Шестая лекция

13 октября 2024 г.

Пример к прошлой лекции:

Для матрицы вида $A = E + B$, где $B^N = 0$ будем искать решение уравнения $X^2 = A$, такое что $(X - E)^N = 0$.

Воспользуемся рядом тейлора для корня:

$\sqrt{1+t} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k t^k = f(t)$

Не обращаясь к анализу, можно заметить, что если работать с этим рядом как формальнным, то получаем, что $f(t)^2 = 1 + t$. Так как B - нильпотент, то этот ряд даже не бесконечный и никаких проблем со сходимостью не надо будет исследовать. Поэтому можно его подставить, и получить то что надо:

$X = f(B) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k B^k.$

Добавим, что это решение единственно(без доказательства.)

§Вещественная Жорданова форма.

Теорема. Для матрицы над $\mathbb{R}$ существует базис в котором она принимает блочно-диагональный вид с жордановыми клетками для вещественных собственных чисел, и с блоками вида:

$$\begin{pmatrix} X & 0 & \dots \\ Y & X & \dots \\ 0 & Y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

где $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Доказательство

Разложим V в прямую сумму примарных циклических. Для вещественных собственных чисел они будут изоморфны $\mathbb{R}[x]/_{(t^2-2ax+a^2+b^2)^k}$, для комплексных - $\mathbb{R}[x]/_{(t^2-2ax+a^2+b^2)^k}$,

Какие есть варианты для комплексных собственных чисел? Можно попробовать построить базис как для Фробениусовой формы: $1, t, (t^2 - 2ax + a^2 + b^2), t(t^2 - 2ax + a^2 + b^2), (t^2 - 2ax + a^2 + b^2)^2, \ldots$. Но тогда блоки будут иметь другой вид:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 - b^2 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы получить тот вид который требуется в теореме надо сделать по-другому: надо рассмотреть матрицу с теми же коэффициентами, но уже над полем $\mathbb{C}$.

$\chi_A(t) = \mu_A(t) = (t^2 - 2ax + a^2 + b^2)^k$.

$L_A^{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$

$L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{2k} \longrightarrow \mathbb{C}^{2k}$

Над $\mathbb{C}$ уже все как надо - есть собственные и корневые векторы - $\mu_A(t) = (t - (a + bi))^k (t - (a - bi))^k$.

Существует корневой столбец высоты k:

$w_k \xrightarrow{L_A^{\mathbb{C}} - (a+bi)E} w_{k-1} \xrightarrow{L_A^{\mathbb{C}} - (a+bi)E} \cdots \longrightarrow w_1 \longrightarrow 0$

Из этой цепочки получаем:

$Aw_i = (a + bi)w_i + w_{i-1},\ i > 1$

$Aw_1 = (a + b_i)w_1$

Так как коэффициенты A все вещественные, то есть $\overline{A} = A$, то можно сопрячь все эти равенства и получить:

$A\overline{w_i} = (a - bi)\overline{w_i} + \overline{w_{i-1}},\ i > 1$

$A\overline{w_1} = (a - b_i)\overline{w_1}$

Получили еще одну цепочку векторов для второго собственного числа - прекрасно.

$\overline{w_k} \xrightarrow{L_A^{\mathbb{C}} - (a-bi)E} \overline{w_{k-1}} \xrightarrow{L_A^{\mathbb{C}} - (a-bi)E} \cdots \longrightarrow \overline{w_1} \longrightarrow 0$

так как их всего $2k$ то они образуют базис $\mathbf{C}^{2k}$. Мы можем расписать:

$w_j = u_j + iv_j$

$\overline{w_j} = u_j - iv_j$.

Так как векторов u_j, v_j тоже $2k$ и через них выражается базис, то они тоже базис.

$A(u_j + iv_j) = (a + bi)u_j + u_{j-1} + iv_{j-1}$

$Re:\ Au_j = au_j - bv_j + u_{j-1}$

$Im: \ Av_j = bu_j + av_j + v_{j-1}$

Результат немного отличается от того что мы хотим. Для этого надо вместо v_j брать $-v_j$:

$A(-v_j) = -bu_j + a(-v_j) + (-v_{j-1})$

Этот базис уже полностью вещественный и матрица принимает тот вид который мы хотели.

Глава 1 + 0.5

Евклидовы и унитарные пространства

В этой главе будет пропущена часть вводного формального куска - подразумевается, что мы уже знаем что такое евклидово пространство из курса геометрии(конечномерное пространство над $\mathbb{R}$ со скалярным произведением - положительно определенной билинейной формой.) Поэтому сразу начнем со следующего параграфа.

§Унитарное пространство.

W - векторное пространство над $\mathbb{C}$. Полуторалинейной формой называется функция $h \in \hom(W \times W, \mathbb{C})$, если она линейна по первому аргументу и антилинейна по второму. Т.е.:

$$h(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, y) = \gamma_1 h(x_1, y) + \gamma_2 h(x_2, y)$$

$$g(x, \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) = \overline{\gamma_1} h(x, y_1) + \overline{\gamma_2} h(x, y_2)$$

h называется <u>симметричной полуторалинейной формой(эрмитовой), если</u> $h(w_1, w_2) = \overline{h(w_2, w_1)}$ Из этого сразу же следует, что $h(w, w) = \overline{h(w, w)}$, то есть $h(w, w) \in \mathbb{R}$.

Абсолютно аналогично билинейным формам определяется матрица Грамма для полуторалинейных форм: $G_h(i, j) = h(e_i, e_j)$

Для векторов:

$$u = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$h(u,v) = x^t G_h \bar(y)$$

Доказывается это абсолютно той же проверкой что и для билинейных форм.

$$h(\sum e_i x_i, \sum e_j y_j) = \sum_{i,j} x_y \bar(y_j) h(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} G_h \begin{pmatrix} \bar(y_1) \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица $A \in M_n\mathbb{C}$ называется эрмитовой, если $\overline{A^t} = A$. Если же $\overline{A^t} = -A$, то она называется косоэрмитовой. Заметим, что это условие означает, что матрица A может быть матрицей Грамма эрмитовой формы: $h(e_i, e_j) = \overline{h(e_j, e_i)}$

Упражнение. Доказать, что у Эрмитовой матрицы все собственные число - вещественные, а у косоэрмитовой - чисто мнимые.

Определение. h - положительно определена, если $\forall w \in W \ h(w,w) \geq 0$

Унитарное пространство - конечномерное комплексное пространство с положительно определенной эрмитовой формой.

Стандартным координатным пространством называется пространство столбцов, и эрмитово произведение задается формулой:

$$(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix})_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x^t \overline{y}$$

Комплексный аналог ортогональных матриц - унитальные матрицы, то есть это такие матрицы, чьи столбцы задают ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n \iff C^t\overline{C} = E$ или же $\overline{C^t}C = E$

Матрицу $\overline{C^t}$ называют эрмитово сопряженной и обозначают C^*(прим. - не путать с сопряженными операторами/матрицами которые были в первой главе. эти понятия не связаны.)

Важно отметить, что теорема косинусов дословно не переносится с евклидовых пространств. Поэтому в курсе этого не будет.

Замена координат для матриц Грамма производится аналогично евклидовому случаю:

$y' = Cy$ - где y', y столбцы координат в новом и старом базисах. Соответственно:

$$x^t G_h \overline{y} = (x^t C^t) G_h (\overline{C}\overline{y}) = x^t (C^t G_h \overline{C}) \overline{y}$$

$C^t G_h \overline{C}$ будет матрицей Грамма в новых координатах.

§**Сопряженный оператор.**

Определение. Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным к линейному оператору $\mathcal{A} : V \longrightarrow U$, где L, U - унитарные пространства, если $\mathcal{A}* :$ $U \longrightarrow V$ и $\forall u \in U, v \in V : (\mathcal{A}v, u) = (v, \mathcal{A}^* u)$

Теорема. Для любого $\mathcal{A} : V \longrightarrow U$ существует единственный сопряженный оператор.

Доказательство.

Единственность:

в V и U можно выбрать ортонормированные базисы, в которых $[\mathcal{A}] =$ A, $\mathcal{A}^* = B$

Тогда если $x \in \mathbb{C}^n$ - координаты вектора v, $y \in \mathbb{C}^n$ - координаты вектора u, то из условия сопряженности следует, что

$$(\mathcal{A}x)^t \overline{y} = x^t \overline{By} \Rightarrow x^t A^t \overline{y} = x^t \overline{B} \overline{y}$$

Если поподставлять вместо x и y координатные столбцы e_i, e_j:

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overset{k}{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

то получим, что $e_i^t A^t \overline{e_j} = A_{i,j}$, $e_i \overline{B} \overline{e_j} = \overline{B}_{i,j}$, то есть $\forall i, j : \ A_{i,j} = \overline{B}_{i,j}$, то есть $A^t = \overline{B}$.

Значит B определяется однозначно как эрмитово сопряженная матрица, значит $\mathcal{A}^*$ определяется однозначно.

Сущетсвование:

Нетрудно видеть, что если взять в некотором ортонормированном базисе эрмитовосопряженную матрицу и построить по ней оператор, то получится сопряженный оператор$\square$.

Теорема Рисса. Пусть $f \in \hom(V, \mathbb{C})$, где V - унитарное пространство. Тогда существует и единственный вектор v_f, такой что $f(x) = (x, v_f)$

Доказательство

Выберем ортонормированные базис в V. Любой функционал в конечномерных пространствах задается своими значениями на базисных векторах. Значит

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$[v_f] = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix} \ \square$$

Можно определить сопряженный оператор с помощью теоремы Рисса. Фикисруем u. Тогда:

$$(\mathcal{A}x, u) : V \longrightarrow \mathbb{C}$$

По теореме Рисса есть v_u, такой что $(\mathcal{A}x, u) = (x, v_u)$. v_u и будет значением сопряженного оператора на u.

Лемма. $\mathcal{A}: \ V \longrightarrow V$ - линейный оператор на унитарном пространстве.

Если $L \subset V$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, то $L^\perp$ - инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.

Доказательство

Пусть $u \in L^\perp$. Тогда $\forall v \in V: \ (\mathcal{A}v, u) = 0 \Rightarrow (v, \mathcal{A}^* u) = 0$. Последнее равенство и означает, что $\mathcal{A}^* u \in L^\perp$ $\square$.

Лемма(ядро и образ $\mathcal{A}^*$)

Если $\mathcal{A} : V \longrightarrow U$, то $(Im\ \mathcal{A})^\perp = \ker \mathcal{A}^*$, $(\ker \mathcal{A})^\perp = Im\mathcal{A}^*$

Доказательство:

$u \in (Im\ A)^{\perp} \iff \forall v \in V(\mathcal{A}v, u) = 0$, то есть $(v, \mathcal{A}^*u) = 0 \iff \mathcal{A}^*u \in V^{\perp} = 0$

$v \in Im\mathcal{A}^* \iff \exists u : v = \mathcal{A}^*u \iff \forall x \in \ker\mathcal{A} : (\mathcal{A}x, u) = 0 \iff (x, \mathcal{A}^*u) = 0 \iff (x, v) = 0 \iff v \in (\ker\mathcal{A})^{\perp}$

$\square$

Свойства сопряжения:

1. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)^* = \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2^*$
2. $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$
3. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$

§Канонический вид самосопряженного оператора

Теорема

$\mathcal{A} : V \longrightarrow V$, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Тогда существует ортонормированый базис, в котором матрица $[\mathcal{A}]$ - диагональна.

Доказательство

Доказательство будем вести индукцией по размерности, случай $\dim V = 1$ очевидный.

Собственные числа оператора вещественные. Возьмем вектор единичной длины v_1 отвечающий собственному числу λ_1,

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_1 \rangle^{\perp}$$

$\mathcal{A}_{|\langle v_1 \rangle^{\perp}} = \mathcal{A}^*_{|\langle v_1 \rangle^{\perp}}$ - можно применить индукционное предположение, то есть

$$\langle v_1 \rangle^{\perp} = \langle v_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$$

,

где v_i - собственные вектора длины 1. Отсюда:

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$$

$\square$.