1 Første Frivillige opgave

1.1

Hvilke tal forekommer som ordener af elementer i gruppen $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? Samme spørgsmål for den symmetriske grupper S_3.

Da det er en gruppe under addition skal vi finde det (først) heltal multiplikation af elementet der mod 12 giver 0. Vi opstiller følgende tabel

Element	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$
Orden	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

Altså indgår tallene $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ som orderner af element i gruppen $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

For den symmetriske gruppe S_3 er ordenen for et element lig det mindste fælles multiplum af længderne af cyklerne der fås ved cykel dekomposition. Altså beregner vi først cykel dekompositionerne af elementerne i S_3 ved brug af algoritmen s. 30 i Dummit and Foote.

Værdier af σ_i	Cykel dekomposition af σ_i
$\sigma_1(1) = 1, \sigma_1(2) = 2, \sigma_1(3) = 3$	(1)(2)(3)=1
$\sigma_2(1) = 1, \sigma_2(2) = 3, \sigma_2(3) = 2$	(1)(2 3)=(2 3)
$\sigma_3(1) = 2, \sigma_3(2) = 1, \sigma_3(3) = 3$	(1 2)(3)=(1 2)
$\sigma_4(1) = 2, \sigma_4(2) = 3, \sigma_4(3) = 1$	(1 2 3)
$\sigma_5(1) = 3, \sigma_5(2) = 1, \sigma_5(3) = 2$	(1 3 2)
$\sigma_6(1) = 3, \sigma_6(2) = 2, \sigma_6(3) = 1$	(1 3)(2)=(1 3)

Hvor længderne og LCM(ordenerne) er henholdsvis

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \{1, 1, 1\}, & LCM &= 1 \\
\sigma_2 &= \{2\}, & LCM &= 2 \\
\sigma_3 &= \{2, 1\}, & LCM &= 2 \\
\sigma_4 &= \{3, 1\}, & LCM &= 3 \\
\sigma_5 &= \{3, 1\}, & LCM &= 3 \\
\sigma_6 &= \{2, 1\}, & LCM &= 2
\end{aligned}
$$

Altså indgår tallene $\{1, 2, 3\}$ som orderner i gruppen S_3.

1.2

Opg 18, [DF], side 40:
Let G be any group. Prove that the map from G to itself defined by $\psi : g \to g^2$ is a homomorphism if and only if G is abelian.

Hvis det er en homomorfi, betyder det at for alle $a, b \in G$ gælder $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$. Vi vil vise det begge veje, at hvis det er en homomorfi er den abelsk og hvis den er abelsk er det en homomorfi. Vi starter med at antage ψ er en homomorfi. Derved får vi

$$\begin{aligned}
\psi(ab) &= \psi(a)\psi(b) && \\
(ab)^2 &= a^2b^2 && \\
(ab)(ab) &= aabb && \\
ababb^{-1} &= aabbb^{-1} && b \text{ har et invers element vi kan gange på på begge sider} \\
aba &= aab && \text{der gælder at } b * b^{-1} = 1 \\
a^{-1}aba &= a^{-1}aab && a \text{ har et invers element vi kan gange på på begge sider} \\
ba &= ab && \text{der gælder at } a * a^{-1} = 1
\end{aligned}$$

Hvilket viser G er en abelsk gruppe. Nu antages at G er abelsk og vi vil vise ψ er en homomorfi. Vi har, at

$$\begin{aligned}
\psi(ab) &= (ab)(ab) && \\
&= a^2b^2 && \text{Da G er abelsk} \\
&= \psi(a)\psi(b) &&
\end{aligned}$$

Altså må ψ være en homomorfi.