MatIntroNat - Opgave 3

Opgave 5.1

Betragt funktionen $f(x,y) = \sqrt{4xy - 3y^2}$.

a

Bestem definitionsmængden D_f. Skitser, uden Maple, D_f i et xy-diagram.

Definitionsmængden er givet ved kombinationerne der ikke giver et negativt tal under kvadratroden, altså

$$4xy - 3y^2 \geq 0$$

Dette kan vi faktorisere til

$$y(4x - 3y) \geq 0$$

Kigger vi på løsninger for $y \geq 0$ ses at parentesen bliver ganget med et positivt tal og derfor skal der blot gælde

$$4x - 3y \geq 0$$

$$4x \geq 3y$$

$$x \geq \frac{3}{4}y$$

For løsninger for $y < 0$ bliver der multipliceret med et negativt tal, altså skal parentesen også være negativ eller 0 for at hele venstre side er positiv eller 0, så der skal gælde

$$4x - 3y \leq 0$$

$$4x \leq 3y$$

$$x \leq \frac{3}{4}y$$

Altså er definitionsmængden, D_f, bestemt ved

$$D_f = (x \geq \frac{3}{4}y \ \wedge \ y \geq 0) \ \vee \ (x \leq \frac{3}{4}y \ \wedge \ y < 0)$$

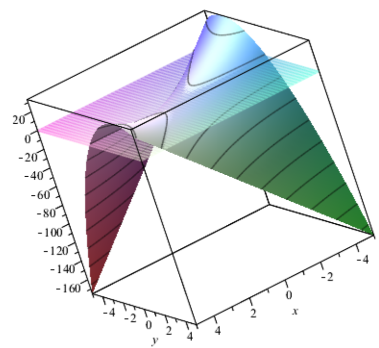
Definitionsmængden er skitseret på bilag 1, hvor det er de markerede områder.

b

Lav, med Maple, et **plot3d** af funktionen $4xy - 3y^2$, og sammensæt dette med et plot af xy-planen, således at uligheden $4xy - 3y^2 \geq 0$ illustreres.

Nedenfor ses et plot3d i Maple

plot3d([4*x*y-3*y^2, 0], x = -5 ..5, y = -5 ..5, axes = boxed, style = [patchcontour, wireframe]);



hvor uligheden $4xy - 3y^2 \geq 0$ er illustreret.

c

Bestem, uden Maple, $lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,rh)}{h}$ for alle $r \in [0, \frac{4}{3}]$.

Vi kan opskrive brøken $\frac{f(h,rh)}{h}$ som

$$\frac{\sqrt{4hrh - 3(rh)^2}}{h}$$

Hvor vi kan omskrive hele brøken

$$\frac{\sqrt{4h^2r - 3h^2r^2}}{h}$$

$$\frac{h\sqrt{4r - 3r^2}}{h}$$

Og da vi nu helt kan fjerne h fra brøken kan vi opskrive grænseværdien som

$$lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,rh)}{h} = \sqrt{4r - 3r^2}$$

Vi ønsker desuden at vise at der er en grænseværdi for alle $r \in [0, \frac{4}{3}]$ hvilket den er så længe udtrykket i kvadratroden ikke er negativ.
Vi finder derfor løsningerne til $-3r^2 + 4r = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 * (-3) * 0}}{2 * (-3)}$$

$$\frac{-4 \pm 4}{-6}$$

Hvoraf vi ser løsningerne

$$r1 = \frac{-4 + 4}{-6} = 0$$

$$r2 = \frac{-4 - 4}{-6} = \frac{4}{3}$$

Desuden ved indsættelse af $r = 1$ i ligningen er

$$4r - 3r^2 = 4 * 1 - 3 * 1^2 = 1$$

Altså må alle værdier i intervallet $[0, \frac{4}{3}]$ være ikke-negative og derved er der en grænseværdi for alle $r \in [0, \frac{4}{3}]$, nemlig

$$lim_{h \to 0^+} \frac{f(h, rh)}{h} = \sqrt{4r - 3r^2}$$

som fundet tidligere.

Opgave 5.2

a

Bestem alle Taylorpolynomierne omkring $x = 1$ for funktionen $f(x) = x^4 + 7x^2 - 2$ for (uden Maple)

Vi ser at det er et 4. grads polynomie, og altså kan det differentieres 5 gange

$$f\prime(x) = 4x^3 + 14x$$

$$f\prime\prime(x) = 12x^2 + 14$$

$$f\prime\prime\prime(x) = 24x$$

$$f\prime\prime\prime\prime(x) = 24$$

$$f\prime\prime\prime\prime\prime(x) = 0$$

Derefter bruger vi definition 11.1.2 i TL, til at opskrive Taylorpolynomierne omkring $x = 1$

$$T_n f(x) = \frac{6}{0!} + \frac{18x - 18}{1!} + \frac{26x^2 - 52x + 26}{2!} + \frac{24x^3 - 72x^2 + 72x - 24}{3!}$$
$$+ \frac{24x^4 - 96x^3 + 144x^2 - 96x + 24}{4!} + 0$$

Dette skriver vi op som

$$T_0 f = 6$$

$$T_1 f = 18x - 12$$

$$T_2 f = 13x^2 - 8x + 1$$

$$T_3 f = 4x^3 + x^2 + 4x - 3$$

$$T_4 f = x^4 + 7x^2 - 2$$

Som er Taylorpolynomierne omkring $x = 1$.

b

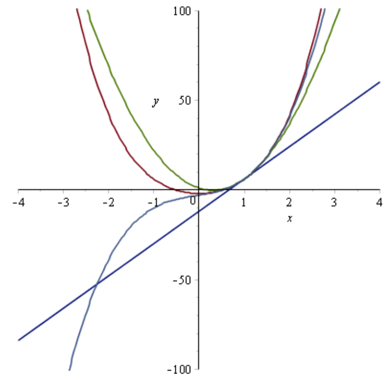
Indtegn (med Maple) resultatet resultatet fra (a) i et plot, som viser grafen for f samt de tre Taylorpolynomier $T_1 f, T_2 f$ og $T_3 f$. Vælg f.eks. x-intervallet $[3, -3]$.

Nedenfor ses plottet for f samt de første 3 Taylorpolynomier.

$f(x) := x^4 + 7x^2 - 2;$

$$x \to x^4 + 7x^2 - 2$$

$plot([f(x), mtaylor(f(x), x = 1, 2), mtaylor(f(x), x = 1, 3), mtaylor(f(x), x = 1, 4)], x = -4 ..4, y = -100 ..100);$



Her er mørkeblå grafen for $T_1 f$, grøn er grafen for $T_2 f$, lyseblå er grafen for $T_3 f$ og rød er grafen for f.

Opgave 5.3(i)

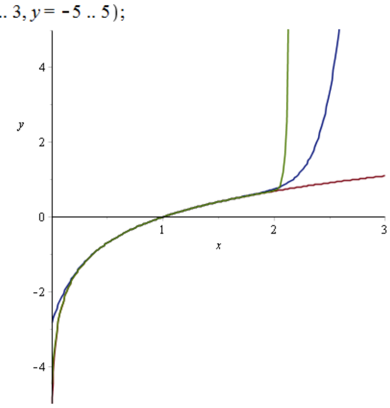
Betragt den naturlige logaritmefunktion $f(x) = ln(x)$, og lad $T_n\text{ln}$ være Taylorpolynomiet af grad n omkring $x = 1$. Benyt formlen for den n-te afledte af ln, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

a

Plot, med Maple, graferne for ln, $T_9\text{ln}$ og $T_{49}\text{ln}$ i et fælles plot.

Nedenfor ses det fælles plot

$plot([\ln(x), \text{mtaylor}(\ln(x), x = 1, 10), \text{mtaylor}(\ln(x), x = 1, 50)], x = 0 .. 3, y = -5 .. 5);$



hvor den røde er grafen for ln, den mørkeblå grafen for $T_9 ln$ og den grønne er grafen for $T_{49} ln$.

b

Argumenter, ud fra Taylors formel med restled, for at

$$|R_n ln(x)| = |ln(x) - T_n ln(x)| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

for $x > 1$. Udregn, med Maple, for $x = 2$, $x = 1.9$, $x = 2.1$, værdien af $T_{49} ln(x)$ og sammenlign med $ln(x)$. Forklar forskellen mellem tilfældene $x < 2$ og $x > 2$.

Vi benytter os a varianten 'Lagranges restledsformel' som ser ud på følgende måde

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Vi har desuden at

$$f^{n+1}ln(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$$

Derfor kan vi skrive restleddet med $a = 1$ som

$$R_n ln(x) = \frac{(-1)^n n! c^{-(n+1)}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

$$R_n ln(x) = \frac{(-1)^n c^{-(n+1)}}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

$$R_n ln(x) = \frac{\frac{(-1)^n}{c^{n+1}}}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

Da vi desuden har at c ligger mellem a og x af Lagranges restformel samt $x > 1$. Dette betyder at

$$|\frac{(-1)^n}{c^{n+1}}| \leq 1$$

Og derfra kan vi udlede at

$$|R_n ln(x)| = |\frac{\frac{(-1)^n}{c^{n+1}}}{n+1}(x-1)^{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

Eller blot

$$|R_n ln(x)| = |ln(x) - T_n ln(x)| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

hvilket er hvad vi ønskede at vise.

Vi beregner nu $T_{49} ln(x)$ for $x = 2$ samt $ln(2)$

```
evalf(eval(mtaylor(ln(x), x = 1, 50), x = 2));
```

0.7032471606

```
evalf(ln(2));
```

0.6931471806

Dernæst for $x = 1.9$ samt $ln(1.9)$

```
evalf(eval(mtaylor(ln(x), x = 1, 50), x = 1.9));
```

0.6419086500

```
evalf(ln(1.9));
```

0.6418538862

Og for $x = 2.1$ samt $ln(2.1)$

```
evalf(eval(mtaylor(ln(x), x = 1, 50), x = 2.1));
```

1.871666759

```
evalf(ln(2.1));
```

0.7419373447

Når vi kigger på udtrykket for den øvre begrænsning for restleddet

$$\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

ses at når $x = 2$ vil hele leddet $(x-1)^{n+1}$ altid være lig 1 og dette vil altså ikke have en effekt hele restleddet.
Ser vi på $x < 2$ ses at $(x-1)^n + 1$ vil blive mindre end 1 og derfor vil hele udtrykket for restleddet være mindre.
For $x > 2$ er $(x-1)^{n+1}$ være større end 1 og hele udtrykket for restleddet vil derfor blive større.
Dette er også tilfældet når vi kigger på vores udregnede værdier.