A

Lad relationen f på $\mathbb{R}$ være givet ved:

$$xfy \Leftrightarrow (y(2x-3) - 3x = y(x^2 - 2x) - 5x^3)$$

(a)

Gør rede for, at f er en funktion og bestem $Dom(f)$.

Ved isolation af y på højre siden fås:

$$y = \frac{5x^3 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$$

Som er en funktion, da for hvert input x er der kun et output y.

$Dom(f)$ er givet ved de x-værdier som returnerer en y-værdi. Altså i formlen ovenfor returneres der altid y-værdier, medmindre der er division med 0. $Dom(f)$ er derfor alt andet end de x der får nævneren til at give 0.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \; or \; 3$$

Og derfor:

$$Dom(f) = x \in \mathbb{R} \;:\; x \neq 1 \; or \; x \neq 3$$

(b)

Vis, at f er surjektiv.

På grund værdimængden er defineret på hele $\mathbb{R}$ må funktionen være surjektiv.

(c)

Afgør om f er injektiv.

Hvis flere x'er giver det samme y er funktionen ikke injektiv. Ved et plot af funktionen, ses at den skærer x-aksen i flere punkter. Dette efterprøver vi:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \; or \; \sqrt{\frac{3}{5}} \; or \; -\sqrt{\frac{3}{5}} = 0$$

Altså kan funktionen ikke være injektiv.

(d)

g er restriktionen af f til $\mathbb{Z}^+$. Bestem $a \in \mathbb{R}$, således at g tilhører $\Theta(n^a)$.

I det første udtryk fra opgave A(a) begynder vi med at finde den maksimale køretid for både tæller og nævner. For tælleren:

$$5n^3 - 3n \leq 5n^3 + 3n$$

$$\leq 5n^3 + 3n^3, 1 \leq n$$
$$\leq 8n^3$$

Vi sætter kravet for a $n \geq 1$, så vi ikke får nogle negative tal.
store-O notation er derfor $O(n^3)$ og konstanten $c = 8$ samt $k = 1$. For nævneren:

$$n^2 - 4n + 3 \leq n^2 + 4n + 3$$

$$\leq n^2 + 4n^2 + 3n^2, 1 \leq n$$
$$\leq 8n^2$$

Her ses, at store-O notationen er $O(n^2)$, $c = 8$ og $k = 1$.
Vi finder derfor store-O for hele $g(n)$ som er:

$$\frac{O(n^3)}{O(n^2)} = \Theta(n)$$

B

Lad $M = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 18, 24\}$ og lad relationen R på M være givet ved

$$xRy \Leftrightarrow \ (x^2 | y \ \vee \ x = y)$$

(a)

Vis, at R er en ordensrelation.

En relation er en ordensrelation, hvis den er refleksiv, antisymmetrisk, og transitiv.

Funktionen er refleksiv, da hvis de er lig hinanden opfylder de automatisk at x=y.

Funktionen er antisymmetrisk, da det eneste tidspunkt et positivt tal i anden potens går op i et andet tal og hvor det også gælder den anden vej, er hvis de begge er 1 eller 0, hvoraf de er lig hinanden.
Funktionen er transitiv, da hvis:

$$a^2|b \ \wedge \ b^2|c$$

gælder at,

$$b^2 = a^2 * a^2 * c$$

Altså må,

$$a^2 * a^2|c \ \Rightarrow \ a|c$$

Da funktionen er alle 3 ting, er den derfor en ordensrelation.

(b)

Tegn hassediagrammet for R

Tegnet i hånden, se bilag 1.

(c)

Find de maksimale og de minimale elementer i M m.h.t R.

Hvis vi ser på hassediagrammet fra forrige opgave, ses at:
$8, 9, 12, 16, 18$ *og* 24 er maksimale elementer i M m.h.t. R.
1 er det minimale element i M m.h.t. R.

(d)

Afgør, om M har et største og mindste element m.h.t. R

Der ses ud fra hassediagrammet, at:
Der findes ingen største elementer i M m.h.t. R.
1 er det mindste element i M m.h.t. R

C

Lad D_{154} være mængden af positive divisorer af 154 udstyret med ordensrelationen "|".

(a)

Vis, at D_{154} er en Boolsk algrebra.

Hvis primtalsfaktoriseringen af D_{154} består af særskilte primtal, altså hvor hvert primtal kun optræder en gang, er det en Boolsk algebra. Der ses, at:

$$154 = 2 * 7 * 11$$

Det opfylder denne primtalsfaktorisering og D_{154} er altså en Boolsk algebra.

(b)

Bestem $(11 \vee 7') \wedge 7 \; og \; (11 \wedge 7') \vee 7 \; i \; D_{154}$.

Vi bruger regnereglerne fra KBR, side 247. Her ses for den første, at:

$$(11 \vee 7') \wedge 7$$

Vi bruger regneregel 10a:

$$(7 \wedge 11) \vee (7 \wedge 7')$$

Derefter 11b:

$$(7 \wedge 11) \vee 0$$

$$7 \wedge 11$$

Derefter skal vi beregne GCD af disse 2 tal. De er indbyrdes primiske og derfor må:

$$GCD(11, 7) = 1$$

For den anden gælder, at:

$$(11 \wedge 7') \vee 7$$

Som vi bruger regneregel 10b på:

$$(7 \vee 11) \wedge (7 \vee 7')$$

Hvorefter vi bruger 11a:

$$(7 \vee 11) \wedge I$$

Og derefter 9b:

$$7 \vee 11$$

Dette skal vi beregne LCM af. De begge er primiske, så derfor kan man blot gange dem sammen. Derfor:

$$LCM(7, 11) = 77$$

Altså er de 2 tal 1 og 77

(c)

Vis, at de 2 Boolske polynomier i tre variable:

$$p(x, y, z) = ((x \wedge y)' \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee x'$$

og

$$q(x, y, z) = x' \vee y \vee z$$

er ækvivalente.

Vi ønsker at sætte $p(x, y, z) = q(x, y, z)$. Vi kigger derfor på udtrykket:

$$p(x, y, z) = ((x \wedge y)' \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee x'$$

Vi bruger regnereglerne fra KBR, side 247.
Ved brug af 10b:

$$p(x, y, z) = ((x \wedge y)' \wedge z) \vee (y \vee x') \wedge (x \vee x')$$

så bruges 11a:

$$p(x, y, z) = ((x \wedge y)' \wedge z) \vee (y \vee x') \wedge I$$

Derefter 9b:

$$p(x, y, z) = ((x \wedge y)' \wedge z) \vee y \vee x'$$

Herefter De Morgans lov:

$$p(x, y, z) = (x' \vee y' \wedge z) \vee y \vee x'$$

Så bruger vi 9b:

$$p(x, y, z) = (x' \vee I \wedge y' \wedge z) \vee y \vee x'$$

Så 9a:

$$p(x, y, z) = (I \wedge y' \wedge z) \vee y \vee x'$$

9b:

$$p(x, y, z) = (y' \wedge z) \vee y \vee x'$$

10b:

$$p(x, y, z) = (y' \vee y) \wedge (z \vee y) \vee x'$$

11a:

$$p(x, y, z) = I \wedge (z \vee y) \vee x'$$

9b:

$$p(x, y, z) = z \vee y \vee x'$$

Hvorefter at vi kan se at:

$$p(x, y, z) = q(x, y, z)$$

og de er derfor ækvivalente.

(d)

Bestem sandhedstabellen for p.

Nedenfor er sandhedstabellen tegnet over det reducerede udtryk fra forrige opgave:

x'	y	z	$x' \vee y \vee z$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1