

# Finite Difference Method for HJB Equations

## Présentation du projet d'EDP 2022

Rathea UTH, Nouredine LARBI

**Responsable du cours:** M. Olivier BOKANOWSKI

23 Février 2022

# Sommaires

- ① Équation d'HJB du premier ordre
  - Schéma d'Euler Explicite
  - Amélioration de l'ordre de consistance
  - Schéma d'Euler Implicite
- ② Équation d'HJB du second ordre
  - Schéma d'Euler Explicite
  - Schéma d'Euler Implicite
- ③ Butterfly option pricing with uncertain volatility
  - Schéma d'Euler Implicite
  - Schéma d'Euler Implicite du second ordre : BDF2
- ④ Conclusion

# Équation d'HJB du premier ordre : l'équation d'Eikonal

## Une équation d'Eikonal

On cherche une approximation numérique de  $v = v(t, x)$  solution de l'équation aux dérivés partielles suivante, pour  $t \in (0, T)$ ,  $x \in \Omega := (S_{\min}, S_{\max})$  :

$$\begin{cases} v_t(t, x) + c |v_x(t, x)| = 0, & t \in (0, T), x \in (S_{\min}, S_{\max}) . \\ v(t, S_{\min}) = v_\ell(t) & t \in (0, T) \\ v(t, S_{\max}) = v_r(t) & t \in (0, T) \\ v(0, x) = v_0(x) & x \in (S_{\min}, S_{\max}) \end{cases} \quad (1)$$

- La valeur initiale :  $v_0(x) = - \left( \max(1 - x^2, 0) \right)^2$
- Les paramètres :  $(c, T, S_{\min}, S_{\max}) = (1, 1, -3, 3)$
- Les conditions de bords :  $v_r(t) = v_\ell(t) = 0$
- **Remarque** :  $c |v_x| = \max(cv_x, -cv_x)$

## Schéma d'Euler Explicite

- Les maillages discrets :  $h := \frac{S_{\max} - S_{\min}}{I+1}$ ,  $\Delta t := \frac{T}{N}$
- Points de maillage :  $x_j := S_{\min} + jh$ ,  $j = 0, \dots, I+1$
- Maillage de temps :  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, \dots, N$
- Ce schéma est de l'ordre 1 en temps et en espace

### Schéma d'Euler Explicite

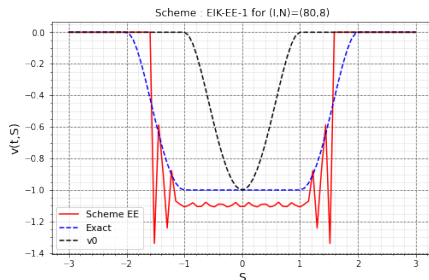
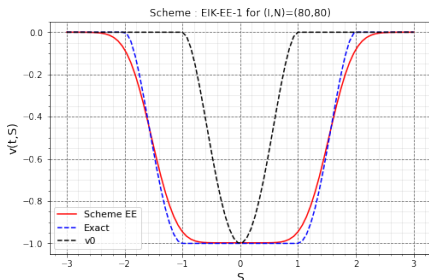
$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \max \left( c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h}, -c \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} \right) = 0$$

$$n = 0, \dots, N-1; j = 1, \dots, I$$

$$U_0^n = v_\ell(t) \equiv 0, \quad U_{I+1}^n = v_r(t) \equiv 0 \quad n = 0, \dots, N$$

$$U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I$$

# Graphiques du Schéma d'Euler Explicite (EE)



**Figure** – Graphe de l'équation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Explicite (EE). (a) Pour  $N = I = 80$ . (b) Pour  $I = 80, N = 8$ .

## Tableau d'erreurs du schéma d'Euler Explicite (EE)

La valeur exacte pour  $S_{val} = 1.5$  est :  $-0.5625$

	I	N	U(s)	error	order alpha
0	10	10	-0.458256	0.104244	NaN
1	20	20	-0.499857	0.062643	0.787587
2	40	40	-0.521524	0.040976	0.634454
3	80	80	-0.537191	0.025309	0.707628
4	160	160	-0.548287	0.014213	0.839949
5	320	320	-0.555030	0.007470	0.932146

Figure – Tableau d'erreurs de l'equation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Forward

## Graphiques du Schéma d'Euler Explicite (EE)

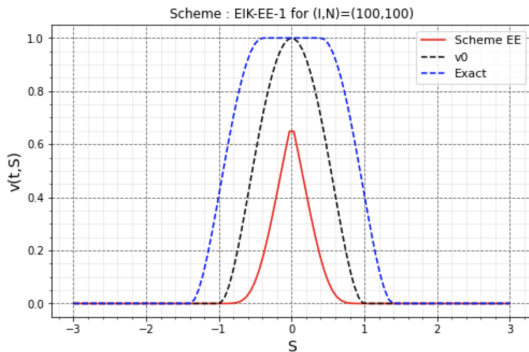


Figure – Graphe de l'équation Eikonal en utilisant le schéma EE pour  $I = N = 100$  avec  $v_0(x) = \left(\max(1 - x^2, 0)\right)^2$  et  $T = 0.4$

## Amélioration de l'ordre de consistance : Schéma modifié

En introduisant :

$$\tilde{D}^- U_j^n = \frac{3U_j^n - 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n}{2h} \quad \text{et} \quad \tilde{D}^+ U_j^n = -\frac{3U_j^n - 4U_{j+1}^n + U_{j+2}^n}{2h}$$

Schéma d'Euler Explicite en utilisant le schéma à trois points vers la gauche

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \max \left( c\tilde{D}^- U_j^n, -c\tilde{D}^+ U_j^n \right) = 0 \quad (3a)$$

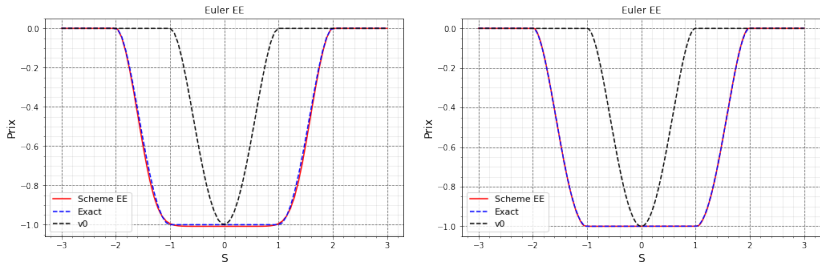
$$n = 0, \dots, N-1; \quad j = 1, \dots, I$$

$$U_0^n = v_\ell(t_n) \equiv 0, \quad U_{I+1}^n = v_r(t_n) \equiv 0 \quad n = 0, \dots, N \quad (3b)$$

$$U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I \quad (3c)$$



# Graphiques Schéma d'Euler Explicite (EE) modifié



**Figure** – Graphe de l'équation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Forward modifié. (a) Pour  $N = I = 80$ . (b) Pour  $I = 800, N = 800$ .

## Tableau d'erreurs du schéma d'Euler Explicite (EE) modifié

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	10	-0.698748	-0.136248	NaN	NaN	0.000000
1	20	20	-0.653443	-0.090943	0.583193	0.625149	0.008221
2	40	40	-0.628261	-0.065761	0.467731	0.484578	0.000000
3	80	80	-0.594177	-0.031677	1.053781	1.072771	0.008010
4	160	160	-0.569726	-0.007226	2.132274	2.151493	0.043710
5	320	320	-0.565275	-0.002775	1.380872	1.387096	0.139304
6	640	640	-0.563614	-0.001114	1.316906	1.319874	2.142348

Figure – Tableau d'erreurs de l'equation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Forward modifié

⇒ L'erreur a été améliorée, mais toujours d'ordre  $\approx 1$  en temps et en espace

## Amélioration de l'ordre de consistance : Runge Kutta 2

En notant  $U^{n+1} = S^1(U^n)$  pour le schéma d'équation (3). On a alors :

$$S^1 : U \mapsto U - \Delta t. \max \left[ c(\tilde{D}_{mat}^- U + \tilde{q}^-(t_n)), -c(\tilde{D}_{mat}^+ U + \tilde{q}^+(t_n)) \right]$$

### Schéma d'Euler Explicite : Runge Kutta 2

On considère le schéma de Runge Kutta suivant :

$$U^{n+1} = \frac{1}{2} (U^n + S^1(S^1(U^n)))$$

avec :

$$S^1 : U \mapsto U - \Delta t. \max \left[ c(\tilde{D}_{mat}^- U + \tilde{q}^-(t_n)), -c(\tilde{D}_{mat}^+ U + \tilde{q}^+(t_n)) \right]$$

## Graphiques Schéma d'Euler Explicite (EE) : Runge Kutta 2

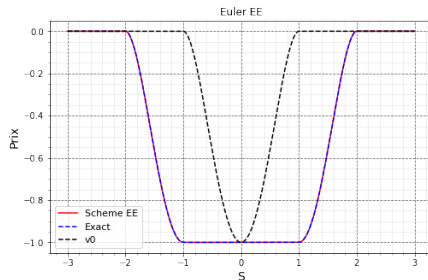
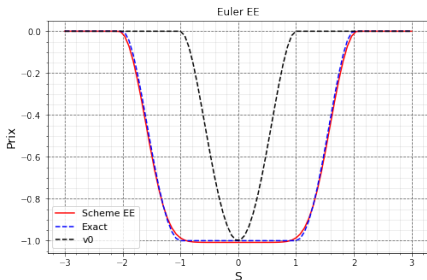


Figure – Graphe de l'équation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler via RK2. (a) Pour  $N = I = 80$ . (b) Pour  $I = 800, N = 800$ .

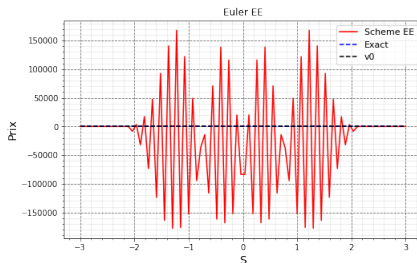
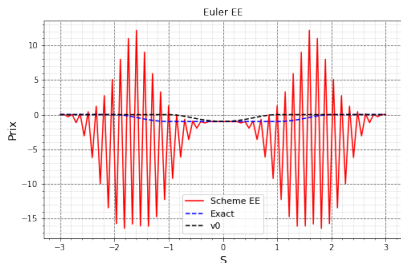
## Tableau d'erreurs du schéma d'Euler Explicite (EE) Ordre 2

On observe que le schéma RK2 est d'ordre (2, 2), grâce au tableau suivant :

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	10	-0.662104	-0.099604	NaN	NaN	0.000814
1	20	20	-0.622980	-0.060480	0.719730	0.771510	0.004465
2	40	40	-0.604358	-0.041858	0.530955	0.550079	0.008472
3	80	80	-0.584620	-0.022120	0.920183	0.936765	0.021941
4	160	160	-0.567385	-0.004885	2.178948	2.198588	0.113173
5	320	320	-0.563836	-0.001336	1.870059	1.878488	0.429523
6	640	640	-0.562842	-0.000342	1.965302	1.969732	1.870528

Figure – Tableau d'erreurs de l'équation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler : RK2

# Graphiques Schéma d'Euler Explicite (EE) : Runge Kutta 2, condition CFL



**Figure** – Graphe de l'équation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler via RK2. (a) Pour  $I = 80$  et  $N = 20$ . (b) Pour  $I = 80$  et  $N = 8$ .

## Tableau d'erreurs du schéma d'Euler Explicite (EE) Ordre 2 : Explosion

	I	N	U(s)		error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	1	-2.446657e+00	-1.884157e+00		NaN	NaN	0.000000
1	20	2	-3.043823e+00	-2.481323e+00		-0.397191	-0.425765	0.000000
2	40	4	-2.596379e+01	-2.540129e+01		-3.355720	-3.476585	0.000000
3	80	8	2.858584e+04	2.858641e+04		-10.136212	-10.318876	0.009564
4	160	16	-4.458903e+13	-4.458903e+13		-30.538712	-30.813978	0.034840
5	320	32	3.240610e+30	3.240610e+30		-56.012354	-56.264836	0.209870
6	640	64	-2.264472e+68	-2.264472e+68		-125.716177	-125.999543	0.872838

Figure – Tableau d'erreur du schema RK2

### Remarque

- Le schéma est soumis à une certaine condition CFL de stabilité

# Schéma d'Euler Implicite

## Schéma d'Euler Implicite

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \max \left( c \frac{U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{h}, -c \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h} \right) = 0$$

$$n = 0, \dots, N-1; j = 1, \dots, I$$

$$U_0^n = v_\ell(t) \equiv 0, \quad U_{I+1}^n = v_r(t) \equiv 0 \quad n = 0, \dots, N$$

$$U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I$$

## Remarques

- Ce schéma est de l'ordre 1 en temps et en espace
- Pour l'implémentation, on utilise la méthode de **"semi-smooth" Newton**



# Graphiques du Schéma d'Euler Implicite (EI)

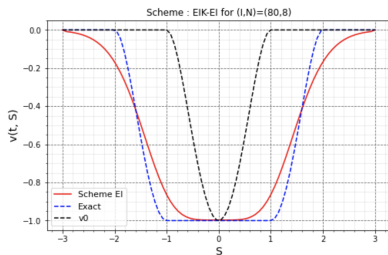
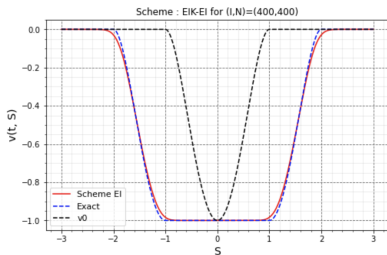


Figure – Graphique de l'équation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Implicite (EE). (a) Pour  $N = I = 400$ . (b) Pour  $I = 80, N = 8$ .

## Tableau d'erreurs (1/2)

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	1	-0.349821	0.212679	NaN	NaN	0.159191
1	20	2	-0.419287	0.143213	0.570510	0.611554	0.013164
2	40	4	-0.461938	0.100562	0.510083	0.528455	0.084507
3	80	8	-0.493825	0.068675	0.550226	0.560142	0.012591
4	160	16	-0.519190	0.043310	0.665095	0.671090	0.077032
5	320	32	-0.538097	0.024403	0.827630	0.831360	0.114709
6	640	64	-0.549933	0.012567	0.957431	0.959589	1.610012

Figure – Tableau d'erreurs de l'equation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Implicite

### Remarques

- Ce schéma est stable, inconditionnellement par rapport aux pas de maillage
- Ce n'est pas le cas pour le schéma d'Euler Explicite !

## Tableau d'erreurs (2/2)

	I N		U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	1	-1.502630e-01	4.122370e-01	NaN	NaN	0.000968
1	20	2	-1.836735e-01	3.788265e-01	0.121937	0.130709	0.001261
2	40	4	-2.899588e-01	2.725412e-01	0.475063	0.492174	0.004820
3	80	8	-1.150614e+00	-5.881142e-01	-1.109622	-1.129618	0.008533
4	160	16	-8.030640e+00	-7.468140e+00	-3.666581	-3.699630	0.024019
5	320	32	-1.448551e+05	-1.448545e+05	-14.243496	-14.307701	0.105657
6	640	64	-1.584771e+13	-1.584771e+13	-26.705094	-26.765288	0.601581

Figure – Tableau d'erreurs de l'equation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Explicite

## Schéma d'Euler Implicite d'ordre supérieur

On introduit :

$$\tilde{D}^- U_j^{n+1} = \frac{3U_j^{n+1} - 4U_{j-1}^{n+1} + U_{j-2}^{n+1}}{2h} \quad \text{and} \quad \tilde{D}^+ U_j^{n+1} = -\frac{3U_j^{n+1} - 4U_{j+1}^{n+1} + U_{j+2}^{n+1}}{2h}$$

### Schéma d'Euler Implicite d'ordre supérieur (variante)

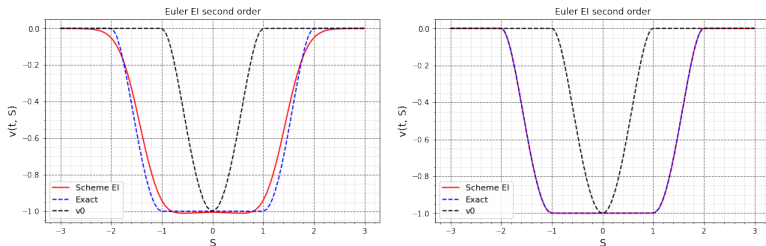
$$\frac{3U_j^{n+1} - 4U_j^n + U_j^{n-1}}{2\Delta t} + \max \left( c\tilde{D}^- U_j^{n+1}, -c\tilde{D}^+ U_j^{n+1} \right) = 0$$

$$n = 0, \dots, N-1; \quad j = 1, \dots, I$$

$$U_0^n = v_\ell(t_n) \equiv 0, \quad U_{I+1}^n = v_r(t_n) \equiv 0 \quad n = 0, \dots, N$$

$$U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I$$

# Graphiques du Schéma d'Euler Implicite (EI)



**Figure** – Graphe de l'équation Eikonal en utilisant le schéma d'Euler Implicite (EE) d'ordre supérieur. (a) Pour  $I = 80, N = 8$ . (b) Pour  $I = 400, N = 400$

## Remarques

- En tant que schéma implicite, il n'est pas soumis à une condition CFL !
- C'est un schéma d'ordre  $(2, 2)$

# Tableau d'erreurs

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	10	-0.567192	-0.004692	NaN	NaN	0.000000
1	20	20	-0.576305	-0.013805	1.556837	1.668840	0.028777
2	40	40	-0.581508	-0.019008	0.461420	0.478039	0.060757
3	80	80	-0.573040	-0.010540	0.850639	0.865968	0.184824
4	160	160	-0.562315	0.000185	5.832797	5.885372	0.775867
5	320	320	-0.561389	0.001111	2.586452	2.598111	3.325298

Figure – Tableau d'erreurs du schéma EI d'ordre supérieur pour  $N = I$

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	1	-0.349821	0.212679	NaN	NaN	0.000000
1	20	2	-0.352066	0.210434	0.015306	0.016407	0.000000
2	40	4	-0.387735	0.174765	0.267958	0.277609	0.069872
3	80	8	-0.442920	0.119580	0.547440	0.557305	0.039750
4	160	16	-0.501268	0.061232	0.965614	0.974318	0.149954
5	320	32	-0.535214	0.027286	1.166132	1.171388	0.539803
6	640	64	-0.549788	0.012712	1.101946	1.104430	2.740898

Figure – Tableau d'erreurs du schéma EI d'ordre supérieur pour  $N = I/10$

## Un modèle simple de volatilité incertaine

- $\sigma \in [0, 1]$  avec  $dS_\tau = \sigma_\tau dW_\tau$
- $v_t(t, x) + \min_{\sigma \in [0, 1]} \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 v_{xx}(t, x) \right) = 0, \quad t \in (0, T), x \in \mathbb{R}$
- $v(T, x) = v_0(x)$

### Modèle de volatilité incertaine

On cherche une approximation numérique de  $v = v(t, x)$  solution de l'équation aux dérivés partielles suivante, pour  $t \in (0, T), x \in \Omega := (S_{\min}, S_{\max})$  :

$$\begin{cases} -v_t(t, x) + \min \left( 0, -\frac{1}{2} v_{xx}(t, x) \right) = 0, & t \in (0, T), \quad x \in (S_{\min}, S_{\max}) \\ v(t, S_{\min}) = v_\ell(t) & t \in (0, T) \\ v(t, S_{\max}) = v_r(t) & t \in (0, T) \\ v(0, x) = v_0(x) & x \in (S_{\min}, S_{\max}) \end{cases} \quad (6)$$

- La valeur initiale :  $v_0(x) = \text{sign}(x) \left( (\max(1 - |x|, 0))^4 - 1 \right)$
- Les paramètres :  $(T, S_{\min}, S_{\max}) = (0.5, -3, 3)$
- Les conditions de bords :  $v_r(t) = -1, v_\ell(t) = 1$

# Schéma d'Euler Explicite

On introduit l'approximation du second ordre de  $-u_{xx}$  :

$$D^2U_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

## Schéma d'Euler Explicite

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \min \left( 0, -\frac{1}{2} D^2U_i^n \right) = 0$$

$$n = 0, \dots, N - 1; \quad j = 1, \dots, I$$

$$U_0^n = v_\ell(t_n), \quad U_{I+1}^n = v_r(t_n) \quad n = 0, \dots, N$$

$$U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I$$

## Remarques

- Ce schéma est de l'ordre 1 en temps et de l'ordre 2 en espace
- Ce schéma n'est pas stable !



# Graphiques du Schéma d'Euler Explicite (EE)

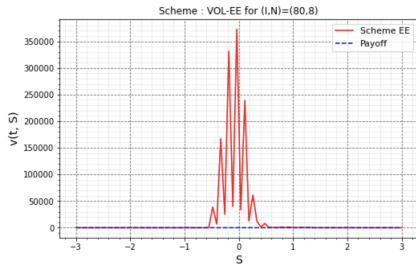
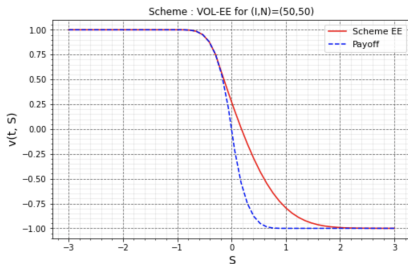


Figure – Graphe du modèle de volatilité incertaine en utilisant le schéma d'Euler Explicite. (a) Pour  $N = I = 50$ . (b) Pour  $I = 80, N = 8$ .

## Schéma d'Euler Implicite

On introduit l'approximation du second ordre de  $-u_{xx}$  :

$$D^2 U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

### Schéma d'Euler Implicite

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \min \left( 0, -\frac{1}{2} D^2 U_j^{n+1} \right) = 0$$

$$n = 0, \dots, N-1; \quad j = 1, \dots, I$$

$$U_0^n = v_\ell(t_n), \quad U_{I+1}^n = v_r(t_n) \quad n = 0, \dots, N$$

$$U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I$$

### Remarques

- Ce schéma est stable, inconditionnellement par rapport aux pas de maillage
- Pour l'implémentation, on utilise la méthode de **"semi-smooth" Newton**

# Graphiques du Schéma d'Euler Implicite (EI)

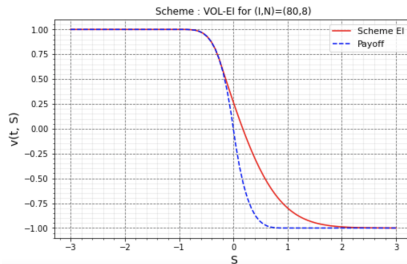
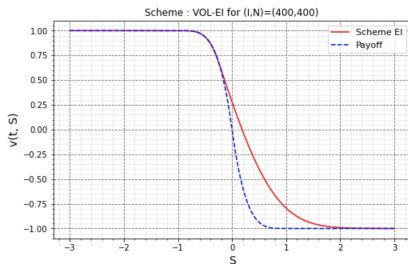


Figure – Graphe du modèle de volatilité incertaine en utilisant le schéma d'Euler Implicite. (a) Pour  $N = I = 400$ . (b) Pour  $I = 80, N = 8$ .

# Un modèle de volatilité incertaine avec l'option Butterfly

- $\sigma \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$  avec un modèle de Black-Scholes
- $v_t + \sup_{\sigma \in \{\sigma_{min}, \sigma_{max}\}} \left( -\frac{\sigma^2}{2} x^2 v_{xx} \right) - rxv_x + rv = 0$
- $v(T, x) = v_0(x)$

## Modèle de volatilité incertaine

On cherche une approximation numérique de  $v = v(t, x)$  solution de l'équation aux dérivés partielles suivante, pour  $t \in (0, T), x \in \Omega := (S_{min}, S_{max})$  :

$$\begin{cases} -v_t(t, x) + \max \left( -\frac{1}{2} \sigma_{min}^2 x^2 v_{xx}(t, x); -\frac{1}{2} \sigma_{max}^2 x^2 v_{xx}(t, x) \right) \\ \quad - rxv_x(t, x) + rv(t, x) = 0, & t \in (0, T), \quad x \in (S_{min}, S_{max}) \\ v(t, S_{min}) = v_\ell(t), \quad v(t, S_{max}) = v_r(t) & t \in (0, T) \\ v(0, x) = v_0(x) & x \in (S_{min}, S_{max}) \end{cases} \quad (9)$$

- $v_0(x) = \max(x - K_1, 0) - 2 \max(x - (K_1 + K_2)/2, 0) + \max(x - K_2, 0)$
- $(r, \sigma_{min}, \sigma_{max}, K_1, K_2, T, S_{min}, S_{max}) = (0.1, 0.15, 0.25, 90, 110, 0.1, 50, 150)$
- Les conditions de bords :  $v_r(t) = v_\ell(t) = 0$

## Schéma d'Euler Implicite

On introduit l'approximation du second ordre de  $-u_{xx}$  :

$$D^2 U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

### Schéma d'Euler Implicite

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \max \left( -\frac{1}{2} \sigma_{min}^2 s_j^2 D^2 U_j^{n+1}; -\frac{1}{2} \sigma_{max}^2 s_j^2 D^2 U_j^{n+1} \right) \\ - r s_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} + r U_j^{n+1} = 0 \\ n = 0, \dots, N-1; \quad j = 1, \dots, I \\ U_0^n = v_\ell(t_n), \quad U_{I+1}^n = v_r(t_n) \quad n = 0, \dots, N \\ U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I \end{aligned}$$

# Graphiques du Schéma d'Euler Implicite (EI)

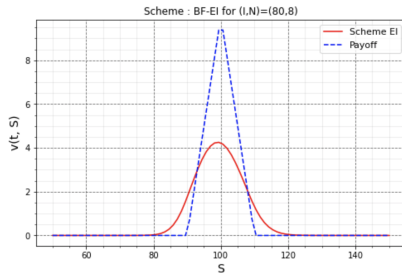
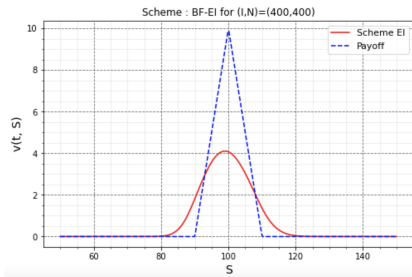


Figure – Graphe du modèle de volatilité incertaine avec l'option Butterfly en utilisant le schéma d'Euler Implicite. (a) Pour  $N = I = 400$ . (b) Pour  $I = 80, N = 8$ .

# Tableau d'erreurs

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	10	3.817557	NaN	NaN	NaN	0.004031
1	20	20	4.090095	0.272538	NaN	NaN	0.008163
2	40	40	4.084462	-0.005633	5.596477	5.798048	0.030108
3	80	80	4.079545	-0.004917	0.196003	0.199535	0.075858
4	160	160	4.073923	-0.005621	-0.193083	-0.194824	0.449421
5	320	320	4.070611	-0.003312	0.763281	0.766721	1.973947
6	640	640	4.068823	-0.001789	0.888626	0.890629	13.683525

Figure – Tableau d'erreurs du schéma EI pour  $N = I$

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	1	4.035820	NaN	NaN	NaN	0.003111
1	20	2	4.458703	0.422883	NaN	NaN	0.001827
2	40	4	4.324904	-0.133799	1.660191	1.719987	0.003858
3	80	8	4.211041	-0.113863	0.232773	0.236968	0.010316
4	160	16	4.141649	-0.069392	0.714445	0.720885	0.048173
5	320	32	4.104878	-0.036771	0.916215	0.920345	0.272313
6	640	64	4.086052	-0.018826	0.965819	0.967996	2.088023

Figure – Tableau d'erreurs du schéma EI pour  $N = I/10$

## Schéma d'Euler Implicite du second ordre : BDF2

On introduit l'approximation du second ordre de  $-u_{xx}$  :

$$D^2 U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2}$$

### Schéma d'Euler Implicite du second ordre : BDF2

$$\frac{3U_j^{n+1} - 4U_j^n + U_j^{n-1}}{2\Delta t} + \max \left( -\frac{1}{2}\sigma_{min}^2 s_j^2 D^2 U_j^{n+1}; -\frac{1}{2}\sigma_{max}^2 s_j^2 D^2 U_j^{n+1} \right) - r s_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} + r U_j^{n+1} = 0$$

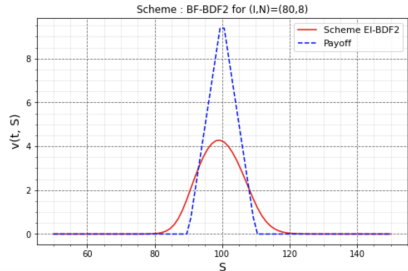
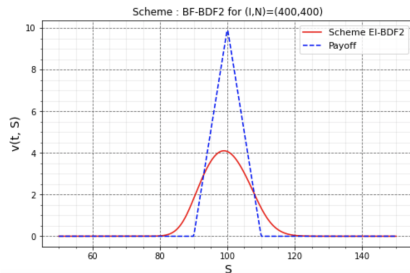
$$n = 0, \dots, N-1; \quad j = 1, \dots, I$$

$$U_0^n = v_\ell(t_n), \quad U_{I+1}^n = v_r(t_n) \quad n = 0, \dots, N$$

$$U_j^0 = v_0(x_j) \quad j = 1, \dots, I$$



# Graphiques du Schéma d'Euler Implicite du second ordre (BDF2)



**Figure** – Graphe du modèle de volatilité incertaine avec l'option Butterfly en utilisant le schéma d'Euler Implicite du second ordre (BDF2). (a) Pour  $N = I = 400$ . (b) Pour  $I = 80, N = 8$ .

# Tableau d'erreurs

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	10	3.858052	NaN	NaN	NaN	0.013716
1	20	20	4.093780	0.235728	NaN	NaN	0.009090
2	40	40	4.083195	-0.010585	4.477002	4.638253	0.029513
3	80	80	4.078000	-0.005194	1.027029	1.045537	0.087404
4	160	160	4.073026	-0.004975	0.062343	0.062905	0.490489
5	320	320	4.070137	-0.002888	0.784403	0.787939	1.957636
6	640	640	4.068580	-0.001558	0.890905	0.892913	17.650732

Figure – Tableau d'erreurs du schéma EI du second ordre (BDF2) pour  $N = I$

	I	N	U(s)	error	order alpha time	order alpha space	tcpu
0	10	1	4.035820	NaN	NaN	NaN	0.000810
1	20	2	4.759163	0.723343	NaN	NaN	0.001749
2	40	4	4.475658	-0.283505	1.351305	1.399976	0.004208
3	80	8	4.233923	-0.241735	0.229949	0.234093	0.013328
4	160	16	4.141165	-0.092759	1.381872	1.394328	0.059418
5	320	32	4.102172	-0.038992	1.250299	1.255934	0.289880
6	640	64	4.084127	-0.018046	1.111529	1.114035	1.573058

Figure – Tableau d'erreurs du schéma EI du second ordre (BDF2) pour  $N = I/10$

## Conclusion

- **Les équations d'HJB du premier ordre :**

- Schéma d'Euler Explicite :

- ↪ Stable et monotone sous condition CFL

- ↪ Ordre 2 obtenu via schéma RK2

- Schéma d'Euler Implicite :

- ↪ Stable sans aucune condition CFL

- ↪ Ordre 2 obtenu via approximation à 3 points vers la gauche

- **Les équations d'HJB du second ordre :**

- Même conclusions en utilisant schéma d'Euler Explicite et Implicite

- Amélioration de l'erreur avec le schéma Implicite du second ordre (BDF2)

Merci pour votre attention !  
Des questions ?