Санкт-Петербургский Государственный Университет

Факультет математики и компьютерных наук

# Методы решения систем дифференциальных уравнений


*от всем и так известных создателей @mknskyghoul и как же хочется тяночку*

Санкт-Петербургский
государственный
университет

# Содержание

# 1 Линейные неоднородные уравнения

Самое обычное линейное д.у. первого порядка в стандартной форме выглядит так:

$$y' = p(x)y + q(x) \qquad p, q \in C(a, b)$$

чтобы его решить сначала решается однородное уравнение $y' = p(x)y$. Его мы уже умеем решать - получится $y = Ce^{\int p(x)dx}$. Решение исходного уравнения будет искаться в виде

$$y(x) = v(x)e^{\int p(x)dx}$$

Подставим это в исходное уравнение:

$$y'(x) = (v(x)e^{\int p(x)dx})' = v'(x)e^{\int p(x)dx} + v(x)p(x)e^{\int p(x)dx}$$

С другой стороны $y'(x) = p(x)v(x)e^{\int p(x)dx} + q(x)$. Заметим, что у нас удачно сокращается слагаемое $p(x)v(x)e^{\int p(x)dx}$, остается равенство на производную $v$:

$$v(x)'e^{\int p(x)dx} = q(x) \iff v'(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Нужно просто проинтегрировать по $x$ и получить функцию $v(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}$. Нетрудно выписать конечную формулу для $y$ через $p$ и $q$, но, по соображениям бесполезности ее запоминания, далее будет идти пример.
*Пример:* $(xy' - 1)\ln x = 2y$
*Решение*: делим на $\ln x$ и переносим в нужные части

$$(xy' - 1)\ln x = 2y \iff xy' - 1 = \frac{2}{\ln x}y \iff y' = \frac{2}{x\ln x}y + \frac{1}{x} \text{ в стандартной форме.}$$

Решаем однородное уравнение $y' = \frac{2}{x\ln x}y$ : $\int \frac{2}{x\ln x} = 2\ln\ln x,\ e^{2\ln\ln x} = \ln^2 x$

$$y = v \cdot \ln^2 x,\ y' = v \cdot 2\ln x\frac{1}{x} + v' \cdot \ln^2 x = \frac{2v \cdot \ln^2 x}{x\ln x} + \frac{1}{x} \text{ - слагаемые с } v \text{ сокращаются}$$

$$v' = \frac{1}{x\ln^2 x} \Rightarrow v = \int \frac{1}{x\ln^2 x}dx = -\frac{1}{\ln x} + C \quad \text{не забываем про константу!}$$

Итого:

$$y = v(x) \cdot \ln^2 x = (C - \frac{1}{\ln x}) \cdot \ln^2 x = C\ln^2 x - \ln x$$

Естественно возникающий вопрос, а не забыли ли мы константу для $e^{\int p(x)dx}$ когда домножали на $v(x)$? На самом деле нет, поскольку она вылезет из интеграла $v'(x)$ в качестве $\frac{v(x)}{C'}$. А вот законную константу в $v(x)$ лучше не забывать!

Анекдот, из жизни Арнольда, после которого вы никогда про нее не забудете:
Он как-то принимал в СССР американского коллегу и решил его разыграть.
Пригласил в ресторан, а там отлучился, будто бы в туалет. По пути подозвал официантку и попросил:
— Когда подойдете к нашему столику, и я спрошу: чему равен интеграл от косинуса, ответьте, что он равен синусу такого же аргумента. Не забудете? Не

перепутаете?
Возвратился обратно и стал произносить тост за науку всех наук — математику. А по ходу дела, между прочим, замечает:
— Знаешь, а в нашей стране такой уровень образования, что все поголовно знают высшую математику!
— Не может быть, — машет рукой американский профессор.
— Ну, давай спросим что-нибудь из высшей математики хотя бы вот у этой официантки?
— Давай!
Подзывают:
— Чему равен интеграл от косинуса? — Синусу такого же аргумента, — заученно отвечает официантка.
Американец потрясен. Арнольд радуется, как дитя - розыгрыш удался!
Официантка отходит, после чего оборачивается и смущенно говорит:
— Извините, я забыла добавить - плюс константа интегрирования.

## 2 Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными обычно имеет вид:

$$y' = m(x)n(y) \qquad m \in C(a,b),\ n \in C(\alpha,\beta)$$

Рассматриваются 2 случая, когда функция $n(y)$ принимает нулевое значения в каких-то точках и когда нет:

1) $y_0 \in (\alpha,\beta):\ n(y_0) = 0 \Longrightarrow y(x) \equiv y_0$ - решение

2) $n(y) \neq 0,\ \frac{1}{n(y)}$ определено. Тогда считаем 2 функции $M(x), N(y)$:

$$M(x) = \int m(x)dx \quad N(y) = \int \frac{dy}{n(y)} \quad U(x,y) = N(y) - M(x),\ U \in C^1$$

Из равенства $U(x,y(x)) = N(y(x)) - M(x) = const$ можно выразить $y(x)$, который будет решением исходного уравнения. Действительно:

$$\frac{d}{dx}U(x,y(x)) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y(x)) \cdot y'(x) = -m(x) + \frac{1}{n(y(x))}y'(x) \equiv 0$$

если производная $U$ по $x$ равна 0, то производная функции $y(x)$ обязана быть равна $m(x)n(x)$.
*Пример:* $3y^2y' + 16x = 2xy^3,\ y(x)$ ограничено при $x \to \infty$
*Решение:*

$$3y^2y' = 2xy^3 - 16x \iff y' = \frac{2x(y^3-8)}{3y^2} \iff m(x) = 2x,\ n(y) = \frac{y^3-8}{3y^2}$$

1. $n(y) \equiv 0 \ \Rightarrow \ y \equiv 2$

2. $n(y) \not\equiv 0$ в области $G$ выше $y = 2$

$$M(x) = \int 2xdx = x^2 \qquad N(y) = \int \frac{3y^2}{y^3-8}dy = \int \frac{1}{y^3-8}dy^3 = \ln(y^3-8)$$
$$U(x,y) = N(y) - M(x) = \ln(y^3-8) - x^2 = const$$
$$y^3 = e^{C+x^2} + 8$$

т.к. $y = \sqrt[3]{e^{C+x^2}+8}$ не ограничено, то остается только $y \equiv 2$ .

## 3 Уравнение Бернулли

Иногда в жизни попадаются линейные уравнения выше 1 степени, в общем случае они не решаются, но некоторые решать приходится. Например, уравнения следующего вида называются уравнениями Бернулли:

$$y' = p(x)y + q(x)y^m, \ m \neq 0, 1$$

Для начала, надо не забыть(!!!), что $y \equiv 0$ - подходит. А дальше делается замена $z = y^{1-m}$, которая сводит наше уравнение к линейному неоднородному. Решив его, обратной заменой найдем значение для $y$. Действительно:

$$z = y^{1-m}, \ z' = (1-m)y^{-m}y' = (1-m)\frac{y'}{y^m}, \text{ делим исходное уравнение на } y^m :$$
$$\frac{y'}{y^m} = p(x)y^{1-m} + q(x) \iff \frac{1}{1-m}z' = p(x)z + q(x) \text{ - линейное неоднородное.}$$

*Пример*: $y' + 2y = y^2e^x$
*Решение*: Не забудем про $y \equiv 0$, а теперь преобразуем уравнение

$$y' = -2y + e^xy^2 \quad m = 2, \ z = y^{1-2} = y^{-1}, \ z' = -\frac{1}{y^2}y' \quad y = \frac{1}{z}$$
$$\text{делим все на } y^m : \ \frac{y'}{y^2} = \frac{-2}{y} + e^x \iff -z' = -2z + e^x \iff$$

$z' = 2z - e^x$ - линейное неоднородное. Значит по дороге мы нигде не ошиблись.

$z' = 2z, \ z = e^{\int 2dx} = e^{2x}$ - решение однородного. Для неоднородного: $z = v \cdot e^{2x}$

$$z' = v'e^{2x} + v2e^{2x} = 2ve^{2x} - e^x \iff v' = -e^{-x} \iff v = \int -e^{-x} = e^{-x} + C$$
$$z = ve^{2x} = (e^{-x}+C)e^{2x} = e^x + Ce^{2x} \qquad y = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}}$$

*Ответ*: $y = 0, \ y = \frac{1}{e^x+Ce^{2x}}$

## 4 Уравнение Риккати

Уравнением Риккати называется

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

В общем случае такие уравнения тоже не решаются, однако, если у нас получилось угадать какое-то ненулевое решение $y_1(x)$, то сделав замену $y = y_1 + z$ можно упростить наше уравнение:

$$y' = y_1' + z' = p(x) + q(x)(y_1 + z) + r(x)(y_1 + z)^2 \quad y_1' = p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2$$
$$z' = q(x)z' + r(x)(2y_1 z + z^2) \iff z' = (q(x) + r(x)2y_1)z + r(x)z^2$$

Таким образом, если мы смогли найти ненулевое решение для уравнения Риккати, то заменой оно сводится к известному нам уравнению Бернулли.
*Пример*: $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$
*Решение*: заметим, что $y = 0$ не является решением.

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{3} \text{ попробуем угадать решение вида } y = \frac{c}{x}$$
$$-\frac{c}{x^2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{c^2}{3x^2} \text{ откуда находим значение } c: \; c^2 + 2 - 3c = 0 \iff$$
$$\iff c^2 - 3c + 2 = (c-1)(c-2) = 0 \Rightarrow c = 1 \text{ - подходит.}$$
$$y = \frac{1}{x} + z, \; y' = -\frac{1}{x^2} + z' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{(\frac{1}{x} + z)^2}{3} \iff$$
$$-\frac{1}{x^2} + z' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{z^2}{3} - \frac{2z}{3x} - \frac{1}{3x^2} \iff z' = -\frac{2}{3x}z - \frac{z^2}{3}$$
$$z' = -\frac{2}{3x}z - \frac{z^2}{3} \text{ - уравнение Бернулли. } m = 2, \; t = z^{1-m} = z^{-1} = \frac{1}{z}$$
$$\frac{z'}{z^2} = -\frac{2}{3xz} - \frac{1}{3}, \; -t' = -\frac{2}{3x}t - \frac{1}{3}$$
$$t' = \frac{2}{3x}t + \frac{1}{3}, \; t' = \frac{2}{3x}t, \; t = e^{\int \frac{2}{3x}} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$t = v \cdot x^{\frac{2}{3}}, \; t' = v'x^{\frac{2}{3}} + v\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}vx^{-1+\frac{2}{3}} + 1/3$$
$$v' = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}, v = x^{\frac{1}{3}} + C$$
$$t = v \cdot x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}} + C)x^{\frac{2}{3}} = x + Cx^{\frac{2}{3}}$$
$$y = \frac{1}{x} + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{t} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + Cx^{\frac{2}{3}}}$$

*Ответ*: $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + Cx^{\frac{2}{3}}}$

# 5 Однородные уравнения

Однородным уравненим называется

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

Заменой $z = \frac{y}{x} \iff y = zx$ Оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y' = z'x + z = f(z) \iff z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

Гораздо чаще встречаются уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Мы хотим упростить уравнение и избавиться от свободных членов. Это возможно при условии $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Для этого нам поможет такая замена: $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$ так, чтобы $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$ и будем искать решение в виде $v = tu$, чтобы $a_2u + b_2v = k(a_1u + b_1v)$ и мы получили уравнение с разделяющимися переменными.

*Пример*: $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$

*Решение*:

$$(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5 \iff y' = \frac{2x + 3y - 5}{x + 4y},\ x = u + \alpha,\ y = v + \beta,$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial u},\ 2\alpha + 3\beta - 5 = 0,\quad \alpha + 4\beta = 0 \Rightarrow \beta = -1,\ \alpha = 4$$

$$v' = \frac{2u + 3v}{u + 4v},\quad \text{ищем решение } v = tu,\ t'u + t = \frac{2u + 3tu}{u + 4tu} = \frac{2 + 3t}{1 + 4t} \iff$$

$$t' = \frac{2 + 3t - t - 4t^2}{(1 + 4t)u} - \text{ с разд.пер. : } m(u) = \frac{1}{u},\ n(t) = \frac{2 + 2t - 4t^2}{1 + 4t}$$

1) $n(t) \equiv 0 \iff 2t^2 - t - 1 = 0, \iff t = 1,\ t = -\frac{1}{2}$
   $t = 1,\ u = v,\ y + 1 = x - 4 \Rightarrow y = x - 5 -$ не решение, $t = -\frac{1}{2} -$ аналогично.

2) $n(t) \not\equiv 0 \iff M(u) = \int \frac{1}{u} du = \ln u,$

$$N(t) = \int \frac{4t - 1 + 2}{2 + 2t - 4t^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{2}{3(2t + 1)} + \frac{5}{3(t - 1)} dt = -\frac{1}{6}\ln(2t + 1) - \frac{5}{6}\ln(t - 1)$$

$$U(u, t) = N(t) - M(u) = -\frac{1}{6}\ln(2t + 1) - \frac{5}{6}\ln(t - 1) - \ln u = const$$

$$\ln(2t + 1) + 5\ln(t - 1) + 6\ln u = const \iff (2t + 1)(t - 1)^5u^6 = C,\ t = \frac{v}{u}$$

$$(2v + u)(v - u)^5 = C \iff (2y + 2 + x - 4)(y + 1 - x + 4)^5 = C$$

*Ответ*: $(x + 2y - 2)(y - x + 5)^5 = C$

## 6 Уравнения сводящиеся к дифференциальным

Иногда встречаются уравнения, которые при помощи замены или дифференцирования можно свести к линейным и решить их. Выделять их в особый класс смысла мало, тем не менее, полезно уметь их решать.

*Пример*: $\int\limits_0^x (x - t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt$

*Решение*: будем решать это дифференцированием правой и левой частей.

$$x\int\limits_0^x y(t)dt - \int\limits_0^x ty(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt \text{ - раскрыли скобки}$$

$$\int\limits_0^x y(t)dt + xy(x) - xy(x) = \int\limits_0^x y(t)dt = 2 + y(x) \text{ - } \frac{d}{dx} \text{ первый раз}$$

$y(x) = y'(x)$ - $\dfrac{d}{dx}$ второй раз, $y = Ce^x$, теперь найдем константу, подставив $y$:

$$\int\limits_0^x (x-t)Ce^t dt = 2x + \int\limits_0^x Ce^t dt \iff x\int\limits_0^x Ce^t dt - \int\limits_0^x tCe^t dt = 2x + \int\limits_0^x Ce^t dt$$

$$Cx \cdot e^t\Big|_0^x - C(te^t - e^t)\Big|_0^x = 2x + Ce^t\Big|_0^x$$

$$Cx(e^x - 1) - C(xe^x - e^x + 1) = 2x + C(e^x - 1)$$

$$Cxe^x - Cx - Cxe^x + Ce^x - C = 2x + Ce^x - C$$

$$-Cx = 2x \Longrightarrow C = -2 \Longrightarrow y = -2e^x$$

*Ответ*: $y = -2e^x$

*Пример*: $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$

*Решение*: сделаем из этого дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}, \text{ сделаем из этого однородное уравнение:}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ 2x + y = t \quad y' = \frac{t+1}{2t-3} = t' - 2 \iff t' = \frac{t+1}{2t-3} + 2$$

$$t' = \frac{5t-5}{2t-3} = m(x)n(t) \text{ - уравнение с разделяющимися переменными.}$$

1) $n(t) \equiv 0 \iff t = 1 \Longrightarrow y = 1 - 2x$

2) $n(t) \neq 0 \quad M(x) = \int 1dx = x,\ N(t) = \int \frac{2t-3}{5t-5}dt$

$$N(t) = \int \frac{2t - 2 - 1}{5(t-1)}dt = \int \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{t-1}dt = \frac{2}{5}t - \frac{1}{5}\ln(t-1)$$

$$U(t,x) = \frac{2}{5}t - \frac{1}{5}\ln(t-1) - x = const \iff (t = 2x + y)$$

$$2(2x+y) - \ln(2x + y - 1) - 5x = const \iff 2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$$

*Ответ*: $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$

# 7 Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение в полных дифференциалах - это уравнения такого вида:

$$m(x,y)dx + n(x,y)dy = 0 \text{ если выполняется } \frac{\partial m}{\partial y} \equiv \frac{\partial n}{\partial x}$$

Чтобы его решить, надо найти функцию $F(x,y)$ : $dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy$. В качестве такого $F$ подходит $U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} m(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} n(x_0,s)ds$.
$(x_0,y_0)$ зачастую, удобно брать равными $(0,0)$.
*Пример*: $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$
*Решение*: сначала посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial m}{\partial y} = -e^{-y},\ \frac{\partial n}{\partial x} = -e^{-y} \text{ они тождественно равны.}$$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} m(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} n(x,s)ds = /(x_0,y_0) = 0/ =$$

$$= \int_0^x e^{-y}dt - \int_0^y 2s + 0e^{-s}ds = xe^{-y} - y^2 = C$$

*Ответ*: $xe^{-y} - y^2 = C$
Иногда частные производные очень похожи, но не тождественно равны. Тогда используется интегрирующий множитель.
Интегрирующий множитель для уравнения

$$m(x,y)dx + n(x,y)dx = 0$$

- это такая функция $\mu(x,y) \neq 0$, после умножения на которую уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Тогда будет выполнено следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu m) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu n)$$

Иногда удобно искать интегрирующий множитель как функцию одной переменной - $\mu(x)$ или $\mu(y)$.
*Пример*: $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y-1)dy = 0$
*Решение*: для начала посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial m}{\partial y} = -2y + 1 \quad \frac{\partial m}{\partial x} = 2y - 1 \text{ - не в полных дифференциалах.}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x^2 - y^2 + y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu x(2y-1)) \iff \mu(-2y+1) = \mu' x(2y-1) + \mu(2y-1) \iff$$

$$\mu' x + 2\mu = 0 \iff \mu' = \frac{-2}{x}\mu \iff \mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial y} = \frac{-2y+1}{x^2} \quad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} = \frac{-2(2y-1) + (2y-1)}{x^2} = \frac{-2y+1}{x^2}$$

$$(x_0,y_0) = (1,0) \quad U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \tilde{m}(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} \tilde{n}(x_0,s)ds \iff$$

$$U(x,y) = \int\limits_1^x \frac{t^2 - y^2 + y}{t^2}dt + \int\limits_0^y 2s - 1ds = \left(t + \frac{y^2 - y}{t}\right)\Bigg|_1^x + (s^2 - s)\Bigg|_0^y =$$

$$= x + \frac{y^2 - y}{x} - 1 - y^2 + y + y^2 - y = x + \frac{y^2 - y}{x} - 1$$

*Ответ*: $x + \frac{y^2 - y}{x} - 1 = C$

# 8 Метод введения параметра

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$ можно решить 2 способами:

a) Разрешить относительно $y'$, получив явно несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. А дальше пытаться решить стандартными методами.

b) Ввести параметр $p$ и выразить все через него сокращая при дифференцировании параметризованные переменные:

$$x = \varphi(p) \quad y = \psi(p) \text{ и предположим, что } \varphi'(p) \neq 0$$

Выразим $y$ через $x$: $p = \varphi^{-1}(x) \quad y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ и посчитаем производную:

$$y' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}$$

Тогда наше уравнение сводится к $F(\varphi(p), \psi(p), \dfrac{\psi'(p)}{\varphi'(p)}) = 0$. Обычно, для удобства, $p = y'$ и тогда наше уравнение имеет вид $F(\varphi(p), \psi(p), p) = 0$.

Суммируя, наша замена выглядит вот так:

$$x = \varphi(p) \quad y = \psi(p) \quad \frac{\psi'}{\varphi'} = p \quad \varphi = f(\psi, p) \quad \psi' = p\varphi'$$

*Пример*: $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$
*Решение*:

$$x = \varphi(p), y = \psi(p) \; y' = p = \frac{\psi'}{\varphi'} \text{ подставляем: } \varphi = p\sqrt{p^2 + 1}$$

$$\varphi' = \sqrt{p^2 + 1} + p\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \iff \psi' = p\sqrt{p^2 + 1} + \frac{p^3}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

$$\psi = \int p\sqrt{p^2 + 1} + \frac{p^3}{\sqrt{p^2 + 1}}dp = \int p\sqrt{p^2 + 1}dp + \int \frac{p^3}{\sqrt{p^2 + 1}}dp =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{p^2 + 1}dp^2 + \frac{1}{2}\int \frac{p^2 + 1 - 1}{\sqrt{p^2 + 1}}dp^2 = \int \sqrt{p^2 + 1}d(p^2 + 1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}d(p^2 + 1) = \frac{2}{3}(p^2 + 1)\sqrt{p^2 + 1} - \sqrt{p^2 + 1} + C =$$

$$= \sqrt{p^2 + 1}(\frac{2}{3}p^2 - \frac{1}{3}) + C \iff 3\psi = \sqrt{p^2 + 1}(2p^2 - 1) + C$$

*Ответ*: $x = p\sqrt{p^2 + 1}, \; y = \frac{1}{3}(2p^2 - 1)\sqrt{p^2 + 1} + C$

# 9 Уравнения Лагранжа и Клеро

Среди уравнений, решаемых при помощи введения параметра отдельно выделяются два типа уравнений:

I. $y = a(y')x + b(y')$ - уравнение Лагранжа  II. $a(y') = y'$ - уравнение Клеро

Делаем стандартное введение параметра: $p = y',\ \psi = a(p)\varphi + b(p)$ а потом $\frac{d}{dp}$

$$\psi' = a'\varphi + a\varphi' + b' = p\phi' \iff (p - a(p))\varphi' = a'(p)\varphi + b'(p)$$

(1) $p - a(p) = 0 \quad p_0$ - решение, тогда $y = p_0x + b(p_0)$

(2) $p - a(p) \neq 0 \Longrightarrow \phi' = \dfrac{a'(p)}{p - a(p)}\varphi + \dfrac{b'(p)}{p - a(p)}$ - линейное уравнение

*Пример*: $y' = e^{xy'/y}$

*Решение*: логарифмируем - $\ln y' = \dfrac{xy'}{y} \iff y = \dfrac{y'}{\ln y'}x$ - ур. Лагранжа

$$x = \varphi(p),\ y = \psi(p),\ y' = p = \frac{\psi'}{\varphi'} \text{ подставляем в уравнение}$$

$$\ln p = \frac{\varphi p}{\psi} \iff \psi \ln p = \varphi p \iff \psi = \frac{p}{\ln p}\varphi$$

$$\psi' = \frac{p}{\ln p}\varphi' + \frac{\ln p - 1}{\ln^2 p}\varphi \iff p\varphi' = \frac{p}{\ln p}\varphi' + \frac{\ln p - 1}{\ln^2 p}\varphi$$

$$\varphi' = \frac{\ln p - 1}{\ln^2 p} \cdot \frac{\ln p}{p(\ln p - 1)}\varphi \iff \varphi' = \frac{1}{p \ln p}\varphi$$

$$\varphi = e^{\int \frac{1}{p \ln p}dp} = e^{\ln \ln p + c} = \ln p + c \Longrightarrow x = \ln p + c \Rightarrow p = Ce^x$$

$$\Rightarrow y' = Ce^x \iff y = Ce^x + C'$$

*Ответ*: $y = Ce^x + C'$

# 10 Уравнения высших порядков

Уравнение $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ даже при $n \geq 2$ в общем случае не разрешимо, не говоря уже о больших значениях $n$. Но если оно имеет какой-то удачный вид, то существует набор стандартных методов, которыми можно попробовать это сделать.

Рассмотрим метод понижения степени. Если у нас отсутсвуют первые $k$ производных, т.е. уравнение имеет вид $F(x, y^{(k)}, ...y^{(n)}) = 0$, сделав замену $z(y) = y^{(k)}$ мы понижаем степень дифференциального уравнения до $F(x, z, ...z^{(n-k)}) = 0$. Восстановление $y$ по $z$ будет выглядеть как $y = \int \int ... \int z\ dx$.

*Пример*: $yy'' + 1 = y'^2$

*Решение*:

$$y' = z(y),\ y - z'y' \Longrightarrow yz'z + 1 = z^2$$

$$z' = \frac{z^2 - 1}{yz}, \quad n(z) = \frac{z^2 - 1}{z},\ m(y) = \frac{1}{y},\ z > 0$$

1 $n(z) = 0 \iff z = \pm 1 \iff y = \pm x + C$

2 $n(z) \neq 0$

$$N(z) = \int \frac{z}{z^2-1} dz = \frac{1}{2} \ln z^2 - 1, \quad M(y) = \int \frac{1}{y} = \ln y$$

$$N(z) - M(y) = \frac{1}{2} \ln |z^2 - 1| - \ln y = const \iff$$

$$\ln \frac{|z^2-1|}{y^2} = const \iff |z^2 - 1| = Cy^2 \ \ (C > 0) \iff$$

$$z^2 - 1 = Cy^2 \ \ (C \text{ - любое}) \iff z^2 = Cy^2 + 1 \iff y'^2 = Cy^2 + 1$$

продифферинцируем: $2y'y'' = C2yy' \Longrightarrow (y' = 0$ не решение$)$ $y'' = Cy$

будем искать решение в форме $y = e^{ux}$ :

$$u^2 e^{ux} = Ce^{ux} \iff u^2 = C.$$

2.1 $C > 0,\ \pm\sqrt{C} = C_1,\ \Longrightarrow$:

$$1) y = C_2 e^{C_1 x} \quad 2) y = C_2 e^{C_1 x} + C_3 e^{-C_1 x}$$

2.2 $C < 0,\ C_1 = \pm\sqrt{-C}$: можно считать, что наше решение - sin, а не экспонента(т.к. там e в комплексной степени).

$$y = C_3 \sin (C_1 x + C_2)$$

*Ответ*: $y = \pm x + C,\ y = C_2 e^{C_1 x}, \quad y = C_2 e^{C_1 x} + C_3 e^{-C_1 x}, \quad y = C_3 \sin (C_1 x + C_2)$

# 11 Уравнение со специальной правой частью

Дифференциальное уравнение со специальной правой частью:

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),\ f(x) = e^{ax}(P_k(x) \cos bx + Q_l(x) \sin bx)$

$s$ равно кратности $a + bi$ в характеристическом многочлене, если $a + bi$ - корень, 0 иначе. $m = \max(k, l)$, где $deg\ P_k = k,\ deg\ Q_l = l$ - наибольшая степень многочленов в правой части. Тогда существует единственное решение неоднородного уравнения в виде:

$$x^s e^{ax} (\tilde{P}_m(x) \cos bx + \tilde{Q}_m(x) \sin bx)$$

Общее решение будет выглядеть как сумма однородного решения и неоднородного.
*Пример:* $y'' + y = 4 \sin x$
*Решение*: $a = 0,\ b = 1,\ P \equiv 0,\ Q = 4$:

напишем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

найдем однородные решения: $y'' + y = 0$ - это $C_1 e^0 \cos x + C_2 e^0 \sin x$

$a + bi = 0 + 1 \cdot i = i$ - корень хар.ур. кратности $1 \Longrightarrow s = 1$

$$y = x(c_1 \cos x + c_2 \sin x),\ y' = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(-c_1 \sin x + c_2 \cos x),$$

$$y'' = -c_1\sin x + c_2\cos x + (-c_1\sin x + c_2\cos x) + x(-c_1\cos x - c_2\sin x)$$
$$[\cos x]:\ c_2 + c_2 - c_1x + c_1x = 0 \iff 2c_2 = 0 \iff c_2 = 0$$
$$[\sin x]:\ -c_1 - c_1 - c_2x + c_2x = 4 \iff -2c_1 = 4 \iff c_1 = -2$$
$$\text{значит общее решение имеет вид: } C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$$

*Ответ*: $C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$

## 12 Метод вариации постоянных

Дифференциальное уравнение:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

с любой правой частью $f(x)$ решается методом вариации постоянных.
Для начала надо найти общее решение линейного однородного уравнения с той же левой частью $y = C_1y_1 + ... + C_ny_n$. Тогда решение исходного будет искаться в виде:

$$y = C_1(x)y_1 + ... + C_n(x)y_n(x)$$

Функции $C_i(x)$ будут определятся из системы

$$C_1'y_1 + ...C_n'y_n = 0 \qquad C_1'y_1' + ...C_n'y_n' = 0...$$
$$C_1'y_1^{(n-2)} + ...C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \qquad a_0(C_1'y_1^{(n-1)} + ...C_n'y_n^{(n-1)}) = f(x)$$

*Пример*: $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$
*Решение*: для начала найдем общее решение однородного, для этого считаем характеристический многочлен:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \text{ решение однородного - } y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$
$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1} \text{ - решим методом вариации постоянных}$$
$$\begin{cases} \alpha_1'e^{-x} + \alpha_2'e^{-2x} = 0 \\ -\alpha_1'e^{-x} - 2\alpha_2'e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha_2'e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1} \\ \alpha_1'e^{-x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases}$$
$$\alpha_1' = \frac{e^x}{e^x+1} \iff \alpha_1 = \ln(e^x+1)$$
$$\alpha_2' = -\frac{e^{2x}}{e^x+1} \iff \alpha_2 = -\int \frac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1}dx = -\int e^x - \frac{e^x}{e^x+1}dx = -e^x + \ln(e^x+1)$$
$$\text{общее решение имеет вид } y = e^{-x}\ln(e^x+1) + e^{-2x}\ln(e^x+1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

*Ответ*: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1)$

## 13 Метод суперпозиции

Если нам дано дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f_1(x) + f_2(x), \text{ а уравнения}$$
$$y^{(n)} + ...a_ny = f_1(x) \text{ и } y^{(n)}... + a_ny = f_2(x) \text{ - д.у. со специальной правой частью}$$

Тогда можно решить их по отдельности, а решением исходного будет сумма решений первого и второго. В общем случае, там может быть $f_1(x)+...+f_k(x)$ для которых решением будет сумма решений частных уравнений со спеациальной частью.
*Пример*: $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$
*Решение*: это д.у. с 2 специальными правыми частями: $f_1(x) = 3x^2,\ f_2(x) = \sin 5x$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \iff \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$$
$$\text{однородные решения: } y'' - 5y' = 0 \text{ - это } \ C_1e^{0x} + C_2e^{5x}$$
$$1)f_1(x) = 3x^2\ a = 0,\ b = 0,\ P = 3x^2,\ Q = 0,\ m = 2,\ a + bi = 0- \implies s = 1$$
$$y = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx,\ y' = 3ax^2 + 2bx + c,\ y'' = 6ax + 2b$$
$$[x^2] : -15ax^2 = 3 \iff a = \frac{-1}{5}$$
$$[x] : 6ax - 10bx = 0 \iff -\frac{6}{5} - 10b = 0 \iff b = \frac{-3}{25}$$
$$[1] : 2b - 5c = 0 \iff c = \frac{2}{5}b = \frac{-6}{125}$$
$$y = \frac{-x^3}{5} - \frac{3x^2}{25} - \frac{6x}{125}$$
$$2)f_2(x) = \sin 5x\ a = 0,\ b = 5,\ P = 0,\ Q = 1,\ m = 1,\ a + bi = 5i \implies s = 0$$
$$y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x,\ y' = -5c_1 \sin 5x + 5c_2 \cos 5x,\ y'' = -25c_1 \cos 5x - 25c_2 \sin 5x$$
$$[\cos 5x] : -25c_1 - 25c_2 = 0 \iff c_1 = -c_2$$
$$[\sin 5x] : -25c_2 + 25c_1 = 1 \iff -50c_2 = 1 \iff c_1 = \frac{1}{50},\ c_2 = \frac{-1}{50}$$

*Ответ*: $y = C_1 + C_2e^5x - \frac{x^3}{5} - \frac{3x^2}{25} - \frac{6x}{125} + \frac{1}{50}\cos 5x - \frac{1}{50}\sin 5x$

# 14 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Путем исключения переменных линейную систему можно свести к уравнению с одной неизвестной фукнцией. Как это делается читатель может узнать из лекций самостоятельно. А тут будет рассмотрен алгоритм решения задач вида:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{ где } \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \text{а } A \text{ - матрица с постоянными коэффициентами.}$$

Чтобы его решить надо найти корни характеристического уравнениея aka собственные числа матрицы $A$. Каждому простому корню $\lambda_i$ будет соответсвовать решение вида $C_iv_ie^{\lambda_i t}$ где $v_i$ - соответствующий собвстенный вектор матрицы $A$. Если у собственного числа $\lambda$ кратность $k > 1$ и нашлось ровно $k$ линейно независимых собственных векторов, то ему будет соответсвовать решение $C_1v_1e^{\lambda t} + ...C_kv_ke^{\lambda t}$.
Если для собственного числа $\lambda$ имеется только $m < k$ собственных векторов, то решение будет искаться в виде произведение многочлена степени $k - m$ на

$e^{\lambda t}$. Коэффициенты будут зависить от $k$ произвольных постоянных, а искаться будут при помощи подстановки.
Если собственное число $\lambda$ оказалось комплексным, то для него аналогично ищется решение в виде произведения многочлена на экспоненту $y = f(x)e^{\lambda t}$, решение для $\overline{\lambda}$ $- \overline{f(x)e^{\lambda t}}$ - они заменяются на 2 решения $Ref(x)e^{\lambda t}$ и $Imf(x)e^{\lambda t}$, которые являются вещественными функциями и содержает синусы и косинусы.

*Пример*: вещественные корни кратности 1 $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = -x + 8y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

*Решение*: $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

$$det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9$$

$$1)\lambda = 3 \quad \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ищем собственный вектор:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2)\lambda = -3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ищем собственный вектор:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*Ответ*: $x = 2C_1e^{3t} + 4C_2e^{-3t},\ y = C_1e^{3t} - C_2e^{-3t};\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^3t + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$

*Пример*: случай корня кратности 2 $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = -3x - y \end{cases}$

*Решение*: $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

$$det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ - корень кратности 2.}$$

$$\text{будем искать решение в виде } x = (a_1t + b_1)e^{2t}, \quad y = (a_2t + b_2)e^{2t}$$

$$\dot{x} = (a_1t + b_1)2e^{2t} + a_1e^{2t},\ \dot{y} = (a_2t + b)2e^{2t} + a_2e^{2t}$$

$$\begin{cases} (2a_1t + 2b_1 + a_1)e^{2t} = 5(a_1t + b_1)e^{2t} + 3(a_2t + b_2)e^{2t} \\ (2a_2t + 2b_2 + a_2)e^{2t} = -3(a_1t + b_1)e^{2t} - (a_2t + b_2)e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [te^{2t}] \quad 2a_1 = 5a_1 + 3a_2 \\ [te^{2t}] \quad 2a_2 = -3a_1 - a_2 \end{cases} \iff a_1 = -a_2, \quad a_2 = C_1$$

$$\begin{cases} [e^{2t}] \quad 2b_1 + a_1 = 5b_1 + 3b_2 \\ [e^{2t}] \quad 2b_2 + a_2 = -3b_1 - b_2 \end{cases} \iff b_1 = -\frac{a_2}{3} - b_2, \quad b_2 = C_2$$

*Ответ*: $x=(-C_1t-\dfrac{C_1}{3}-C_2)e^{2t},\ y=(C_1t+C_2)e^{2t}$; $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C_1t-\dfrac{C_1}{3}-C_2\\C_1t+C_2\end{pmatrix}e^{2t}$

*Пример*: и наконец - комплексный корень $\begin{cases}\dot{x}+x+5y=0\\\dot{y}-x-y=0\end{cases}\iff\begin{cases}\dot{x}=-x-5y\\\dot{y}=x+y\end{cases}$

*Решение*: $A=\left(\begin{smallmatrix}-1&-5\\1&1\end{smallmatrix}\right)$

$$det(A-\lambda E)=det\begin{pmatrix}-1-\lambda&-5\\1&1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)(1-\lambda)+5=\lambda^2+4=0$$

$$1)\lambda=2i\quad\begin{pmatrix}-1-2i&-5\\1&1-2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1-2i\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1-2i\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b-2bi\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2i\\1\end{pmatrix}$$

сопряженное решение можно не искать - это сопряжение этого

$$\begin{pmatrix}-1+2i\\1\end{pmatrix}e^{2it}=\begin{pmatrix}-1+2i\\1\end{pmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t)=\begin{pmatrix}(-1+2i)(\cos 2t+i\sin 2t)\\\cos 2t+i\sin 2t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\cos 2t-2\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}2\cos 2t-\sin 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}$$

*Ответ*: $x=(2C_2-C_1)\cos 2t+(-2C_1-C_2)\sin 2t,\ y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$;
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2C_2-C_1\\C_1\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}-2C_1-C_2\\C_2\end{pmatrix}\sin 2t$

Для системы из 3 и более переменных все аналогично. Рассмотрим нетривиальный случай:

*Пример*: $\begin{cases}\dot{x}=2x+y\\\dot{y}=2y+4z\\\dot{z}=x-z\end{cases}$

*Решение*: $A=\left(\begin{smallmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{smallmatrix}\right)$

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&4\\1&0&-1-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)^2(-1-\lambda)+4=$$

$$=(\lambda^2-4\lambda+4)(-1-\lambda)+4=-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda-4-4\lambda+4=\lambda^2(3-\lambda)=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3$$

$$1)\lambda=3\quad\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&4\\1&0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ищем с.в.:}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\a-4c\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$$

$2)\lambda = 0$ с.ч. кратности 2. ищем решения в виде:

$$x = a_1 t + b_1,\ y = a_2 t + b_2,\ z = a_3 t + b_3,\ \dot{x} = a_1,\ \dot{y} = a_2,\ \dot{z} = a_3$$

$$\begin{cases} [t] \quad 0 = 2a_1 + a_2 \\ [t] \quad 0 = 2a_2 + 4a_3 \\ [t] \quad 0 = a_1 - a_3 \\ [1] \quad a_1 = 2b_1 + b_2 \\ [1] \quad a_2 = 2b_2 + 4b_3 \\ [1] \quad a_3 = b_1 - b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = -2a_3 \\ a_3 = C_2 \\ b_1 = a_3 + b_3 \\ b_2 = \frac{a_2}{2} - 2b_3 \\ b_3 = C_3 \end{cases} \iff$$

$$\iff a_1 = C_2,\ a_2 = -2C_2,\ a_3 = C_2,\ b_1 = C_2 + C_3,\ b_2 = -C_2 - 2C_3,\ b_3 = C_3$$

*Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} C_2 t + C_2 + C_3 \\ -2C_2 t - C_2 - 2C_3 \\ C_2 t + C_3 \end{pmatrix}$

# 15 Линейные неоднородные системы

Если мы встретили линейную неоднородную систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + q(t) \quad A = const, q(t) \text{ - столбец}$$

то для того, чтобы решить данное уравнение надо сначала найти фундаментальное решение для однородной системы $\dot{x} = Ax$ - $\Phi(t)$, а общее решение будет выглядеть как $x(t) = \Phi(t)\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ - такая функция, что $\Phi(t)\dot{\alpha}(t) = q(t)$. Действительно, если $\alpha(t)$ удовлетворяет последнему равенству, то подставив в качестве $x = \Phi(t)\alpha(t)$ мы получим $\dot{x} = Ax + q \iff \Phi(t)\dot{\alpha}(t) + A\Phi(t)\alpha(t) = A\Phi(t)\alpha(t) + q(t) \iff \Phi(t)\dot{\alpha}(t) = q(t)$, т.е. это будет являтся решением.

*Пример*: $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$

*Решение*: сначала найдем фундаментальное решение: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$1)\lambda = i \quad \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)a - b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

теперь ищем фундаментальное решение из комплексного:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} (\cos t + i\sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t \\ (1-i)(\cos t + i\sin t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$q(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(t)\dot{\alpha}(t) \iff \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & -\cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \dot{\alpha}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} (\cos t)\dot{\alpha_1}(t) + (\sin t)\dot{\alpha_2}(t) \\ (\cos t + \sin t)\dot{\alpha_1}(t) + (-\cos t + \sin t)\dot{\alpha_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \cos t\ \dot{\alpha_1}(t) + \sin t\ \dot{\alpha_2}(t) \\ \sin t\ \dot{\alpha_1}(t) - \cos t\ \dot{\alpha_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ -\frac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2 t\ \dot{\alpha_1}(t) + \sin t \cos t\ \dot{\alpha_2}(t) \\ \sin^2 t\ \dot{\alpha_1}(t) - \cos t \sin t\ \dot{\alpha_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\operatorname{tg} t \end{pmatrix} \iff \dot{\alpha_1}(t) = -\operatorname{tg} t + 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos t \sin t\ \dot{\alpha_1}(t) + \sin^2 t\ \dot{\alpha_2}(t) \\ -\sin t \cos t\ \dot{\alpha_1}(t) + \cos^2 t\ \dot{\alpha_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 1 \end{pmatrix} \iff \dot{\alpha_2}(t) = \operatorname{tg} t + 1$$

$$\iff \alpha_1(t) = C_1 + t + \ln|\cos t| \quad \alpha_2(t) = C_2 + t - \ln|\cos t|$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t)\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & -\cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 + t + \ln|\cos t| \\ C_2 + t - \ln|\cos t| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (C_1 + t + \ln|\cos t|)\cos t + (C_2 + t - \ln|\cos t|)\sin t \\ (C_1 + t + \ln|\cos t|)(\cos t + \sin t) + (C_2 + t - \ln|\cos t|)(-\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (\cos t + \sin t)t + (\cos t + \sin t)\ln|\cos t|$$

$$y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2t\sin t + 2\cos t \ln|\cos t|$$

*Ответ*: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + (\cos t + \sin t)t + (\cos t + \sin t)\ln|\cos t| \\ (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2t\sin t + 2\cos t \ln|\cos t| \end{pmatrix}$

*Прим.* в качестве ответа можно записать $\Phi(t)\alpha(t)$ не вычисляя это гигантское произведение. (это 4 с конца строка)

# 16 Формула Остроградского-Лиувилля

Если нам известно ненулевое частичное решение $y_1$ линейного однородного уравнения $n$-го порядка, то его порядок можно понизить, сохраняя линейность уравнения. Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1 z$ и затем понизить порядок заменой $z' = u$.

Для уравнений 2 порядка $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ этот метод тоже работает, но гораздо проще воспользоваться формулой Остраградского-Лиувилля:

$$\frac{dW}{dt} = -p(x)W(x) \quad y'' + py' + qy = 0,\ p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}\ W(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_2' y_1 - y_1' y_2 \qquad \frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{Ce^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$$

Где $y_1, y_2$ - любые два решения данного уравнения. Здесь важно знание ненулевого решения, т.к. $y_1 = 0$ не выдаст ничего содержательного.

*Пример:* $(x^2+1)y'' - 2y = 0$

*Решение*: попробуем угадать решение как многочлен 2 степени $y_1 = ax^2 + bx + c$

$y_1'' = 2a,\ (x^2+1)(2a) - 2(ax^2 + bx + c) = 0 \iff x^2(2a - 2a) + bx + (2a - 2c) = 0$

$\iff y_1 = x^2 + 1$ - решение. Теперь можно применить к нему формулу О.Л.:

$p(x) = 0 \Longrightarrow W(x) = 1 \iff \dfrac{y_2}{y_1} = \displaystyle\int \frac{W(x)}{y_1^2}dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = (x = \operatorname{tg} u,\ dx = \frac{du}{\cos^2 u},$

$$= \operatorname{tg}^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}) = \int \frac{\cos^4 u}{\cos^2 u} du = \int \cos^2 u du = \int \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{2} du = \frac{\sin 2u}{4} + \frac{1}{2}u =$$

$$= \frac{2\sin u \cos u}{4} + \frac{u}{2} = \frac{\operatorname{tg} u \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 u+1}}{2} + \frac{u}{2} = \frac{1}{2}(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x) \iff$$

$$\iff 2y_2 = x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x$$

*Ответ*: $y = C_1(x^2+1) + C_2(x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x)$
Другим способом решения уравнения 2 степени может стать замена $y = a(x)z$ где $a(x)$ после подстановки будет подбираться так, чтобы коэффициент при $[z']$ оказался равен 0.
*Пример*: $x^2y'' - 4xy' + (6 - x^2)y = 0$
*Решение*: делаем замену $y = a(x)z$

$$y' = a'z + az',\ y'' = a''z + 2a'z' + az'',\ \text{подставляем:}$$

$$x^2(a''z + 2a'z' + az'') - 4x(a'z + az') + (6 - x^2)az = 0 \text{ хотим коэф. при } [z'] = 0$$

$$[z'] = 2a'x^2 - 4ax = 0 \iff a'x^2 - a2x = 0 \iff (\frac{x^2}{a})' = const \Longrightarrow a = x^2$$

$$x^2(2z + 4xz' + x^2z'') - 4x(2xz + x^2z') + (6 - x^2)x^2z = 0 \iff$$

$$2x^2z + 4x^3z' + x^4z'' - 8x^2z - 4x^3z' + 6x^2z - x^4z = 0 \iff$$

$$x^4z'' + z(2x^2 - 8x^2 + 6x^2 - x^4) = 0 \iff x^4z'' - x^4z = 0 \iff z'' - z = 0 \iff$$

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} \Longrightarrow y = x^2(C_1e^x + C_2e^{-x})$$

*Ответ*: $y = x^2(C_1e^x + C_2e^{-x})$

Также бывают ситуации, когда нам дают уравнение $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ у которого мы смогли найти 2 различных частных решения $y_1, y_2$. Тогда чтобы найти общее решение однородного $a(x)z'' + b(x)z' + c(x)z = 0$ пользуемся формулой О.Л. для $z_1 = y_2 - y_1$, которое является решением однородного.
*Пример*: $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2,\ y_1 = 2x,\ y_2 = (x+1)^2$
*Решение*: для начала проверим, что нас не обманули и решения подходят:

$$(3x^3 + x)2 + 2 \cdot 2(x+1) - 6x(x+1)^2 = 6x^3 + 2x + 4x + 4 - 6x^3 - 12x^2 - 6x = 4 - 12x^2$$

$$0 + 2 \cdot 2 - 6x \cdot 2x = 4 - 12x^2 \quad \text{- действительно подходят.}$$

теперь решим однородное: $(3x^3 + x)z'' + 2z' - 6xz = 0,\ z_1 = y_2 - y_1 = x^2 + 1$ - решение

$$p(x) = \frac{2}{3x^3 + x},\ W(x) = e^{-\int p(x)dx} \text{ считаем } -\int p(x)dx$$

$$\int \frac{2}{3x^3 + x} dx = \int \frac{2dx}{x(x^2+1)} = \left[\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2+1} \iff a = 2, b = -6, c = 0\right] =$$

$$= \int \frac{2}{x} - \frac{6x}{3x^2+1} dx = 2\log x - \log(3x^2+1) \quad W(x) = e^{-2\log x + \log(3x^2+1)} = \frac{3x^2+1}{x^2}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \int \frac{W(x)}{z_1^2} = \int \frac{3x^2+1}{x^2(x^2+1)^2} dx = \int \frac{d(x^3+x)}{x^2(x^2+1))} = -\frac{1}{x(x^2+1))} \iff z_2 = -\frac{1}{x}$$

*Ответ*: $y = C_1(x^2+1) + \frac{C_2}{x} + 2x$

# 17 Краевые задачи

Для отыскания решений краевой задачи

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),\ \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0\ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0$$

надо подставить общее решение в краевые условия и из этих условий определить(если возможно) значения произвольных постоянных, входящих в формулу общего решения.
*Пример*: $y'' + y = 2x - \pi;\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$
*Решение*: решение фундаментального - $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$$\text{перед нами неоднородное д.у. со специальной правой частью.}$$
$$a = 0,\ b = 0,\ P = 2x - \pi,\ Q = 0,\ a + bi = 0 \text{ - не корень, } s = 0$$
$$y = c_1 x + c_2,\ y'' + y = c_1 x + c_2 = 2x - \pi \iff y = 2x - \pi \text{ - решение}$$
$$\text{общее решение - } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x - \pi$$
$$y(0) = C_1 - \pi = 0 \Longrightarrow C_1 = \pi,\ y(\pi) = -\pi + 2\pi - \pi = 0$$

*Ответ*: $y = \pi \cos x + C \sin x + 2x - \pi$

# 18 Функция Грина

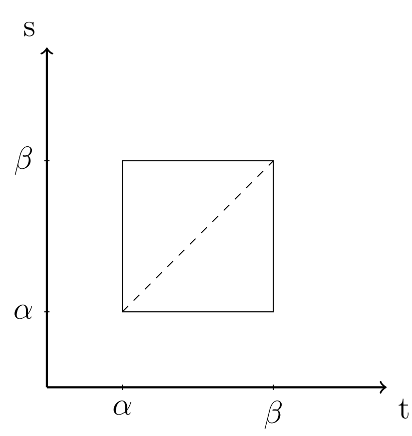
Функция Грина используется для решения неоднородных дифференциальных уравнений с граничными условиями (неоднородных краевых задач) вида:

$$\dot{x} = P(t)x + f(t) \quad x \in \mathbb{R}^n,\ P(t), f(t) \in C(a.b)$$

Пусть $a < \alpha < \beta < b$, фиксируем матрицы $A, B:\ Ax(\alpha) + Bx(\beta) = 0$ - краевые условия. Рассмотрим однородный случай - $\dot{x}(t) = P(t)(x)$. Для него мы умеем считать $\Phi(t)$ - фундаментальную матрицу. Решением для однородной системы будет $x(t) = \Phi(t)c$. Зафиксируем удобную фундаментальную матрицу - $\Phi(\alpha) = E$. Подствим в граниченое условие:

$$Ax(\alpha) + Bx(\beta) = AEc + B\Phi(\beta)c = [A + B\Phi(\beta)]c = 0$$

Система имеет единственное решение не равное 0 $\iff \Delta = \det(A + B\Phi(\beta)) \neq 0$.



Функцией Грина по определнию будем называть $G(t,s) \in M_n$ на $Q$ при любом фиксированном $s : s \in [\alpha, \beta]$

1) $\forall t \in [\alpha, \beta] \setminus \{s\} \quad \dfrac{dG}{dt} = P(t)G$

2) $AG(\alpha, s) + BG(\beta, s) = 0$

3) $G(s+0, s) - G(s-0, s) = E$ (в смысле пределов слева и справа)

**Теорема:** при таких условиях, наложенных на $G$, оно определено однозначно.
*Доказательство*: Пусть

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)U(s), \ \alpha \le t < s \\ \Phi(t)V(s), \ s < t \le \beta \end{cases}$$

$$G(\alpha, s) = U(s) \quad G(\beta, s) = \Phi(\beta)V(s) \quad \text{Подставим в граничные условия -}$$

$$AU(s) + B\Phi(\beta)V(s) = 0 \quad \text{Теперь воспользуемся 3 свойством -}$$

$$G(s+0,s) = \Phi(s+0)V(s) \to \Phi(s)V(s) \quad G(s+0,s) = \Phi(s-0)U(s) \to \Phi(s)U(s)$$

$$\Phi(s)(V(s) - U(s)) = E \iff V(s) - U(s) = \Phi^{-1}(s) \iff V(s) = U(s) + \Phi^{-1}(s)$$

$$AU(s) + B\Phi(s)(U(s) - \Phi^{-1}(s)) = 0 \iff AU(s) + B\Phi(s)U(s) = B \iff$$

$$\text{т.к.} \det{(A + B\Phi)} \ne 0 \quad U(s) = [A + B\Phi(s)]^{-1}B \text{ - уравнение на } U$$

Теперь если мы рассмотрим систему $\dot{x} = P(t)x + q(t)$ то у нее будет существовать единственное решение краевой задачи.

$$x(t) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} G(t,s)q(s)ds = \int\limits_{\alpha}^{t} G(t,s)q(s)ds + \int\limits_{t}^{\beta} G(t,s)q(s)ds$$

$$\text{Пусть } y(t) = \Phi(t)\int\limits_{\alpha}^{t} U(s)q(s)ds \quad z(t) = \Phi(t)\int\limits_{t}^{\beta} V(s)q(s)ds$$

$$\dot{y}(t) = \dot{\Phi}(t)\int\limits_{\alpha}^{t} U(s)q(s)ds + \Phi(t)\cdot \lim_{s\to t-0} U(s)q(s) = P(t)y(t) + \Phi(t)G(t,t-0)q(t)$$

$$\dot{z}(t) = ... = P(t)z(t) - \Phi(t)G(t,t+0)q(t) \text{ Итого } (y \dot{+} z) = P(y+z) + q$$

Функция Грина является очень мощным аппаратом для решения дифференциальных уравнений 2 порядка, если уметь ей пользоваться как надо.
*Пример*: $y'' + y = f(x);\ y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0$
*Решение*: $\alpha = 0,\ \beta = \pi$ сделаем замену $y' = z,\ z' = f(t) - y;\ y'' + y = 0 \iff y' = z,\ z' = -y$
$y = \cos t, z = -\sin t$ - 1 стобец, $y = \sin t, z = \cos t$ - 2 столбец фундаментальной матрицы.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

подбираем матрицы:

$$A\begin{pmatrix} y(0)\\ z(0)\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} y(\pi)\\ z(\pi)\end{pmatrix} = * \text{ если взять } A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ то } *=\begin{pmatrix}-y(\pi)\\ z(0)\end{pmatrix}$$

получили наши краевые условия на равенство 0.

$$\Delta=\det(A+B\Phi(\pi))=\det\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=1$$

$$G(s+0,s)=\Phi(s)V(s) \quad G(s-0,s)=\Phi(s)U(s) \quad \Phi(s)(V(s)-U(s))=E$$

$$V(s)=\Phi^{-1}(s)+U(s) \quad AU(s)+B\Phi(\beta)V(s)=0 \quad AU(s)+B\Phi(\pi)(\Phi^{-1}(s)+U(s))=0$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}U(s)+\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(U(s)+\begin{pmatrix}\cos s&-\sin s\\ \sin s&\cos s\end{pmatrix}\right)=0 \iff$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}U(s)=\begin{pmatrix}-\cos s&\sin s\\0&0\end{pmatrix} \iff U(s)=\begin{pmatrix}-\cos s&\sin s\\0&0\end{pmatrix}$$

$$V(s)=\Phi^{-1}(s)+U(s)=\begin{pmatrix}\cos s&-\sin s\\ \sin s&\cos s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\cos s&\sin s\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\ \sin s&\cos s\end{pmatrix}$$

$$G(t,s)=\begin{cases}\Phi(t)U(s), & s\in[0,t)\\ \Phi(t)V(s), & s\in(t,1]\end{cases} \iff G(t,s)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\cos s&\sin s\\0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\ \sin s&\cos s\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$G(t,s)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-\cos t\cos s&\cos t\sin s\\ \sin t\cos t&-\sin t\sin s\end{pmatrix}, & s\in[0,t)\\ \begin{pmatrix}\sin t\sin s&\sin t\cos s\\ \cos t\sin s&\cos t\cos s\end{pmatrix}, & s\in(t,1]\end{cases}$$

$$\dot{x}=P(t)x+q(t) \iff x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}G(t,s)q(s)ds=\int\limits_{0}^{\pi}G(t,s)\begin{pmatrix}0\\f(s)\end{pmatrix}ds$$

$$y(t)=\int\limits_0^t ...+\int\limits_t^\pi ...=\int\limits_0^t(\cos t\sin s)f(s)ds+\int\limits_t^\pi(\sin t\cos s)f(s)ds$$

*Ответ*: $y(t)=\cos t\int\limits_0^t(\sin s)f(s)ds+\sin t\int\limits_t^\pi(\cos s)f(s)ds$

## 19 Метод Штурма и теорема сравнения

Рассмотрим дифференицальное уравнение $y'' + p(x)y = 0$ с произвольным $p \in C(a,b)$. Пусть $y \not\equiv 0$, мы хотим понять, когда наше решение обращается в 0.
**Теорема Штурма:**
Пусть есть решения $y(x) : y(a) = y(b) = 0$ и $y(x) \neq 0$ на $x \in (a,b)$ и $z(x)$ - линейно независимое с $y$. Тогда $\exists!\ c \in (a,b) : z(c) = 0$
*Доказательство:* От противного. н.у.о. считаем, что $y(x) > 0$ на $(a,b)$. Тогда $y'(a) > 0,\ y'(b) < 0$. Предположим $z(x) \neq 0$ в $(a,b)$. Распишем Вронскиан:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \text{ - нигде не } 0 \implies z(a), z(b) \neq 0 \text{ - иначе Вронскиан обнулится.}$$

$$\text{Пусть } z(a), z(b) > 0. \quad z'' + p(x)z = 0, \quad y'' + p(x)y = 0 \text{ - умножим на } y \text{ и } z:$$

$$(y''z + p(x)yz) - (z''y + p(x)zy) = 0 \iff y''z - z''y = 0 \iff (y'z - z'y)' = 0$$

$$0 = \int\limits_a^b (y'z - z'y)'dx = y'(x)z(x)\Big|_a^b = y'(b)z(b) - y'(a)z(a) < 0 \text{ ?!}$$

Значит хотя бы 1 решение найдется. Осталось понять, почему оно единственное. Действительно, если решения 2, $z(c_1) = z(c_2) = 0$ то применив данную теорему к $y$ на промежутке $[c_1, c_2]$ $z$ получим, что у $y$ будет там корень, а это не так по условию теоремы. Следовательно, решение, все же, единственное.
**Теорема Сравнения:**

$$y'' + p(x)y = 0 \quad z'' + q(x)z = 0 \quad y(a) = y(b) = 0,\ y(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$$

$$q(x) \geq p(x) \text{ в } (a,b),\ q(x) \not\equiv p(x) \implies \exists c \in (a,b) : z(c) = 0$$

*Доказательство:* Пусть $z(x) \neq 0$ в $(a,b)$. н.у.о. $z(x) > 0, y(x) > 0$ в $(a,b)$.

$$y''z - z''y = (q-p)yz \iff \int\limits_a^b (y'z - z'y)' = \int\limits_a^b (q-p)yz \iff$$

$$y'(x)z(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b (q-p)yz \iff y'(b)z(b) - y'(a)z(a) = \int\limits_a^b (q-p)yz$$

$$\text{Но } y'(b)z(b) - y'(a)z(a) < 0, \text{ а } (q-p)yz > 0, \text{ значит и интеграл } > 0 \text{ ?!}$$

*Замечание:* теорема сравнения гарантирует, что 0 будет, но, в отличии от теоремы Штурма, не сообщает, сколько именно их там будет.

## 20 Оценка на расстояние между корнями уравнения

### I. Постоянные коэффициенты

$y'' + ay = 0, \quad a \in \mathbb{R}$

1) $a > 0$

$$\lambda^2 + a = 0 \iff \lambda = \pm i\sqrt{a} \Rightarrow y = C_1 \cos \sqrt{a}x + C_2 \sin \sqrt{a}x \iff$$

$$C \cos(\sqrt{a}x + \varphi) = 0 \iff \sqrt{a}x + \varphi = \pi k \iff x = \frac{\pi k - \varphi}{\sqrt{a}}$$

Итого: любое решение имеет бесконечно много корней на расстоянии $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$

2) $a < 0$ преобразуем к виду $y'' - ay = 0,\ a > 0$

$$\lambda^2 - a = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{a} \Rightarrow y = C_1 e^{\sqrt{a}x} + C_2 e^{-\sqrt{a}x}$$

$$C_2 e^{-\sqrt{a}x}(\frac{C_1}{C_2} e^{2\sqrt{a}x} + 1) = 0 \text{ - имеет не больше 1 корня}$$

3) $a = 0$

$$y'' = 0 \iff y = C_1 x + C_2 \text{ - не больше 1 корня}$$

### II. Переменные коэффициенты

$y'' + p(x)y = 0$

1) $p(x) \leq 0$ - тогда не более 1 корня.
   *Док-во*: от противного. Пусть $y(x_1) = y(x_2) = 0,\ y(x) \neq 0$ на $(x_1, x_2)$. Тогда $z'' = 0$ имеет корень на $(x_1, x_2)$. Тогда по теореме Штурма у любой линейной функции есть корень на промежутке $(x_1, x_2)$. Противоречие.

2) $p(x) \not\equiv 0$ - пользуемся теоремой Сравнения. можно найти расстояние между корнями.

3) $p(x) \equiv 0$ - $y = c_1 x + c_2$ - не больше 1 корня.

*Пример*: $xy'' + y = 0,\ 25 \leq x \leq 100$ - оценить расстояние между 2 корнями любого решения на промежутке.
*Решение*: Преобразуем это к виду $y'' + \frac{1}{x}y = 0,\ f(x) = \frac{1}{x}$
Заметим, что $z'' + \frac{1}{100}z \leq y'' + \frac{1}{x}y \leq z'' + \frac{1}{25}z$. Тогда расстоянние между корнями можно оценить как $\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{25}}} \leq |x_2 - x_1| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{100}}}$, т.е. $5\pi \leq |x_2 - x_1| \leq 10\pi$.
*Ответ*: $5\pi \leq |x_2 - x_1| \leq 10\pi$

## 21 Разностные уравнения

$n \in \mathbb{N},\ \tau(n),\ x(0), x(1), ...x(n)...$ - функции от натурального переменного.
Разностное уравнение порядка $k$ - $x(n+k) = f(\tau(n), x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1))$
Задача Коши для разностного уравнения порядка $k$ - нам даны $x(0), ..., x(k-1)$, а остальные выражаются через них однозначно.
*Пример:* $x(n+1) = n \cdot x(n),\ x(0) = 1$
*Решение:* в качестве элементарного упражнения оставляется читателю.

# Линейные разностные уравнения

Линейным разностным уравнением называется

$$a_0(n)x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = f(n)$$

Однородное линейное разностное уравнение

$$a_0(n)x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = 0$$

**Утверждение**: множество решений - линейное пространство.
Действительно, $cx_1(n),\ x_1(n) + x_2(n)$ - очевидно тоже решения. Значит можно выбрать набор $(x_1(n), ..., x_k(n))$, для него можно посчитать Казортиан(по аналогии с Вронксианом):

$$W(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & ... & x_k(n) \\ x_1(n+1) & ... & x_k(n+1) \\ \vdots & ... & \vdots \\ x_1(n+k-1) & ... & x_k(n+k-1) \end{vmatrix}$$

набор является базисом $\iff W(0) \neq 0$ - фундаментальная система решений.

# Линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами -

$$x(n+k) + a_1x(n+k-1) + ... + a_kx(n) = 0,\ a_i \in \mathbb{R},\ a_k \neq 0$$

Решаются они аналогом метода Эйлера - пусть решение имеет вид $x(n) = \lambda^n$, для него строится характеристический многочлен

$$\lambda^{n+k} + a_1\lambda^{n+k-1} + ... + a_k\lambda^n = 0 \iff \lambda^n(p_k(\lambda)) = 0$$

1) $\lambda$ - вещественный корень кратности 1, тогда решение $\lambda^n$

2) $\lambda$ - вещественный корень кратности $m > 1$, решения - $\lambda^n,\ n\lambda^n, ...,\ n^{m-1}\lambda^n$

3) $\lambda$ - комплексный корень кратности 1, $\lambda = re^{i\varphi}\ r > 0$, у него есть сопряженный корень $\bar{\lambda} = re^{-i\varphi}$, они дают 2 решения $r^n\cos(n\varphi),\ r^n\sin(n\varphi)$

4) $\lambda$ - комплексный корень кратности $m > 1$, решения будут иметь вид $r^n\cos(n\varphi)$, $nr^n\cos(n\varphi), ... ,\ n^{m-1}r^n\cos(n\varphi)$ и $r^n\sin(n\varphi),\ nr^n\sin(n\varphi), ... ,\ n^{m-1}r^n\sin(n\varphi)$

*Пример:* $x(n+2) = x(n+1) + x(n),\ x(0) = 0,\ x(1) = 1$
*Решение:* Составим характеристический многочлен - $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad x(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$\iff C_2 = -C_1 \quad x(1) = C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} - C_1\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \iff C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

*Ответ:* $x(n) = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ - формула Бине для чисел Фибоначчи.
*Пример:* $x(n+3) - x(n) = 0$
*Решение*: составим характеристический многочлен:

$$\lambda^3 - 1 = 0 \iff \lambda = 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$$

Решение с мнимой частью имеет вид $y(n) = Ce^{i\frac{2\pi n}{3}} = C(\cos\dfrac{2\pi n}{3} + i\sin\dfrac{2\pi n}{3})$

Общее решение имеет вид $x(n) = C_1 \cdot 1^n + C_2\cos\dfrac{2\pi n}{3} + C_3\sin\dfrac{2\pi n}{3}$

*Ответ*: $x(n) = C_1 + C_2\cos\frac{2\pi n}{3} + C_3\sin\frac{2\pi n}{3}$

# 22 Неоднородные линеные разностные уравнения со специальной правой частью

Пусть у нас есть неоднородное линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами -

$$a_1x(n+k) + ... + a_k(n) = b(n), \text{ где } b(n) = \mu^n P_l(n),\ \mu \neq 0,\ deg\ P_l = l$$

Для начала находим решение однородного уравнения:

$$a_1x(n+k) + ... + a_k(n) = 0$$

Если $\mu$ - корень характеристического многочлена кратности $s$(возможно, равной 0), то существует специальное решение вида

$$y(n) = n^s\mu^n Q_l(n) \quad deg\ Q_l = l$$

А общее решение складывается из решения однородного и специального.
*Пример:* $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = 2 + n$
*Решение*: для начала находим решение однородного уравнения:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ корень кратности } 2\ x(n) = C_1 + nC_2$$

Справа у нас специальная правая часть - $P_l(n) = n + 2,\ l = 1,\ s = 2,\ \mu = 1$

Значит специальное решение имеет вид $y(n) = n^2(C_3 + C_4n)$ подставим его:

$$(n+2)^2(C_3 + C_4(n+2)) - 2(n+1)^2(C_3 + C_4(n+1)) + n^2(C_3 + C_4n) = 2 + n \iff$$
$$(n^2+4n+4)(C_3 + 2C_4 + C_4n) - 2(n^2+2n+1)(C_3 + C_4 + C_4n) + n^2(C_3 + C_4n) =$$
$$= n^3(C_4 - 2C_4 + C_4) + n^2(C_3 + 2C_4 + 4C_4 - 2C_3 - 2C_4 - 4C_4 + C_3) +$$
$$+ n(4C_3 + 8C_4 + 4C_4 - 4C_3 - 4C_4 - 2C_4) + (4C_3 + 8C_4 - 2C_3 - 2C_4) = 2 + n \iff$$
$$6C_4 = 1,\ 2C_3 + 6C_4 = 2 \iff C_4 = \frac{1}{6},\ C_3 = \frac{1}{2}$$

*Ответ*: $x(n) = C_1 + nC_2 + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{6}$

# 23 Нелинейные системы

Систему дифференциальных уравнений можно свести путем исключения неизвестных к одному или нескольким более простым уравнениям с одной неизвестной функцией, которая называется интегралом:

$$\dot{x} = f(t,x)\ x \in \mathbb{R}^n \quad U(t,x) : \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial U}{\partial x}(t,x) f(t,x) \equiv 0$$

$$U \in C^1\ \forall (t_0,x_0)\ \exists N \ni (t_0,x_0) : \exists u_1(t,x),...,u_n(t,x) : rank\ \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = n$$

$\forall U(x) = g(u_1(t,x),...,u_n(t,x))-$ любой интеграл выражается через эти $n$ функций

Задачи подобного типа не имеют каких-то стандартных решений, кроме метода пристального взгляда. Тем не менее, какие-то трюки все же работают. Обычно ищутся какие-то функции от переменных равные константе, после получения $n$ уравнений на $n$ неизвестных мы проверяем, являются ли их частные производные линейно независимыми, и, если нам повезло, то объявляем их интегралами.

*Пример:* $y' = y^2 z \quad z' = \dfrac{z}{x} - yz^2$

*Решение*: домножим левую часть на $z$, правую на $y$ и сложим:

$$y'z + yz' = y^2z^2 + \frac{yz}{x} - y^2z^2 \iff (yz)' = \frac{1}{x}yz \iff yz = C_1 x \quad u_1 = \frac{yz}{x} = const$$

Подставим в первое равенство - $y' = yC_1x \iff y = C_2 e^{C_1 x^2} \iff u_2 = ye^{-xyz} = const$

Частные производные: $\dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{z}{x},\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z} = \dfrac{y}{x},\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = e^{-xyz} - xyze^{-xyz},\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z} = -xy^2e^{-xyz}$

Матрица Якоби - $\begin{pmatrix} \dfrac{z}{x} & \dfrac{y}{x} \\ e^{-xyz}(1-xyz) & -xy^2e^{-xyz} \end{pmatrix}$ считаем определитель

$$|...| = e^{-xyz}(-zy^2 - \frac{y}{x} + y^2 z) = \frac{y}{x}e^{-xyz}\ 0 \text{ только при } y = 0,\ z = Cx$$

*Ответ*: $y = C_2 e^{C_1 x^2},\ z = \dfrac{C_1}{C_2} x e^{-C_1 x^2}; \quad y = 0,\ z = Cx$

# 24 Уравнения в частных производных

Чтобы решить однородное уравнение в частных производных вида

$$a_1(x)\frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + a_n(x)\frac{\partial z}{\partial x_n}, \quad \text{где } x = (x_1,...,x_n)$$

Надо написать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_1(x) \\ \vdots \\ \dot{x_n} = a_n(x) \end{cases}$$

А дальше найти независимые интегралы этой системы ($n-1$ если быть точным), тогда общее решение будет выражаться как

$$u(x) = g(u_1(x), ..., u_{n-1}(x)), \quad g \in C^1 \text{ - любая функция}$$

*Замечание:* если справа не 0, т.е. уравнение не однородное, то можно повысить его порядок(что делать не рекомендуется) и рассматривать его как однородное.
*Пример:* $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$
*Решение*: Составим систему и найдем 1 независимый интеграл:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{домножим верхнее на } x\text{, а нижнее на } y:$$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \iff x^2 + y^2 = const \iff z = g(x^2 + y^2),\ g \in C^1$$

Методом пристального взгляда угадывается решение системы (на самом деле видно, что синус и косинус на константу подходят в начальную систему).
*Ответ*: $z = g(x^2 + y^2)$

# 25 Уравнения с запаздыванием

В курсе дифференциальных уравнений нам, в основном, попадаются конечномерные системы, где решение задачи Коши определяется начальным условием:

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ надо найти } x(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Но в физике и в жизни, зачастую, состояние системы определяется не только начальным состоянием, но и предыдущим состоянием с некоторым запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h)) \quad h \text{ - запаздывание}$$

Такая задача уже является бесконечномерной, и начальными данными будет функция $x_0(t)$ $t \in [0, h]$.
Для решения подобных задач используется так называемый метод шагов, который последовательно строит решение на каждом промежутке. После чего из них складывается общее решение.
*Пример:* $\dot{x}(t) = 2x(t-1),\ x_0(t) = 1 - t$ на $[0, 1]$. Найти решение на $[0, 3]$.
*Решение*: на $[1, 2]$ решением будет $x(t) = \int (1-t)dt = -\dfrac{1}{2}(1-t)^2 + C_1$.
$x(1) = 0 \iff C_1 = 0$. Итого $x(t) = -\dfrac{1}{2}(1-t)^2$
Решением на $[2, 3]$ будет $x(t) = \int -\dfrac{1}{2}(1-t)^2 dt = \dfrac{1}{6}(1-t)^3 + C_2$.
$x(2) = -\dfrac{1}{2}$, значит $C_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{2}{3}$. Тогда $x(t) = \dfrac{1}{6}(1-t)^3 - \dfrac{2}{3}$

*Ответ*: $\begin{cases} x(t) = 1 - t,\ t \in [0, 1] \\ x(t) = -\dfrac{1}{2}(1-t)^2.\ t \in [1, 2] \\ x(t) = \dfrac{1}{6}(1-t)^3 - \dfrac{2}{3},\ t \in [2, 3] \end{cases}$

# 26 Приближенные решения

Как показывает практика, не у всех дифференциальных уравнений можно явно найти решение, тем не менее, для прикладных задач надо иметь хоть какое-то, желательно, несильно отличающееся от настоящего.

$\dot{x} = f(t,x)$ $\quad x(t)$ - неизвестное нам решение. Ищем функцию на $[0,T]$ $y(t)$ :

$$|x(0)-y(0)| < \delta,\ |\dot{y}(t) - f(t,y(t))| < \eta,\ K \text{ - липшицева константа.}$$

**Теорема:** пусть выполнены предыдущие условия, тогда

$$|x(t)-y(t)| < \delta e^{Kt} + \frac{\eta}{K}(e^{Kt}-1)$$

*Доказательство:*

$$|x(t)-y(t)| \le \delta + \int\limits_0^t (y(s) - f(s,y(s))) + (f(s,y(s)) - f(s,x(s)))ds \le$$

$$\le \delta + \int\limits_0^t K(y(s)-x(s)+\frac{\eta}{K})ds$$

$|x(t)-y(t)| + \dfrac{\eta}{K} \le \delta + \dfrac{\eta}{K} + K\displaystyle\int\limits_0^t |x(s)-y(s)| + \dfrac{\eta}{K}ds$ пользуемся леммой Гроноулла:

$$|x(t)-y(t)| + \frac{\eta}{K} \le (\delta + \frac{\eta}{K})e^{Kt} \iff |x(t)-y(t)| \le \delta e^{Kt} + \frac{\eta}{K}e^{Kt} - \frac{\eta}{K} \text{ чтд.}$$

*Пример:* $y' = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{1+y^2} = f(x,y(x)),\ y(0)=1, \quad \tilde{y} = 1 - \dfrac{x}{2}\ x \in [0,\dfrac{1}{2}]$
*Решение*: Для начала нам нужна липшицева константа $K$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{(1+y^2)} \cdot 2y \le 1$$

Здесь пользуемся теоремой Лагранжа, что $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |\dfrac{\partial f}{\partial y}(...)||y-\tilde{y}|$
Заметим, что $\tilde{y}(0) = 1$, т.е. $\delta = 0$. Осталось найти $\eta$.

$$|\tilde{y} - f(x,\tilde{y}(x)| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{1+(1-\frac{x}{2})^2}\right| = \left|\frac{(-\frac{1}{2}-\frac{x}{4})(1-x+\frac{x^2}{4})+1}{2-x+\frac{x^2}{4}}\right| =$$

$$= x^2\left|\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}}{x^2-4x+8}\right| \le \frac{1}{16}\left|\frac{x-2}{(x-2)^2+4}\right| \quad h(t) = \frac{t}{t^2+4} \quad h'(t) = \frac{t^2+4-t(2t)}{(t^2+4)^2}$$

точки экстремума в $|t| = 2 \iff 2-x = t$ из вида функции понятно, что справа достигаться будет максимум, поэтому $x=0$, а значение будет $\eta = \dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{64}$.
Итого: $\delta = 0,\ K=1,\ \eta = \dfrac{1}{64} \implies |y(x) - \tilde{y}(x)| \le \dfrac{1}{64}(e^t - 1) \le \dfrac{\sqrt{e}-1}{64}$
*Ответ*: $|y(x)-\tilde{y}(x)| \le \dfrac{\sqrt{e}-1}{64}$ на $x \in [0,\dfrac{1}{2}]$

Теперь рассмотрим более содержательный пример:
*Пример:* $\dot{x} = x - y,\ \dot{y} = tx,\ x(0) = 1,\ y(0) = 1;\ \tilde{x} = 1 + t + \frac{t^2}{2},\ \tilde{y} = \frac{t^2}{2},\ |t| \le 0.1$
*Решение*:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x - y \\ tx \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \text{ - матрица Якоби.}$$

$$|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| \le \left\| \frac{\partial f}{\partial(x,y)} \right\| |(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})|$$

Хотим найти разумную оценку на операторную норму. Очевидно, что:

$$|a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n| \le \sum |a_{ik}| \cdot \max |x_i|.$$

Тогда норму можно оценить как $\max(|1| + |1|, |0| + |t|) = 2 \implies K = 2$

$\delta = 0$.Теперь найдем, чему равно $\eta$.

$$\left| \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} - f(t, \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}) \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 + t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} \\ t(1 + t + \frac{t^2}{2}) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 + t - 1 - t \\ t - t - t^2 - \frac{t^3}{2} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 - \frac{t^3}{2} \end{pmatrix} \right| \le 0.01 + 0.0005 = 0.0105 = \eta$$

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right| \le \frac{\eta}{K}(e^{Kt} - 1) \le \frac{0.0105}{2}(e^{0.2} - 1)$$

*Ответ*: $| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} | \le \frac{0.0105}{2}(e^{0.2} - 1)$

# 27 Производная решения по начальным данным

$$\dot{x} = f(t,x)\ x \in \mathbb{R}^n\ f,\ \frac{\partial f}{\partial x} \in C(G),\ x(t,\tau,\xi) : x(\tau) = \xi$$

$\exists \left. \dfrac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0}$ - определено на $I(\tau,\xi_0)$ и равно фундаментальной матрице $\Phi(t)$

которая получается из системы $\dot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\tau,\xi_0)y,$ с н.д. $\Phi(\tau) = E$

В самом деле – можно записать формулу Тейлора для функции от параметра:

$$x(t,\tau,\xi_0 + \Delta\xi) = x(t,\tau,\xi) + \Phi(t)\Delta\xi + o(|\Delta\xi|)$$

*Пример:* $y' = y + y^2 + xy^3,\ y(2) = y_0$. Найти $\left. \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \right|_{y_0=0}$

*Решение*: Заметим, что в случае $y_0 = 0$ нам подходит тривиальное решение $y(x,2,0) \equiv 0$.

$$f(x,y) = y + y^2 + xy^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2y + 3xy^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,2,0)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 1$$

Значит наша система будет иметь следующий вид:

$$z' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,2,0))z \iff z' = 1 \cdot z \iff z = Ce^x$$

Случай одномерный, поэтому условие на $\Phi(\tau) = E$ эквивалентно $z(2) = 1 \implies z = e^{x-2}$

*Ответ*: $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0} = e^{x-2}$

Теперь расмотрим совсем нетривиальный случай большей размерности:

*Пример:* $\ddot{x} = \dfrac{2}{t} - \dfrac{2}{x},\ x(1) = 1,\ \dot{x}(1) = b$. Найти $\left.\dfrac{\partial x}{\partial b}\right|_{b=1}$

*Решение*: Заметим, что $x = t$ - подходит при $b = 1$. Наша теория работает только для д.у. 1 порядка, поэтому понизим порядок уравнения введя дополнительную переменную. Пусть $y = \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \dfrac{2}{t} - \dfrac{2}{x} \end{cases} \quad x(1) = 1,\ y(1) = b \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} & \dfrac{\partial x}{\partial y_0} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что $x = t,\ y = 1$ - решение нашей системы при начальных данных.

$\dfrac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{x^2} & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{t^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $\dfrac{\partial x}{\partial b}$ - верхний правый элемент $\Phi(t)$

$$\dot{u} = v \quad \dot{v} = \frac{2}{t^2}u \iff \ddot{u} = \frac{2}{t^2}u \iff u = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t}$$

$u(1) = 0 \iff C_1 = -C_2,\quad v(1) = \dot{u}(1) = 1 = 2C_1 - C_2 = 1 \iff C_1 = \dfrac{1}{3},\ C_2 = -\dfrac{1}{3}$

*Ответ*: $\dfrac{t^2}{3} - \dfrac{1}{3t}$

# 28 Производная решения по параметру

$$\dot{x} = f(t,x,\mu)\ x \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}^m \quad f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C^1(G)\ G \subset \mathbb{R}^{1+n+m}_{t,x,\mu}$$

Пусть у нас есть решение $x(t,\tau,\xi,\mu)$, Задача состоит в нахождении частной производной по $\mu$

$$w(t) = \left.\frac{\partial x(t,\tau,\xi,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} \text{ – матрицы } \exists \text{ на } I(\tau,\xi,\mu_0) \text{ и удовлетворяющей:}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t,\tau,\xi,\mu_0)w + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t,\tau,\xi,\mu_0)$$

*Пример:* $y' = y + \mu(x + y^2),\ y(0) = 1$. Найти $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

*Решение*: Порождающее решение с $\mu = 0$ :

$$y' = y \iff y = Ce^x,\ y(0) = 1, C = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + \mu 2y,\ \frac{\partial f}{\partial \mu} = x + y^2 \quad \dot{w}(x) = \frac{\partial f}{\partial y} w(x) + \frac{\partial f}{\partial \mu} = (1 + 2\mu y) w(x) + x + y^2$$

$$\mu = \mu_0 = 0,\ y = e^x \implies \dot{w}(x) = w(x) + x + e^{2x} \iff w(x) = e^x h(x)$$

$$h'(x) = \frac{x + e^{2x}}{e^x} \iff h(x) = e^x - (x+1)e^{-x} + C.\ w(0) = 0 \iff C = 0 \implies$$

$$w(x) = e^x h(x) = e^{2x} - x - 1$$

*Ответ*: $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = e^{2x} - x - 1$

*Пример:* $\frac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3,\ x(0) = 1 + \mu$. Найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

*Решение*: Для начала найдем порождающее решение с $\mu = 0$:

$$x' = x^2 \iff x = \frac{1}{C - t},\ x(0) = 1 \iff C = 1 \implies x = \frac{1}{1-t}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial f}{\partial x} w(x) + t x^3 = (2x + 3\mu t x^2) w(x) + t x^3 \quad \mu = \mu_0 = 0,\ x = \frac{1}{1-t} \implies$$

$$\dot{w}(x) = \frac{2}{1-t} w(x) + \frac{t}{(1-t)^3} \quad \text{Однородное } - w(x) = e^{\int \frac{2}{1-t}} = e^{-2\ln(1-t)} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$w(x) = \frac{1}{(1-t)^2} v(t) \iff \frac{2}{(1-t)^3} v(t) + \frac{1}{(1-t)^2} v'(t) = \frac{2}{1-t} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} v(t) + \frac{t}{(1-t)^3}$$

$$\iff v'(t) = \frac{t}{1-t} \iff v(t) = -t - \ln(1-t) + C \quad w(0) = 1 \iff C = 1$$

$$w(t) = \frac{1}{(1-t)^2} v(t) = \frac{1 - t - \ln(1-t)}{(1-t)^2}$$

*Ответ*: $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \frac{1 - t - \ln(1-t)}{(1-t)^2}$

*Пример:* $y' = 2x + \mu y^2,\ y(0) = \mu - 1$. Найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

*Решение*: Порождающее решение при $\mu = 0$:

$$y' = 2x \iff x^2 + C,\ y(0) = -1,\ C = -1$$

$$\dot{w}(x) = \frac{\partial f}{\partial y} w(x) + \frac{\partial f}{\partial \mu} = 2\mu y + y^2 = \Big|_{\mu=0\ \ y=x^2-1} = (x^2 - 1)^2 \iff$$

$$\dot{w}(x) = (x^2 - 1)^2 \iff w(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C,\ w(0) = 1 \iff C = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = w(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + 1$$

*Ответ*: $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + 1$

# 29 Ряд Тейлора по степеням параметра

$$\dot{x} = f(t, x, \mu)\ x \in \mathbb{R}^n \quad f,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C \quad \left.\frac{\partial x(t, \tau, \xi, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = a(t)$$

Тогда можно применить формулу Тейлора для функции $x(t, \tau, \xi, \mu)$ и разложить ее по степеням $\mu$:

$$x(t, \tau, \xi, \mu) = x(t, \tau, \xi, 0) + a(t)\mu + o(\mu)$$

В случае $f \in C^k,\ k \geq 1$ раскладывать можно до $k$-ой степени $\mu$:

$$x(t, \tau, \xi, \mu) = x(t, \tau, \xi, 0) + a_1(t)\mu + a_2(t)\mu^2 + ... + a_k(t)\mu^k + o(\mu^k)$$

Аналогичная ситуация в $\mu = \mu_0$, только разложение будет не в 0, а в $\mu_0$.
*Пример:* $y' = 4\mu x - y^2,\ y(1) = 1$. Разложить по степеням параметра $\mu$ до $\mu^2$, при $\mu = 0$.
*Решение*: Будем искать решение в форме $y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + o(\mu^2)$. Подставим это в наше уравнение и привидем подобные слагаемые.

$$y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + ... = 4\mu x - (y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + ...)^2 = 4\mu x - y_0^2 - \mu^2 y_1^2 - 2\mu y_0 y_1 - 2\mu^2 y_0 y_2$$

$$\begin{cases} [\mu^0]: & y_0' = -y_0^2 \\ [\mu^1]: & y_1' = 4x - 2y_0 y_1 \\ [\mu^2]: & y_2' = -y_1^2 - 2y_0 y_2 \end{cases} \quad \text{последовательно решим эту систему.}$$

Если подставить 1 $y(1) = 1 = y_0(1) + \mu y_(1) + \mu^2 y_2(1) + ... \implies y_1(1) = y_2(1) = ... = 0,\ y_0(1) = 1$

1. $y_0' = -y_0^2$ – уравнение с разделяющимися переменными. $y_0 \equiv 0$ не подходит.

$$\int \frac{y_0'}{-y_0^2} = \int 1 \iff \frac{1}{y_0} = x + C \iff y_0 = \frac{1}{x + C},\ y_0(1) = 1 \implies C = 0,\ y_0 = \frac{1}{x}$$

2. $y_1' = -2y_0 y_1 + 4x = \dfrac{-2}{x} y_1 + 4x$ – решение в форме $y_1 = e^{\int \frac{-2}{x}} v(x) = \dfrac{1}{x^2} v(x)$

$$v'(x) = \frac{4x}{\frac{1}{x^2}} = 4x^3 \iff v(x) = x^4 + C,\ y_1 = \frac{x^4 + C}{x^2}\ y_1(1) = 0 \iff C = -1,\ y_1 = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

3. $y_2' = -y_1^2 - 2y_0 y_2 = -(x^2 - \dfrac{1}{x^2})^2 - \dfrac{2}{x} y_2 \quad y_2 = \dfrac{1}{x^2} h(x) \quad y_2(1) = 0 \iff h(1) = 0$

$$h'(x) = -\frac{(x^4 - 1)^2 x^2}{x^2} = -x^6 + 2x^2 - \frac{1}{x^2} \iff h(x) = -\frac{x^7}{7} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x} + C$$

$$\implies y_2(1) = \frac{1}{1} h(1) = 0 \iff \frac{6}{7} + \frac{2}{3} = -C \iff C = -\frac{32}{21}$$

*Ответ*: $y = \dfrac{1}{x} + \mu(x^2 - \dfrac{1}{x^2}) + \mu^2(-\dfrac{x^5}{7} + \dfrac{2x}{3} - \dfrac{32}{21x^2} + \dfrac{1}{x^3})$

# 30 Метод малого параметра

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \quad f,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial \mu} \in C \quad \omega > 0 : f(t+\omega, x, \mu) = f(t, x, \mu)$$

Предположим, при $\mu = 0$ есть $\omega$-периодическое решение $x = \varphi(t)$:

$$x(t, \mu) - \omega\text{-периодическое} \quad x(0, \mu) = x(\omega, \mu),\ x(t, x_0, \mu) : x(\omega, x_0, \mu) = x_0$$

Рассмотрим функцию $g(x_0, \mu) = x(\omega, x_0, \mu) - x_0$. Заметим, что:

$$g(\varphi(0), 0) = x(\omega, \varphi(0), 0) - \varphi(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$$

Функция подобрана таким образом, чтобы по обоим аргументам можно было брать частные производные – тогда сработает теорема о неявной функции:

$$\left.\frac{\partial g(x_0, \mu)}{\partial x_0}\right|_{x_0=\varphi(0),\mu=0} = \left.\frac{\partial x(\omega, x_0, \mu)}{\partial x_0}\right|_{x_0=\varphi(0),\mu=0} - E$$

Надо, чтобы $rank = n$, тогда все сработает.
Рассмотрим систему в вариациях на порождающем решении:

$\dot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t), 0)y$ тогда достаточным условием для Th о неявной функции будет:

$\Phi(t)$ – фундаментальная матрица, такая что $\Phi(0) = E,\ \det(\Phi(w) - E) \neq 0$

$$\Longrightarrow \text{ (по } \underline{\text{Th}} \text{ о неявной функции) } \exists x_0(\mu) \in C^1 : x_0(0) = \varphi(0)$$

Огромная польза данных рассуждений состоит в том, что дальше работает вся теория дифференцирования по начальным данным и по параметру. А все эти проверки делаются с целью проверить, что у нас выполняются условия для использования этой теории.
*Замечание:* половина решения задач подобного типа сводится к проверке условий на фундаментальную матрицу, которые всегда выполняются(спасибо составителям задач). Тем не менее, эта проверка настолько же необходима, насколько и нудна.
*Пример:* $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \mu x^2$
*Решение*: Система второго порядка, поэтому делаем замену $\dot{x} = y$ чтобы понизить ее порядок и сводим ее к 2 системам первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \cos 2t - 5x + \mu x^2 \end{cases} \quad \text{ищем порождающее решение при } \mu = 0$$

$$\ddot{x} + 5x = \cos 2t \quad \omega = \pi \quad x(t) = \cos 2t + C_1 \sin\sqrt{5}t + C_2 \sin\sqrt{5}t \implies$$

$$x(t) = \cos 2t \quad y = -2\sin 2t \text{ - порождающие решения } \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}$$

Пишем систему в вариациях:

$$\dot{z} = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 + 2\mu x & 0 \end{pmatrix} z\right|_{\mu=0} \iff \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} z \text{ ищем } \Phi(t):$$

$$\det ... = \lambda^2 + 5 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{5}i \text{ ищем с.в.:}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5}i & 1 \\ -5 & -\sqrt{5}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -\sqrt{5}i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}i \end{pmatrix}(\cos\sqrt{5}t, i\sin\sqrt{5}t) = \cos\sqrt{5}t - \sqrt{5}\sin\sqrt{5}t \text{ и сопряженное:}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{5}t & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t \\ -\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t & \cos\sqrt{5}t \end{pmatrix} \quad \Phi(\omega) = \Phi(\pi)$$

$$\det\left(\Phi(2\pi) - E\right) = (\cos(\pi\sqrt{5}) - 1)^2 + \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^2(\pi\sqrt{5}) > 0$$

Условие Th о неявной функции выполнено, значит можно применить метод малого параметра $\implies \exists\, x(t) = \cos 2t + \mu a(t) + o(\mu)$ Ищем подстановкой:

$$\dot{x} = -2\sin 2t + \mu\dot{a}(t) + o(\mu) \quad \ddot{x} = -4\cos 2t + \mu\ddot{a}(t) + o(\mu)$$

$$-4\cos 2t + \mu\ddot{a}(t) + 5(\cos 2t + \mu a(t)) + ... = \cos 2t + \mu(\cos^2 2t + ...)$$

$$\begin{cases} [\mu^0] \quad \cos 2t = \cos 2t \\ [\mu^1] \quad \ddot{a}(t) + 5a(t) = \cos^2 2t = \dfrac{1 + \cos 4t}{2} \end{cases}$$

Уравнение со специальной правой частью, т.к. хотим $\pi$-период, то подойдут только частные решения $\implies a(t) = -\dfrac{1}{22}\cos 4t + \dfrac{1}{10}$

*Ответ*: $x(t) = \cos 2t + \mu(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{22}\cos 4t) + o(\mu)$

# 31 Разложение решений в степенные ряды

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ задача Коши в } (t_0, x_0), \; x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$f_i(t, x) = \sum_{k_0,\dots,k_n} L^i_{k_0,\dots,k_n}(t - t_0)^{k_0}(x_1 - x_1^0)^{k_1}\dots(x_n - x_n^0)^{k_n} \quad |t - t_0| < \varepsilon, \; |x_i - x_0^i| < \rho \; \forall i$$

– если функция в окрестности этой точки аналитична в какой-то области, т.е. раскладывается в ряд по степеням переменных. Тогда решение задачи Коши тоже является аналитической функцией и его можно найти как степенной ряд в окрестности точки:

$$\exists x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; x_i(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k^i (t - t_0)^k \quad |t - t_0| < \varepsilon$$

Встает закономерный вопрос – а как такие ряды искать? Для этого существуют 2 метода, каждый из которых обладает своиими достоинствами и недостатками.

**Первый метод** - выписать разложение $x_i(t)$ в ряд с неизвестными коэффициентами $a_k^i$, а дальше подставлять в систему и рекуррентно находить значение этих коэффициентов.
**Второй метод** - дифференцировать систему, каждый раз подставляя начальные данные, чтобы обнулить все коэффициента кроме того, который стоит при нулевой степени $t - t_0:\ a_0^i = x_i(0),\ a_1^i = \frac{dx_i}{dt}(t_0)\ldots a_k^i = \frac{1}{k!}\frac{d^k x_i}{dt^k}(t_0)$

*Пример* $y' = y + xe^y,\ y(0) = 0$, найти разложение в ряд до $o(x^4)$
*Решение*: в данном случае удобно воспользоваться вторым методом, потому что раскладывать в ряд $e^y$ сопряжено с большим количеством ненужных сложностей в подстановке ряда в ряд.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) \quad y(0) = 0 \implies a_0 = 0$$
$$y'(0) = y(0) = 0 \implies a_1 = 0$$
$$y''(0) = y'(0) + e^{y(0)} = 1 \implies a_2 = \frac{1}{2}$$
$$y'''(0) = y''(0) + 2e^{y(0)}y'(0) = 1 \implies a_3 = \frac{1}{6}$$

*Ответ*: $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$
*Пример*: $y'' - xy' - 2y = 0$, найти решения, которые выражаются рядами
*Решение*: здесь система линейна, поэтому первый метод даст очень удобные рекурренты на коэффициенты ряда.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$
$$y'' - xy' - 2y = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} x^k((k+1)(k+2)a_{k+2} - k a_k - 2a_k) \implies$$
$(k+1)a_{k+2} = a_k \iff a_{k+2} = \dfrac{a_k}{k+1}$ мы хотим какие-нибудь линейно назависмые:
$$1)\ a_0 = 1,\ a_1 = 0 \implies y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!!}$$
$$2)\ a_0 = 0,\ a_1 = 1 \implies y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k)!!}$$

*Ответ*: $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k+1)!!},\ y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k)!!}$

# 32 Исследование особых точек системы

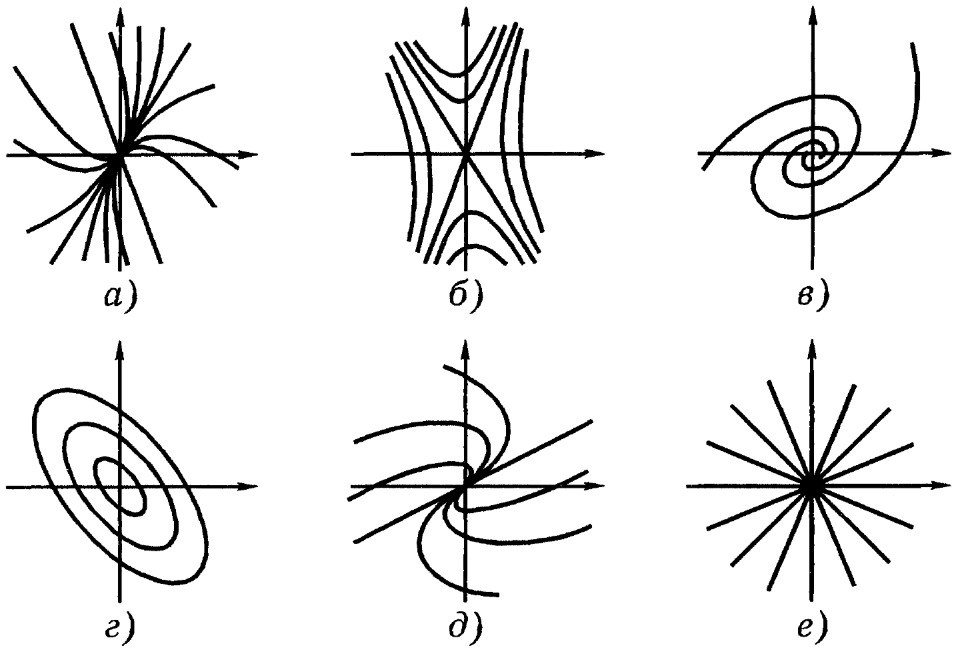
Пусть у нас есть система

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^2 \ \det A \neq 0 \quad \lambda, \mu \ - \ \text{собственные числа } A$$

Особые точки системы - там где $Ax = 0$. Для исследования особой точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}$$

Надо найти собственные числа матрицы $A$, а дальше в зависимости от их значения у нас будут следующие картинки:




Если:

а) $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda\mu > 0$ – особая точка типа *узел*.

б) $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda\mu < 0$ – особая точка типа *седло*.

в) $\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ Re\ \lambda, \mu \neq 0$ – особая точка типа *фокус*.

г) $\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ Re\ \lambda, \mu = 0$ – особая точка типа *центр*.

д) $\lambda = \mu \neq 0\ \dfrac{dy}{dx} \neq \dfrac{y}{x}$ – особая точка типа *вырожденный узел*

е) $\lambda = \mu \neq 0\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ (\dot{x} = ax,\ \dot{y} = ay)$ – особая точка типа *дикритический узел*.

ё) $\lambda\mu = 0\ (\lambda = 0 \vee \mu = 0)$ – дроби сокращаются, уравнение принимает вид $\dfrac{dy}{dx} = k$, т.е. решения – параллельные прямые.

Чтобы найти асимптотические прямые для а), б), д), имеющие вид $y(t) = kx(t)$, мы ищем их линейный коэффициент $\dfrac{dy}{dx} = k = \dfrac{\gamma + \delta k}{\alpha + \beta k}$

*Пример*: его не будет, потому что я не умею рисовать!

# 33 Устойчивость решений по Ляпунову

$$\dot{x} = f(x)\ x \in \mathbb{R}^n\ f \in C^1$$

Мы ищем точки покоя $x(t_0) = x_0 : f(x_0) = 0$ и проверяем решение такой задачи Коши на устойчивость.
Решение $x(t)$ *устойчиво* –

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \text{ решения } y(t) : |x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies |x(t) - y(t)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$$

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ такого $\delta$ не существует, то решение называется *неустойчивым.*
Решение $x(t)$ *асимптотически устойчиво* – если оно устойчиво и

$$\forall \text{ решения } y(t) : |x(t_0) - y(t_0)| < \delta \implies y(t) - x(t) \to 0\ t \to \infty$$

Наличие или отсутсвие устойчивости не зависит от $t_0$, поэтому вопрос об устойчивости данного решения $x(t)$ обычно сводится к исследованию устойчивости нулевого решения $y(t) \equiv 0$, получаемого из системы заменой $y = x - x_0$.
**Теорема:** исследование на устойчивость по первому приближению
Для исследования на устойчивость $x = y + x_0$ надо исследовать линейную систему

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x_0) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)y + g(y),\ g(y) = o(y)$$

При помощи теоремы Ляпунова.
**Теорема:** Ляпунова об устойчивости по первому приближению Нулевое решение системы системы $\dot{y} = Ay + o(y),\ A = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0}$ асимптотически устойчиво, если все собственные числа матрицы $A$ имеют отрицательную вещественную часть. Если же хоть одно собственное число имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение неустойчиво. Если есть собственные числа с нулевой вещественной частью, то теорема не дает никакого ответа.
*Пример*: $2t\dot{x} = x - x^3, x(1) = 0$.
*Решение*: Для начала решим это уравнение, и поймем, что $x(t) = 0,\ x(t) = \pm 1$ - решения.

$$\frac{2\dot{x}}{x - x^3} = \frac{1}{t} \iff 2\log x - (\log 1 - x + \log 1 + x) + C = \log t \iff$$

$$Cx^2 = (1 - x^2)t \iff x(t) = \pm\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t + C}}$$

Т.к. $x(1) = 0$, то на устойчивость будем исследовать тождественно нулевое решение. Заметим, что $\lim \sqrt{\frac{t}{t + C}} = 1$, значит решение неустойчиво.
*Ответ*: Неустойчиво

Если нам известен вид общего решения системы, то мы исследуем нулевое решение на устойчивость похожим образом:

*Пример*: $x = \dfrac{C_1 - C_2 t}{1+t^2},\ y = (C_1 t^3 + C_2)e^{-t}$
*Решение*:

$$x(0) = C_1,\ y(0) = C_2\ -\ \text{система имеет нулевое решение при } C_1 = C_2 = 0$$

$$|C_1|, |C_2| \le \delta \quad |x| \le \left|\frac{C_1}{1+t^2}\right| + \left|\frac{C_2 t}{1+t^2}\right| \le \delta + \delta \cdot \frac{1}{2} < 2\delta$$

$$|y| \le |C_1 t^3 e^{-t}| + |C_2 e^{-t}| \le \delta \cdot 2 + \delta < 3\delta,\ \text{берем } \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

*Ответ*: Устойчиво

Теперь посмотрим на примеры для многомерной системы:
*Пример*: Исследовать на устойчивость нулевое решение $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$
*Решение*: Составим матрицу Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3e^{-3x}}{4y + e^{-3x}} & \dfrac{4}{4y+e^{-3x}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt[3]{1-6x}^2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{В точке } (0,0)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (-3-\lambda)(2-\lambda) + 8 = \lambda^2 + \lambda + 2.\ a, b > 0 \implies Re\ \lambda_j < 0$$

*Ответ*: Устойчиво

Иногда в системе присутствуют параметры, в зависимости от которых нам надо исследовать устойчивость системы:
*Пример*: Исследовать при каких значениях параметров $a, b$ асимптотически устойчиво нулевое решение.
$\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2 \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2 \end{cases}$
*Решение*: Строим матрицу Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & a + 2y \\ b - 2x & -3 \end{pmatrix} \text{ в } (0,0)\ A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{pmatrix}$$
$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(-3-\lambda) - ab = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - ab$$

Асимптотически устойчиво при $2 > 0,\ -3 - ab > 0$
*Ответ*: Асимптотически устойчиво при $ab < -3$

# 34 Условия устойчивости

Получив на руки матрицу и ее характеристический многочлен выше 2 степени, бывает сложно найти корни характеристического многочлена, т.е. ее собственные числа, чтобы потом проверить их вещественные части на отрицательность.

Тем не менее, есть способ проверить отрицательность всех вещественных частей собственных чисел, не вычисляя их.
**Теорема:** Условие отрицательности всех вещественных корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad a_0 > 0$$

1) **Необходимое условие:** все $a_i > 0$. В случае $n = 2$ это условие является и достаточным.

2) **Условия Рауса-Гурвица:** необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ и т.д. } \Delta_k > 0$$

3) **Условия Льенара-Шипара:** необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \dots,$ где $\Delta_k$ – те же самые главные диагональные миноры матрицы Гурвица. Эти условия равносильны условиям Рауса-Гурвица, но удобнее, т.к. содержат меньше определителей.

*Пример*: $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$

*Решение*: Посчитаем матрицу Якоби в $(0, 0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{1}{\cos^2(z - y)} & \dfrac{1}{\cos^2(z - y)} \\ \dfrac{12}{2\sqrt{9 + 12x}} & -3e^y & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial(x, y, z)}\right|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (-2-\lambda)(-3-\lambda)(-\lambda) - 6 - 6$$

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda + 12 = 0$$

Применим условие Рауса-Гурвица:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 2 > 0\ \Delta_2 = 18 > 0\ \Delta_3 = 12 \cdot 18 > 0$$

Значит по теореме об устойчивости по первому приближению система устойчива.
*Ответ*: Устойчива.

*Пример*: $\begin{cases}\dot{x} = (x-1)(y-1)\\ \dot{y} = xy-2\end{cases}$ Найти все положения равновесия и исследовать на устойчивость.
*Решение*: Два положения равновесия находятся очевидным образом – это $(1,2),\ (2,1)$

1. Исследуем $(1,2)$. Сдвигаем систему и исследуем на устойчивость нулевое решение:

$$x-1 \to x,\ y-2 \to y \implies \begin{cases}\dot{x} = x(y+1)\\ \dot{y} = (x+1)(y+2)-2 = xy+2x+y\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y+1 & x\\ y+2 & x+1\end{pmatrix} \quad A = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ tr(A) = \sum Re\,\lambda_j = 2 > 0$$

   Значит неусточиво

2. Исследуем $(2,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y-1 & x-1\\ y & x\end{pmatrix} \quad A = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\bigg|_{(2,1)} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ tr(A) = 2 > 0$$

   Значит тоже неустойчиво

*Ответ*: $(1,2)$ и $(2,1)$ неустойчивые положения равновесия.

# 35 Условия неустойчивости

Теорема об устойчивости по первому приближению не дает ответа в случае нулевой вещественной части собственного числа, однако способ их исследования дает следующая теорема:
**Теорема:** Ляпунова
Пусть есть система и функция $V$, такие что:

$$\dot{x} = f(x)\ x \in \mathbb{R}^n,\ f(0) = 0 \quad V \in C^1\ V \geq 0,\ V(x) = 0 \iff x = 0$$

$$\text{Тогда } \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot f(x) < 0\ \forall x \neq 0 \implies x = 0\ -\ \text{асимптотически устойчиво}$$

Отсюда берем условие неустойчивости:

$$V \in C^1(S),\ V \in C(\bar{S}),\ 0 \in \bar{S},\ \dot{V} > 0 \text{ в } S,\ V(x) = 0 \iff x \in \partial S$$

$$\text{Если } \forall\delta > 0\ \exists x \in S \cap \{|x| < \delta\} : V(x) > 0 \implies x = 0\ -\ \text{неустойчиво.}$$

*Замечание*: Угадывание такой функции $V$, зачастую, требует интуиции, которая появляется при применении метода пристального взгляда. Осмысленные функции $V$ часто бывают полиномами, что немного сужает круг поиска.

*Пример*: $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy \\ \dot{y} = y^3 - x^3 \end{cases}$

*Решение*:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -1-y & -x \\ -3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.к. встречается 0, то теорема устойчивости по 1 приближению не работает. Составим функцию Ляпунова $V(x,y) = x^2 + y^2,\ V(0) = 0,\ V > 0$ не в нуле.

$$\frac{\partial V}{\partial(x,y)} = (2x, 2y) \quad \dot{V}(x,y) = (2x, 2y)\begin{pmatrix} -x - xy \\ y^3 - x^3 \end{pmatrix} = -2x^2 - 2x^2y + 2y^4 - 2yx^3 =$$

$$= -2x^2(1 + y + 2yx) + 2y^4 > 0 \text{ на } (0,y)$$

*Ответ*: Нулевое решение асимптотически неустойчиво.