3.1

Vi betragter for hvert $n \in \mathbb{N}$ $n \times n$-matricen $\underline{\underline{F_n}}$ givet på formen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a

Der skal beregnes matricer i Maple og findes en sammenhæng for $\underline{\underline{F_n}}$.

På baggrund af resultaterne fra bilag 1, opgave 3.1a, ses at determinanten af $\underline{\underline{F_n}}$ er givet ved $n-1$ hvor fortegnet alternerer. Altså er alle ulige matricer n positive og alle lige matricer n er negative.

b

Der ønskes et matematisk argument for sammenhængen og en diskussion om hvilken af de 3 beregningsmetoder for determinanten der er bedst egnet til at producere sådan et argument.

Her benyttes rækkeoperationsmetoden til at producere et argument, da hvis man trækker første række fra alle øvrige rækker, og derefter lægger alle rækker til den øverste række vil man få en nedre trekants matrix, hvor positionen række et og søjle et vil være $n-1$ og resten af diagonalen vil være -1.
Da vi ved at determinanten er lig diagonalen ganget sammen i en nedre trekant matrice får vi altså:

$$det(n) = (n-1) * (-1)^{n-1}$$

Som er i overensstemmelse med hypotesen fra (a).

3.2ii

a

Der skal redegøres for, at der bliver brugt $(n-1) * n!$ multiplikationer til at beregne determinanten af en $n \times n$-matrix efter definitionen.

For alle leddene af produkter ganges n tal sammen, som giver $n-1$ multiplikationer. Vi ved, at der i determinanten, efter definitionen, at der er $n!$ permutationer. Derfor vil der altså være $(n-1) * n!$ multiplikationer for en $n \times n$ matrix.
Hvis fortegnet tælles med som en multiplikation er der $n * n!$ multiplikationer.

b

Der skal redegøres, at der i almindelighed bruges flere end $n!$ multiplikationer til at beregne determinanten af en $n \times n$-matrix efter udviklingsmetoden.

Vi betrager en 2×2 matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Hvor man ved udviklingsmetoden ville få:

$$a * det \left(d\right) - b * det \left(c\right)$$

Hvor der ses, at der er, ihvertfald, 2 multiplikationer.
Ved en 3×3 matrix konstrueres netop 4 af disse 2×2 matricer, og der vil derfor være brugt 8 multiplikationer.
Igen ved en 4×4 matrix bruges 4 af 3×3 matricer, og der vil derfor blive brugt 32 multiplikationer, som er mere end $4! = 24$ multiplikationer.
Derfor bliver der brugt flere en $n!$ multiplikationer ved udviklingsmetoden.

c

Der skal forklares hvilket eksperiment der er udført med Maple koden fra bilag 1.

Funktionen time fra Maple returnerer den tid det har taget Maple at udregne determinanten.
RandomMatrix konstruerer en tilfælde matrix i givne dimensioner, hvor alle indgange er i mængden -99 til 99.
Der er altså tale om, at kurven plotter tiden det tager at udregne determinanten af en tilfældig $n \times n$ matrix som en funktion af n. I dette tilfælde er det kun for $0 \leq n \leq 100$.

d

Der skal redegøres for, at (a) og (b) viser at Maple ikke kan bruge definition eller udviklingsmetoden når det udregner determinanter.

Vi ser, at udviklingsmetoden og definitionen begge udvikler sig eksponentielt, og beregningstiden ville derfor konstant tage længere tid. I plottet fra (c) ses, at dette ikke er tilfældet for Maple. Derfor kan Maple ikke benytte sig af disse 2 metoder.