2.1

a

Bestem de partiel afledede $\frac{\partial Q}{\partial p}(p,q)\ og\ \frac{\partial Q}{\partial q}(p,q)$.

Til følgende opgaver er følgende computerregning blevet brugt:
http://www.wolframalpha.com/input/?i=partial+derivative

Vi finder den partielt afledte for p.

$$\frac{\partial Q}{\partial p}(p,q) = \sum_{i=1}^{n} 2 * t_i(p * t_i + q - y_i)$$

og bagefter den partielt afledte for q.

$$\frac{\partial Q}{\partial q}(p,q) = \sum_{i=1}^{n} 2(p * t_i + q - y_i)$$

b

Der skal vises, at $\frac{\partial Q}{\partial p}(p,q) = 0$ og $\frac{\partial Q}{\partial q}(p,q) = 0$ kan omskrives til ligningssystemet.

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 * p + \sum_{i=1}^{n} t_i * q = \textstyle\sum_{i=1}^{n} t_i * y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 * p + n * q = \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Sumtegnene fjernes og sættes ind til sidst i følgende opgaver.

Den partielt afledte for p kan omskrives til den første ligning ved at sætte den lig 0 og isolerer y, hvor vi får:

$$p * t_i + q = y$$
$$\Leftrightarrow t_i^2 * p + t_i * q = t_i * y$$

Som også kan skrives som:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 * p + \sum_{i=1}^{n} t_i * q = \textstyle\sum_{i=1}^{n} t_i * y_i$$

Den partielt afledte for q kan omskrives til den anden ligning ved samme fremgangsmåde:

$$p * t_i + q = y_i$$

Som kan skrives på følgende måde:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 * p + n * q = \sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i$$

Da n kan bruges istedet for sumtegnet da det er den eneste variabel.

c

Omskriv ligningssystemet fra (b) til matrixform.

Her fås:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} t_i * y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

Som er omskrivningen til matrixform.

d

Udregn de dobbeltafledede $\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial q \partial p}$ og $\frac{\partial^2 Q}{\partial q^2}$ og vis at der er et lokalt minimum.

Til følgende opgaver er følgende computerregning blevet brugt:
http://www.wolframalpha.com/input/?i=partial+derivative

Vi finder de dobbeltafledede:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial p^2} = \sum_{i=1}^{n} 2 * t_i^2$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial q \partial p} = \sum_{i=1}^{n} 2 * t_i$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial q^2} = \sum_{i=1}^{n} 2$$

Da vi kan udlede at:

$$2 * t_i^2 > 0$$

da et tal opløftet i anden potens altid er positivt, samt at:

$$2 > 0$$

Derfor må der altså findes et lokalt minimum.

e

Der ønskes en beregning af forskellige størrelse i maple.

Først er y-værdierne og t-værdierne defineret i en række. n er lig 12, da dette er antal målinger.
Ved brug af maple har jeg regnet frem til, at:

$$a = 1281$$
$$b = 105$$
$$c = 12$$
$$d = 6674$$
$$e = 666$$

For maplekoden refereres til bilag 1.

f

Definer en matrice

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

og en vektor

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

i maple. Hvorefter vi skal finde p og q ved

$$\underline{\underline{M}} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \underline{v}$$

og tegne det i maple.
Se bilag 1+2 for gennemførelse.

2.2a

Vi ser en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

a

Argumenter for at f ikke er bijektiv.

Hvis vi omskriver matricen og foretager Gauss elimination på matricen fås:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_2 - R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3 + R_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} R_3 + 2R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ud fra den matrice der er fremkommet kan vi se, at en reduceret trappematrix ikke er mulig at lave. Derfor kan den ikke være bijektiv.

b

Hvad skal der gælde for for tallene $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ for at en vektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ligger i billedmængden for f.

Vi omskriver matricen for f og sætter vektoren ind.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & | & b_2 \\ -1 & 0 & 1 & | & b_3 \end{pmatrix}$$

Hvis nedereste række kun har nuller, er der mindst en løsning.
Fra forrige opgave kom vi frem til

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & | & b_2 \\ -1 & 0 & 1 & | & b_3 \end{pmatrix} R_2 - R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & | & b_2 - b_1 \\ -1 & 0 & 1 & | & b_3 \end{pmatrix} R_3 + R_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 2 & 2 & | & b_3 + b_1 \end{pmatrix} R_3 + 2R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_3 + b_1 + 2b_2 \end{pmatrix}$$

og vi kan derfor konkludere at der må være mindst en løsning.