Første Aflevering
(Genaflevering)
OR1

Nikolaj Dybdahl Rathcke (rfq695)

March 5, 2015

Opgave 1

a

Vi lader x_1 være antal 100 liter vin og x_2 være antal 100 liter øl og skriver da P som.

$$
\begin{array}{rrcrl}
\text{Max:} & -x_1 & - & 2x_2 & \\
\hline
\text{u.b.} & x_1 & & & \leq 2 \\
& & & -x_2 & \leq -\frac{1}{2} \\
& -x_1 & - & x_2 & \leq -\frac{5}{2} \\
& & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
\tag{1}
$$

Hvor vi vil maksimere den negative objektfunktion da det er et minimerings problem. Vi har desuden multipliceret nogle af bibetingelser med -1 så problemet er på standard form.

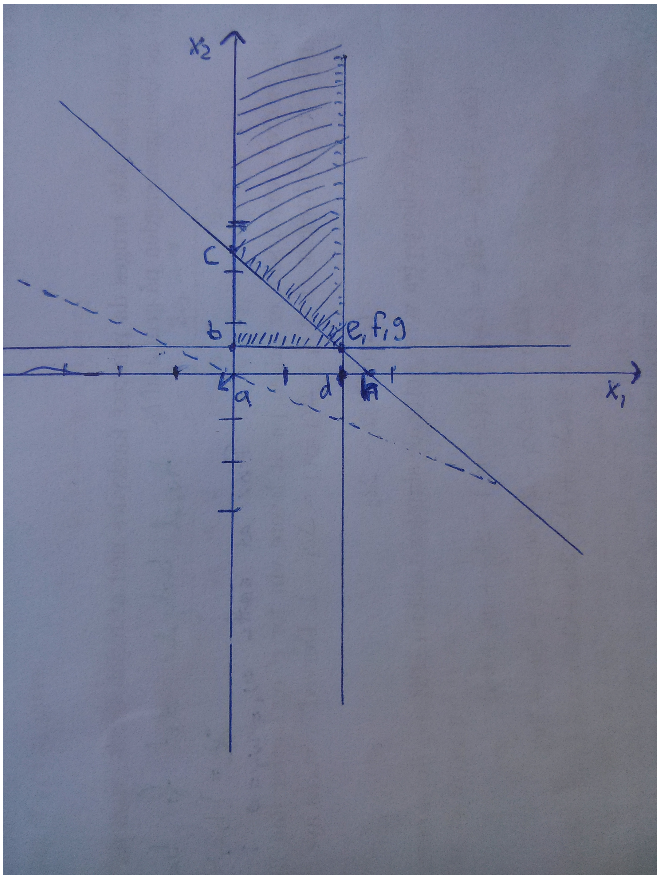
b

Det duale problem bliver da

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\text{Min:} & \xi = 2y_1 & - & \frac{1}{2}y_2 & - & \frac{5}{2}y_3 & \\
\hline
\text{u.b.} & y_1 & & & - & y_3 & \geq -1 \\
& & - & y_2 & - & y_3 & \geq -2 \\
& & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0
\end{array}
\tag{2}
$$

c

Her er problemet, P, skitseret



Hvor den stiplede linje er object funktionen.

d

Først omskriver vi P med slackvariablene w_i.

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\text{Max:} & -x_1 & - & 2x_2 & & & \\
\hline
\text{u.b.} & x_1 & & & + & w_1 & = 2 \\
 & & & -x_2 & + & w_2 & = -\frac{1}{2} \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & w_3 & = -\frac{5}{2} \\
 & & & & x_1, x_2, & w_1, w_2, w_3 & \geq 0
\end{array} \tag{3}
$$

Herefter skriver vi D med slackvariablene z_i

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\text{Min:} & \xi = 2y_1 & - & \frac{1}{2}y_2 & - & \frac{5}{2}y_3 & & & \\
\hline
\text{u.b.} & y_1 & & & - & y_3 & - & z_1 & = -1 \\
 & & & -y_2 & - & y_3 & - & z_2 & = -2 \\
 & & & & & y_1, y_2, y_3, & z_1, & z_2 & \geq 0
\end{array} \tag{4}
$$

e

Sortering stigende x_1, x_2 og så y_3 da de to x-variable er byttet om.
Hvis vi observerer billedet fra (c), kan vi finde $(x, w) = (x_1, x_2, w_1, w_2, w_3)$ til

$$\begin{aligned}
a &= \left(0, 0, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \\
b &= \left(0, \frac{1}{2}, 2, 0, -2\right) \\
c &= \left(0, \frac{5}{2}, 2, 2, 0\right) \\
d &= \left(2, 0, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
e &= \left(2, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right) \\
f &= \left(2, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right) \\
g &= \left(2, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right) \\
h &= \left(\frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)
\end{aligned}$$

Ligeledes finder vi $(z, y) = (z_1, z_2, y_1, y_2, y_3)$ til

$$\begin{aligned}
a &= (1, 2, 0, 0, 0) \\
b &= (1, 0, 0, 2, 0) \\
c &= (-1, 0, 0, 0, 2) \\
d &= (0, 2, -1, 0, 0) \\
e &= (0, 0, -1, 2, 0) \\
f &= (0, 0, 0, 1, 1) \\
g &= (0, 0, 1, 0, 2) \\
h &= (0, 1, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

f

Nedenfor ses et skema for om de er primtalt/dualt brugbare eller ej.
Fra opgave (c) kan vi se punkterne c, e, f og g er primalt brugbare.
Nu skal vi finde ud af om punkterne er dualt brugbare. Fra opgave (e) ser vi at basis variablene er negative for c, d og e, altså er de ubrugbare.

Punkt	Primalt brugbar	Dualt brugbar
a	%	✓
b	%	✓
c	✓	%
d	%	%
e	✓	%
f	✓	✓
g	✓	✓
h	%	✓

g

Vi ved at et af de primalt brugbare punkter er optimale. Altså kan vi udregne objektværdien af c og en af e, f, g (da disse har samme objektværdi). Punktet c giver objektværdien $-2 \cdot \frac{5}{2} = -5$ og punkterne e, f, g giver $-2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -3$.
Eftersom punktet e, f og g er de optimale punkter, ser vi, at 200 liter vin og 50 liter øl er optimalt og derfor billigst.

Opgave 2

a

Vi vil løse følgende hjælpeproblem med simplex metoden

$$\begin{array}{rrrrrrl} \text{Max:} & -x_0 & & & & & \\ \hline \text{u.b.} & x_1 & & & - & x_0 & \leq 2 \\ & & & -x_2 & - & x_0 & \leq -\frac{1}{2} \\ & -x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq -\frac{5}{2} \\ & & & & & x_1, x_2, x_0 & \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

Vi starter med at tilføje slack variablene og får

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \xi & = & & & & & & - & x_0 \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & & & + & x_0 \\ w_2 & = & -\frac{1}{2} & & & + & x_2 & + & x_0 \\ w_3 & = & -\frac{5}{2} & + & x_1 & + & x_2 & + & x_0 \end{array} \tag{6}$$

Indgående: x_0
Udgående: w_3
Isolering af x_0 i ligningen for w_3 giver

$$x_0 = \frac{5}{2} - x_1 - x_2 + w_3$$

Dette giver os at ξ, w_1 og w_2 er

$$\xi = -\frac{5}{2} + x_1 + x_2 + w_3$$
$$w_1 = \frac{9}{2} - 2x_1 - x_2 + w_3$$
$$w_2 = 2 - x_1 + w_3$$

Dette giver os det nye tableau

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \xi & = & -\frac{5}{2} & + & x_1 & + & x_2 & - & w_3 \\ \hline w_1 & = & \frac{9}{2} & - & 2x_1 & - & x_2 & + & w_3 \\ w_2 & = & 2 & - & x_1 & & & + & w_3 \\ x_0 & = & \frac{5}{2} & - & x_1 & - & x_2 & + & w_3 \end{array} \tag{7}$$

Indgående: x_2
Ratio: $(-\frac{-1}{\frac{9}{2}}, 0, -\frac{-1}{\frac{5}{2}}) = (\frac{2}{9}, 0, \frac{2}{5})$
Max: $\frac{2}{5}$
Udgående: x_0
Isolering af x_2 i x_0 giver

$$x_2 = \frac{5}{2} - x_1 + w_3 - x_0$$

Som giver os vores tredje tableau

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \xi & = & -x_0 & & & & & & \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & & & + & x_0 \\ w_2 & = & 2 & - & x_1 & + & w_3 & & \\ x_2 & = & \frac{5}{2} & - & x_1 & + & w_3 & + & x_0 \end{array} \tag{8}$$

Variablen x_0 forsvinder da det er optimalt. Nu introducerer vi den originale object funktion og vi får følgende tableau.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \xi & = & -5 & + & x_1 & - & 2w_3 \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & & \\ w_2 & = & 2 & - & x_1 & + & w_3 \\ x_2 & = & \frac{5}{2} & - & x_1 & + & w_3 \end{array} \tag{9}$$

Indgående: x_1
Ratio: $(-\frac{-1}{2}, -\frac{-1}{2}, -\frac{-1}{\frac{5}{2}}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5})$
Max: $\frac{1}{2}$
Udgående: w_1
Isolering af x_1 i w_1 giver

$$x_1 = 2 - w_1$$

Som giver os følgende tableau

$$\begin{array}{rcrcrcr} \xi & = & -3 & - & w_1 & - & 2w_3 \\ \hline x_1 & = & 2 & - & w_1 & & \\ w_2 & = & & & w_1 & + & w_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} & + & w_1 & + & w_3 \end{array} \tag{10}$$

Nu er den optimal idet der kun er negative koefficient i objektfunktionen.

b

Den gennemløb først punktet a i $(0,0)$, derefter c fra (9) som lægger i $(0, \frac{5}{2})$ og herefter ramte den punktet g i $(2, \frac{1}{2})$ (10).

c

Nu løses det duale problem med simplex metoden.

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{Min:} & \xi = 2y_1 & - & \frac{1}{2}y_2 & - & \frac{5}{2}y_3 & \\ \hline \text{u.b.} & y_1 & & & - & y_3 & \geq -1 \\ & & - & y_2 & - & y_3 & \geq -2 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \end{array} \tag{11}$$

Det skriver vi om så vi får

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -\xi & = & -2y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & + & \frac{5}{2}y_3 & & \\ \hline z_1 & = & 1 & + & y_1 & & & - & y_3 \\ z_2 & = & 2 & & & - & y_2 & - & y_3 \end{array} \tag{12}$$

Indgående: y_3
Ratio: $(-\frac{-1}{1}, -\frac{-1}{2}) = (1, \frac{1}{2})$
Max: 1
Udgående: z_1
Isolering af y_3 i z_1 giver

$$y_3 = 1 + y_1 - z_1$$

Som giver os følgende tableau

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -\xi & = & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & - & \frac{5}{2}z_1 \\ \hline y_3 & = & 1 & + & y_1 & & & - & z_1 \\ z_2 & = & 1 & - & y_1 & - & y_2 & + & z_1 \end{array} \tag{13}$$

Indgående: y_1
Ratio: $(-\frac{1}{1}, -\frac{-1}{1}) = (-1, 1)$
Max: 1
Udgående: z_2
Isolering af y_1 i z_2 giver

$$y_1 = 1 - y_2 + z_1 - z_2$$

Dette giver det næste tableau

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -\xi & = & 3 & & & - & \frac{1}{2}z_1 & - & 2z_2 \\ \hline y_3 & = & 2 & - & y_2 & - & & & z_2 \\ y_1 & = & 1 & - & y_2 & + & z_1 & - & z_2 \end{array} \tag{14}$$

Og nu er den optimal.

d

Den starter i punkt a med $(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0, 0, 0)$. Derefter gennemløb metoden punkt h i (13) med $(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0, 0, 1)$ samt punktet g i (14) med $(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 1, 0, 2)$.

e

Variablene (x, w) kan aflæses fra skemaerne ved at kigge på konstanterne i rækkerne under objektfunktionen, så i (9) får vi at: $w_1 = 2, w_2 = 2$ og $x_2 = \frac{5}{2}$ for punktet c.
Desuden kan variablene (z, y) aflæses ud fra objektfunktionen hvor i vores tilfælde vi har $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (z_1, z_2, y_1, y_2, y_3)$. Her er det koefficienterne negeret. Altså fra (9) får vi at $x_1 = z_1 = -1$ og $w_3 = y_3 = 2$.
De variable der ikke indgår bliver sat til 0 i begge tilfælde.

f

Dette er egentligt bare det omvendte af (e). Så (x, w) aflæses ved at kigge på objektfunktionen. I (13) har vi derfor at $y_1 = w_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = w_2 = -\frac{1}{2}$ og $z_1 = x_1 = \frac{5}{2}$
Ligeledes har vi at (z, y) i (13) er $(0, 1, 0, 0, 1)$ (punkt h) - aflæst direkte fra rækkerne.

g

Det var lettest at løse D idet der ikke var brug for et hjælpeproblem og derved var der færre iterationer.

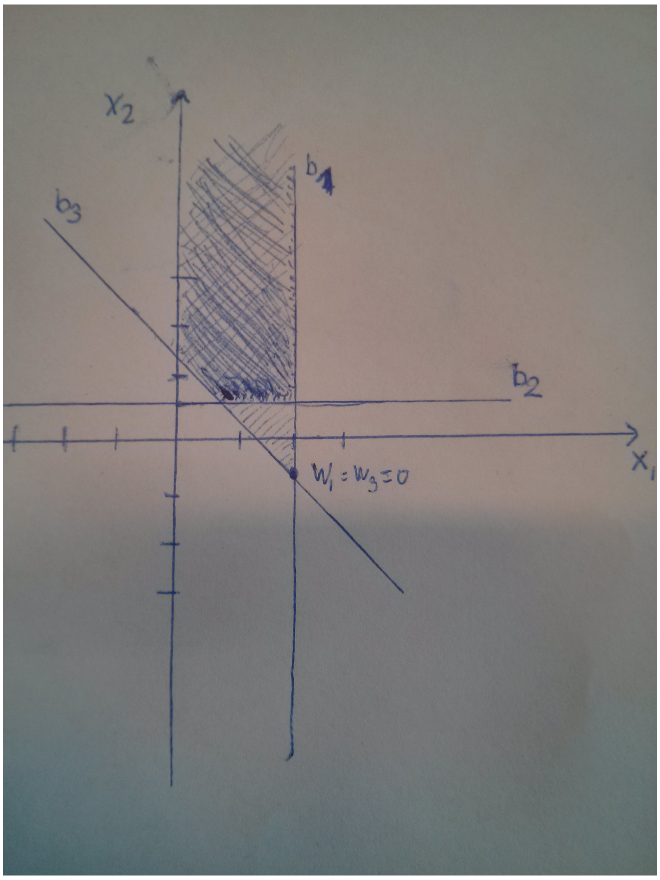
Opgave 3

a

Eftersom dette svarer til en ændring af tredje begrænsning, b_3, fra $-x_1 - 2x_2 \leq -\frac{5}{2}$ til $-x_1 - 2x_2 \leq -5$ får vi at $\Delta b_3 = -\frac{5}{2} - (-5) = \frac{5}{2}$. Idet vores optimale basis var $(1, 0, 2)$ må det betyde at vi får en ændring i vores objektfunktion på $\Delta b_3 y_3 = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$ - altså en objektværdi på $3 + 5 = 8$ da objektværdien var 3 før.
Hvis vi observeret skitseringen fra (1c), så er dette i orden da punktet blot forskydes op ad linjen for b_1 og derfor stadig ligger i løsningsmængden.

b

Hvis vi kigger på det grafiskt, vil de duale variable ikke kunne bruges da en ændring af den tredje betingelse, b_3, vil forskyde det optimale punkt ned af linjen for b_1. Derved vil punktet når $w_1 = 0$ og $w_3 = 0$ ligge under løsningsmængde på grund af linjen for b_2. Altså kan den givne basis ikke bruges og vi kan derfor ikke afgøre værdien for 250 inviterede.
På næste side ses en skitsering der illustrerer situationen.



c

Vi kalder den ændrede værdi som er prisen på at levere vin for c' og sætter den lig den oprindelige pris samt ændringen, altså $c'_1 = \Delta c_1 + c_1 = \Delta c_1 - 1$. Derved er vores nye objekt funktion

$$(\Delta c_1 - 1)x_1 - 2x_2$$

Derefter indsætter vi værdierne fra vores optimale simplex tableau (10).

$$\begin{aligned}(\Delta c_1 - 1)x_1 - 2x_2 &= (\Delta c_1 - 1)(2 - w_1) - 2(\frac{1}{2} + w_1 + w_3) \\ &= 2\Delta c_1 - w_1\Delta c_1 - 2 + w_1 - 1 - 2w_1 - 2w_3 \\ &= 2\Delta c_1 - w_1(\Delta c_1 + 1) - 2w_3 - 3\end{aligned}$$

For at den samme basis stadig er optimal skal alle koefficienter i objektfunktionen være mindre eller lig 0, derfor har vi fra andet led, at

$$\Delta c_1 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta c_1 \geq -1$$

Vi kan derfor ændre c_1 med ned til -1 (den dobbelte pris) for at den nuværende løsning er optimal.