m]
5          print "Pattern occurs with shift" s
```



Алгоритм Рабина – Карпа

Идея алгоритма Рабина – Карпа

Для простоты: пусть `char = {0,1,...,9}`

Подготовка – вычисление хэша от `needle`-подстроки:

$$p = P[m] + 10\,(P[m-1] + 10(P[m-2] + \cdots + 10(P[2] + 10P[1])\cdots))$$

На каждом шаге – обновление текущего хэша от фрагмента подстроки `haystack`:

$$t_{s+1} = 10(t_s - 10^{m-1}T[s+1]) + T[s+m+1]$$

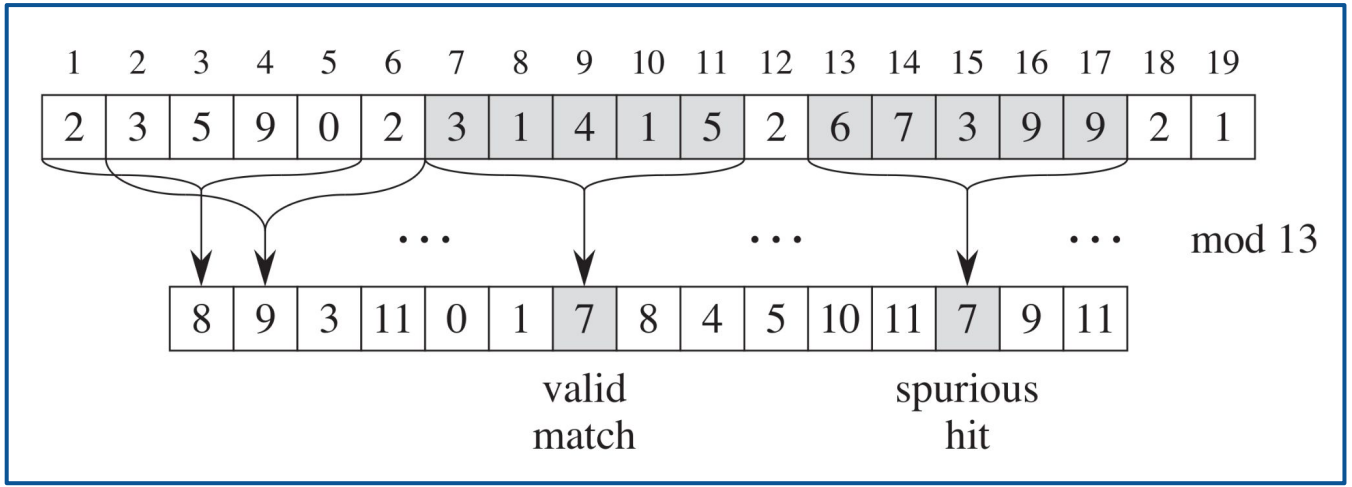
Честное сравнение – только в случае совпадения хэша.

Рассмотрение хэша по модулю

Для ограничения значения хэша сверху нужен модуль:

$$t_{s+1} = (d(t_s - T[s+1]h) + T[s+m+1]) \bmod q$$

(здесь `h = d^(m-1) mod q`)

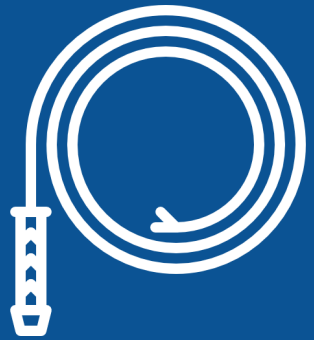


Псевдокод алгоритма

```
RABIN-KARP-MATCHER(T, P, d, q)
 1  n = T.length
 2  m = P.length
 3  h = d^(m−1) mod q
 4  p = 0
 5  t_0 = 0
 6  for i = 1 to m                          // preprocessing
 7      p = (dp + P[i]) mod q
 8      t_0 = (dt_0 + T[i]) mod q
 9  for s = 0 to n − m                      // matching
10      if p == t_s
11          if P[1..m] == T[s + 1..s + m]
12              print "Pattern occurs with shift" s
13      if s < n − m
14          t_{s+1} = (d(t_s − T[s + 1]h) + T[s + m + 1]) mod q
```

Сложность алгоритма в лучшем/худшем случае = ???

Алгоритм Кнута – Морриса – Пратта



Неформальное рассмотрение

Будем искать подстроку «методом прикладывания»:

```
a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
^
```

Так как символы не совпали, то окно сдвигается.

```
_ a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
  ^
```

Если сравнение успешное, то указатель сдвигается внутри окна.

```
  a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
        ^
```

Неформальное рассмотрение

Легко заметить, что оптимальный сдвиг окна равен четырём:

```
  _ _ _ _ a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
          ^
```

Рассмотрим следующее неуспешное сравнение:

```
          a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
                    ^
```

При выборе сдвига важна рекурсивная структура самоповторений:

```
          _ _ _ a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
                    ^
```

Неформальное рассмотрение

```
                  _ _ _ a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
                      ^
```

Снова 7 совпавших символов и 8-ой несовпавший:

```
                      _ a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
                                  ^
```

И снова первый сдвиг окна – на три символа:

```
                          _ _ _ a b c a b c a c a b
b a b c b a b c a b c a a b c a b c a b c a c a b c
                                              ^
```

Финал – совпадение найдено.

Префикс-функция строки

Определение

Пусть дана строка `str`.

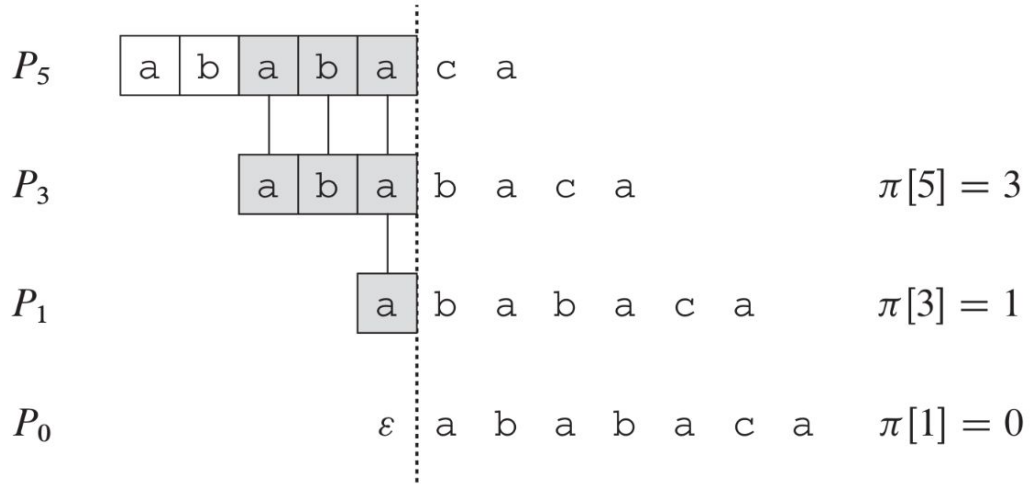
Префикс-функция строки `str` – такой массив чисел π, что π`[i]` равен длине наибольшего префикса строки `str[1, i]`, являющегося также и суффиксом строки `str[1, i]` и при этом не совпадающего с самой строкой `str[1, i]`.

$$\pi[i] = \max\{k : 0 \leq k < i \wedge str[1, k] = str[i - k + 1, i]\}$$

Вычисление префикс-функции

$$\pi[i] = \max\{k : 0 \le k < i \wedge str[1,k] = str[i-k+1,i]\}$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$P[i]$	a	b	a	b	a	c	a
$\pi[i]$	0	0	1	2	3	0	1



Задание: вычислить `COMPUTE-PREFIX-FUNCTION("ababaca")`

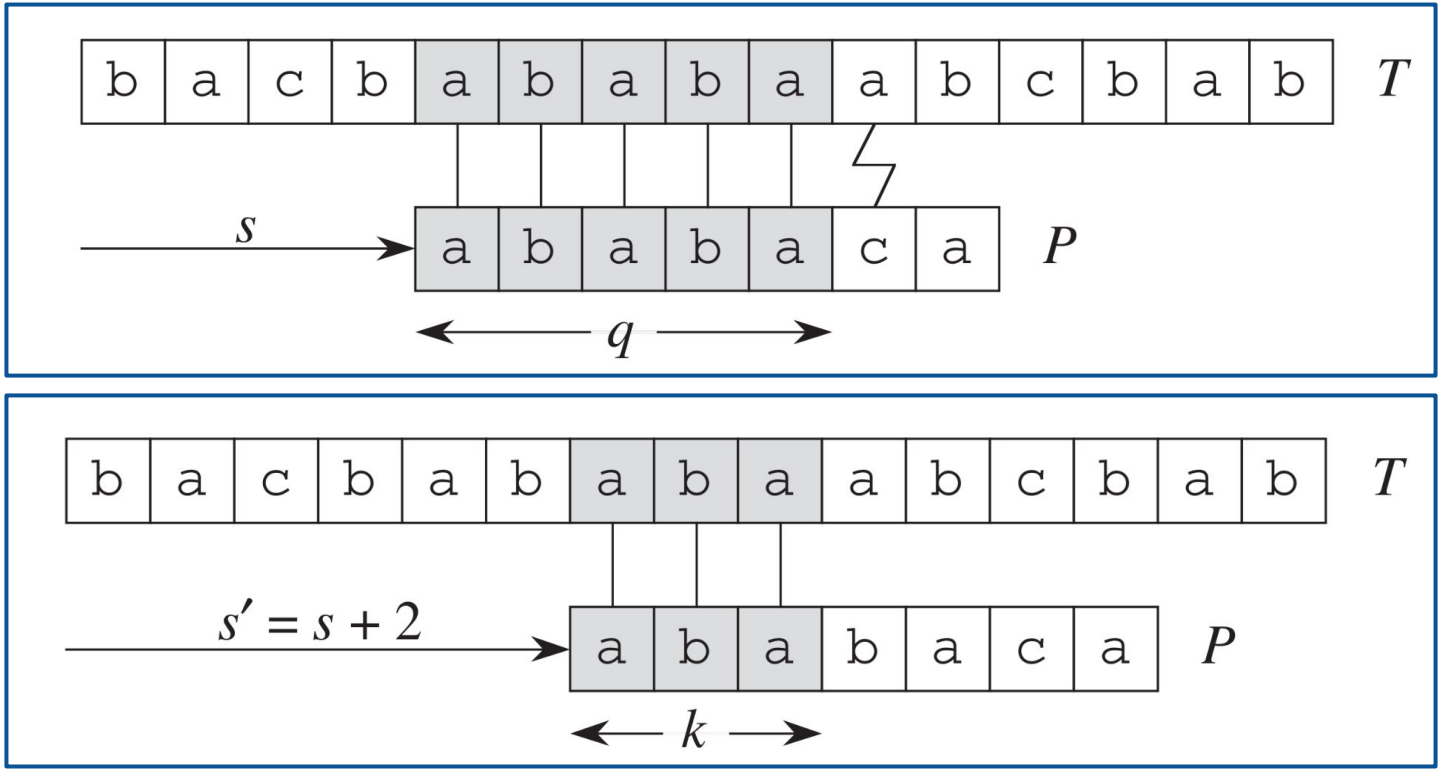
Вычисление префикс-функции

```
COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P)
 1  m = P.length
 2  let π[1..m] be a new array
 3  π[1] = 0
 4  k = 0
 5  for q = 2 to m
 6      while k > 0 and P[k + 1] ≠ P[q]
 7          k = π[k]
 8      if P[k + 1] == P[q]
 9          k = k + 1
10      π[q] = k
11  return π
```

Алгоритм КМП

```
KMP-MATCHER(T, P)
 1  n = T.length
 2  m = P.length
 3  π = COMPUTE-PREFIX-FUNCTION(P)
 4  q = 0                                  // number of characters matched
 5  for i = 1 to n                         // scan the text from left to right
 6      while q > 0 and P[q + 1] ≠ T[i]
 7          q = π[q]                       // next character does not match
 8      if P[q + 1] == T[i]
 9          q = q + 1                      // next character matches
10      if q == m                          // is all of P matched?
11          print "Pattern occurs with shift" i − m
12          q = π[q]                       // look for the next match
```

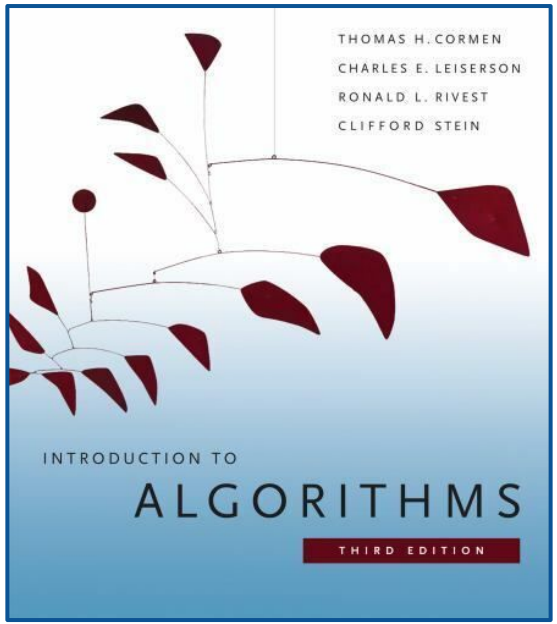
Алгоритм КМП



Задание: вычислить KMP-MATCHER(“bacbababaabcbab”, “ababaca”)

Рекомендуемая литература

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson,
Ronald L. Rivest, Clifford Stein
Introduction to Algorithms



Сравнение алгоритмов поиска подстроки

Замеры времени исполнения

```c
// Запускаем измерение времени
clock_t ticks_start = clock();

compute_algorithm();

// Завершаем измерение времени
clock_t ticks_end = clock();

double ticks_delta = ticks_end - ticks_start;
double seconds = ticks_delta / CLOCKS_PER_SEC;

printf("Number of occurences: %lu\n", occurences);
printf("Time: %10.6lfs\n", seconds);
```

Замер сразу нескольких запусков

```
// Запускаем измерение времени
clock_t ticks_start = clock();

for (size_t iterations = 0; iterations < NUM_ITERATIONS; ++iterations)
{
    compute_algorithm(...);
}

// Завершаем измерение времени
clock_t ticks_end = clock();

double ticks_delta = ticks_end - ticks_start;
double seconds = ticks_delta / CLOCKS_PER_SEC;
```

Зачем повторять эксперимент NUM_ITERATIONS раз подряд?

Сравнение без перекомпиляции

```
// Функции алгоритмов поиска подстроки
const char* (*algorithms[])(const char*, const char*) =
{
    &strstr_naive,
    &strstr_rabin_karp,
    &strstr_knuth_morris_pratt,
    (const char* (*)(const char*, const char*)) &strstr
};

// Названия алгоритмов поиска подстроки
const char* algorithm_names[] =
{
    "Наивный алгоритм",
    "Алгоритм Рабина-Карпа",
    "Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта",
    "Библиотечная реализация strstr"
};
```

Оценка системы алгоритм+задача

Какой алгоритм оптимальный? Зависит от данных!

```
// Оценку производительности алгоритмов поиска строк целесообрано оценивать
// совместно с корпусом слов, на котором алгоритм будет работать.
const char* needles[] =
{
    "любовь", "счастье", "добродетель", "гнев", "смерть",
    "время", "память", "слово", "дело", "смысл", "разум",
    "Андрей", "Наташа", "Николай", "Соня", "Пьер", "Элен", "дуэль",
    "салон", "madame", "mon cher", "обман",
    "Россия", "война", "Кутузов", "Наполеон", "друг", "враг", "гвардия", "бог",
    "есть только две добродетели: деятельность и ум",
    "есть только два источника людских пороков: праздность и суеверие",
    "Нездоровы, брат, бывают только дураки да развратники",
};
```

Для разных данных разные алгоритмы будут оптимальными!

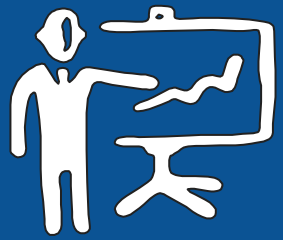
Что французу за здравие – русскому за упокой!

Результаты измерений

```
❯ ./build/search
Наивный алгоритм:
          4.085240s
Алгоритм Рабина-Карпа:
          0.520688s
Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта:
          2.503532s
Библиотечная реализация strstr:
          0.175467s
```

Библиотечная реализация вне конкуренции!

Вопросы?



Красивые иконки взяты с сайта handdrawngoods.com