MatIntroNat - Lynopgave 3

Opgave 9.1

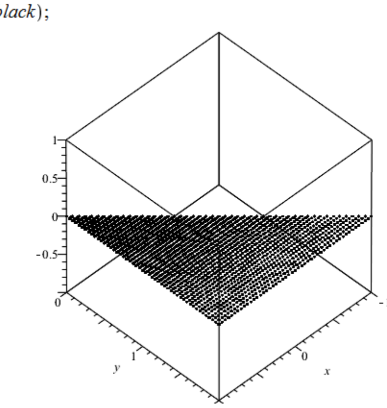
Tegn en skitse af mængden

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, 1 - y \leq x \leq 1\}$$

Udregn planintegralet af x^2y over D som et itereret integral med integrationen m.h.t x inderst.
Opskriv dernæst den samme mængde D på lærebogens form og udregn det samme planintegral, nu med integrationen m.h.t x yderst.
Illustrer ved brug af Maple den figur, hvis rumfang integralet udtrykker.

Vi starter med at skitsere mængden D ved brug af Maple

```
plot3d( (0, x = 1 − y ..1, y = 0 ..2), axes = boxed, style = point, color = black);
```



Herefter beregner vi planintegralet af x^2y over D på formen (**5.2**) m.h.t x inderst

```
int(int(x^2·y, x = 1 − y ..1), y = 0 ..2);
```

$$\frac{4}{5}$$

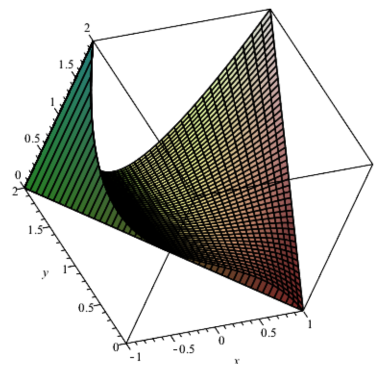
Derefter beregnes planintegralet af x^2y over D på formen (**5.1**) m.h.t x yderst

```
int(int(x^2 * y, y = 1 − x ..2), x = -1 ..1);
```

$$\frac{4}{5}$$

Nedenfor er figuren, hvis rumfang integralet udtrykker vist

```
plot3d(x^2*y, x=-1..1, y=1-x..2, filled=true, axes=boxed);
```



Det er ligemeget hvilken form af D vi bruger, ovenfor er brugt den der er skrevet på (**5.1**).

Opgave 9.3

Udtryk mængden

$$R = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

i sfæriske koordinater, og udregn derefter rumintegralet af funktionen $f(x, y, z) = y$ over R.

Vi udtrykker mængden R med sfæriske koordinater

$$x = \rho cos(\theta) sin(\phi)$$
$$y = \rho sin(\theta) sin(\phi)$$
$$z = \rho cos(\phi)$$

Hvor vi så kan skrive betingelserne for mængden R som

$$0 \leq \rho sin(\theta) sin(\phi)$$

og

$$(\rho cos(\theta) sin(\phi))^2 + (\rho sin(\theta) sin(\phi))^2 + (\rho cos(\phi))^2 \leq 1$$
$$\rho^2((cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2) sin(\phi)^2 + cos(\phi)^2 \leq 1$$
$$\rho^2(sin(\phi)^2 + cos(\phi)^2 \leq 1$$
$$\rho^2 \leq 1$$

Så vi har nu mængden R udtryk i sfæriske koordinater ved

$$R = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho sin(\theta) sin(\phi), \rho^2 \leq 1\}$$

Altså er mængden R er lukket og begrænset og er en halvkugle, da $0 \leq y$, med en radius på 1 da $\rho^2 \leq 1$.
Vi omskriver derfor mængden R

$$R = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Her er θ begrænset til $0 \leq \theta \leq \pi$ da der er tale om en halvkuglen.
Rumintegralet af funktionen $f(x, y, z) = y$ over R er således

```
JacobiDeterminant := p^2·sin(q);
                                                        p^2 sin(q)
int(int(int(p·sin(q)·sin(r)·JacobiDeterminant, r = 0 ..Pi), q = 0 .. Pi), p = 0 ..1);
                                                        1/4 π
```

hvor $p = \rho, q = \theta$ og $r = \phi$.