MatIntroNat - Ugeopgave 6

Opgave 6.1

Beregn

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}(x,y)$$

for funktionen $f(x,y) = y^2(1+xy)$. Beregn endvidere

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(x,y)$$

Gør det samme for $g(x,y) = xy + cos(2x+y)$ og $h(x,y) = xln(x^2 - 2y)$.
Tegner der sig et mønster?
En skal løses med Maple og en skal løses uden.

For $f(x,y)$ starter vi med at differentiere for x først.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2(1+xy)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 + xy^3)$$

Vi kigger kun på leddene indholdende x, og derfor er

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,y) = y^3$$

Herefter differentieres resultatet efter y, og der fås at

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}(x,y) = 3y^2$$

Herefter skal $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(x,y)$ beregnes. Vi differentierer efter y først

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^2 + xy^3)) = 2y + 3xy^2$$

Og resultatet differentieres for x, så vi finder det endelig resultat

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(y^2(1+xy)) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}(2y + 3xy^2) = 3y^2$$

Vi løser nu $\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}(x,y)$ i Maple

$g(x, y) := x \cdot y + \cos(2\,x + y);$

$$(x, y) \to x\,y + \cos(2\,x + y)$$

$diff(g(x, y), x, y);$

$$1 - 2\cos(2\,x + y)$$

og herefter $\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(x,y)$

$diff(g(x, y), y, x);$

$$1 - 2\cos(2\,x + y)$$

Det samme gøres nu for $h(x,y) = xln(x^2 - 2y)$ med Maple, først $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}(x,y)$

$h(x, y) := x \cdot \ln(x^2 - 2\,y);$

$$(x, y) \to x \ln(x^2 - 2\,y)$$

$diff(h(x, y), x, y);$

$$-\frac{2}{x^2 - 2\,y} + \frac{4\,x^2}{(x^2 - 2\,y)^2}$$

Og herefter $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}(x,y)$

$diff(h(x, y), y, x);$

$$-\frac{2}{x^2 - 2\,y} + \frac{4\,x^2}{(x^2 - 2\,y)^2}$$

Vi ser altså at rækkefølgen vi differentierer x og y i ikke betyder noget for de anvendte funktioner, da resultatet er det samme.

Opgave 6.2

Opgaven besvares uden Maple. Definer $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ved

$$h(x,y) = \frac{cosx - cosy}{x^2 + y^2}$$

Bestem

$$H(x) := lim_{y\to 0} h(x,y),\ x \in \mathbb{R},$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Er H en kontinuert funktion af x?
Hvad siger dette om mulighederne for at vælge en værdi $c = h(0,0)$ sådan at h bliver kontinuert i hele $\mathbb{R}^2$?

Vi starter med at udregne $lim_{y\to 0}h(x,y)$ for $x \neq 0$.

$$lim_{y\to} h(x,y) = \frac{cosx - cos(0)}{x^2 + 0} = \frac{cosx - 1}{x^2},\ x \neq 0$$

Herefter beregnes $lim_{y\to 0}h(0,y)$

$$lim_{y\to 0}h(0,y) = lim_{y\to 0}\frac{1 - cosy}{y^2}$$

Dette giver et $\frac{0}{0}$ udtryk og vi benytter os derfor af L'Hôpitals regel

$$lim_{y\to 0}h(0,y) = lim_{y\to 0}\frac{1 - cosy}{y^2} = lim_{y\to 0}\frac{siny}{2y}$$

Da dette stadig er et $\frac{0}{0}$ udtryk bruger vi L'Hôpitals regel igen

$$lim_{y\to 0}h(0,y) = lim_{y\to 0}\frac{siny}{2y} = lim_{y\to 0}\frac{cosy}{2} = \frac{cos(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

Og vi har den endelige grænseværdi for $y \to 0$ for $x \neq 0$
Vi har nu funktionen

$$H(x) = \begin{cases} \frac{cosx-1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

For at kunne sige at $H(x)$ er kontinuert for x skal de have samme værdi i sammenfletningen, altså for $x = 0$. Det vil sige at grænseværdien (fra begge sider) skal være lige $\frac{1}{2}$.

$$lim_{x\to 0^-}H(x) = \frac{1}{2} \ \wedge \ lim_{x\to 0^+}H(x) = \frac{1}{2}$$

Da $cos(x)$ nærmer sig 1 for $x \to 0$ lige meget hvilken side vi nærmer os fra, og at x^2 nærmer sig 0 for $x \to 0$ lige meget hvilken side vi nærmer os fra behøver vi ikke tage højde for hvilken side vi nærmer os fra det det giver samme resultat, altså skal vi blot finde

$$lim_{x\to 0}\frac{cosx - 1}{x^2}$$

Dette er et $\frac{0}{0}$ udtryk of vi benytter os derfor af L'Hôpitals regel.

$$lim_{x\to 0}H(x) = lim_{x\to 0}\frac{-sinx}{2x}$$

Dette er stadig et $\frac{0}{0}$ udtryk bruger vi L'Hôpital endnu en gang.

$$lim_{x\to 0}H(x) = lim_{x\to 0}\frac{-cosx}{2} = -\frac{1}{2}$$

Da dette $-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ er $H(x)$ altså ikke en kontinuert funktion for x.
Dette vil sige at det ikke er muligt at vælge en værdi $c = h(0,0)$ så h er kontinuert i hele $\mathbb{R}^2$, da afhængigt af hvilken vinkel vi nærmer os $h(0,0)$ fra kan vi få en vilkårlig c-værdi mellem $-\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$.