MatIntroNat - Lynopgave 1

1.1

Betragt funktionerne f_1 og f_2 givet ved

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 7}{x + \sqrt{7}} \;\; og \;\; f_2(x) = \frac{x^2 - 7}{x + 2.645751311}$$

Lav et Maple-plot af graferne for de to funktioner med x i intervallet [-2.6458, -2.6457]. Forklar, hvad du ser.

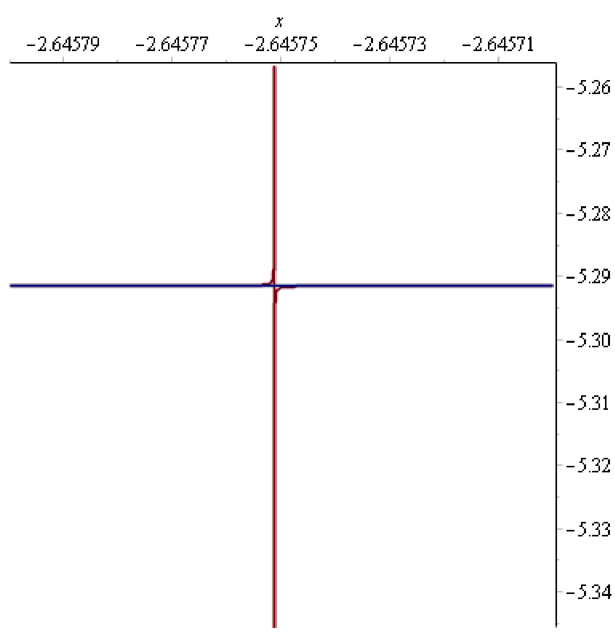
$$f1(x) := \frac{x^2 - 7}{x + \mathrm{sqrt}(7)};$$

$$x \rightarrow \frac{x^2 - 7}{x + \sqrt{7}}$$

$$f2(x) := \frac{(x^2 - 7)}{x + 2.645751311};$$

$$x \rightarrow \frac{x^2 - 7}{x + 2.645751311}$$

$$plot(\{f1(x), f2(x)\}, x = -2.6458 .. -2.6457);$$



Der ses ud fra figuren, at det er en dårlig afrunding af kvadratrodden i nævneren, da funktionerne ellers ville have ligget oven i hinanden. Netop til x-værdien -2.645751311 vil f_2 prøve at dividere med 0, hvilket ikke er muligt. Da $\sqrt{7}$ er irrationel og ikke har en eksakt værdi (da det er en uendelig talrække) vil der i f_1 aldrig deles med nul, mens den dog vil prøve, og fejle, for f_2, hvilket resulterer i hoppet i grafen.

1.2

a

Lad $z = 3 + 4i$ og $w = 2 + i$, beregn følgende:

$$z - 2w, z + w, z * w, \frac{z}{w}, w^2$$

Til at udregne disse resultater er der blevet benyttet regnereglerne på side 111 i Kalkulus (3.1.4)

$z - 2w = (3 + 4i) - 2(2 + i) = (3 + 4i) - (4 + 2i) = (3 - 4) - i(4 - 2) = -1 - 2i$

$z + w = (3 + i)i + (2 + i) = (3i + 4i^2) + (2 + i) = (3i - 4) + (2 + i) = 4i - 2$

$z * w = (3 * 2 - 4 * 1) + i(3 * 1 + 4 * 2) = 2 + 11i$

$\frac{z}{w} = \frac{3 + 4i}{2 + i} = \frac{3 * 2 + 4 * 1}{2^2 + 1^2} + i\frac{4 * 2 - 3 * 1}{2^2 + 1^2} = 2 + i$

$w^2 = (2 * 2 - 1 * 1) + i(2 * 1 + 2 * 1) = 3 + 4i$

b

Find modulus og argument for w

Modulus er lig med længden af vektoren, som fås ved formlen: $\sqrt{a^2 + b^2}$ hvor a og b læses ud fra de komplekse tal der er på formen: $z = a + bi$
Modulus, eller r, er derfor:

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Herefter findes argumentet til at være:

$$cos\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}, sin\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Altså er det:

$$\arctan(\frac{1}{2})$$

1.3

a

Udregn modulus og argument af det komplekse tal:

$$\frac{(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i)(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}i)}{(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i)i}$$

Ved hjælp af Maple, kan vi udregne disse værdier således:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}I\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}I\right)}{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}I\right)I}$$

$$-\frac{7}{10}+\frac{47}{20}\,I$$

abs((3));

$$\frac{1}{20}\sqrt{2405}$$

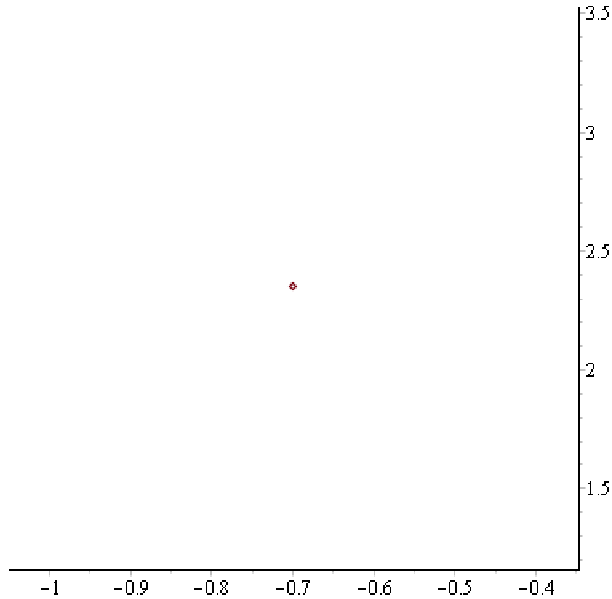
argument((3));

$$-\arctan\left(\frac{47}{14}\right)+\pi$$

[1]Modulus er altså: $\frac{1}{20}\sqrt{2405}$ og argumentet er: $-\arctan(\frac{47}{14})+\pi$
Det komplekse tal kan nu plottes i den komplekse plan ved hjælp af Maple, og ser således ud:

[1] 3-tallet i udregningerne refererer til det komplekse tal som er givet i opgaven 1.3a

plots[*complexplot*]([**(3)**], *style* = *point*);



Lad nu $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}i$. Der skal nu indtegnes følgende punkter i den komplekse plan

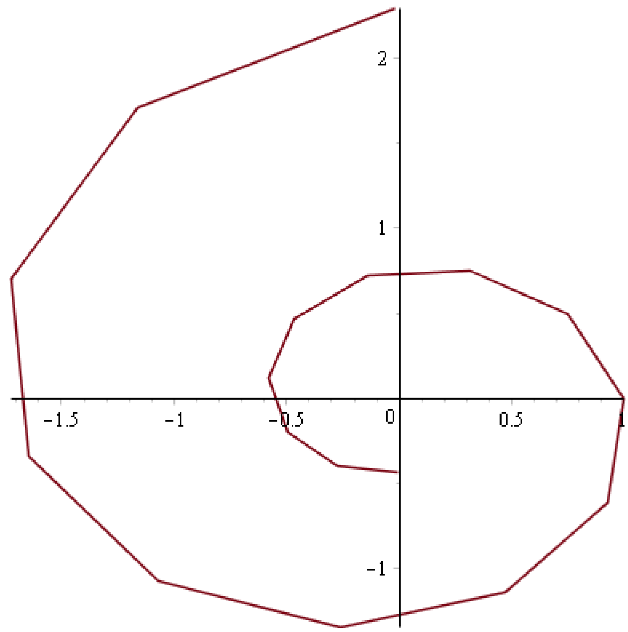
$$z^{-8}, z^{-7}, \ldots, z^{-1}, z^0, z, z^2, \ldots, z^8$$

og dette gøres hjælp hjælp af følgende Maple kommando:

$z := \frac{3}{4} + \frac{1}{2}I;$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}$$

$plots[complexplot]([seq(z^n, n = -8..8)], style = line);$



Det overstående er en vektorfunktion. Vi observerer at der er reelle tal idet den rammer tallinjen for de reelle tal.
Strukturen skyldes, fra TLO teorem 3.2.3, som siger når 2 komplekse tal, med modulus r_1 og r_2 og argument Θ_1 og Θ_2, ganges sammen vil modulus af tallet være $r_1 r_2$ og argumentet vil være $\Theta_1 + \Theta_2$. Da det komplekse tal vi kigger på ligger i intervallet $(-1, 1)$ for både a og b vil det medføre modulus bliver mindre jo større n bliver og modulus bliver større jo mindre n bliver.
Argumentet vil desuden vokse lineært da argumentet til z^n er givet ved $n * \Theta$ hvor Θ er argumentet til z.