• Clasificar y obtener la forma canónica de la EDP

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + u(x_1, x_2) = \sin(x_1). \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Definimos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matriz de coeficientes de las derivadas segundas, definimos $b = (0,0)$ vector de coeficientes de las derivadas parciales y $c = 1$.

Diagonalizamos A para encontrar $E \in M_2(\mathbb{R})$ diagonal con coeficientes $-1, 0$ o 1 que da la forma canónica tras el cambio de base.

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \iff -3 - 2\lambda + \lambda^2 = 0 \iff \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$

$= 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 = \lambda_1 \\ -1 = \lambda_2 \end{cases}$; calculamos el núcleo de $\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 2 \\ 2 & 1-\lambda_i \end{pmatrix}$ con $\lambda_i = 1, 2$. y obtenemos los autovalores.

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = y \to \ker\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\{\overset{\bar{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}\}.$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = -y \to \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{L}\{\overset{\bar{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}\}.$ verificamos que $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$ $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 1 - 1 = 0$ y además son linealmente independientes por tanto forman base ort de $\mathbb{R}^2$.

Por lo que $A = \overset{G}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{D}{\begin{pmatrix} 3 & \\ & -1 \end{pmatrix}} \overset{G^T}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

Construyendo $R \in M_2(\mathbb{R})$ diagonal de la siguiente manera: $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \\ & 1 \end{pmatrix}$; $P = R \cdot G = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Obtenemos $E = \overbrace{RG^T}^{P} \cdot A \cdot \overbrace{G \cdot R^T}^{P^T} = RDR = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Por lo que las nuevas variables y_1, y_2 quedan: $\hat{u}(y_1, y_2) = u(x_1, x_2)$

$y_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{3}}$, $y_2 = x_1 - x_2$ y la forma canónica es:

(2) $\dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_1^2} - \dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y_2^2} + \hat{u}(y_1, y_2) = \sin\left(\dfrac{\sqrt{3} \cdot y_1 + y_2}{2}\right)$

• Como E tiene todos sus coeficientes diagonales no nulos y de distinto signo ~~no nul~~

La EDP (1) es hiperbólica.