7 лекция.

17 октября 2024 г.

Следствие. Если $A \in M_n(\mathbb{C}), \overline{A^T} = A$. Тогда $\exists$ унитарная матрица C, такая что $C^T A\overline{C} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_r)$, где

$$diag(\lambda_1, ..., \lambda_r) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

$\forall i \ \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

Возьмем самосопряженный оператор $\mathcal{L}_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Тогда по последней теореме предыдущего параграфа у этого оператора существует ортогональный базис из собственных векторов, то есть есть матрица перехода C, такая что:

$$C^{-1}AC = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

В силу свойств матрицы перехода, $C^T = \overline{C^{-1}}$ $\square$

§Нормальные операторы.

Определение. Оператор $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ над пространством со скалярным произведением (евклидовым или унитарным) называется нормальным, если:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$$

То есть если он коммутирует со своим сопряженным.

Основные примеры:(к слову, другие примеры нормальных операторов встречаются редко)

1. Самосопряженные - $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Все собственные числа - вещественные.

2. Кососимметричные - $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$. Все собственные числа - мнимые.

3. Изометричные - $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. Все собственные числа - на единичной окружности.

Замечание-напоминание:

Изометричность означает, что оператор $\mathcal{A}$ "сохраняет расстояние": $(\mathcal{A}u, \mathcal{A}v) = (u, v)$. Равносильность этого определения и того что выше понятна: в одну сторону это выглядит так - если $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$, то $(\mathcal{A}u, \mathcal{A}v) = (u, \mathcal{A}\mathcal{A}^*v) = (u, v)$. В обратную сторону, если $\forall u, v\ (u, \mathcal{A}\mathcal{A}^*v) = (u, v) = (u, Id\ v)$, то $\forall u, v\ (u, (\mathcal{A}\mathcal{A}^* - Id)v) = 0$, то есть $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = Id$.

Теорема. У нормального оператора над унитарным пространством существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Доказательство:

Можно доказывать в точности как теорему для самосопряженных операторов. Можно и слегка по-другому. Выберем собственное число λ и рассмотрим собственное подпространство $U = \ker(\mathcal{A} - \lambda Id)$. По лемме о коммутирующих операторах оно инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$. Рассмотрим ортогональное дополнение $U^\perp$ - оно инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ уже по лемме о сопряженных операторах. По той же лемме о коммутирующих операторах оно инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Таким образом, получаем разложение:

$$V = U \oplus U^\perp$$

Причем $\mathcal{A}_{U^\perp}$ инвариантное относительно обоих операторов пространство, которые на нем тоже коммутируют. Остается только воспользоваться индукцией $\square$.

Задача-замечание: Из этого доказательства явно следует, что если $\mathcal{A}u = \lambda u$, то $\mathcal{A}^*u = \overline{\lambda}u$. Но так же это можно доказать и без ссылки на теорему.

Теперь можно рассмотреть нормальные операторы над евклидовым пространством.

Лемма. Если $a + bi$ - корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ - характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ над евклидовым пространством, то на подпространстве

$U = \ker(\mathcal{A}^2 - 2a\mathcal{A} + (a^2+b^2)Id)$ существует ортонормированный базис, в котором $\mathcal{A}_U$ имеет вид блочно-диагональной матрицы с блоками вида:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Доказательство:

Рассмотрим матрицу этого оператора $A = [\mathcal{A}]$ в каком-то ортонормированном базисе. По условию нормальности $A^T = A$.

Напоминание:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "x \mapsto Ax"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Можно рассмотреть оператор $\mathcal{L}_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ с той же матрицей, но уже над $\mathbb{C}$.

В нем уже существует ортонормированный базис из собственных столбцов:

$w1, w2, \ldots, w_r.\overline{w_1}, \overline{w_2}, \ldots, \overline{w_r}$.

Где w_k отвечают собственному числу $\lambda = (a + bi)$, а $\overline{w_k}$ отвечают собственному числу $\overline{\lambda} = (a - bi)$.(Та же выкладка: $\mathcal{A}w = \lambda w \iff \mathcal{A}\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$, потому что $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$). Имеем разложение:

$V = \ker(\mathcal{A} - \lambda E) \oplus (\mathcal{A} - \overline{\lambda}E)$

Причем w_i образуют базис левого слогаемого, а $\overline{w_i}$ - правого. Если разложить $w_k = u_k + iv_k$, $\overline{w_k} = u_k - iv_k$, где u_k, v_k - чисто вещественные столбцы. По тем же самым рассуждениям они образуют базис(их число равно размерности пространства и через них выражается другой базис.) Надо проверить его ортонормированность. Для этого посчитаем скалярные произведения:

$$(w_k, w_l) = 0 \iff (u_k + iv_k, u_l + iv_l) = (u_k, u_l) + (v_k, v_l) + i((u_k, v_l) - (u_l, v_k)) = 0$$

$$(w_k, \overline{w_l}) = 0 \iff (u_k + iv_k, u_l - iv_l) = (u_k, u_l) - (v_k, v_l) + i((u_k, v_l) + (u_l, v_k)) = 0$$

$$(w_k, w_k) = 1 \iff (u_k, u_k) + (v_k, v_k) + i((u_k, v_k) - (u_k, v_k)) = 1$$

$$(w_k, \overline{w_k}) = 0 \iff (u_k + iv_k, u_k - iv_k) = (u_k, u_k) - (v_k, v_k) + i((u_k, v_k) + (u_k, v_k)) = 0$$

Так как все скалярные произведение с u_k, u_l, v_k, v_l вещественны,то из этих равенств сразу же следует, что $k \neq l \Rightarrow (u_k, u_l) = 0, (v_k, v_l) = 0$, $\forall k, l (v_k, u_l) = 0$ и $\forall k\ (v_k, v_k) = (u_k, u_k) = \frac{1}{2}$.

Легко видеть, что если в V выбрать вектора u_k', v_k', которые в изначальном базисе записываются как $[u_k'] = \sqrt{2}u_k$, $[v_k'] = \sqrt{2}v_k$, то получится то что требуется по условию теоремы $\square$.

Следствие. Канонический вид изометричной матрицы над вещественным пространством - это блочнодиагрнальная матрица с 1-блоками $+-1$ отвечающим вещественным собственным числам, и 2-блоками из предыдущего параграфа отвечающим парным комплексным собственным числам(нарисовать матрицу потом)

"Детский" случай - канонический вид изометрии над $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

§**Полярное разложение.**

Определение. Самосопряженный оператор $\mathcal{A} : \ V \longrightarrow V$ называется положительно определенным, если выполнено одно из следующих условий:

1. Все собственные числа $\lambda_i > 0$
2. $\forall v \neq 0 (\mathcal{A}v, v) = (v, \mathcal{A}v) = \overline{(\mathcal{A}v, v)} > 0$

Доказательство равносильности:

$1 \Rightarrow 2$

В ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_k$ имеем:

$$v = \sum x_l e_l, (\mathcal{A}v, v) = (\sum \lambda_l x_l e_l, \sum x_l e_l) = \sum \lambda_l (x_l \overline{x_l}) > 0$$

$2 \Rightarrow 1$

$\mathcal{A}v = \lambda v \Rightarrow (\mathcal{A}v, v) = \lambda(v, v) > 0 \Rightarrow \lambda > 0.$

Теорема. Если $\mathcal{A}$ - положительно определенный оператор, то существует единственный положительно определенный оператор $\mathcal{B}$, такой что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Доказательство:

Существование.

В базисе из ортонормированных собственных векторов матрица $\mathcal{A}$ будет выглядеть как $diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$. Все собственные числа положительны, поэтому достаточно взять $\mathcal{B}$ с матрицей $diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r})$.

Единственность.

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ - собственные числа $\mathcal{B}$, $\mu_i > 0 \ \forall i$.

$$V = \bigoplus \ker(\mathcal{B} - \mu_i Id)$$

$$U_i = \ker(\mathcal{B} - \mu_i Id)$$

B_{U_i} - гомотетия с коэффициентом μ_i. $\mathcal{A}_{\mu_i}$ - гомотетия с коэффициентом $\mu_i^2 \Rightarrow$ все $\mu_1^2, \ldots, \mu_r^2$ - различны, $U_i = \ker(\mathcal{A} - \mu_i^2 Id)$.

Если $x = \bigoplus x_i, x_i \in U_i$, то $\mathcal{A}x = \bigoplus \mu_i x_i \Rightarrow$ если количество коэффициентов отличных от нуля больше одного, то x не является собственным числом для $\mathcal{A}$. $\Rightarrow \forall i U_i$ - собственное подпространство, значит

$$V = \bigoplus U_i$$

не зависит от выбора $\mathcal{B}$ $\square$.

Полярное разложение.

Пусть $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ - оператор на пространстве со скалярным произведением. Тогда существует единственное разложение $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{Q}$, такое что $\mathcal{S}$ - положительно определенный, а $\mathcal{Q}$ - изометрия.

Доказательство:

Единственность:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{S}\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^2$$

Так как $(\mathcal{A}\mathcal{A}^* v, v) = (\mathcal{A}^* v, \mathcal{A}^* v) > 0$, то $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ - положительно определен. Из предыдущей теоремы следует, что $\mathcal{S}$ определен однозначно, откуда $\mathcal{Q}$ определяется однозначо как $\mathcal{Q} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$.

Существование.

Надо взять $\mathcal{S}$ как единственное положительное определенное решение уравнения $\mathcal{S}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Осталось проверить что $\mathcal{Q} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$ - изометрия:

$$\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*(\mathcal{S}^{-1})^* = Id \Rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = Id$$