Anden aflevering
OR1

Nikolaj Dybdahl Rathcke (rfq695)

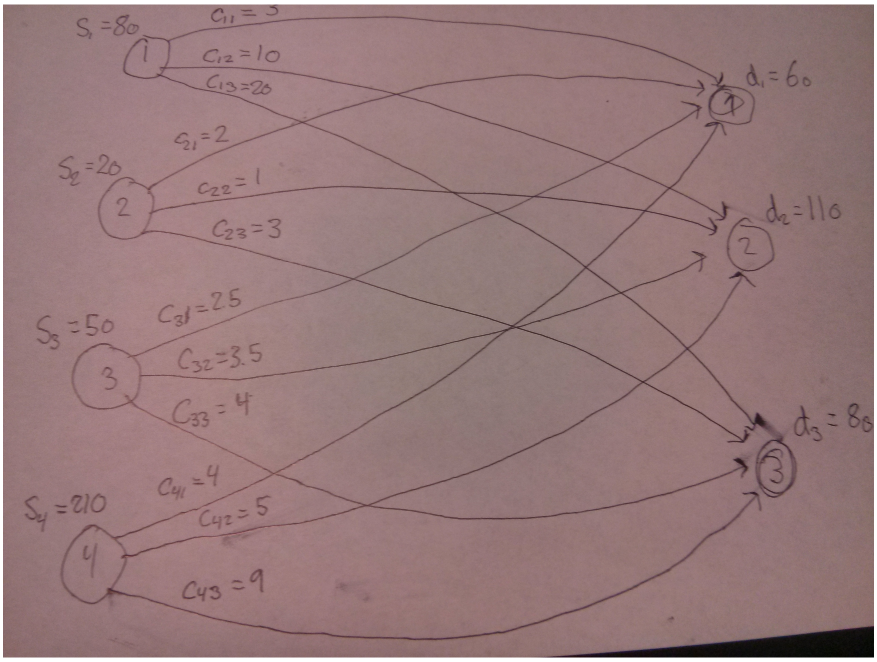
March 12, 2015

Opgave 1

(Opgave 1 har summer skrevet ud, mens opgave 3 benytter sig af summer).

a

Nedenfor ses den grafiske repræsentation af problemet. Idet øl og vin har samme omkostning ved levering er det lavet om et til total antal liter i hvert lager.



Og problemet P er under formuleret som et standard transportproblem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{Min:} & 3x_{11} & + & 10x_{12} & + & 20x_{13} & + & & & \\
 & 2x_{21} & + & x_{22} & + & 3x_{23} & + & & & \\
 & 25x_{31} & + & 35x_{32} & + & 4x_{33} & + & & & \\
 & 4x_{41} & + & 5x_{42} & + & 9x_{43} & & & & \\
\hline
\text{u.b.} & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & \leq 80 \\
 & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & & & & \leq 20 \\
 & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & & & & \leq 50 \\
 & x_{41} & + & x_{42} & + & x_{43} & & & & \leq 210 \\
 & x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & + & x_{41} & & = 60 \\
 & x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & + & x_{42} & & = 110 \\
 & x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & + & x_{43} & & = 80 \\
\multicolumn{9}{r}{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43}} & \geq 0
\end{array}
\tag{1}
$$

b

Vi skal nu tilføje en dummy node som tager $(80+20+50+210)-(60+110+80)=110$ liter øl eller vin. Alle lagre peger på denne med en omkostning på 0. Derved får vi vores nye problem P' til at være

$$\begin{array}{rccccccccc}
\text{Min:} & 3x_{11} & + & 10x_{12} & + & 20x_{13} & + & & \\
 & 2x_{21} & + & x_{22} & + & 3x_{23} & + & & \\
 & 25x_{31} & + & 35x_{32} & + & 4x_{33} & + & & \\
 & 4x_{41} & + & 5x_{42} & + & 9x_{43} & & & \\
\hline
\text{u.b.} & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & =80 \\
 & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & =20 \\
 & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & + & x_{34} & =50 \\
 & x_{41} & + & x_{42} & + & x_{43} & + & x_{44} & =210 \\
 & x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & + & x_{41} & =60 \\
 & x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & + & x_{42} & =110 \\
 & x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & + & x_{43} & =80 \\
 & x_{14} & + & x_{24} & + & x_{34} & + & x_{44} & =110
\end{array} \tag{2}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44} \quad \geq 0 \tag{3}$$

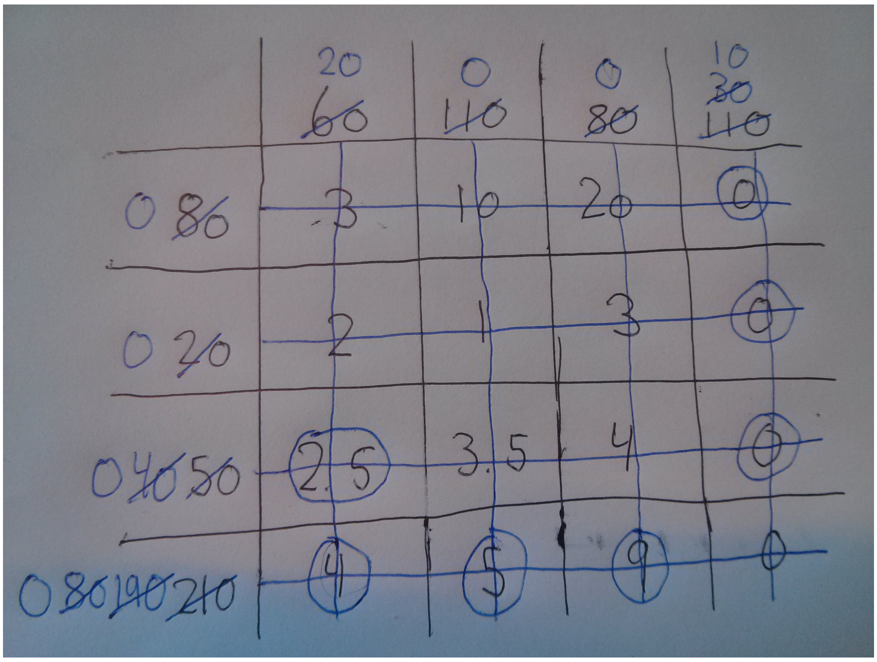
c

Det duale problem D' til P' bliver

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\text{Max:} & 80\alpha_1 & + & 20\alpha_2 & + & 50\alpha_3 & + & 210\alpha_4 & + \\
 & 60\beta_1 & + & 110\beta_2 & + & 80\beta_3 & + & 110\beta_4 & + \\
\hline
\text{u.b.} & & & & & \alpha_1 & + & \beta_1 & \leq 3 \\
 & & & & & \alpha_1 & + & \beta_2 & \leq 10 \\
 & & & & & \alpha_1 & + & \beta_3 & \leq 20 \\
 & & & & & \alpha_1 & + & \beta_4 & \leq 0 \\
 & & & & & \alpha_2 & + & \beta_1 & \leq 2 \\
 & & & & & \alpha_2 & + & \beta_2 & \leq 1 \\
 & & & & & \alpha_2 & + & \beta_3 & \leq 3 \\
 & & & & & \alpha_2 & + & \beta_4 & \leq 0 \\
 & & & & & \alpha_3 & + & \beta_1 & \leq 2.5 \\
 & & & & & \alpha_3 & + & \beta_2 & \leq 3.5 \\
 & & & & & \alpha_3 & + & \beta_3 & \leq 4 \\
 & & & & & \alpha_3 & + & \beta_4 & \leq 0 \\
 & & & & & \alpha_4 & + & \beta_1 & \leq 4 \\
 & & & & & \alpha_5 & + & \beta_2 & \leq 5 \\
 & & & & & \alpha_5 & + & \beta_3 & \leq 9 \\
 & & & & & \alpha_5 & + & \beta_4 & \leq 0 \\
 & & & & & & & \alpha_1, \alpha_2\alpha_3, \alpha_4 & \text{fri} \\
 & & & & & & & \beta_1, \beta_2\beta_3, \beta_4 & \text{fri}
\end{array} \tag{4}$$

d

Vi starter med fase 1 hvor vi transporterer mest muligt over de billigste kanter.



Som giver os

$$\begin{aligned} x_{14} &= 80 \\ x_{24} &= 20 \\ x_{34} &= 10 \\ x_{31} &= 40 \\ x_{41} &= 20 \\ x_{42} &= 110 \\ x_{43} &= 80 \end{aligned}$$

Hvilket giver os en objektværdi på

$$2.5 \cdot 40 + 4 \cdot 60 + 5 \cdot 110 + 9 \cdot 40 = 1250$$

Da der er det rigtige antal kanter i basisløsningen begynder vi på fase 2 som forbedrer vores intialløsning. Vi finder vores første tabel

x				
				80
				20
	40			10
	20	110	80	

Herefter opdaterer vi vores duale variable (med x_{14} som rodknude).

α/β	2.5	3.5	7.5	0
0	3	10	20	0
0	2	1	3	0
0	2.5	3.5	4	0
1.5	4	5	9	0

Nu opdaterer vi så duale slacks

z				
	0.5	6.5	12.5	
	-0.5	-2.5	-4.5	
		0	-3.5	
				-1.5

Da $z \ngeq 0$ må vi udregne de nye flows (2. iteration).

x				
				80
			$\boxed{20}$	
	20			30
	40	110	60	

De duale variable opdateres

α/β	2.5	3.5	7.5	0
0	3	10	20	0
-4.5	2	1	3	0
0	2.5	3.5	4	0
1.5	4	5	9	0

De duale slacks opdateres

z				
	0.5	6.5	12.5	
	4	2		4.5
		0	-3.5	
				-1.5

Vi har stadig $z \ngeq 0$ så vi udregner nye flows (3. iteration).

x				
				80
			20	
			$\boxed{20}$	30
	60	110	40	

De duale variable opdateres

α/β	-1	0	4	0
0	3	10	20	0
-1	2	1	3	0
0	2.5	3.5	4	0
5	4	5	9	0

De duale slacks opdateres

z				
	4	10	16	
	4	2		1
	3.5	3.5		
				-5

Vi har stadig $z \ngeq 0$ så vi udregner nye flows (4. iteration).

x				
				80
			20	
			50	
	60	110	10	$\boxed{30}$

De duale variable opdateres

α/β	4	5	9	0
0	3	10	20	0
-6	2	1	3	0
-5	2.5	3.5	4	0
0	4	5	9	0

De duale slacks opdateres

z				
	-1	5	11	
	4	2		6
	3.5	3.5		5

Vi har stadig $z \ngeq 0$ så vi udregner nye flows (5. iteration).

x				
	$\boxed{60}$			30
			20	
			50	
		110	10	90

De duale variable opdateres

α/β	3	5	9	0
0	3	10	20	0
-6	2	1	3	0
-5	2.5	3.5	4	0
0	4	5	9	0

De duale slacks opdateres

z				
	0	5	11	
	5	2		6
	4.5	3.5		5

Og nu er alle $z \geq 0$ og løsningen er derfor optimal.

e

Den optimale måde er derved at:
Levere 60 liter fra lager 1 til destination 1.
Levere 20 liter fra lager 2 til destination 3.
Levere 50 liter fra lager 3 til destination 3.
Levere 110 liter fra lager 4 til destination 2.
Levere 10 liter fra lager 4 til destination 3.

f

Dette giver en objektværdi på

$$3 \cdot 60 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 110 + 9 \cdot 10 = 1080$$

på den optimale måde.

Opgave 2

a

Vi benytter os af Djikstras algoritme (alle noder er initialiseret til uendelige pånær start noden a) til at finde korteste rute fra node a til alle andre noder. Vi starter med at lægge a i sættet af færdige knuder da det har den mindste værdi.
Første iteration: Vi opdaterer alle værdier i de noder a kan nå. Vi lægger nu node b til sættet af færdige noder da den har den mindste værdi (vi kunne også have valgt h).
Anden iteration: Vi kigger på de noder der ikke er færdige som kan nå b og opdaterer værdierne. Nu er node h den med mindst værdi som ikke er færdig, så dette er den næste node vi kigger på.
Tredje iteration: Vi opdaterer værdierne af de ikke færdige noder og ser at e er den næste node vi skal kigge på. Så denne lægger vi til de færdige noder. Vi kunne også have valgt i.
Fjerde iteration: Vi opdaterer noderne der er knyttet til e. Vi ser at i er noden med den mindste værdi og lægger denne til vores sæt at færdige noder.
Femte iteration: Vi opdaterer noderne knyttet til i og ser at c og f har den mindste værdi. Vi vælger node c og lægger den til vores sæt med færdige noder.
Sjette iteration: Vi opdatere igen noderne og vælger f som den næste færdige node.
Syvende iteration: Vi opdaterer noderne og vælger j som den næste færdige node.
Ottende iteration: Vi opdaterer noderne og d og g har samme værdi. Vi vælger node d.
Niende iteration: Intet bliver opdateret og vi mangler nu kun g, som så er den sidste node og algoritmen terminerer.

Iteration	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Node		a	b	h	e	i	c	f	j	d
v_a	$\underline{\mathbf{0}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_b	∞	$\underline{\mathbf{2}}$	2	2	2	2	2	2	2	2
v_c	∞	∞	**4**	4	4	$\underline{4}$	4	4	4	4
v_d	∞	∞	∞	∞	∞	∞	**7**	**6**	$\underline{6}$	6
v_e	∞	**4**	**3**	$\underline{3}$	3	3	3	3	3	3
v_f	∞	∞	∞	∞	4	4	$\underline{4}$	4	4	4
v_g	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	**7**	**6**	$\underline{6}$
v_h	∞	**2**	$\underline{2}$	2	2	2	2	2	2	2
v_i	∞	∞	∞	**3**	$\underline{3}$	3	3	3	3	3
v_j	∞	∞	∞	∞	∞	5	5	$\underline{5}$	5	5

Den korteste vej fra a til de andre noder kan nu aflæses i sidste kolonne.

Opgave 3

a

Problemet er skrevet nedenfor

$$
\begin{array}{rrr}
\text{Min:} & \sum_{i\in\mathcal{N},j\in\mathcal{N}(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} & \\
\hline
\text{u.b.} & \sum_{i\in\mathcal{N}:(i,j)\in\mathcal{N}} x_{ij} = 1, & \text{for } j\in\mathcal{N} \\
 & \sum_{j\in\mathcal{N}:(i,j)\in\mathcal{N}} x_{ij} = 1, & \text{for } i\in\mathcal{N} \\
 & t_i + 1 - n(1-x_{ij}) \leq t_j & \text{for } i\geq 1, j\geq 2, (i,j)\in\mathcal{A} \\
 & t_i \leq n & \\
 & t_i \geq 1 & \\
 & t_i \in \mathbb{Z} & \text{for } i\in\mathcal{N} \\
 & x_{ij}\in\{0,1\} & \text{for } (i,j)\in\mathcal{A}
\end{array} \tag{5}
$$

Hvor

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \\
\mathcal{A} &= \{(a,b),(a,e),(a,h),(b,c),(b,e),(c,d),(c,e),(c,f),(d,f),(d,g), \\
&\quad (e,f),(e,h),(e,i),(f,g),(f,i),(f,j),(g,j),(h,i),(i,j)\} \\
t_i &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}
\end{aligned}
$$

$c_{ij} =$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a		2			4			2		
b	2		2		1					
c		2		3	3	2				
d			3			2	2			
e	4	1	3			1		3	2	
f			2	2	1		3		3	1
g				2		3				1
h	2				3				1	
i					2	3		1		2
j						1	1		2	

og x_{ij} er en variabel der er sat hvis knuden i er lige før knuden j

b

Koden for programmet kan ses i Bilag 1. Her er outputtet for `t(i)` og `z` som er den optimale objekt værdi.

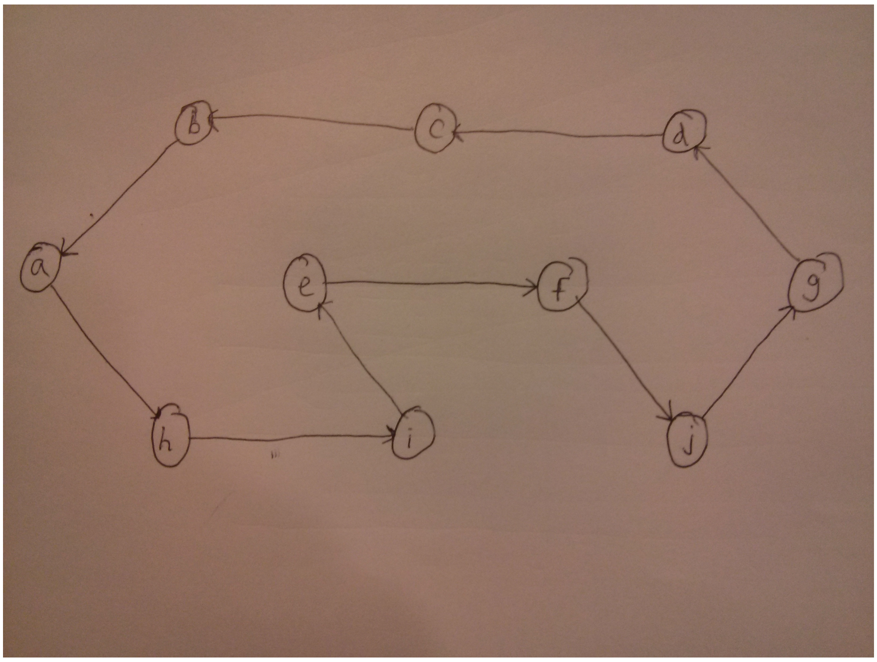
```
----    121 VARIABLE t.L

a  1.000,    b 10.000,    c  9.000,    d  8.000,    e  4.000,    f  5.000,
g  7.000,    h  2.000,    i  3.000,    j  6.000


----    121 VARIABLE z.L                    =       17.000
```

c

Hvis vi følger grafen og vores `t`-værdier får vi følgende rute.



d

Den optimale værdi er så givet ved 17, hvilket man hurtigt kan efterregne til at være sandt.

Bilag 1

```
Sets
    i /a*j/;

alias (i,j)

Sets
    arcs(i,i);

arcs('a','b')=yes;
arcs('a','e')=yes;
arcs('a','h')=yes;
arcs('b','c')=yes;
arcs('b','e')=yes;
arcs('c','d')=yes;
arcs('c','e')=yes;
arcs('c','f')=yes;
arcs('d','f')=yes;
arcs('d','g')=yes;
arcs('e','f')=yes;
arcs('e','h')=yes;
arcs('e','i')=yes;
arcs('f','g')=yes;
arcs('f','i')=yes;
arcs('f','j')=yes;
arcs('g','j')=yes;
arcs('h','i')=yes;
arcs('i','j')=yes;

arcs('b','a')=yes;
arcs('e','a')=yes;
arcs('h','a')=yes;
arcs('c','b')=yes;
arcs('e','b')=yes;
arcs('d','c')=yes;
arcs('e','c')=yes;
arcs('f','c')=yes;
arcs('f','d')=yes;
arcs('g','d')=yes;
arcs('f','e')=yes;
arcs('h','e')=yes;
arcs('i','e')=yes;
arcs('g','f')=yes;
arcs('i','f')=yes;
arcs('j','f')=yes;
arcs('j','g')=yes;
arcs('i','h')=yes;
arcs('j','i')=yes;

parameters
   c(i,i);

c('a','b')=2;
c('a','e')=4;
c('a','h')=2;
c('b','c')=2;
c('b','e')=1;
```

```
c('c','d')=3;
c('c','e')=3;
c('c','f')=2;
c('d','f')=2;
c('d','g')=2;
c('e','f')=1;
c('e','h')=3;
c('e','i')=2;
c('f','g')=3;
c('f','i')=3;
c('f','j')=1;
c('g','j')=1;
c('h','i')=1;
c('i','j')=2;

c('b','a')=2;
c('e','a')=4;
c('h','a')=2;
c('c','b')=2;
c('e','b')=1;
c('d','c')=3;
c('e','c')=3;
c('f','c')=2;
c('f','d')=2;
c('g','d')=2;
c('f','e')=1;
c('h','e')=3;
c('i','e')=2;
c('g','f')=3;
c('i','f')=3;
c('j','f')=1;
c('j','g')=1;
c('i','h')=1;
c('j','i')=2;

Variable
    z;

Integer variable
    t(i);

Binary variable
    x(i,j);

Equations
    obj
    const1(i)
    const2(i)
    const3(i,j)
    const4(i)
    const5(i);

    obj.. z =e= sum((i,j)$arcs(i,j), c(i,j)*x(i,j));
    const1(j).. sum(i$arcs(i,j), x(i,j)) =e= 1;
    const2(i).. sum(j$arcs(i,j), x(i,j)) =e= 1;
    const3(i,j)$(arcs(i,j) and ord(i)>=1 and ord(j)>=2).. t(i)+1-card(i)*(1-x(i,j)) =l= t(j);
    const4(i).. t(i) =l= card(i);
    const5(i).. t(i) =g= 1;
```

```
Model tsp /all/;

solve tsp using mip minimizing z;

display
    t.l, z.l;
```