

การประยุกต์จำนวนเชิงซ้อน

ชื่อกิจกรรม: Logo design with \mathbb{C}

จุดประสงค์ของกิจกรรม :

1. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของ $z = (a, b)$ หรือ $z = a + bi$ ได้ถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของ $z + w$, $z - w$ และ zw ได้ถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของ $|z - a| \leq r$, $|z - a| < r$, $|z - a| = r$, $|z - a| > r$ ได้ถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถออกแบบ Logo โดยการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกต้อง

สมรรถนะทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน :

F5 ทำสถานการณ์หรือปัญหาให้ง่ายขึ้นหรือแยกย่อยสถานการณ์หรือปัญหา เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ได้

E6 บอกวิธีการแก้ปัญหา การแสดง และ/หรือสรุปและนำเสนอผลลัพธ์ตามลำดับขั้นตอน

I4 ใช้ความรู้ในการพิจารณาว่าสถานการณ์ในชีวิตจริงส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์และการคำนวณตามขั้นตอนหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อที่จะตัดสินใจได้ว่าควรปรับปรุงหรือนำผลลัพธ์ไปประยุกต์ใช้

R15 วิเคราะห์ความเหมือนและความแตกต่างระหว่างแบบจำลองการคำนวณและปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบจำลอง

1. Before you start

ในระนาบเชิงซ้อน ถ้า $a \in \mathbb{C}$ และ $r \in \mathbb{R}$ แล้ว $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจาก a น้อยกว่าหรือเท่ากับ r ซึ่งก็คือ เซตของจุดทั้งหมดที่อยู่ภายในและบนวงกลมที่มี a เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี r หน่วย

2. วัสดุ อุปกรณ์ สื่อการสอน

- (1) Smart devices เช่น Notebook, PC, Tablet, iPad, Smart phone
- (2) Web app Math Playground workshop 1 และ 2

3. วิธีดำเนินกิจกรรม

- (1) ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 3 – 4 คน
- (2) ให้นักเรียนอ่านใบความรู้ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน จากนั้นร่วมกันอภิปรายกันภายในกลุ่ม
- (3) ครูแจกใบกิจกรรม Workshop (แบบ pdf และ/หรือ paper) ในกิจกรรม Logo design with \mathbb{C} ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม
- (4) นักเรียนทำกิจกรรมตามกิจกรรม Workshop 1 โดยใช้ Web app Math Playground 1 พร้อมบันทึกผลใน Report
- (5) นักเรียนทำกิจกรรมตามกิจกรรม Workshop 2 โดยใช้ Web app Math Playground 2 พร้อมบันทึกผลใน Report
- (6) นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมาแนะนำผลการผลงานของกลุ่มตนเอง

4. แนวทางการวัดและประเมินผล

วิธีการวัดและประเมินผล

- (1) ตรวจใบกิจกรรม
- (2) สังเกตการณ์มีส่วนร่วมในกิจกรรม

เครื่องมือ

- (1) ใบกิจกรรม
- (2) แบบประเมินทักษะและกระบวนการ
- (3) แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เกณฑ์การวัดและประเมินผล

- (1) นักเรียนสามารถหาความสูงของวัตถุ โดยการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องตรีโกณมิติได้ถูกต้อง
- (2) นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินทักษะและกระบวนการ ระดับ 2 ขึ้นไป
- (3) นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ระดับ 2 ขึ้นไป

1. ด้านความรู้

นักเรียนสามารถหาความสูงของวัตถุ โดยการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องตรีโกณมิติได้ถูกต้อง

2. ด้านทักษะกระบวนการ

คะแนน	การแก้ปัญหาและเชื่อมโยงความรู้
3 (ดีมาก)	ดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จ สามารถเชื่อมโยงความรู้ หลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว
2 (ดี)	ดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จ สามารถเชื่อมโยงความรู้ หลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง
1 (พอใช้)	ดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จบางส่วน สามารถเชื่อมโยงความรู้ หลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์ ปฏิบัติกิจกรรมได้ถูกต้องบางส่วน
0 (ปรับปรุง)	ดำเนินการแก้ปัญหาไม่สำเร็จ ไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ หลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์ เพื่อปฏิบัติกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง

3. ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

คะแนน	มีวินัย ใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน
3 (ดีมาก)	เข้าเรียนตรงเวลา ปฏิบัติตามข้อตกลง ตรงต่อเวลาในการปฏิบัติกิจกรรม รับผิดชอบในการทำงาน ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ในการเรียน มีส่วนร่วมในการเรียนรู้และเข้าร่วมกิจกรรม มีความตั้งใจและพยายามในการทำงานที่ได้รับมอบหมาย มีความอดทนและไม่ท้อแท้ต่ออุปสรรคเพื่อให้งานสำเร็จ
2 (ดี)	เข้าเรียนตรงเวลา ปฏิบัติตามข้อตกลง ตรงต่อเวลาในการปฏิบัติกิจกรรม ตั้งใจเรียน เอาใจใส่ในการเรียน มีความตั้งใจและพยายามในการทำงานที่ได้รับมอบหมาย มีความอดทน
1 (พอใช้)	เข้าเรียนช้า ปฏิบัติตามข้อตกลง ปฏิบัติกิจกรรมช้ากว่ากำหนด มีส่วนร่วมในกิจกรรม มีความตั้งใจและพยายามในการทำงานที่ได้รับมอบหมาย
0 (ปรับปรุง)	เข้าเรียนช้า ไม่ปฏิบัติตามข้อตกลง ปฏิบัติกิจกรรมช้ากว่ากำหนด ไม่เข้าร่วมกิจกรรม ไม่ทำงานที่ได้รับมอบหมาย

ใบความรู้

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \mathbb{C} และกำหนดการเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

[1. การเท่ากัน] $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

[2. การบวก] $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

[3. การคูณ] $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

บทนิยาม 2 สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z = (a, b)$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะเรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของ z และแทนด้วย $\text{Re}(z)$ และเรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z และแทนด้วย $\text{Im}(z)$

จำนวนเชิงซ้อน $(-1, 0)$ คือ จำนวนจริง -1 ซึ่งเขียนแทน จำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ ด้วยสัญลักษณ์ i จะได้ว่า $i^2 = -1$ ดังนั้น สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= a + bi \end{aligned}$$

นั่นคือ $z = (a, b)$ สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $a + bi$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) เมื่อ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

[1. การเท่ากัน] $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

[2. การบวก] $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di)$
 $= (a + c) + (b + d)i$

[3. การคูณ] $(a + bi) \cdot (c + di) = (a + bi)(c + di)$
 $= a(c + di) + bi(c + di)$
 $= ac + adi + bci + bdi^2$
 $= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$
 $= (ac - bd) + (ad + bc)i$

สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ แล้ว จะได้ว่า

[4. การสลับที่] $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ และ $z_1 z_2 = z_2 z_1$

[5. การเปลี่ยนหมู่] $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ และ $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

[6. การแจกแจง] $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

บทนิยาม 3 การลบกันของจำนวนเชิงซ้อน

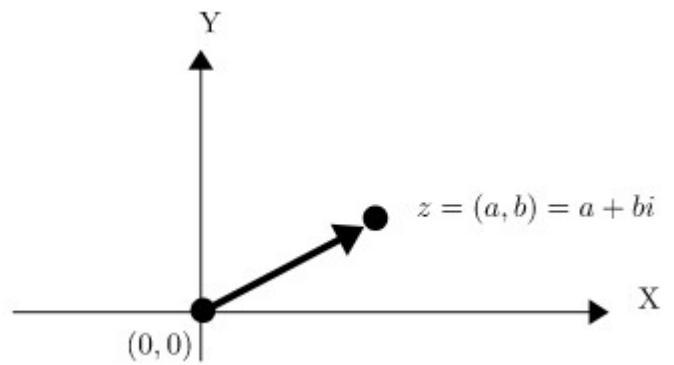
สำหรับ $z, w \in \mathbb{C}$ แล้ว $z - w = z + (-w)$

บทนิยาม 4 การหารกันของจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับ $z, w \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $w \neq (0, 0)$ แล้ว $z \div w = \frac{z}{w} = zw^{-1}$

กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z \in \mathbb{C}$ เมื่อ $z = (a, b)$ หรือ $z = a + bi$ และ $a, b \in \mathbb{R}$ ซึ่ง a เป็นส่วนจริงและ b เป็นส่วนจินตภาพ อาจแทน z ด้วยจุดบนระนาบในระบบพิกัดโดยเรียกแกนนอนว่า แกนจริง (real axis) และเรียกแกนนอนว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis) และเรียกระนาบที่เกิดจากแกนทั้งสองว่า ระนาบเชิงซ้อน (complex plan) และเพื่อความสะดวกจะใช้แกน X แทน แกนจริง และแกน Y แทนแกนจินตภาพ



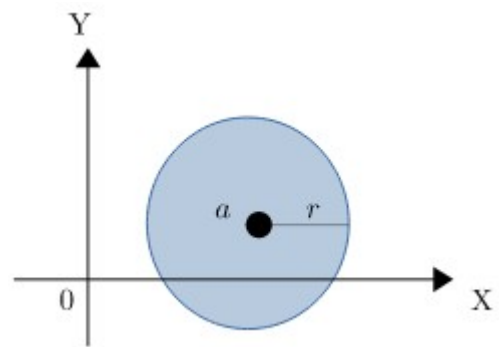
บทนิยาม 6 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $z = (a, b)$ หรือ $z = a + bi$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า ค่าสัมบูรณ์ (absolute value/modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน z คือ $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|z|$

การเขียนกราฟแสดง $z \in \mathbb{C}$ ในระนาบเชิงซ้อน

ถ้า $a \in \mathbb{C}$ และ $r \in \mathbb{R}$ แล้ว $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ คือ เซตของจุด

ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจาก a น้อยกว่าหรือเท่ากับ r ซึ่งก็คือ เซตของจุดทั้งหมดที่อยู่ภายในและบนวงกลมที่มี a เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี r หน่วย



QR code สำหรับ Web app Math Playground (WMP)



[Workshop 1](#)



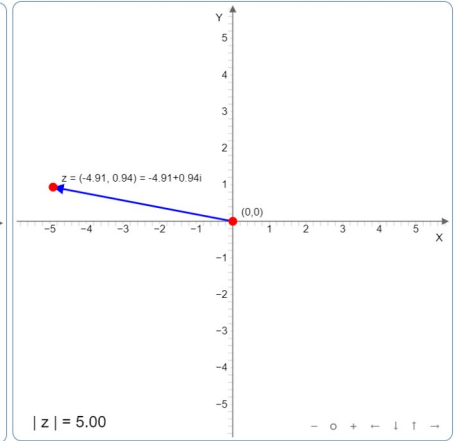
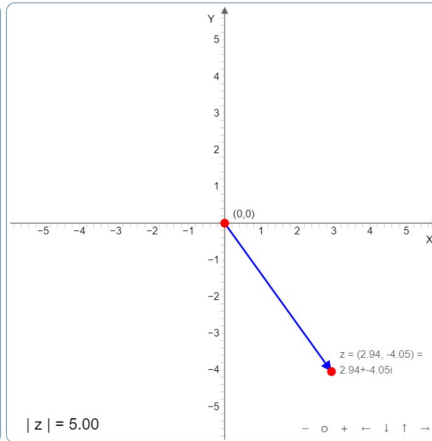
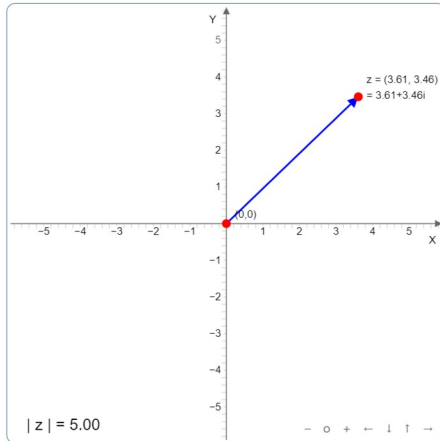
[Workshop 2](#)

Workshop 1

จงตอบคำถามต่อไปนี้

จาก Playground 1. กราฟของจำนวนเชิงซ้อน ($z \in \mathbb{C}$)

1) จงเขียนกราฟที่ทำให้ $|z| = 5$ มา 3 ตัวอย่าง



จาก Playground 2. กราฟการบวก การลบ ของจำนวนเชิงซ้อน

2) จงเขียนกราฟที่ทำให้ $z + w = 3 + i$ และ $z - w = -3 + 3i$

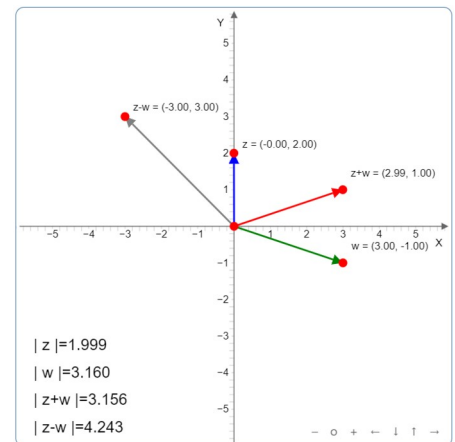
พิจารณา $z + w = 3 + i$ (1)

และ $z - w = -3 + 3i$ (2)

นำ (1) + (2) จะได้ $2z = 4i$ หรือ $z = 2i$

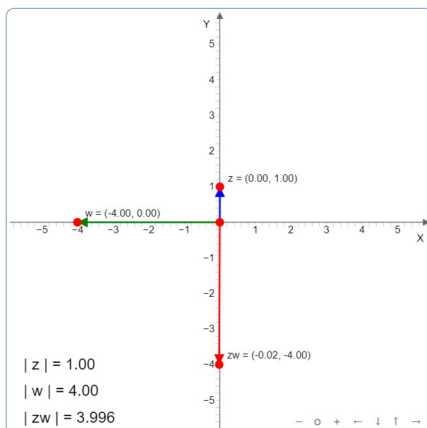
แทนค่า $z = 2i$ ลงใน (1) จะได้ว่า

$2i + w = 3 + i$ หรือ $w = 3 - i$



จาก Playground 3. กราฟการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

3) ถ้า $z = i$ แล้ว มุมระหว่าง w กับ zw เท่ากับกี่องศา จงเขียนกราฟแสดงเหตุผล, $|w|$ และ $|zw|$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร



จากกราฟให้ \vec{a} แทน w และให้ \vec{b} แทน zw

พิจารณา

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = (-4) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 0 + 0 = 0$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

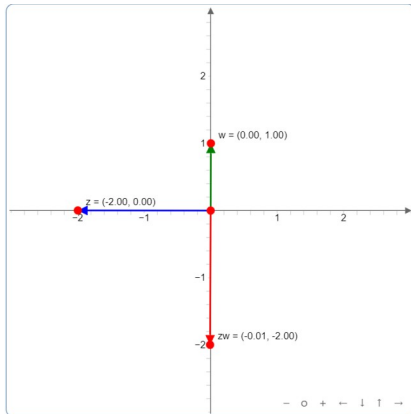
$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0}{4 \cdot 4} = 0 \quad \text{นั่นคือ } \theta = 90^\circ$$

จะได้ว่า มุมระหว่าง w กับ zw เท่ากับ 90°

จาก Playground 3. กราฟการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

4) ถ้า $z = -2$ แล้ว มุมระหว่าง w กับ zw เท่ากับกี่องศา จงเขียนกราฟแสดงเหตุผล, $|w|$ และ $|zw|$ มีความสัมพันธ์กันอย่างไร



จากกราฟให้ \bar{a} แทน w และให้ \bar{b} แทน zw

พิจารณา

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 0 - 2 = -2$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

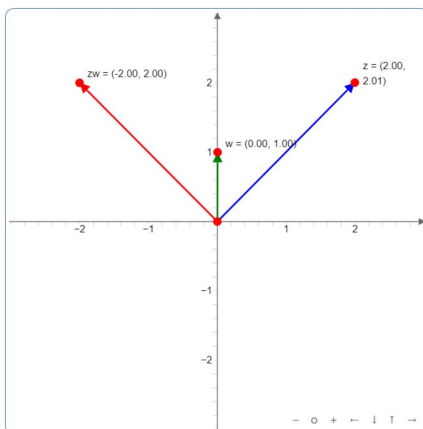
$$|\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{-2}{1 \cdot 2} = -1 \quad \text{นั่นคือ } \theta = 180^\circ$$

ดังนั้น จะได้ว่า มุมระหว่าง w กับ zw เท่ากับ 180°

จาก Playground 3. กราฟการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

5) ถ้าต้องการให้มุมระหว่าง w กับ zw เท่ากับ 45° ต้องกำหนดให้ z เท่ากับเท่าใด จงเขียนกราฟแสดงเหตุผล



จากกราฟให้ \bar{a} แทน w และให้ \bar{b} แทน zw

พิจารณา

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 0 + 2 = 2$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{2}{1 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

นั่นคือ $\theta = 45^\circ$

ดังนั้น จะได้ว่า $z = \alpha + \alpha i$ เมื่อ $\alpha \in \mathbb{R}^+$

รายชื่อสมาชิกในกลุ่ม

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

Workshop 2

จาก Playground 1. – 4.

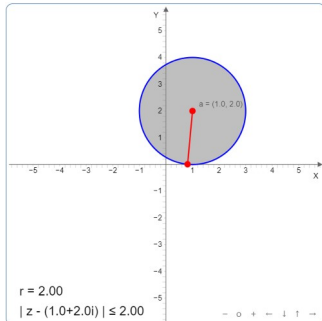
1) จงเขียนกราฟของ อสมการ/สมการ ต่อไปนี้

1.1) $|z - (1 + 2i)| \leq 2$

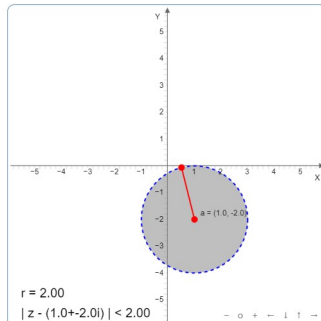
1.2) $|z - (1 - 2i)| < 2$

1.3) $|z + (3 - 2i)| = 2$

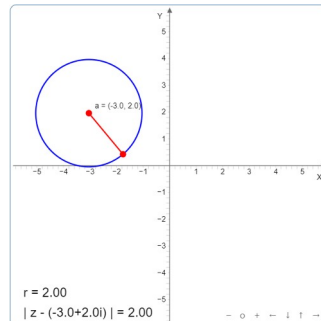
1.4) $|z + (2 + 2i)| > 2$



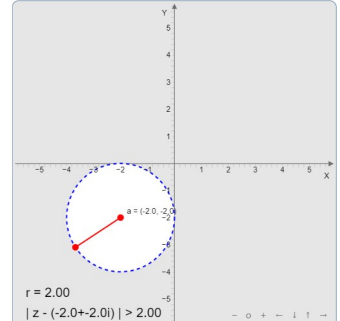
$|z - (1 + 2i)| \leq 2$



$|z - (1 - 2i)| < 2$



$|z + (3 - 2i)| = 2$



$|z + (2 + 2i)| > 2$

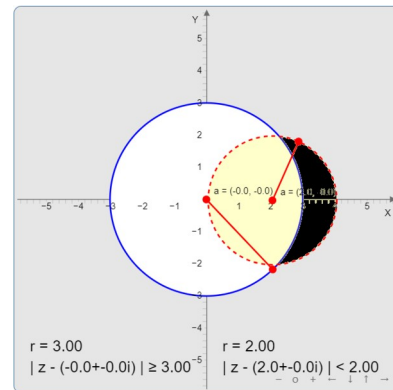
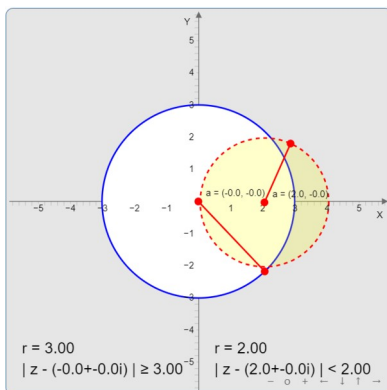
จาก Playground 5.

2) จงเขียนกราฟที่ทำให้ $|z| \geq 3$ และ $|z - 2| < 2$

จากกราฟให้ **A** แทน เซตของจุดบนระนาบที่สอดคล้องกับ $|z| \geq 3$

และ **B** แทน เซตของจุดบนระนาบที่สอดคล้องกับ $|z - 2| < 2$

จะได้ว่า **A ∩ B** แทนบริเวณส่วนที่แรเงา



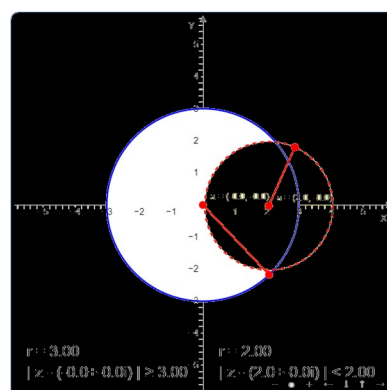
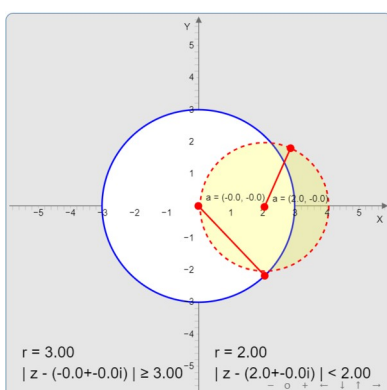
จาก Playground 5.

3) จงเขียนกราฟที่ทำให้ $|z| \geq 3$ หรือ $|z - 2| < 2$

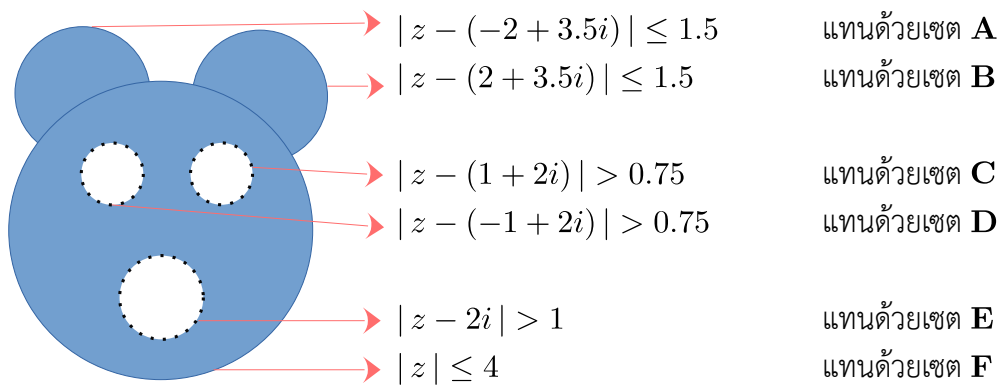
จากกราฟให้ **A** แทน เซตของจุดบนระนาบที่สอดคล้องกับ $|z| \geq 3$

และ **B** แทน เซตของจุดบนระนาบที่สอดคล้องกับ $|z - 2| < 2$

จะได้ว่า **A ∪ B** แทนบริเวณส่วนที่แรเงา

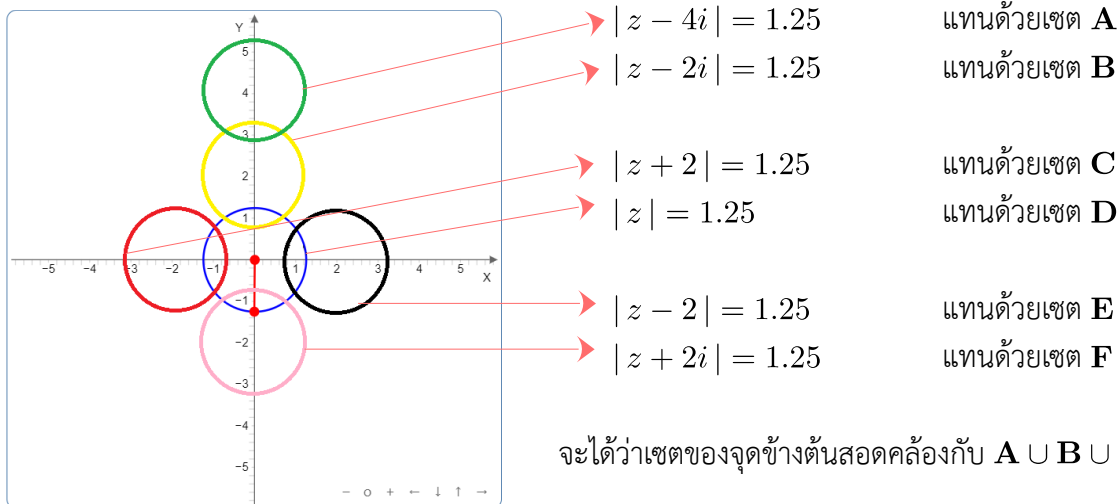


4) จงหาความสัมพันธ์ (อสมการ และ/หรือ สมการ) ที่ทำให้กราฟในระนาบเดียวกันมีลักษณะดังนี้



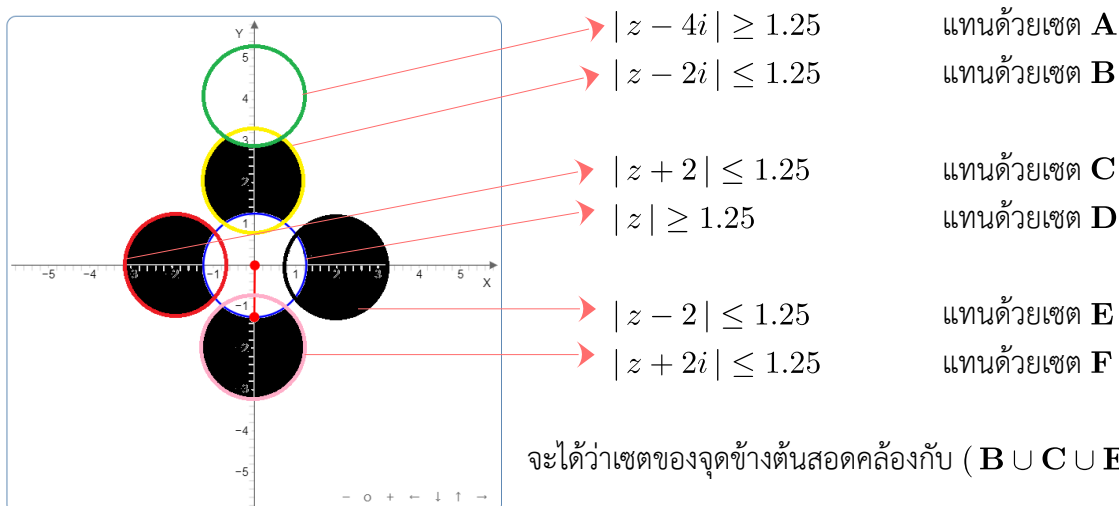
จะได้ว่าเซตของจุดข้างต้นสอดคล้องกับ **$A \cup B \cap C \cap D \cap E \cup F$**

5) จงนำเครื่องมือข้างต้นเพื่อออกแบบ logo พร้อมทั้งเขียนชุดของความสัมพันธ์ (อสมการ และ/หรือ สมการ) อย่างน้อย 6 ความสัมพันธ์



จะได้ว่าเซตของจุดข้างต้นสอดคล้องกับ **$A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$**

หรือ



จะได้ว่าเซตของจุดข้างต้นสอดคล้องกับ **$(B \cup C \cup E \cup F) \cap A \cap D$**

รายชื่อสมาชิกในกลุ่ม

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.