Пятая лекция

11 октября 2024 г.

§**Метод подъема.**

Так же сразу ограничиваемся на циклическое подпространство:

$B = (\mathcal{A} - \lambda Id)|_{(\mathcal{A}-\lambda Id)^N}$

$\ldots \ker B^{k-1} \subset \ker B^k = V$

$0 = Im\ B^k \subset Im\ B^{k-1} \ldots$.

$Im\ B^{k-1} \subset \ker B$, так как $\ker B^k = V$.

$Im\ B^{k-1}$ - те собственные вектора которые можно поднять до высоты k.

$*:\ \exists u^k : B^{k-1}(u^k) = u^1$, далее $u^{k-1} = B(u^k), u^{k-2} = B(u^{k-1})$.

$Im\ B^{k-1} \cap \ker B \subset Im\ B^{k-2} \cap B \subset \ldots Im\ b \cap \ker B \subset \ker B$

Будем на каждом шаге дополнять до базиа применяя процудуру аналогичную $*$(естественно цепочка не одна, просто они строятся все аналогично.)

Получим набор Жордановых цепочек в котором нижние векторы линейно независимы и порождают $\ker B$.

Лемма. Объединение таких цепочек ЛНЗ.

Доказательство.

Надо рассматривать соотношения только векторов одной высоты.

$\sum \alpha_i^l u_l^i = 0$

Применим $B^(l_0 - 1)$, где $l_0 = \max l$ такое что коэфициент хотя бы при одном $u_i^l \neq 0$. Получим линейную комбинацию векторов высоты 1 про которые известно, что они линейно независимые:

$\sum\limits_{i=l_0} \alpha_i^l B(u_l^i) = 0$

$\Rightarrow$ все коэффециенты равны 0 $\square$.

Теперь докажем что они образуют базис.

Пусть $v \in \ker B^N$, его высота равна l. $B^{l-1}(v) = \sum \gamma_i u_i^1 \in im\ B^{l-1} \cap \ker B$, где u_i базисный вектор этого пространства.

Индукция по высоте. $l = 1$ выполняется по построению.

Доказываем переход от $l-1$ к l.

Каждый из u_i можно поднять до высоты l. И рассмотрим вектор состоящий из поднятых векторов:

$v' = \sum \gamma_i u_i^l$.

отсюда $B^{l-1}(v - v') = 0$. $\square$.

§**Операторы коммутирующие с данным.**

Пусть $\{A, X \in Mat_n(\mathbf{C}) : AX - XA = 0\} = C_A \subset M_n(\mathbf{C})$ - подпространство содержащее все многчолены от A.

Предложение

Размерность $C_A \leq n$.

Доказательство

Можно считать что A приведена к Жордановой форме.

Заметим, что $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(Рассматриваются Жордановы клетки с 0 на диагонали, так как любую Жорданову клетку можно представить в виду суммы диагональной матрицы и Жордановой клетки с нулями на диаогнали, и так как диагональные матрицы коммутируют со всем что есть, то все сводится с к клеткам с нулями на диагонали.)

перестановочна со всеми многочленами от J:

$$a_0 E + a1_J + a_2 J^2 + \dots + a_k J^k = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

С Жордановой клеткой коммутируют в точности только такие матрицы потому что умножение на Жорданову клетку справа XJ смещает элементы x влево, а умножение на нее слева смещает их вниз. Значит, $a_{i-1,k} = a_{i,k-1}$, и ничего другого нет.

Так как умножение блочно-диагональных матриц производится соответственно поэлементно то можно взять блочно-диагональные матрицы с размерами блоков соответствующих клеткам.

Суммирую размеры всех Жордановых клеток получаем то что нужно $\square$.

Теорема Следующие условия на $\mathcal{A} : V \to V$

1. $\forall B : V \to V : B\mathcal{A} = \mathcal{A}B \exists p : B = p(\mathcal{A})$
2. $\dim C_{\mathcal{A}} = n$
3. $V = \langle v \rangle_{\mathcal{A}}$
4. $\mu(t) = \chi(t)$

$1 \Rightarrow 2$

$\dim C_A \leq n$, потому что размерность многочленов от $\mathcal{A}$ равна n: если $f_1(t) = f_2(t) \mod \chi(t)$, то $f_1(\mathcal{A}) = f_2(\mathcal{A})$.

$2 \Rightarrow 4$.

Если $\mu \neq \chi$, то есть $\lambda : \mu(t) = (t - \lambda)^a$, $\chi(t) = (t - \lambda)^k$

$k = \dim \ker(\mathcal{A} - \lambda id)^N$. (вспоминаем практику алгебры)

a - размер самого большого блока в Жордановой форме для собственного числа λ, потому что минимальный многочлен аннулирует каждый блок, так как жорданова форма блочно диагональная, то многочлен действует на каждый блок поотдельности(было), и значит минимальный аннулятор всей матрицы это их НОК, осталось заметить, что каждый из аннуляторв для блоков это $(t - \lambda)^l$

Действуем от противного: если 4 не верно, докажем, что 2 неверно.

то есть если $\mu \neq \chi$, значит есть как минимум две Жордановой клетки. Ограничимся на них.

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим матрицу которая над стыком этих блоков имеет 1 а везде в других местах 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Где размеры нулевых матриц соответствуют верхней матрице, а K имеет везде нули кроме нижней левой позиции(там 1). Ручная проверка - такая матрица коммутирует с нашей и имеет другой вид.

$4 \Rightarrow 3$.

Для каждого λ одна клетка. Докажем что пространство циклическое.

$\ker(A - \lambda Id)^N$ - циклическое.

Пусть это едро равно $\langle u_i \rangle_A$. Покажем что $u_1 + ... + u_r$ - циклический.

Лемма:

$\mu u_1 + ... + u_r = \mu_{u_1} ... \mu_{u_r}$

это работает потому что $\bigoplus \langle u_i \rangle_A$ - прямая сумма и $(\mu_{u_i}, \mu_{u_j}) = 1$. Это было доказано для двух векторов когда-то и просто переносится сюда.

Дальше все получается потому минимальный аннулятор $u_1 + ... + u_r$ является характеристическим.(он равен произведению минимальных аннуляторов векторов, а их аннуляторы это аннуляторы блоков)

$3 \Rightarrow 1$.

Рассмотрим базис циклического пространства $v, \mathcal{A}v, ...\mathcal{A}^{n-1}v$, $B(v) = \sum a_i \mathcal{A}^i v = p(\mathcal{A})v$.

$B(v) = p(\mathcal{A})v$, $B' = B - p(\mathcal{A}) \Rightarrow B'(v) = 0$

$B'\mathcal{A} = \mathcal{A}B' \Rightarrow B'\mathcal{A}^k(v) = 0$, значит $B' = 0$, значит $B = p(\mathcal{A})$

§*Функции от операторов*

Если есть линейное дифференциальное уравнение $u' = ku$ то оно решается с помощью экспоненты. Аналогично для линейных уравнений многих переменных.

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

потому что $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$

(определение экспоненты) $\exp(tA) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{n!}$

Имеется формула: для аналитической функции f:

$$
f(J_\lambda) == \begin{pmatrix}
f(\lambda) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
f'(\lambda) & f(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{f'(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & f(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\
\frac{f'(\lambda)}{3!} & \frac{f'(\lambda)}{2!} & f'(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{f'(\lambda)}{k!} & \frac{f'(\lambda)}{(k-1)!} & \frac{f'(\lambda)}{(k-2)!} & \dots & f'(\lambda) & f(\lambda)
\end{pmatrix}
$$

это работает потому что:

$$
f(J_\lambda) = f(\lambda E + J_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda E) J_0^n}{n!}
$$