# Dis2 Eksamen 2015
# 1806922265

January 16, 2015

## Opgave 1

### a

Grunden til at

$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil = \frac{1}{4}(k^2 - [k \text{ er ulige}]) \tag{1}$$

er at hvis vi har et lige $k$, så har vi

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}\frac{k}{2} &= \frac{k^2}{4} \\ &= \frac{1}{4}(k^2) \end{aligned}$$

Men når vi har et ulige $k$, så får vi

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{2}\frac{k+1}{2} &= \frac{(k-1)(k+1)}{4} \\ &= \frac{1}{4}(k^2 - 1) \end{aligned}$$

Hvor vi har brugt at det er en kvadratsætning. Disse kan altså sættes sammen til det givne udtryk i (1) da $-1$ kun kommer med når $k$ er ulige.

### b

Vi vil bestemme det lukkede udtryk for

$$\sum_{k=1}^{n} [k \text{ er ulige}]$$

Vi ser at summen stiger med 1 hver gang $k$ er ulige, altså skal vi bare tælle de ulige tal mellem 1 og $n$, så

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[k \text{ er ulige}] &= [1 \leq 2k-1 \leq n] \\ &= [\frac{1+1}{2} \leq k \leq \frac{n+1}{2}] \\ &= [1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}]\end{aligned}$$

Vi skal passe på $n$, da når $n$ er lige, så får vi en rest på $\frac{1}{2}$ i $\frac{n+1}{2}$ og da vi kune arbejder med heltal $k$, så mister vi altså et $k$. Derfor har vi

$$\begin{aligned}[1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}] &= \frac{n+1}{2}[k \text{ er ulige}] + \frac{n}{2}[k \text{ er lige}] \\ &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\end{aligned}$$

Som er vores lukkede udtryk.

## c

Hvis vi bruger informationen fra de tidligere opgaver har vi at

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}(k^2 - [k \text{ er ulige}]) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}[k \text{ er ulige}]\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)\end{aligned}$$

Summen for kvadrattal kender vi, den er nemlig $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, så vi får

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{4}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \\ &= \frac{n^3}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n}{24} - \frac{1}{4}\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\end{aligned}$$

Hvilket er vores lukkede udtryk for $a_n$.
Vi kan desuden finde et $p(n)$, så $a_n = \lfloor p(n) \rfloor$, hvis vi kigger på hvor meget det sidste led gør for summen. Ved at fjerne ceilings bliver leddet $\frac{1}{8}$ mindre. Det vil altså sige at det totale led er $\frac{1}{8}$ større. Dette korrigeres der så for ved at tage floors af det totale udtryk, så vi får blot

$$p(n) = \frac{n^3}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n}{24} - \frac{n}{8}$$

Samt et $q(n)$ som opfylder, at $a_n = \lceil q(n) \rceil$. Det kan vi gøre ved at ændre udtrykket for $a_n$ til at indeholde en floor istedet for en ceiling, så vores $q(n)$ bliver

$$q(n) = \frac{n^3}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n}{24} - \frac{n+1}{8}$$

Dette virker da det sidste led bliver $\frac{1}{8}$ større, som gør det totale led bliver $\frac{1}{8}$ mindre, så derfor runder vi op for at korrigere for det.

# Opgave 2

## a

Vi kan udtrykke antallet af perler der skal til at fylde pladen ved

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 6n$$

Der er inkluderet et centrum der ifølge figurene i opgaveteksten indgår.
Denne sum kan løses let da vi kender summen af blot $n$ (trekantstallene) til at være $\frac{n(n+1)}{2}$, så

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 6\sum_{k=1}^{n} n \\ &= 1 + 6\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= 1 + 3n^2 + 3n \end{aligned}$$

Som er vores lukkede udtryk.

## b

Vi kan udtrykke måden at fylde en enkelt cirkel med to forskellige slags perler ved

$$N(m,n) = \frac{1}{m}\sum_{d\backslash m} \varphi(d) n^{m/d} \tag{2}$$

hvor $m$ er antal pladser der skal fyldes og $n$ er antallet af forskellige perler.
Idet der er i alt 6 rotationer, hvor af hver "sjette del" af pladen kan fyldes med $2^{((n^2+n)/2)}$ (potensen er kvadrattallene). Da dette er antallet af unikke måder perlerne kan sættes på de $\frac{n^2+n}{2}$ stifter, kan vi se dette som det nye antal "farver" for hver sjettedel. Vi kan derfor bruge (2) til at udtrykke $c_n$. Vi husker på at vi har en perle i midten som kan antage to farver,

altså

$$\begin{aligned}
c_n &= 2 \cdot N(6, 2^{((n^2+n)/2)}) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6} \sum_{d \backslash 6} \varphi(d) \left(2^{(n^2+n)/2}\right)^{6/d} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{d \backslash 6} \varphi(d) \left(2^{(n^2+n)/2}\right)^{6/d}
\end{aligned}$$

Denne kan selvfølgelig skrives ud idet vi kender alle divisorer i 6, men det gør blot udtrykket meget langt.

### c

Der er brugt computer til at finde begge værdier. Vi får, at

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1}{3} \sum_{d \backslash 6} \varphi(d) \left(2^{(2^2+2)/2}\right)^{6/d} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{d \backslash 6} \varphi(d) 8^{6/d} \\
&= 87600
\end{aligned}$$

som vi ønskede. Desuden fås

$$\begin{aligned}
c_6 &= \frac{1}{3} \sum_{d \backslash 6} \varphi(d) \left(2^{(2^6+6)/2}\right)^{6/d} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{d \backslash 6} \varphi(d) 2097152^{6/d} \\
&= 14178431955039102645844505448482340864
\end{aligned}$$

Hvor $2097152 = 2^{21}$ og vores endelige tal er 38-cifret som vi ønskede at få.

# Opgave 3

### a

Hvis vi sætter klodsen der rager en udover lig længde 2, vil vi have den samme figur (på hovedet), men med en mindre i længde, altså $u_{n-1}$.
Hvis vi sætter klodsen til at være af længden 3, tvinger det den næste klods til også at være af længden 3, hvorved vi har samme figur, men med tre mindre i længden, altså $u_{n-3}$.
Vi ser at ved den første totale længde $n$ hvor det er muligt at bygge en mur med disse klodser er ved $n = 2$. Altså må vi bruge dette som basistilfælde. Ved at sætte dem sammen får vi altså

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-3} + [n = 2]$$

som vi ville nå frem til.
Herefter har vi at

$$
\begin{aligned}
U(z) &= \sum_n u_n z^n \\
&= \sum_n u_{n-1} z^n + \sum_n u_{n-3} z^n + \sum_n [n=2] z^n \\
&= \sum_n u_n z^{n+1} + \sum_n u_n z^{n+3} + z^2 \\
&= zU(z) + z^3 U(z) + z^2
\end{aligned}
$$

Derved får vi, ved isolering, at

$$
U(z) = \frac{z^2}{1-z-z^3}
$$

## b

Vi ser at $a_n$ kan gives ved

$$
a_n = [n=2] + [n=3] + 2u_{n-3}
$$

Hvor de første to led er basistilfældende. Det sidste led er ved at overveje hvis vi lægger en klods med længde 2 tvinger vi klodsen ovenpå til at være af længden 3. Derved får vi en figur der er givet ved $u_{n-3}$. Hvis vi lagde en med længde 2 ville vi tvinge en af længde 3 ovenpå. Derfor får vi 2 af disse led.
Nu ser vi det sidste led jo kan skrives som

$$
\begin{aligned}
2\sum_n u_{n-3} z^n &= 2\sum_n u_n z^{n+3} \\
&= 2z^3 \sum_n u_n z^n
\end{aligned}
$$

Nu kan vi genkende summen i udtrykket til at være $U(z)$, som vi kender, så vi skriver $a_n$ som

$$
\begin{aligned}
a_n &= [n=2] + [n+3] + 2z^3 U(z) \\
&= z^2 + z^3 + 2z^3 \frac{z^2}{1-z-z^3} \\
&= z^2 + z^3 + \frac{2z^5}{1-z-z^3}
\end{aligned}
$$

Som vi ville vise.

# Opgave 4

## a

Hvis vi ser på ligningen (*), er det klart at der for $n = 1$ kun er en mulighed for hvad $d_0$ kan være, nemlig 0. Hvis man dernæst beregner $n = 2$ kan vi se at vi får to ligninger indeholdende et $d_k$. Vi kender det ene, $d_1$, og derfor er der kun en ligning der skal løses. På denne måde kan vi blive ved, hvor vi hele tiden får en ukendt mere i ligningen og derfor er rækken defineret da vi kun har et valg hver gang.
Dette kan muligvis lettere ses når vi beregner de første fem værdier for $d_n$ ved at løse (*)

$$d_1 : \ [2\backslash 1] = \frac{1!}{1! \cdot 0!} d_1 \ \Leftrightarrow \ 0 = d_1 \ \Leftrightarrow \ d_1 = 0$$
$$d_2 : \ [2\backslash 2] = \frac{2!}{1! \cdot 1!} d_1 + \frac{2!}{2! \cdot 0!} d_2 \ \Leftrightarrow \ 1 = 2 \cdot 0 + d_2 \ \Leftrightarrow \ d_2 = 1$$

$$d_3 : \ [2\backslash 3] = \frac{3!}{1! \cdot 2!} d_1 + \frac{3!}{2! \cdot 1!} d_2 + \frac{3!}{3! \cdot 0!} d_3 \ \Leftrightarrow \ 0 = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + d_3 \ \Leftrightarrow \ d_3 = -3$$
$$d_4 : \ [2\backslash 4] = \frac{4!}{1! \cdot 3!} d_1 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} d_2 + \frac{4!}{3! \cdot 1!} d_3 + \frac{4!}{4! \cdot 0!} d_4 \ \Leftrightarrow \ 1 = 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot -3 + d_4$$
$$\Leftrightarrow \ d_4 = 7$$
$$d_5 : \ [2\backslash 5] = \frac{5!}{1! \cdot 4!} d_1 + \frac{5!}{2! \cdot 3!} d_2 + \frac{5!}{3! \cdot 2!} d_3 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} d_4 + \frac{5!}{5! \cdot 0!} d_5$$
$$\Leftrightarrow \ 0 = 5 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot -3 + 5 \cdot 7 + d_5 \ \Leftrightarrow \ d_5 = -15$$

Altså ved at løse for den eneste ukendte hver gang kan vi finde værdierne af $d_n$.

## c

Hvis vi kigger på ligningen fra (b) ser vi at sum leddene kun antager værdier når $k$ er lige, altså giver det kun mening at kigge på de tilfælde hvor $k$ er lige.
Vi kan altså omskrive ligningen fra (b) til

$$d_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{2k}$$

Vi kan beholde $n$ som vores øvre grænse, da hvis $2k$ overstiger $n$ giver binomialkoefficienten bare 0.
Denne sum kender vi (når $k$ går fra 0 til $n$), den er netop $2^{n-1}$. Vi husker også på at $k$ starter fra 1. Altså trækker vi leddet $\binom{n}{0}$ fra, så

$$d_n = (-1)^n \left( 2^{n-1} - \binom{n}{0} \right)$$
$$= (-1)^n (2^{n-1} - 1)$$

Som er vores endelige lukkede udtryk.