MatIntroNat - Lynopgave 2

4.1

Løs differentialligningen

$$(1+x^2)yy\prime = x(1+y^2)$$

med hver a begyndelsesbetingelserne

$$y(3) = 1,\ y(3) = 3,\ y(3) = -7$$

Opgaven skal først løses med Maple, dernæst uden ved separation.

Differentiligningen defineres i Maple

DiffLign := $(1+x^2)\cdot y(x)\cdot \mathrm{diff}(y(x), x) = x\cdot(1+y(x)^2)$;

$$(x^2+1)\, y(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x)\right) = x\,(1+y(x)^2)$$

Herefter løses den med de 3 forskellige begyndelsesværdier.
For $y(3) = 1$

dsolve({*DiffLign*, $y(3) = 1$});

$$y(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 20}$$

For $y(3) = 3$

dsolve({*DiffLign*, $y(3) = 3$});

$$y(x) = x$$

For $y(3) = -7$

dsolve({*DiffLign*, $y(3) = -7$});

$$y(x) = -\sqrt{5x^2 + 4}$$

Dernæst løses det uden brug af Maple på følgende måde

$$(1+x^2)yy\prime = x(1+y^2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{yy\prime}{(1+y^2)} = \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} y \, dy = \int \frac{1}{1+x^2} x \, dx \Leftrightarrow$$

Vi går nu over til at regne på venstreside, da vi har to 'ens' udtryk på begge sider med forskellig variabel.
u bliver nu substitueret ind:

$$u = 1 + y^2 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dy} = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \frac{du}{dy}$$

Vi indsætter nu denne y værdi i udtrykket

$$\int \frac{1}{1+y^2} y \, dy$$

og får følgende

$$\int \frac{1}{2} \frac{du}{dy} \frac{1}{u} \, dy = \int \frac{1}{2} \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} \ln(|u|)$$

Da vi som før nævnt at vi på begge sider havde to samme udtryk med forskellig varibel, benyttes samme fremgangmåde som ovenfor til at komme frem til (hvor u er substitueret tilbage til $1 + y^2$ og $1 + x^2$).
Det observeres ligeledet at da y^2 og x^2 altid vil være to positive tal for alle reelle tal, fjernes absolut-tegnene:

$$\int \frac{1}{1+y^2} y \, dy = \int \frac{1}{1+x^2} x \, dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$e^{\ln(1+y^2)} = e^{\ln(1+x^2)+C} \Leftrightarrow$$

$$1 + y^2 = e^C (1 + x^2) \Leftrightarrow$$

$$1 + y^2 = C(1 + x^2) \Leftrightarrow$$

$$y^2 = C(1 + x^2) - 1 \Leftrightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{C(1 + x^2) - 1}$$

Vha. denne generelle formel vil vi nu finde $y(x)$ med de 3 forskellige begyndelsesværdier.
Først for $y(3) = 1$:

$$1 = \sqrt{C(1+3^2)-1} \Leftrightarrow 1^2 = 10C - 1 \Leftrightarrow 2 = 10C \Leftrightarrow C = \frac{1}{5}$$

Dernæst for $y(3) = 3$

$$3 = \sqrt{C(1+3^2)-1} \Leftrightarrow 3^2 = 10C - 1 \Leftrightarrow 10 = 10C \Leftrightarrow C = 1$$

Og til sidst for $y(3) = -7$

$$-7 = \sqrt{C(1+3^2)-1} \Leftrightarrow -7^2 = 10C - 1 \Leftrightarrow 50 = 10C \Leftrightarrow C = 5$$

Og således er de 3 forskellige C værdier fundet.

4.2(i)

(a) løses uden Maple, (b) og (c) løses med Maple

a

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

Vi finder rødderne til ligningen $r^2 + 2r - 3 = 0$

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 * 1 * (-3)}}{2 * 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 * 1 * (-3)}}{2 * 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Da den har rødderne $1, -3$ har den homogene ligning, af sætning 10.5.3 i TL, den fuldstændige løsning

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

b

Find for enhver reel værdi af konstanten a den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' - 3y = e^{ax}$$

Nedenfor er differentialligning defineret og løst i Maple:

$DiffLign2 := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \cdot \frac{d}{dx} y(x) - 3 \cdot y(x) = e^{a \cdot x};$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) - 3\, y(x) = e^{a x}$$

$dsolve(DiffLign2);$

$$y(x) = e^{-3x}\_C2 + e^{x}\_C1 + \frac{e^{a x}}{a^2 + 2a - 3}$$

Hvilket er den fuldstændige løsning til differentialligning hvor $\_C2$ og $\_C1$ er konstanter.

c

Find, stadig for alle a, den partikulære løsning $y(x)$ til problemet i (b) som opfylder $y(0) = y\prime(0) = 0$

Herunder ses, beregnet med Maple, den partikulære løsning

dsolve({ *DiffLign2*, $y(0) = 0$, $D(y)(0) = 0$ });

$$y(x) = \frac{1}{4}\frac{e^{-3x}}{a+3} - \frac{1}{4}\frac{e^{x}}{a-1} + \frac{e^{ax}}{a^2+2a-3}$$

der opfylder $y(0) = y\prime(0) = 0$.