
Теория вероятностей. Вопросы к РКЗ

Этот файл — вырезка из лекций, которая составляется для удобства подготовки к РК. Можно сказать, что составляется она один раз: всякие ошибки, будь они типографическими или смысловыми, будут, скорее всего, исправлены только в конспекте лекций.

Замечание. Если строгость/нестрогость знака сравнения не имеет значения, то для обозначения этого используется знак $\preceq \in \{<, \leq\}$. При ведении лекций вместо \preceq использовался знак, похожий на \leq , где нижняя черта рисовалась пунктиром. Похожего знака нет в стандартном наборе знаков \LaTeX , поэтому была выбрана замена.

1 Сформулировать определения случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Записать основные свойства функции распределения.

Определение. Случайной величиной называется функция

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

такая, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega: X(\omega) < x\} \in \beta$ (т. е. для любого x множество $\{\omega: X(\omega) < x\}$ является событием).

Замечание. Упрощённо на случайную величину можно смотреть как на случайный эксперимент, в котором на прямую бросают точку. Точка x называется реализацией величины X .

Пусть X — случайная величина, связанная с некоторым случайным экспериментом.

Определение. Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется отображение

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

определённое следующим правилом¹

$$F_X(x) = P\{X < x\}$$

¹С тем же успехом можно определить F_X как $F_X(x) = P\{X \leq x\}$; выбор обусловлен конвенцией (при этом, видимо, в международной литературе используют именно знак \leq). От того, как определена эта функция, в основном зависят выборы знаков ($<$ или \leq) в определённых местах в дальнейших формулах, но список отличий этим не ограничивается. — Прим. ред.

Замечание 1. Из определения функции распределения следует, что $\forall x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega : X(\omega) < x\}$ должно быть событием (ведь вероятность P определена только для элементов из β). Но это условие выполнено в силу определения случайной величины.

Замечание 2. Значение функции распределения F_X в точке x равно вероятности того, что случайно брошенная на прямую точка попадёт левее x .

Основные свойства:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. F является неубывающей функцией, т. е. если $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- 3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

4. В каждой точке функция распределения непрерывна слева²: $\lim_{x \rightarrow x_0-} F(x) = F(x_0)$;
5. $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$.

Замечание. Можно показать, что любая функция, обладающая свойствами 2, 3 и 4 является функцией распределения некоторой случайной величины.

2 Сформулировать определение дискретной случайной величины; понятие ряда распределения. Сформулировать определение непрерывной случайной величины и функции плотности распределения вероятностей.

Определение случайной величины — см. вопрос 1.

Определение. Случайная величина называется дискретной, если множество её значений конечно или счётно.

²Если бы F_X была определена как $F_X = P\{X \leq x\}$, то функция распределения была бы непрерывна справа. В учебнике по Теории Вероятностей из серии «Математика в техническом университете» (с римской цифрой на обложке, далее книги из серии будут адресоваться по номерам; для Теории Вероятностей — учебник XVI) написано (издание третье, исправленное), что на этом отличия в свойствах заканчиваются; это, судя по всему, ошибка, т. к. при использовании \leq свойство 5 должно записываться как $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$. — Прим. ред.

Пусть X — дискретная случайная величина, принимающая значения из конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Закон распределения такой случайной величины можно задать таблицей $P(x)$:

X	x_1	\dots	x_i	\dots	x_n
P	p_1	\dots	p_i	\dots	p_n

При этом $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, n}$; $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Определение. Эта таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины X .

Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если существует функция

$$f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

такая, что $\forall x \in \mathbb{R}$ функция $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ (F — функция распределения в X).

Замечание 1. При этом f называют функцией плотности распределения вероятности случайной величины X .

3 Сформулировать определение непрерывной случайной величины. Записать основные свойства функции плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если существует функция

$$f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

такая, что $\forall x \in \mathbb{R}$ функция $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ (F — функция распределения в X).

Замечание 1. При этом f называют функцией плотности распределения вероятности случайной величины X .

Основные свойства:³

1. $f(x) \geq 0$;

³Основных свойств именно функции плотности распределения непрерывной случайной величины в лекциях не было. Вместо этого приводятся основные свойства непрерывных случайных величин. В первых четырёх свойствах упоминается функция плотности, а пятое, вероятно, писать не нужно, но оно всё равно было добавлено для справки. — Прим. ред.

2.

$$P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx$$

где X — непрерывная случайная величина, а f — её функция плотности⁴;

3. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

где f — функция плотности некоторой случайной величины;

4.

$$P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$$

где X — непрерывная случайная величина, f — её функция плотности, x_0 — точка непрерывности функции f , а Δx — мало;

5. Если X — непрерывная случайная величина, то для любого наперёд заданного $x_0 \in \mathbb{R}$

$$P\{X = x_0\} = 0$$

4 Сформулировать определения случайного вектора и его функции распределения вероятностей. Записать свойства функции распределения двумерного случайного вектора.

Пусть

1. (Ω, β, P) — вероятностное пространство;
2. $X_\omega = X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ — случайные величины, заданные на этом вероятностном пространстве.

Определение. n -мерным случайным вектором называется кортеж⁵

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$$

⁴Чуть позже по лекциям утверждается, что в этом свойстве не важно, какие знаки стоят в условии при P , т. е. $P\{a \leq X < b\} = P\{a < X < b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\}$. — Прим. ред.

⁵Обратите внимание, что векторы обозначаются стрелочкой (\vec{X}), а не прямой (\bar{X}). Это важно, т. к. далее в курсе появится величина, которая будет обозначаться прямой. За использование прямой для обозначения вектора будут снижаться баллы. — Прим. лект.

Замечание. В этом контексте часто используют следующую терминологию:

1. Случайные величины X_1, \dots, X_n называют координатами случайного вектора \vec{X} ;
2. Случайный вектор \vec{X} часто называют n -мерной случайной величиной.
- ...

Замечание 1. При рассмотрении случайных векторов мы, как правило, будем ограничиваться случаем $n = 2$.

Замечание 2. На реализации двумерного случайного вектора упрощённо можно смотреть как на результат случайного эксперимента, в котором на плоскость бросают точку.

Закономерность, в соответствии с которой при многократном повторении такого эксперимента точка будет чаще или реже попадать в те или иные области на плоскости, составляет закон распределения вероятностей этого случайного вектора.

При этом задавать закон распределения случайного вектора также удобно с использованием так называемой функции распределения.

Определение. Функцией распределения вероятностей случайного вектора

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

называется отображение

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

определённое правилом

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}$$

1. $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$;
2. (а) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_1 является неубывающей функцией;
(б) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменного x_2 является неубывающей функцией.
3. $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty, x_2 = \text{const}} F(x_1, x_2) = 0$
 $\lim_{x_1 = \text{const}, x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$
4. $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty, x_2 \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2) = 1$

$$5. \quad \lim_{x_1 = \text{const}, x_2 \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty, x_2 = \text{const}} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$$

где $F_{X_i}(x_i)$ — функция распределения случайной величины X_i ;

6. Вероятность того, что реализация попадёт в похожую на прямоугольник область $D = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1), y \in [a_2, b_2)\}$:

$$P\{a_1 \leq X < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

7. (а) При фиксированном x_2 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменной x_1 является непрерывной слева в каждой точке;

(б) При фиксированном x_1 функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменной x_2 является непрерывной слева в каждой точке.

5 Сформулировать определение дискретного случайного вектора; понятие таблицы распределения двумерного случайного вектора. Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей.

Для определения случайного вектора см. вопрос 4.

Определение. Случайный вектор (X_1, \dots, X_n) называется дискретным, если каждая из составляющих его случайных величин X_i , $i = \overline{1, n}$ является дискретной.

Давайте рассмотрим двумерный случайный вектор (X, Y) . Для простоты будем считать, что случайные величины могут принимать значения

$$X = \{x_1, \dots, x_m\}$$

$$Y = \{y_1, \dots, y_n\}$$

Тогда этот вектор может принимать значения (x_i, y_j) , коих $m \cdot n$ штук. Закон распределения этого вектора удобно задавать при помощи таблицы:

X, Y	y_1	\dots	y_j	\dots	y_n
x_1	p_{11}	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	p_{i1}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{in}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	\dots	p_{mj}	\dots	p_{mn}

Здесь $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. При этом должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

Найдём вероятность того, что выпавшее значение содержит элемент x_i :

$$\begin{aligned} P\{X = x_i\} &= P\{(X, Y) \in \{(x_i, y_1), \dots, (x_i, y_n)\}\} = \\ &= P\{\{(X, Y) = (x_i, y_1)\} + \dots + \{(X, Y) = (x_i, y_n)\}\} = \\ &= \langle \text{все члены суммы несовместны} \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = \underbrace{\sum_{j=1}^n p_{ij}}_{\text{обозначим сумму как } p_{X_i}} \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно найти

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^m p_{ij} = p_{Y_j}$$

Указанную выше табличку принято дополнять ещё одним столбцом для p_{X_i} и одной строкой для p_{Y_j} :

X, Y	y_1	\dots	y_j	\dots	y_n	P_X
x_1	p_{11}	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1n}	P_{X_1}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	p_{i1}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{in}	P_{X_i}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	\dots	p_{mj}	\dots	p_{mn}	P_{X_m}
P_Y	P_{Y_1}	\dots	P_{Y_j}	\dots	P_{Y_n}	1

Сумма элементов в каждой строке исходной таблицы должна равняться соответствующему P_{X_i} , а сумма элементов в каждом столбце — P_{Y_j} . Сумма элементов в строке P_Y (и сумма элементов в столбце P_X , отдельно) должна равняться 1.

Определение. Случайный вектор (X_1, \dots, X_n) называется непрерывным, если существует функция

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

такая, что для каждой точки (x_1, \dots, x_n) выполняется

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{x_i} dt_i \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_n$$

где F — функция распределения плотности случайного вектора (X_1, \dots, X_n) . При этом f называется функцией плотности распределения вероятностей этого вектора.

Замечание 1. В определении предполагается, что несобственный интеграл сходится в каждой точке $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 2. При $n = 2$:

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2) dt_2$$

6 Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей. Записать основные свойства функции плотности распределения двумерных случайных векторов.

Для определения случайного вектора см. вопрос 4.

Определение. Случайный вектор (X_1, \dots, X_n) называется непрерывным, если существует функция

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

такая, что для каждой точки (x_1, \dots, x_n) выполняется

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{x_i} dt_i \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_n$$

где F — функция распределения плотности случайного вектора (X_1, \dots, X_n) . При этом f называется функцией плотности распределения вероятностей этого вектора.

Замечание 1. В определении предполагается, что несобственный интеграл сходится в каждой точке $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Замечание 2. При $n = 2$:

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2) dt_2$$

Свойства непрерывных случайных векторов (для $n = 2$):⁶

1. Если f — функция плотности двумерного случайного вектора, то $f(x_1, x_2) \geq 0$.
2. Если (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор, а $f(x_1, x_2)$ — его функция плотности, то

$$P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$$

3. Условие нормировки: $\iint_{R^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

4. Если $f(x_1, x_2)$ — функция плотности вектора (X_1, X_2) , а (x_1^0, x_2^0) — точка непрерывности функции f , то

$$P\{x_1^0 \leq X_1 \leq x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 \leq X_2 \leq x_2^0 + \Delta x_2\} \approx f(x_1^0, x_2^0) \Delta x_1 \Delta x_2$$

если $\Delta x_1, \Delta x_2$ достаточно малы.

5. Если (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор, то для любых наперёд заданных x_1^0, x_2^0

$$P\{(X_1, X_2) = (x_1^0, x_2^0)\} = 0$$

6.

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

7.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 &= f_{X_1}(x_1) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 &= f_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

где f_{X_1}, f_{X_2} — маргинальные функции плотности случайных величин X_1 и X_2 , f — совместная функция плотности случайных величин X_1 и X_2 (\equiv функция плотности случайного вектора (X_1, X_2)).

Обратите внимание, что из функции плотности можно получить обе маргинальные.

$$f(x_1, x_2) \implies \begin{cases} f_{X_1}(x_1) \\ f_{X_2}(x_2) \end{cases}$$

⁶Опять же, свойств именно функции плотности непрерывных случайных векторов «в чистом виде» нет. — Прим. ред.

7 Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать свойства независимых случайных величин. Сформулировать определение попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

Определение. Случайные величины X и Y называются независимыми, если

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

где F — совместная функция распределения X и Y (\equiv функция распределения случайного вектора (X, Y)); F_X, F_Y — маргинальные функции распределения случайных величин X и Y .

Свойства независимых случайных величин:

1. ...

Случайные величины X и Y независимы

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы.

2. ...

Случайные величины X и Y независимы

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ события $\{x_1 \leq X < x_2\}$ и $\{y_1 \leq Y < y_2\}$ независимы.

3. ...

Случайные величины X и Y независимы

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall M_1, M_2$ события $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ независимы,

где M_1, M_2 — промежутки или объединения промежутков в \mathbb{R} .

4. Если X и Y — дискретные случайные величины, то

$$X, Y \text{ — независимые } \Longleftrightarrow p_{ij} \equiv P_{X_i} P_{Y_j}$$

где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$, $P_{X_i} = P\{X = x_i\}$, $P_{Y_j} = P\{Y = y_j\}$.

5. Если X и Y — непрерывные случайные величины, то

$$X, Y \text{ — независимы} \iff f(x, y) \equiv f_X(x) f_Y(y)$$

где f — совместная плотность распределения случайных величин X и Y (\equiv функция плотности распределения случайного вектора (X, Y)); f_X, f_Y — маргинальные плотности распределения случайных величин X и Y соответственно.

Определение. Случайные величины X_1, \dots, X_n , заданные на одном вероятностном пространстве, называются

- Попарно независимыми, если X_i и X_j независимы при $i \neq j$;
- Независимыми в совокупности, если

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

где F — совместная функция распределения случайных величин X_1, \dots, X_n (\equiv функция распределения случайного вектора (X_1, \dots, X_n)), F_{X_i} — маргинальные функции распределения случайных величин X_i , $i = \overline{1; n}$.

8 Понятие условного распределения. Доказать формулу для вычисления условного ряда распределения одной компоненты двумерного дискретного случайного вектора при условии, что другая компонента приняла определённое значение. Записать формулу для вычисления условной плотности распределения одной компоненты двумерного непрерывного случайного вектора при условии, что другая компонента приняла определённое значение.

Давайте рассмотрим случайный вектор (X, Y) . Предположим, известно, что случайная величина Y приняла значение y_0 . Что в этом случае можно сказать о возможных значениях случайной величины X и что можно сказать о законе распределения случайной величины X при условии $Y = y_0$?

Пусть

1. (X, Y) — дискретный случайный вектор;

2. $X \in \{x_1, \dots, x_m\}, Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$;
3. $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}, i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n},$
 $P_{X_i} = P\{X = x_i\}, i = \overline{1; m},$
 $P_{Y_j} = P\{Y = y_j\}, j = \overline{1; n};$
4. Известно, что $Y = y_j$ для некоторого фиксированного j .

Тогда

$$\begin{aligned} P\{X = x_i | Y = y_j\} &= \langle \text{из определения условной вероятности} \rangle = \\ &= \frac{P\{\{X = x_i\} \cdot \{Y = y_j\}\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}}{P_{Y_j}} = \frac{p_{ij}}{P_{Y_j}} \end{aligned}$$

Определение. В случае двумерного дискретного случайного вектора (X, Y) условной вероятностью того, что случайная величина X приняла значение x_i при условии $Y = y_j$ называют число

$$\pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{P_{Y_j}}$$

В случае непрерывного случайного вектора (X, Y) рассуждения, аналогичные проведённым для дискретного случайного вектора рассуждениям, приводят к следующему определению.

Определение. Условной плотностью распределения случайного вектора X при условии $Y = y$ называется функция

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

где f — совместная плотность распределения случайных величин X и Y (\equiv плотность распределения вектора (X, Y)), f_Y — маргинальная плотность распределения случайной величины Y .

Замечание. Аналогичным образом определяется условная плотность распределения случайной величины Y при условии $X = x$:

$$f_Y(y | X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

где $f_X(x)$ — маргинальная плотность распределения случайной величины X .

9 Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать критерий независимости двух случайных величин в терминах условных распределений.

Определение. Случайные величины X и Y называются независимыми, если

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

где F — совместная функция распределения X и Y (\equiv функция распределения случайного вектора (X, Y)); F_X, F_Y — маргинальные функции распределения случайных величин X и Y .

Теорема. Критерии независимости случайных величин в терминах условных распределений.

1. Пусть (X, Y) — двумерный случайный вектор. Тогда следующие условия эквивалентны:

- X, Y — независимые.
- $F_X(x | Y = y) \equiv F_X(x)$ для всех y , в которых определена $F_X(x | Y = y)$.
- $F_Y(y | X = x) \equiv F_Y(y)$ для всех x , в которых определена $F_Y(y | X = x)$.

2. Если (X, Y) — непрерывный случайный вектор, то следующие условия эквивалентны. (для условной плотности)

- X, Y — независимые.
- $f_X(x | Y = y) \equiv f_X(x)$ для всех y , в которых определена $f_X(x | Y = y)$.
- $f_Y(y | X = x) \equiv f_Y(y)$ для всех x , в которых определена $f_Y(y | X = x)$.

3. Если (X, Y) — дискретный случайный вектор, то следующие утверждения эквивалентны.

- X, Y — независимые.
- $P\{X = x_i | Y = y_j\} \equiv P\{X = x_i\}$ для всех $j = \overline{1; n}$.
- $P\{Y = y_j | X = x_i\} \equiv P\{Y = y_j\}$ для всех $i = \overline{1; m}$.

(здесь $X \in \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$).

10 Понятие функции случайной величины. Указать способ построения ряда распределения функции дискретной случайной величины. Сформулировать теорему о плотности распределения функции от непрерывной случайной величины.

Пусть

1. X — некоторая случайная величина;
2. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая известная функция.

Тогда $\varphi(X) = Y$ — некоторая случайная величина.

Пусть X — дискретная случайная величина, имеющая ряд распределения

X	x_1	\dots	x_i	\dots	x_n
P	p_1	\dots	p_i	\dots	p_n

Тогда $Y = \varphi(X)$ — тоже дискретная случайная величина. При этом Y принимает значения $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$. Поэтому ряд распределения Y будет выглядеть вот так:

Y	$\varphi(x_1)$	\dots	$\varphi(x_i)$	\dots	$\varphi(x_n)$
P	p_1	\dots	p_i	\dots	p_n

Если в этой таблице некоторые из значений $\varphi(x_i)$ совпадают, то соответствующие столбцы нужно объединить, приписав этому значению суммарную вероятность.

Теорема. Пусть

1. X — непрерывная случайная величина;
2. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
3. φ монотонна и непрерывно дифференцируема;
4. ψ — функция⁷, обратная к φ (т. к. φ — монотонная, то $\exists \psi = \varphi^{-1}$);
5. $Y = \varphi(X)$.

Тогда

1. Y также является непрерывной случайной величиной;
2. $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$.

⁷ ψ — строчная буква «пси» греческого алфавита. — Прим. ред.

11 Понятие скалярной функции случайного векторного аргумента. Доказать формулу для нахождения значения функции распределения случайной величины Y , функционально зависящей от случайных величин X_1 и X_2 .

Пусть

1. (X_1, X_2) — двумерный случайный вектор;
2. $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
3. $Y = \varphi(X_1, X_2)$ — некоторая одномерная случайная величина.

Как, зная закон распределения случайного вектора (X_1, X_2) , найти закон распределения случайной величины Y ?

Если (X_1, X_2) — непрерывный случайный вектор, то функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1, X_2)$ можно найти по формуле

$$F_Y(y) = \iint_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

где f — совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2 , $D(y) = \{(x_1, x_2): \varphi(x_1, x_2) < y\}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y < y\} = \\ &= \langle \text{события } \{Y < y\} \text{ и } \{(X_1, X_2) \in D(y)\} \text{ эквивалентны} \rangle = \\ &= \langle \text{свойство непрерывного случайного вектора} \rangle = \\ &= \iint_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

12 Сформулировать и доказать теорему о формуле свёртки.

Теорема. Пусть

1. X_1, X_2 — непрерывные случайные величины;
2. X_1, X_2 — независимые случайные величины;

3. $Y = X_1 + X_2$ (т. е. $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$).

Тогда

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(y - x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1$$

Доказательство. ...

1.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y < y\} = P\{X_1 + X_2 < y\} = \iint_{D(y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \left\langle X_1, X_2 - \text{независимые} \implies f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) \left[F_{X_2}(x_2) \Big|_{-\infty}^{y-x_1} \right] dx_1 = \\ &= \langle F_{X_2}(-\infty) = 0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) F_{X_2}(y - x_1) dx_1 \end{aligned}$$

2.

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1) dx_1$$

13 Сформулировать определение математического ожидания случайной величины (дискретный и непрерывный случаи). Записать формулы для вычисления математического ожидания функции от случайной величины. Сформулировать свойства математического ожидания. Механический смысл математического ожидания.

Определение. Математическим ожиданием дискретной величины X называют число

$$M[X] = \sum_i p_i x_i$$

где i пробегает такое множество значений, что x_i исчерпывает все возможные значения случайной величины X ; $p_i = P\{X = x_i\}$.

Замечание 1. Если множество значений случайной величины X бесконечно (счётно), то указанный ряд должен сходиться абсолютно, т. е.

$$\sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty$$

В противном случае говорят, что $\nexists M[X]$.

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число⁸

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

где $f(x)$ — функция плотности случайной величины X .

Замечание 1. В определении подразумевается, что указанный интеграл сходится абсолютно, т. е. его значение определено и конечно.

Замечание. Формулы для вычисления математического ожидания функции от случайной величины.

1. Пусть X — случайная величина, а $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция, тогда

(a) Если X — дискретная случайная величина, то

$$M[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i$$

(b) Если X — непрерывная случайная величина, то

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$$

2. Если (X, Y) — случайный вектор, $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, — функция, то

(a) Если (X, Y) — дискретный случайный вектор, то

$$M[\varphi(X, Y)] = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$$

где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$.

⁸Если аргумент достаточно простой, то квадратные скобки в обозначении $M[X]$ часто опускают. Также часто MX обозначают просто буквой m . — Прим. ред.

(b) Если (X, Y) — непрерывный случайный вектор, то

$$M[\varphi(X, Y)] = \iint_{R^2} \varphi(x, y) f(x, y) dx dy$$

где f — совместная плотность распределения X и Y .

Свойства математического ожидания:

1. Если $P\{X = x_0\} = 1$ (т. е. если X фактически не является случайной), то $MX = x_0$;
2. $M[aX + b] = a \cdot MX + b$;
3. $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$;
4. Если X_1, X_2 — независимы, то $M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$.

Замечание. *Механический смысл математического ожидания.*

Будем интерпретировать величину p_i как «вероятностную массу» значения x_i случайной величины X . Т. к. $\sum_i p_i = 1$, то $M[X]$ характеризует положение центра тяжести вероятностной массы.

14 Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Записать формулы для вычисления дисперсии в дискретном и непрерывном случае. Сформулировать свойства дисперсии. Механический смысл дисперсии.

Определение. *Дисперсией случайной величины X называют число*

$$D[X] = M[(X - m)^2]$$

где $m = MX$.

Замечание 1. *Если X — дискретная случайная величина, то*

$$DX = \langle DX = M[(X - m)^2], \varphi(x) = (x - m)^2 \rangle = \sum_i (x_i - m)^2 p_i$$

где $p_i = P\{X = x_i\}$.

Замечание 2. Если X — непрерывная случайная величина, то

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx$$

где f — функция плотности случайной величины X .

Свойства дисперсии:

1. $DX \geq 0$;
2. Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $DX = 0$.
3. $D[aX + b] = a^2 DX$;
4. $D[X] = M[X^2] - (MX)^2$;
5. Если X_1, X_2 — независимы, то $D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2$.

Замечание. Механический смысл дисперсии.

Дисперсия случайной величины характеризует разброс значений этой случайной величины относительно математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем больше разброс значений.

С точки зрения механики дисперсия — момент инерции вероятностной массы относительно математического ожидания.

15 Сформулировать определения начального и центрального моментов случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия как моменты. Сформулировать определение квантили и медианы случайной величины.

Пусть X — случайная величина.

Определение. Моментом k -ого порядка (k -ым начальным моментом) случайной величины X называется число

$$m_k = M[X^k]$$

Определение. Центральным моментом k -ого порядка случайной величины X называется число

$$\tilde{m}_k = M[(X - m)^k]$$

где $m = MX$.

Замечание 1. Если X — дискретная случайная величина, то

$$m_k = \sum_i x_i^k p_i$$

$$\mathring{m}_k = \sum_i (x_i - m)^k p_i$$

Если X — непрерывная случайная величина, то

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mathring{m}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k f(x) dx$$

где f — функция плотности случайной величины X .

Замечание 2. $m_0 = MX$; $\mathring{m}_2 = DX$; $\mathring{m}_1 = M[(X - m)^1] = MX - m = 0$.

Пусть

1. X — случайная величина;
2. $\alpha \in (0, 1)$.

Определение. Квантилью уровня α (α -квантилью) случайной величины X называется число q_α такое, что

$$P\{X < q_\alpha\} \leq \alpha, \quad P\{X > q_\alpha\} \leq 1$$

Замечание. Для непрерывной случайной величины X квантиль уровня α является решением уравнения

$$F(x) = \alpha$$

где F — функция распределения случайной величины X .

Замечание. Если f — функция плотности случайной величины X , то слева от точки q_α «находится» α кг массы вероятности, а справа $(1 - \alpha)$ кг.

Определение. Медианой случайной величины X называют её квантиль уровня $\frac{1}{2}$.

16 Сформулировать определение ковариации случайных величин. Записать формулы для вычисления ковариации в дискретном и непрерывном случаях. Сформулировать свойства ковариации.

Ковариация является характеристикой случайного вектора.

Пусть (X, Y) — двумерный случайный вектор.

Определение. Ковариацией случайных величин X и Y называется число

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$$

где $m_X = MX$, $m_Y = MY$.

Замечание. Из определения следует:

1. В случае дискретного случайного вектора

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij}$$

где $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\}$.

2. В случае непрерывного случайного вектора

$$\text{cov}(X, Y) = \iint_{R^2} (x - m_X)(y - m_Y)f(x, y) dx dy$$

где f — совместная плотность величин X и Y .

Свойства ковариации:

1. $D(X + Y) = DX + DY + 2 \text{cov}(X, Y)$;
2. $\text{cov}(X, X) = DX$;
3. Если X, Y — независимые, то $\text{cov}(X, Y) = 0$;
4. $\text{cov}(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2 \text{cov}(X, Y)$
5. $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY}$, причём $|\text{cov}(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \iff \exists a, b \in \mathbb{R}, Y = aX + b$ (т. е. X и Y связаны линейной зависимостью);
6. $\text{cov}(X, Y) = M[XY] - (MX)(MY)$.

А Комбинаторика

Пусть X — некоторое множество. Для примеров определим $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

А.1 Сочетания без повторений

Определение. Сочетанием без повторений из n ($n = |X|$) элементов по m называется любое неупорядоченное подмножество множества X , содержащее m различных элементов.

Кол-во таких подмножеств обозначается как C_n^m и равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

А.2 Размещения без повторений

Определение. Размещением без повторений из n элементов (исходного множества, $n = |X|$) по m (длина кортежа) называется кортеж, состоящий из m различных элементов множества X .

Примеры. $(1, 2, 4)$, но не $(5, 5, 4)$.

Кол-во возможных размещений без повторений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

А.3 Перестановки без повторений

Перестановки без повторений — крайний случай размещений без повторений.

Определение. Перестановкой без повторений называют кортеж, состоящий из $n = |X|$ различных элементов множества X .

Кол-во возможных перестановок без повторений:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Замечание. Три предыдущих понятия связаны как

$$A_n^m = P_m C_n^m$$

А.4 Размещения с повторениями

Определение. Размещением с повторениями из n ($n = |X|$) по m элементов называется любой элемент из $X^m = X \times X \times \dots \times X$.

Примеры. (1, 2, 3, 4, 5), (1, 4, 4, 4, 2).

Кол-во возможных размещений с повторениями:

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

А.5 Перестановки с повторениями

Определение. Перестановкой с повторениями называют кортеж длины n из элементов множества X , в котором каждый элемент $x_i \in X$ повторяется n_i , $i = \overline{1, k}$ раз ($\sum_i^k n_i = n$).

Кол-во возможных перестановок с повторениями:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}, \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$