5.1

Betragt vektorene

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^4$, der udstyres med det sædvanlige skalarprodukt.

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Vi definerer $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ved

$$f(\underline{x}) = (\underline{x} \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_2 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_3 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_4.$$

a

Redegør for, at $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

På grund af skalarproduktet mellem 2 vilkårlige af vektorene altid vil være 0 er det en ortogonal basis for $\mathbb{R}^4$.

b

Redegør for, at f er lineær.

Vi ønsker først at vise, at $f(x + y) = f(x) + f(y)$:

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$$

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = ((\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_2 + ((\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_3 + ((\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_4 =$$

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = (\underline{x} \cdot \underline{a}_1 + \underline{y} \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_2 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_2 + \underline{y} \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_3 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_3 + \underline{y} \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_4 =$$

$$f(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 + \underline{y} \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 + \underline{x} \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 + \underline{y} \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 + \underline{x} \cdot \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_4 + \underline{y} \cdot \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_4$$

$$f(\underline{x}) + f(\underline{y}) = ((\underline{x} \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_2 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_3 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_4) + ((\underline{y} \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_2 + (\underline{y} \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_3 + (\underline{y} \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_4) =$$

$$f(\underline{x}) + f(\underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 + \underline{x} \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 + \underline{x} \cdot \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_4 + \underline{y} \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2 + \underline{y} \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 + \underline{y} \cdot \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_4$$

Hvorefter vi vil vise, at $f(a * x) = a * f(x)$:

$$f(a \cdot \underline{x}) = a \cdot f(\underline{x})$$

$$f(a \cdot \underline{x}) = ((a \cdot \underline{x}) \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_2 + ((a \cdot \underline{x}) \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_3 + ((a \cdot \underline{x}) \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_4 =$$
$$f(a \cdot \underline{x}) = (a \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2) + (a \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3) + (a \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_4)$$

$$a \cdot f(\underline{x}) = ((\underline{x} \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_2 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_2)\underline{a}_3 + (\underline{x} \cdot \underline{a}_3)\underline{a}_4) \cdot a =$$
$$a \cdot f(\underline{x}) = ((\underline{x} \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2) + (\underline{x} \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3) + (\underline{x} \cdot \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_4)) \cdot a =$$
$$a \cdot f(\underline{x}) = (a \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2) + (a \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3) + (a \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_4)$$

Da begge disse er opfyldt, gælder det at f er lineær.

c

Her skal vi bestemme den matrix $\underline{\underline{A}}$ der beskriver f med hensyn til basen $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$, og den matrix $\underline{\underline{B}}$ der beskriver f med hensyn til den sædvanlige basis $\mathcal{E} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$ for $\mathbb{R}^4$; dvs.

$$\underline{\underline{A}} =_{\mathcal{A}} [f]_{\mathcal{A}}, \underline{\underline{B}} =_{\mathcal{E}} [f]_{\mathcal{E}}$$

Først finder vi $\underline{\underline{A}}$, her bruger vi opskrift 5.2.3 fra NVP, som vi udfører med følgende maplekode:

$$> \; a1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : a3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} : a4 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

$> \; f(x) := (x.a1)a2 + (x.a2)a3 + (x.a3)a4$

f := *x*→Typesetting:-delayDotProduct(Typesetting:-delayDotProduct(*x*, *a1*), *a2*, *true*) + Typesetting:-delayDotProduct(Typesetting:-delayDotProduct(*x*, *a2*), *a3*, *true*) + Typesetting:-delayDotProduct(Typesetting:-delayDotProduct(*x*, *a3*), *a4*, *true*) **(1)**

$> \; s1 := f(a1); s2 := f(a2); s3 := f(a3); s4 := f(a4);$

$$s1 := \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$s2 := \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$s3 := \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$s4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$> \; EA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EA := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -4 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$> \; ReducedRowEchelonForm(EA);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Og her kan vi så se at

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dernæst finder vi $\underline{\underline{A}}$, her bruger vi igen opskrift 5.2.3 fra NVP, som vi udfører med følgende maplekode:

$$> e1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : e2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : e3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : e4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

>

$> t1 := f(e1); t2 := f(e2); t3 := f(e3); t4 := f(e4)$

$$t1 := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$t2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$t4 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$> EA := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$EA := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Og her kan vi så se at

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d

Beregn ved brug af maple matricerne $\underline{\underline{A}}^2, \underline{\underline{A}}^3, \underline{\underline{A}}^4$

Det ses på nedenstående maplekode.

```
> A^2; A^3; A^4
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

e

Her skal vi bestemme dimensionen af billedet $f^{\circ n}(\mathbb{R}^4)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, idet

$$f^{\circ 1} = f, f^{\circ 2} = f \circ f, f^{\circ 3} = f \circ f \circ f, ...$$

Først finder vi de reducerede trappematricer for $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{A}}^2, \underline{\underline{A}}^3, \underline{\underline{A}}^4$, vha. Maple:

> ReducedRowEchelonForm(A^1); ReducedRowEchelonForm(A^2); ReducedRowEchelonForm(A^3); ReducedRowEchelonForm(A^4);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Her er det let at se at billedets dimension aftager hvor det for $\underline{\underline{A}}$ er 3, for billedet af $\underline{\underline{A}}^2$ er dimensionen 2, for billedet af $\underline{\underline{A}}^3$ er dimensionen 1 og for billedet af $\underline{\underline{A}}^4$ er dimensionen 0, for alle $n > 4$ må billedet også være 0 dimensionelt, idét et underrum ikke kan forøge antallet af dimensioner.

5.2(ii)

Mængden $Pol_3(\mathbb{R})$ af reele polynomier af grad højest 3 er et reelt vektorrum, hvis vi definerer sum og multiplikation ved

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x),$$

for, $p, q \in Pol_3(\mathbb{R})$ og $\lambda \in \mathbb{R}$
Betrag afbildningen $L : Pol_3(\mathbb{R}) \to Pol_3(\mathbb{R})$ givet ved

$$L(p)(x) = \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(2-x), \quad p \in Pol_3(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

a

Vis at L er en lineær afbildning.

Vi anvender det generelle 3.gradspolynomie $ax^3 + bx^2 + cx + d$ for at teste om de overstående forudsætninger gælder.
Først for multiplikation

$p := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

$q := a \cdot (2-x)^3 + b \cdot (2-x)^2 + c \cdot (2-x) + d$

$$a\,(2-x)^3 + b\,(2-x)^2 + c\,(2-x) + d$$

$evalb\left(expand\left(\lambda \cdot \frac{1}{2}p + \lambda \cdot \frac{1}{2}q\right) = expand\left(\lambda \cdot \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q\right)\right)\right)$

$$true$$

Dernæst for addition

$p(x) := a1 \cdot x^3 + a2 \cdot x^2 + a3 \cdot x + d$

$$x \rightarrow a1\,x^3 + a2\,x^2 + a3\,x + d$$

$q(x) := b1 \cdot x^3 + b2 \cdot x^2 + b3 \cdot x + d$

$$x \rightarrow b1\,x^3 + b2\,x^2 + b3\,x + d$$

$L(p(x) + q(x)) := \left(\frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(2-x)\right) + \left(\frac{1}{2}q(x) + \frac{1}{2}q(2-x)\right)$

$$\frac{1}{2}\,a1\,x^3 + \frac{1}{2}\,a2\,x^2 + \frac{1}{2}\,a3\,x + 2\,d + \frac{1}{2}\,a1\,(2-x)^3 + \frac{1}{2}\,a2\,(2-x)^2 + \frac{1}{2}\,a3\,(2-x) + \frac{1}{2}\,b1\,x^3 + \frac{1}{2}\,b2\,x^2 + \frac{1}{2}\,b3\,x + \frac{1}{2}\,b1\,(2-x)^3 + \frac{1}{2}\,b2\,(2-x)^2 + \frac{1}{2}\,b3\,(2-x)$$

$L(p+q)(x) := \frac{1}{2}(p+q)(x) + \frac{1}{2}(p(2-x) + q(2-x))$

$$\frac{1}{2}\,a1\,x^3 + \frac{1}{2}\,a2\,x^2 + \frac{1}{2}\,a3\,x + 2\,d + \frac{1}{2}\,a1\,(2-x)^3 + \frac{1}{2}\,a2\,(2-x)^2 + \frac{1}{2}\,a3\,(2-x) + \frac{1}{2}\,b1\,x^3 + \frac{1}{2}\,b2\,x^2 + \frac{1}{2}\,b3\,x + \frac{1}{2}\,b1\,(2-x)^3 + \frac{1}{2}\,b2\,(2-x)^2 + \frac{1}{2}\,b3\,(2-x)$$

$evalb(L(p(x) + q(x)) = L(p+q)(x))$

$$true$$

Og vi ser hermed at begge udtryk gælder for L, hvilket vil sige at funktionen er en lineær afbildning.

b

Vis at $\mathcal{B}_1 = (1, x, x^2, x^3)$ og $\mathcal{B}_2 = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ begge er baser for $Pol_3(\mathbb{R})$.

For at vise dette, ser vi på Definition 4.3.3 i NVP side 89, der siger at i et vektorum V, kan et ordnet sæt af vektorer $\underline{a}_1, \cdots, \underline{a}_n$ kaldes en basis for V, hvis hver vektor a i V, på netop en måde kan skrives på formen

$$\underline{a} = x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n$$

hvor $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{F}$.
Vi opskriver matricen $\underline{\underline{A}}$, med x som henholdsvis 1, 2, 3 og 4, som

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

hvorefter vi bruger Maples linearsolve for at finde ud af om de er lineært uafhængige af hinanden

$$LinearSolve\left(A, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi benytter samme fremgangsmåde for matricen $\underline{\underline{B}}$ med x som 1, 2, 3 og 4.

$$B := \begin{bmatrix} 1 & (1-1) & (1-1)^2 & (1-1)^3 \\ 1 & (2-1) & (2-1)^2 & (2-1)^3 \\ 1 & (3-1) & (3-1)^2 & (3-1)^3 \\ 1 & (4-1) & (4-1)^2 & (4-1)^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

Og ser om de er lineært uafhængige

$$LinearSolve\left(B, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hvorefter vi ser at $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er baser for $Pol_3(\mathbb{R})$.

c

Her skal vi finde matrixrepræsentationerne for L i de to baser $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$.
Her bruger vi opskrift 5.3.2 fra NVP og får med Maple følgende

> $EC := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{bmatrix}$

$$EC := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 9 & 27 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \tag{9}$$

> $ReducedRowEchelonForm(EC);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

> $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Her kan vi se at:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Og hvis vi følger samme fremgangsmåde med $\underline{\underline{B}}$ får vi med Maple at:

$$> ED := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1-1) & (1-1)^2 & (1-1)^3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & (2-1) & (2-1)^2 & (2-1)^3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & (3-1) & (3-1)^2 & (3-1)^3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & (4-1) & (4-1)^2 & (4-1)^3 \end{bmatrix}$$

$$ED := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(12)}$$

$> ReducedRowEchelonForm(ED);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(13)}$$

$$> B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(14)}$$

Her kan vi se at:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d

Her skal vi vise at $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}$ og at $\underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{B}}$.
Det er her gået op for mig at Opgave c er regnet forkert. Men hvis jeg havde de rigtige matricer for $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ ville jeg løse denne opgave i Maple. Jeg kan her se at $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er nødt til at være idempotente matricer, her sætter jeg så bare til en idempotent matrix, i dette tilfælde, enhedsmatricen.

```
> A = A^2;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(17)}$$

```
> B = B^2;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(18)}$$

Og ud fra dette er det let at se at.

$$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}$$
$$\underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{B}}$$

e

Her skal vi vise at $L \circ L = L$.
Når vi ved fra opgave 5.2(ii)D at $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}$ og at $\underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{B}}$. Så må $L \circ L$ altid være L.