Т.В   РК 3   Теория

~~1. Опр-я случайной величины и ф-и распр-я вер-тей сл. вел~~

(1) Пусть (Ω, B, P) - вер. пр-во

Опр

Случайной величиной наз. ф-ия

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

такая, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ мн-во } \{\omega : X(\omega) < x\} \in B$$

(т.е это мн-во явл-ся событием)

#

Опр Функцией распределения вер-тей сл. вел X наз. отображение

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

опр-ое условием

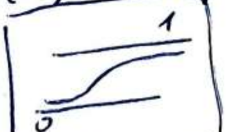
$$F(x) = P\{X < x\}$$

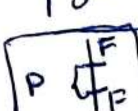
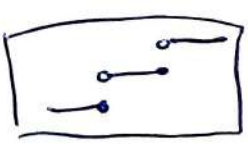
#

Св-ва F:

1° $0 \le F(x) \le 1$ 

2° $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$, т.е $F(x)$ - неуб. 

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ 

4° $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$  

5° $\lim\limits_{x \to x_0-} F(x) = F(x_0)$, т.е $F(x)$ - непрерывна слева

②

Опр Сл. вел. наз дискретной, если мно-во её значений конечно или счетно

Опр. Рядом распределения (вер-тей) дискр. сл. вел X наз. таблицу, сост.-ую из 2х строк: в верхней перечислены все возможные зн-я сл. вел., а в нижней — вер-ти $p_i = P\{X = x_i\}$ того, что сл. вел. примет эти значения

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Опр Сл вел. X наз непрерывной, если $\exists$ ф-ция f такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

где F — ф-я расп-я с.в. X.

Опр При этом ф-ию f наз плотностью распр-я вер-тей с.в X.

③ Опр С.в X. наз непрерывной, если $\exists$ ф-ия f, такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

где F — ф-я распр-я вер-тей сл. в. X

Опр При этом ф-ия f наз плотностью распр-я вер-тей сл. в. X.

(3) (продолжение)

Св-ва ф-ии ~~расп~~ пл-ти распр-я ~~абс~~ непр с.в:

1° $\forall x \; f(x) \geq 0$

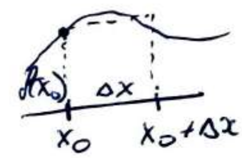
2° $P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

3° $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ (ус-е нормировки) $\boxed{1}$

4° $P\{x_0 \leq X \leq x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$, если

x – точка непрерывности $f(x)$

X – непр сл. вел., Δx – мала



5° Для $\forall$ наперед заданного x_0

$P\{X = x_0\} = 0$, где ~~Х~~ X – непр. с.в

---

(4) Пусть (Ω, B, P) – вер пр-во

$X_1 = X_1(\omega), \ldots, X_n = X_n(\omega)$ – сл. вел заданные на этом вер-ном пр-ве

Опр n-мерным случайным вектором наз кортеж $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. При этом сл. вел X_i, $i = \overline{1,n}$ наз координатами сл. век-ра $\vec{X}$.

Опр Ф-ей распр-я вер-тей n-мерного сл. ве-ра $(X_1, \ldots, X_n)$ наз отображение

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Определенное условием:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\}$$

① (продолжение)

Св-ва ф-ции распр-я 2-ого сл.в-ра

1° $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2° при фикс x_2 $F(x_1, x_2)$ явл неуб ф-ей переменной x_1

— " — x_1 — " —

— " — x_2

3° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = const}} F(x_1, x_2) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x_2 \to -\infty \\ x_1 = const}} F(x_1, x_2) = 0$

4° $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty}} F(x_1, x_2) = 1$

5° $\lim\limits_{\substack{x_2 \to +\infty \\ x_1 = const}} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$, где $F_{X_i}(x_i)$ - ф-ия распр-я с.в X_i

$\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 = const}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$,

6° $P\{a_1 \le X_1 < b, \ a_2 \le X_2 < b\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) -$
$- F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

7° при фикс x_2 $F(x_1, x_2)$ явл непр. слева ф-ей переменной x_1

— " — x_1 — " —

— " — x_2

Опр Сл. в-р $(X_1, \ldots, X_n)$ наз. <u>дискретным</u>, если каждая из сл. в. X_i, $i = \overline{1,n}$ явл. дискретной.

Опр Табличным р-м 2-ого сл. в-ра (X, Y) наз. таблицу, в кот-рой в верхней строке перечислены все возможные зн-я $y_1, \ldots, y_{m_2}$ сл. вел-ны Y, а в левом столбце – значения $x_1, \ldots, x_n$ с. в X. На пересечении столбца "y_j" со строкой "x_i" нах-ся $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ совместного осущ-я событий.

X \ Y	y_1	...	y_j	...	y_n
x_1					
$\vdots$					
x_i			p_{ij}		
$\vdots$					
x_n					

$$(X, Y) \in \{(x_i, y_j) : i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}$$

$$p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$$

Опр Сл в-р $(X_1, \ldots, X_n)$ наз. <u>непрерывным</u>, если $\exists$ ф-ия:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ такая, что}$$

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_n,$$

где F – ф-ия распр-я в-ра $(X_1, \ldots, X_n)$

Опр При этом ф-ию f наз <u>ф-ей плотности</u> распределения вер-тей сл. в-ра $(X_1, \ldots, X_n)$

(6) Опр Сл. в-р $(X_1,\dots,X_n)$ наз непрерывным, если $\exists$ ф-ция:

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\text{, такая, что}$$

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

$$F(x_1,\dots,x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}dt_1\int\limits_{-\infty}^{x_2}dt_2\,\dots\int\limits_{-\infty}^{x_n}f(t_1,\dots,t_n)\,dt_n,$$

где $F(x_1,\dots,x_n)$ — ф-ция распр-я в-ра $(X_1,\dots,X_n)$

Опр При этом ф-цию f наз ф-ей плотности распр-я вер-тей сл. ~~вел-ны~~ в-ра $(X_1,\dots,X_n)$

Св-ва $f(x_1,x_2)$:

1° $f(x_1,x_2)\geq 0$

2° $P\{a_1\leq X_1<b_1,\ a_2\leq X<b_2\}=\int\limits_{a_1}^{b_1}dx_1\int\limits_{a_2}^{b_2}f(x_1,x_2)\,dx_2$

3° $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=1$ (усл-е нормировки)

4° $P\{x_1^\circ\leq X_1<x_1^\circ+\Delta x_1,\ x_2^\circ\leq X_2<x_2^\circ+\Delta x_2\}\approx f(x_1^\circ,x_2^\circ)\Delta x_1\Delta x_2$

если $\Delta x_1, \Delta x_2$ — малы, а

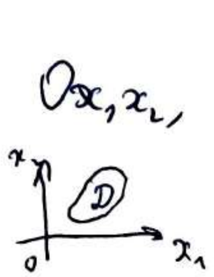
$(x_1^\circ; x_2^\circ)$ — точка непрерывности ф-ции f.

5° Если (X_1X_2) — непр сл. в-р, то для $\forall$ наперед заданных x_1°, x_2°:

$$P\{(X_1,X_2)=(x_1^\circ,x_2^\circ)\}=0$$

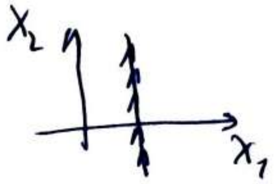
6° Если D — квадрируемая область на пл-ти Ox_1x_2, то

$$P\{(X_1X_2)\in D\}=\iint\limits_{D}f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

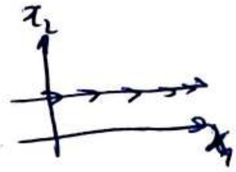


(6) (продолжение)

7° $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 = f_{X_1}(x_1)$



$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 = f_{X_2}(x_2)$



---

(7) <u>Опр</u> Сл. вел X и Y наз независимыми, если

$$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y),$$

где F – совместная ф-ия распр с.в X и Y

F_X, F_Y – маргинальные ф-ии распр-я X и Y соотв-но.

Св-ва незав. сл. вел:

1° X и Y незав $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ соб-я $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ незав

2° X и Y незав $\Longleftrightarrow$ $\forall\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ соб-е $\{x_1 \le X < x\}$ и $\{y_1 \le Y < y_2)$ незав

3° X и Y незав $\Longleftrightarrow$ соб-я $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ незав, где M_1 и M_2 – произвольные промежутки или объединения промежутков. (мн-во точек 1го $[\,], (\,), [\,), (\,]$)

4° Если X и Y – дискр сл. вел, то

X, Y незав $\Longleftrightarrow$ $p_{ij} \equiv p_{X_i} \cdot p_{Y_j}$,

где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$

$p_{X_i} = P\{X = x_i\}$; $p_{Y_j} = P\{Y = y_i\}$

⑦ (продолжение)

5° Если X и Y – непр сл. вел., то

X, Y – независ $\iff f(x,y) \equiv f_X(x) \cdot f_Y(y)$,

где f – совм пл-ть распр-я X и Y

f_X, f_Y – маргин. пл-ти распр-я сл. вел. X и Y соотв.

Опр Сл. вел $X_1, \dots, X_n$ наз попарно независ, если

$(\forall \forall i, j \in \{1, \dots, n\}) \ (i \neq j) \Rightarrow (X_i, X_j$ – независ$)$

Опр Сл. вел $X_1, \dots, X_n$ наз независ в сов-ти, если

$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$,

где F – ф-я распр-я сл в-ра $(X_1, \dots, X_n)$

$F_{X_i}(x_i)$ – ~~частная~~ маргин ф-я распр-я сл. вел X_i

---

⑧ Пусть 1) (X, Y) – двумерный сл. в-р

2) Известно, что с. в Y приняла значение $Y = y_0$

Вопрос: 1) Какие зн-я может принимать с. в X с учетом этой инф-ии?

2) Каково распределение вер-ти сл. вел X по этим значениям

(8) (продолжение)

I Случай дискр. сл. в-ра

Пусть 1) (X, Y) – дискр. сл. в-р

2) $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$

$Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$

3) $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$,

$p_{X_i} = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, m}$

$p_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$, $j = \overline{1, n}$

4) Известно, что $Y = y_j$ (для некот. фикс. зн-я j)

~~В случае 2-ого дискретного сл. в-ра (X, Y)~~

Найдем вер-ть того, что при ~~этом~~ условии $Y = y_j$ сл. вел. X приняла зн-е x_i:

$$P\{\underbrace{X = x_i}_{A} \mid \underbrace{Y = y_j}_{B}\} = \begin{pmatrix} \text{Опр-е усл-ой вер-ти} \\ P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \end{pmatrix} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} =$$

$$= \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$$

Обозн: $\pi_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

[При фиксированном значении j числа π_{ij} задают распр-е вер-тей сл. вел X по её возможным значениям x_i, $i = \overline{1, m}$]

Опр. В случае 2-ого дискр. в-ра (X, Y), условной вероятностью того, что сл. вел X приняла значение x_i, при условии, что Y приняла зн-е y_j, наз. число $\pi_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$

(8) (продолжение)

<u>Опр</u> Усл. законом распределения сл. вел X (Y) при условии $Y = y_j$ ($X = x_i$) наз набор пар

$$(x_i, \pi_{ij}),\ i = \overline{1,m} \quad \left((y_j, \tau_{ij}),\ j = \overline{1,n}\right)$$

$$\pi_{ij} = P\{X = x_i \mid Y = y_j\}$$

$$\left(\tau_{ij} = P\{Y = y_j \mid X = x_i\} = \{\text{аналог}\} = \frac{p_{ij}}{p_{X_i}},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$$

<u>II Случай непр. сл. в-ра</u>

<u>Опр</u> Условной плотностью распр-я сл. вел X при условии $Y = y$:

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(y) \neq 0$$

Аналог.

$$f_Y(y \mid X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x) \neq 0$$

$f(x, y)$ – совместная плотность распр-я сл. вел X и Y

f_X, f_Y – маргин. пл-ти распр-я сл. вел X и Y соот.

(9)

Опр Сл. вел. X и Y наз независимыми, если

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

где F — совместная ф-ия распр-я X и Y

F_X, F_Y — маргинальн ф-ии распр-я сл. вел X и Y соотв.

Th (критерий независимости $2^х$ сл. величин в терминах усл-ых распр-ий)

1) Пусть (X, Y) — двум сл. в-р
Тогда след. усл-е эквив:
   а) X, Y — независ.
   б) $F_X(x \mid Y = y_j) \equiv F_X(x)$ для всех возм. значений y_j сл. вел Y
   в) $F_Y(y \mid X = x_i) \equiv F_Y$ для всех возм. значений x_i сл. вел X_i

2) Пусть (X, Y) — дискр. сл. в-р.
— // —
   а) — // —
   б) $p_{ij} = p_{x_i}$ для всех $j = \overline{1,n}$
   в) $p_{ij} = p_{y_j}$ для всех $i = \overline{1,m}$

3) Пусть (X, Y) — непр. сл. в-р:
— // —
   а) — // —
   б) $f_X(x \mid Y = y) \equiv f_X(x)$ для всех y, где опр-на $f_X(x \mid Y = y)$
   в) $f_Y(y \mid X = x) = f_Y(y)$ — // — x, — // — $f_Y(y \mid X = x)$

(10)

~~Опр~~ Пусть 1) X — сл. вел.

2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — скалярная ф-ция

Тогда $Y = \varphi(X)$ также будет одномерной случ. величиной

Опр ~~Случайн.~~ Такую случайную величину Y наз ф-ей (скалярной) от скал. сл. вел X.

(I) Пусть X — дискр. сл. вел. имеющая ряд распр-я

X	x_1	...	x_i	...	x_n
p	p_1	...	p_i	...	p_n

Сл. вел. $Y = \varphi(X)$ в этом случае также будет дискретной, т.к. она не может принимать значений больше, чем X.

При этом ряд распр-я с.в Y будет иметь вид.

Y	$\varphi(x_1)$	...	$\varphi(x_i)$	...	$\varphi(x_n)$
p_Y	p_1		p_i		p_n

Если неск. зн-я $\varphi(x_i)$ и $\varphi(x_j)$ совпадают, то соотв. столбцы следует объединить, приписав им суммарную вер-сть.

(II) Если X — непр сл. величина, то в зав-ти от функции φ сл. вел $Y = \varphi(X)$ м.б. как непр, так и дискретной или смешанного типа

(10) (продолжение)

Th Пусть 1) X – непр сл. вел

2) $f_X(x)$ – пл-ть распр-я с.в X.

3) ~~∀~~ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – монот, непрер.-но дифф ф-ия

4) ψ – ф-ция, обратная к φ

5) $Y = \varphi(X)$

Тогда Y – непр сл. вел, пл-ть р-я кот-ой можно найти по формуле

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|}$$

Th Пусть 1) ~~X~~ + —"—

2) —"—

3) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет ~~k~~ интервалов монотонности (i.e. для кусочно-мон ф-ий)

4) φ – дифф-а

4.5) $Y = \varphi(X)$

5) Для данного $y \in \mathbb{R}$

$x_1 = \psi_1(y), \dots, x_n = \psi_n(y)$ – все решения

ур-я $\varphi(x) = y$ ~~{при этом}~~ $x_j \in I_j$ – j-ому интервалу мон-ти

$k \leq n$

6) $\psi_1(y), \dots, \psi_k(y)$ – ф-ии обратные к φ на интервалах $I_1, \dots, I_n$

Тогда

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_X(\psi_j(y))\,|\psi_j'(y)|}$$

(11)

Пусть (X_1, X_2) – сл. в-р

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – нек-рая ф-ия

Тогда $Y = \varphi(X_1, X_2)$ – сл. вел

Такую с.в Y наз скалярной ф-ей сл. в-ра (X_1, X_2)

(I) Если (X_1, X_2) – дискр сл. в-р, то Y – дискр сл. величина, принимающая зн-е $\varphi(x_{1,i}, x_{2,j})$ $(X_1 \in \{x_{1,1}, \dots, x_{1,m}\}\ ;\ X_2 \in \{x_{2,1}, \dots, x_{2,n}\})$

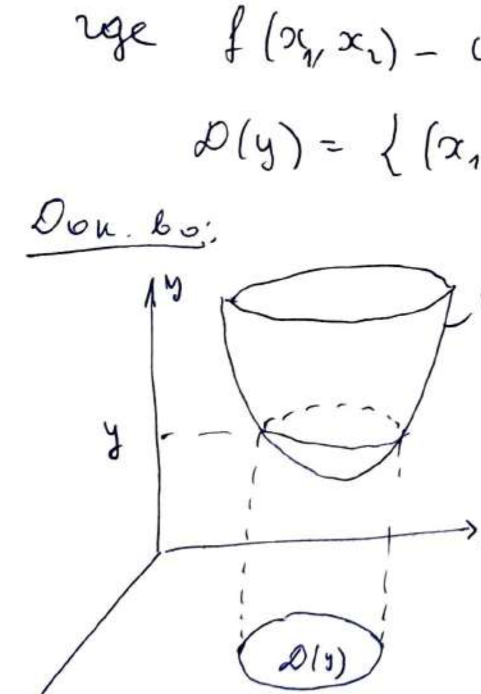
(II) Если (X_1, X_2) – непр сл. в-р, то ф-ию распр-я сл. вел $Y = \varphi(X_1, X_2)$ можно найти по ф-ле:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

где $f(x_1, x_2)$ – совм-ная пл-ть распределения сл. вел X_1 и X_2

$$D(y) = \{(x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y\}.$$

Док. во:



По опр-ю:

$F_Y(y) = P\{Y < y\}$

$Y = \varphi(X_1, X_2)$

События $\{Y < y\}$ и $\{(X_1\ X_2) \in D(y)\}$ явл. эквивалентными,

поэтому

$$F_Y(y) = P\{(X_1, X_2) \in D(y)\} \overset{\text{св-во непр сл. вел.}}{=} \iint\limits_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

(12) Ф-ла свертки

Th

Пусть 1) (X_1, X_2) — непр сл. в-р

2) X_1, X_2 независ сл. величины

3) $Y = X_1 + X_2$ $\quad (\varphi(X_1, X_2) = Y)$

Тогда

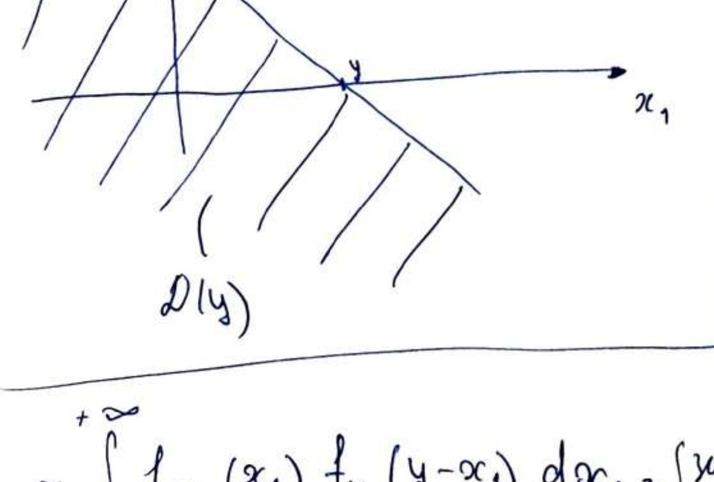
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)\, f_{X_2}(y-x)\, dx$$

Док-во:

$$F_Y(y) = \iint_{D(y)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \left\{ \begin{matrix} X_1, X_2 - \text{независ} \\ f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \end{matrix} \right\} =$$

$$= \iint_{D(y)} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \ominus \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \ominus$$

$$D(y) = \{ (x_1, x_2) : \varphi(x_1, x_2) < y \} = \{ (x_1, x_2) : x_1 + x_2 < y \}$$



$x_2 < y - x_1$

$$\ominus \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$$

По th о произв. интеграла с перем. верхним пределом:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(y - x_1)\, dx_1 = \{\text{замена } x = x_1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)\, f_{X_2}(y-x)\, dx$$

(13)

Пусть X - дискр сл. вел, принимающая зн-я x_i, $i \in I$ с вер-тями p_i соответственно

<u>Опр</u> Математическим ожиданием сл. вел X наз число

$$M[X] = \sum_{i \in I} p_i x_i$$

*

<u>Опр</u> Мат. ожиданием непр. сл. вел X наз число

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

где f - ф-ия пл-ти распр-я вер-тей сл. вел X.

Формулы для вычисления МО ф-ии от сл. величин[1)] и сл. вектор-р

1) если $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

а) X - дискр сл. вел, то

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) p_i$$

б) X - непр. сл. вел, то

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\, dx$$

2) если $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

а) (X, Y) - дискр. сл. век

$$M[\varphi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij},$$

где $p_{ij} = P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}$

б) (X, Y) - непр. сл. в-р

$$M[\varphi(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) \underbrace{f(x,y)}_{\text{совм. пл-ть распр } X \text{ и } Y} dx\, dy$$

(13) (продолжение)

Св-ва МО:

1° Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $MX = x_0$

2° Линейность

а) $M[aX+b] = aMX + b \quad (a, b = const)$

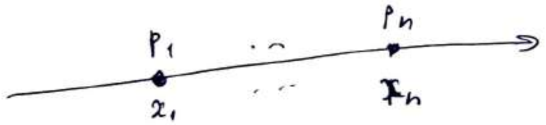
б) $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$

3° Если X_1 и X_2 — независ, то

$$M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$$

Мех. смысл МО

Пусть на невесомой оси расположены массы $p_1, \dots, p_n$ в точках с координатами $x_1, \dots, x_n$ соотв.



Тогда координата центра масс этой оси

$$x_{ц.м} = \left(\frac{\sum^n x_i m_i}{\sum m_i} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^n p_i}_{1 \text{ (усл. норм)}}} = MX$$

Т.о. MX хар-ет положение ц.м. единичной вероятностной массы, распределенной вдоль прямой в соответствии с законом распр-я вер-тей сл. вел. X.

(14)

Опр Дисперсией сл. вел X наз число

$$D[X] = M[(X-m)^2],$$

где $m = MX$

"Явные" ф. лы для дисперсии:

а) X - дискр. сл. вел

$$DX = \{M[(X-m)^2], \text{ т.е. } M[\varphi(X)], \text{ где } \varphi(X) = (X-m)^2\} =$$

$$= \sum_{i \in I} (x_i - m)^2 p_i, \text{ где } p_i = P\{X = x_i\}$$

б) X - непр сл. вел

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$

Св-ва дисперсии:

1° $DX \geqslant 0$

2° Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $DX = 0$

3° $D[aX + b] = a^2 DX$

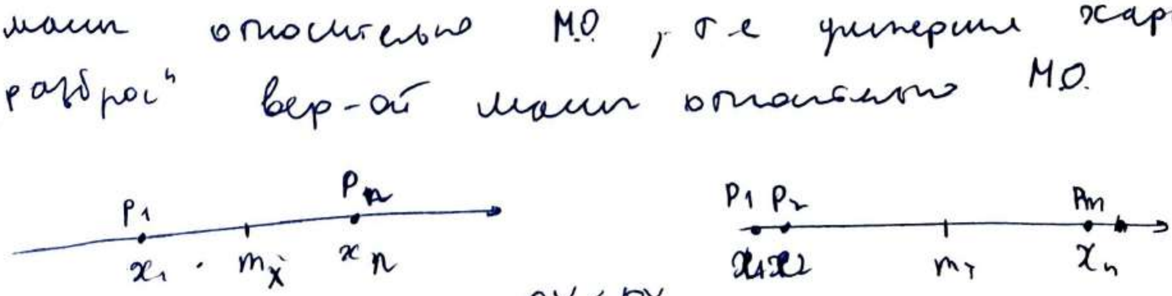
4° Если X_1, X_2 - независ, то

$$D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2$$

5° $DX = M[X^2] - (MX)^2$

Мех. смысл дисперсии

Дисперсия явл. моментом инерции вероятностной массы относительно М.О., т.е. дисперсия характеризует "разброс" вер-ей массы относительно М.О.



$DX < DY$

(15)

Пусть X - сл. вел

<u>Опр</u> Начальным моментом k-ого порядка (k-ым начальным моментом) сл. вел X наз число
$$m_k = M[X^k]$$

<u>Опр</u> Центральным моментом k-ого порядка (k-ым центральным моментом) сл. вел X наз. число
$$\mathring{m}_k = M[(X-m)^k],$$
где $$m = MX$$

„Явные" ф-лы:

а) X - дискр сл. вел.
$$m_k(X) = \sum_{i\in I} x_i^k p_i, \quad \text{где} \quad p_i = P\{X = x_i\}, \ i \in I$$
$$\mathring{m}_k(X) = \sum_{i\in I} (x_i - m)^k p_i,$$

б) X - непр. сл. вел
$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$$
$$\mathring{m}_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^k f(x)\,dx$$

$MX = m_1$

$DX = \mathring{m}_2$

$\mathring{m}_1 = 0$

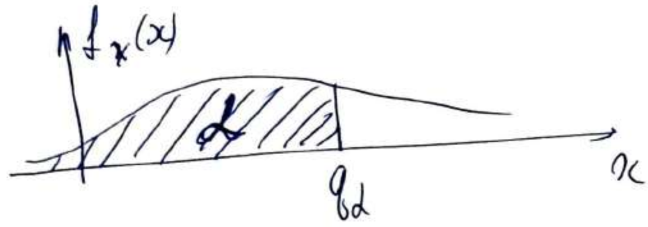
Пусть 1) X - сл. вел

2) $\alpha \in (0, 1)$

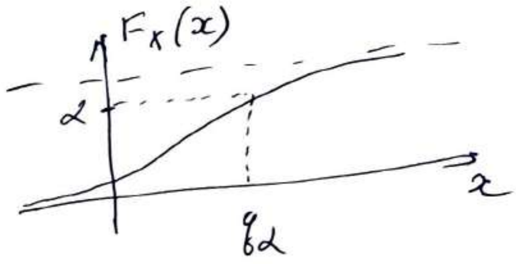
<u>Опр</u> Квантилью уровня α сл. вел X наз число q_α такое, что
$$P\{X < q_\alpha\} \le \alpha$$
$$P\{X > q_\alpha\} \le 1-\alpha$$

(15) (продолжение)

- Для непрерывной случайной вел X квантилью уровня α наз число q_α, слева от которого располагается α её вер-ной массы



Для непр сл. вел X q_α явл решением ур-я $F_X(x)=\alpha$



<u>Опр</u> <u>Медианой</u> сл. вел. X наз её квантиль уровня $\frac{1}{2}$.

---

(16) Пусть (X_1, X_2) — двумерный случайный в-р.

<u>Опр</u> Ковариацией сл вел X_1 и X_2 наз число

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = M\left[(X_1-m_1)(X_2-m_2)\right],$$

где $m_i = MX_i$, $i=\overline{1,2}$

#

"Явные" ф-лы:

а) (X_1, X_2) — дискр сл. в-р, $X_1 \in \{x_{1,i} : i \in I\}$

$X_2 \in \{x_{2,j} : j \in J\}$

$$p_{ij} = P\{(X_1, X_2) = (x_{1,i}, x_{2,j})\}$$

(16) (продолжение)

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_{1_i} - m_1)(x_{2_j} - m_2)\, p_{ij}$$

б) (X_1, X_2) – непр. сл. в-р

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2)\, f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

где $f(x_1, x_2)$ – ф-я пл-ти $f(x_1, x_2)$

Св-ва ков-ции:

1° $D[X+Y] = DX + DY + 2\operatorname{cov}(X, Y)$

(X, Y – произв.)

2° $\operatorname{cov}(X, X) = DX$

3° X, Y – независ. $\Rightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = 0$

4° $\operatorname{cov}(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = a_1 a_2 \operatorname{cov}(X, Y)$

5° $|\operatorname{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY}$

при этом

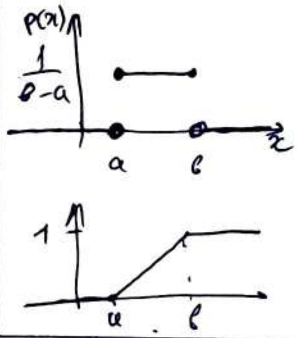
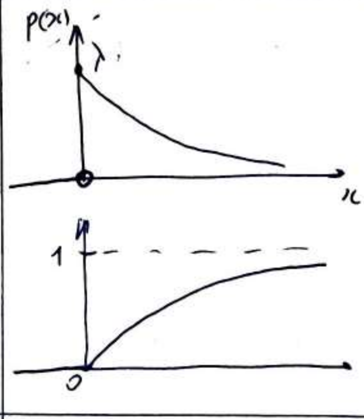
$|\operatorname{cov}(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \Rightarrow X$ и Y связаны лин. зав-тью, т.е. $\exists$ $Y = aX + b$

6° $\operatorname{cov}(X, Y) = M[XY] - (MX)(MY)$

Бином.

$P\{X=i\}=C_n^i p^i q^{n-i}$

$i=\overline{0,n}$

Название	Формулы	MX	DX	Графики
Биномиальное $X\sim B(n,p)$	$P\{X=i\}=C_n^i p^i q^{n-i}$, $i=\overline{0,n}$	np	npq	—
Пуассона. $X\sim\Pi(\lambda)$	$P\{X=i\}=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$, $i=0,1,\dots$, $\lambda>0$	λ	λ	—
Геометр.	$P\{X=i\}=pq^i$, $i=0,1,\dots$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	—
Равномерн. $X\sim R[a,b]$	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Экспоненц. $X\sim Exp(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$ $\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	
Нормальное $X\sim N(m,\sigma^2)$; $\left.\begin{matrix}m=0\\ \sigma=1\end{matrix}\right\}$ стд. норм. знач	$\varphi_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $m\in(-\infty,+\infty)$, $\sigma>0$; $\Phi_{m,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$	m	σ^2	Для стд: