Anleitung zur Fehlerrechnung und Fehlerabschätzung

Grundsätzlich ist jedes Messergebnis mit einem Fehler behaftet, d.h. es weicht von dem idealen, fehlerfreien, "wahren" Ergebnis ab.

1 Arten der Fehler

In ihrer Art können die folgenden drei Gruppen von Messfehlern unterschieden werden:
- Fehler bekannter Größe und Richtung
- Fehler unbekannter Größe oder Richtung aufgrund systematischer Einflüsse der Messanordnung
- Fehler aufgrund zufälliger Streuung

1.1 Bekannte Fehler:
Da diese "Fehler" nach Größe und Richtung bekannt sind, kann man sie durch eine Korrektur des Messergebnisses beseitigen.

Beispiel: Eine Längenmessung wird mit einem Maßstab vorgenommen, der bei einer anderen Temperatur geeicht ist als der Temperatur, bei der die Messung vorgenommen wird. Aufgrund des bekannten thermischen Ausdehnungskoeffizienten wird der Einfluss der Temperatur berücksichtigt und das Messergebnis entsprechend korrigiert.

1.2 Systematische Fehler:
Diese Art der Fehlerquellen beeinflusst die Messung in einer bestimmten, nicht immer bekannten Richtung. Über den Betrag des Fehlers kann keine Aussage gemacht werden. Dementsprechend können diese Fehler nicht durch Korrektur beseitigt werden.
Oft erkennt man die systematischen Fehler erst beim Vergleich von Messergebnissen ein und derselben Größe, die nach verschiedenen Methoden gewonnen wurden.

Beispiel: Infolge einer nicht idealen Homogenität des Messdrahtes ist bei der Widerstandsmessung mit der Wheatstone'schen Brücke das Verhältnis der Widerstände beider, durch den verschiebbaren Abgriff unterteilten Drahtabschnittes nicht genau gleich dem Verhältnis der Teillängen l_1 / l_2. Dadurch entsteht ein systematischer Fehler, über den ohne eine exakte Eichung des Messdrahts nichts ausgesagt werden kann – systematischer Fehler unbekannter Richtung und Größe.
Dieser Einfluss der Inhomogenität wird entweder sehr klein gemacht, indem man einen Draht von möglichst gleichem Querschnitt verwendet, oder man führt mittels bekannter Widerstände eine Kalibration durch.

1.3 Zufällige Fehler:
Denkt man sich bei einer Messung sämtliche Korrekturen angebracht und alle systematischen Fehler ausgeschaltet, so wird das Messergebnis infolge unübersehbarer störender Einflüsse und wegen der Unzulänglichkeit der subjektiven Beobachtung dennoch in einer Weise vom wahren Wert abweichen, die rein zufälliger Streuung entspricht und auf die nur die Gesetze der Statistik anwendbar sind. Für eine einzelne Messung ist in keiner Weise angebbar, wie ihr Ergebnis vom wahren Wert abweicht. Lediglich bei *sehr vielen* Messungen derselben Größe können Aussagen über den *wahrscheinlichen* Wert der Größe gemacht und damit Rückschlüsse auf die Fehler bei den einzelnen Messungen gezogen werde.
Die zufälligen Fehler lassen sich mit den Gesetzmäßigkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie erfassen, wenn man von vielen Einzelmessungen derselben Größe ausgeht. Je mehr Einzelmessungen vorliegen, umso exakter gilt die Aussage, die über die zufällige Streuung gemacht werden kann.

2 Die Berechnung der zufälligen Fehler

2.1 Das arithmetische Mittel

Wiederholt man eine Messung n-mal und erhält dabei n Ergebnisse $l_1,\dots,l_n$, so häufen sich diese l_i um den so genannten arithmetischen Mittelwert $\bar{l}$, wenn n groß genug ist.

$$\text{Arithmetischer Mittelwert: } \bar{l} = \frac{1}{n}(l_1 + \dots + l_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i$$

2.2 Die Standardabweichung

Für sehr viele Messungen ein und derselben Größe l beschreibt sehr oft die **„Gauß'sche Fehlerkurve"** die Verteilung der Einzelmessungen um den wahren Wert, der gleichzeitig der wahrscheinlichste Wert ist (siehe Abbildung 1).

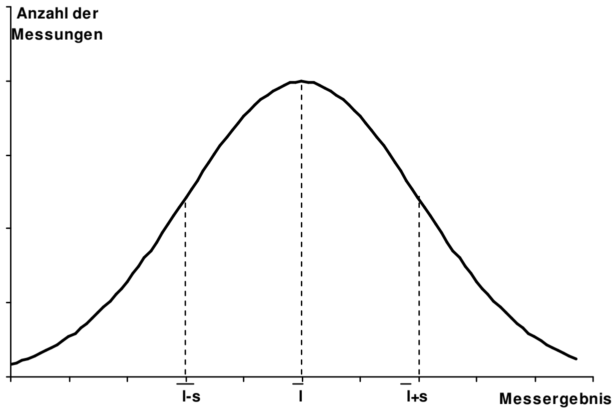


Abbildung 1: Gauß'sche Fehlerkurve mit Mittelwert $\bar{l}$ und Standardabweichung s.

Charakteristisch für diese Kurve ist die Breite *2 s* zwischen den beiden Wendepunkten der Kurve. Die Gauß'sche Fehlerkurve ist dort auf den Wert $\frac{1}{\sqrt{e}} = 0.6065$ des Maximalwertes abgefallen. Man nennt s (also die halbe Breite) die **Standardabweichung**. Sie lässt sich aus der Anzahl der Messungen und dem Abstand der einzelnen l_i zum Mittelwert $\bar{l}$ berechnen. Unter der Voraussetzung vieler Messungen (großes n) gilt für die Standardabweichung

$$s = \pm\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(l_i - \bar{l}\right)^2}$$

Das Verhältnis der Fläche unterhalb der Kurve im Intervall $\bar{l} \pm s$ zur Gesamtfläche beträgt 0,683, d.h. es liegen 68,3 % der Messergebnisse im Intervall $\bar{l} \pm s$. Oder anders ausgedrückt: Bei einer weiteren Messung ist die Wahrscheinlichkeit 0,683, dass das Ergebnis im Intervall $\bar{l} \pm s$ liegt. Vergrößert man das Intervall auf $\bar{l} \pm 2s$ so liegen 95,45 % der Messwerte in diesem Intervall, bei $\bar{l} \pm 3s$ sind 99,73 %.

2.3 Der mittlere quadratische Fehler

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der einzelnen Messergebnisse um den Mittelwert $\bar{l}$. Sie berücksichtigt jedoch nicht, dass mit wachsender Zahl der Messungen die Differenz zwischen Mittelwert und „wahrem" Wert kleiner wird, d.h. je größer die Zahl der Messungen desto vertrauenswürdiger ist der arithmetische Mittelwert. Dieser Tatsache wird Rechnung getragen, wenn man als Maß für die Zuverlässigkeit der Messung nicht die Standardabweichung s, sondern den so genannten **mittleren quadratischen Fehler Δl** verwendet.
Es gilt:

$$\text{Mittlerer quadratischer Fehler: } \Delta l = \pm\frac{s}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum\left(l_i - \bar{l}\right)^2}$$

Das Messergebnis wird in der Form $\bar{l} \pm \Delta l$ angegeben. Bei nur wenigen Einzelmessungen gelten die angegebenen Ausdrücke für die Standardabweichung und den mittleren quadratischen Fehler nur noch näherungsweise. So muss nach der Fehlertheorie der mittlere quadratische Fehler bei n = 50 um 1 %, bei n = 10 um 6 % und bei n = 5 um 15 % erhöht werden.

2.4 Der relative mittlere quadratische Fehler:

Um die Vertrauenswürdigkeit der Messung zu erkennen, ist die Angabe des Mittelwertes und des mittleren quadratischen Fehlers notwendig. Denn es ist ein Unterschied, ob bei einem Fehler von 1 mm der Mittelwert 1 cm oder 1 m beträgt. Verwendet man anstelle des absoluten mittleren quadratischen Fehlers Δl den so genannten relativen mittleren quadratischen Fehler $\frac{\Delta l}{\bar{l}}$, der meist in Prozent angegeben wird, so genügt dessen Angabe, um die Vertrauenswürdigkeit abschätzen zu können.
Sowohl der absolute als auch der relative mittlere quadratische Fehler sind ein *statistisches* Maß für die Zuverlässigkeit der Messung.

2.5 Die Fehlerfortpflanzung:

In vielen Fällen ist die gesuchte Größe A nicht direkt messbar, sondern sie muss mit Hilfe anderer Größen $u, v, w, \ldots$ indirekt bestimmt werden $A = f(u, v, w, \ldots)$.
Der mittlere quadratische Fehler der gesuchten Größe A lässt sich aus den mittleren Fehlern der direkt gemessenen Größen $u, v, w, \ldots$ berechen.
Es gilt allgemein:

$$\Delta A = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial u}\Delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial v}\Delta v\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial w}\Delta w\right)^2 + \ldots}$$

Folgende Spezialfälle, die sich aus diesem Ausdruck herleiten lassen, sind in der Praxis von besonderer Bedeutung:

- $A = U^m$: Wird U gemessen und ist $\pm \Delta U$ der Fehler von U, so gilt für den Relativfehler des Ergebnis: $\frac{\Delta A}{A} = |m|\frac{\Delta U}{U}$
- $A = U \cdot V$ und $A = \frac{U}{V}$: Sind wieder $\pm \Delta U$ und $\pm \Delta V$ die Fehler der Messgrößen U und V, so wird der Relativfehler für A: $$\frac{\Delta A}{A} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$
- $A = U \pm V$: Hier ergibt sich für den *absoluten Fehler*: $\Delta A = \pm\sqrt{(\Delta U)^2 + (\Delta V)^2}$

Für Produkte und Differenzen ist daher das Rechnen mit *relativen Fehlern*, für Summen und Differenzen das Rechnen mit *absoluten Fehlern* bequemer.
Auch wenn die einzelnen Größen u, v, w nur einmal gemessen werden, sollte dennoch der Fehler für A nach der Fehlerfortpflanzung berechnet werden. In diesem Fall sind für die Fehler sinnvolle Abschätzungen einzusetzen (z.B. die Ablesegenauigkeit der Messinstrumente).

3 Fehlerabschätzung und Fehlerkritik

In sehr vielen Fällen ist eine Fehlerrechnung, wie sie oben dargestellt wurde nicht möglich oder nicht sinnvoll, weil zu wenig Einzelmessungen vorliegen oder die Vermutung berechtigt ist, dass die systematischen Fehler die zufälligen überragen. Die einfache Fehlerabschätzung verdient gegenüber einer schematischen Fehlerrechnung in vielen Fällen schon deshalb der Vorzug, weil sie fast immer die Größenordnung des Fehlers, d.h. die Zehnerpotenz der Genauigkeit, oder sogar einen genaueren Anhalt liefert. Andererseits unterliegt aus statistischen Gründen, selbst bei mehreren Einzelmessungen, der aus einer exakten Ausgleichung berechnete mittlere Fehler selbst wieder einer Unsicherheit. Außerdem gestattet eine Fehlerabschätzung schon im Voraus, bevor die Messung begonnen wird, aufgrund einer Kritik der Messanordnung etwas über die Genauigkeit auszusagen. Hierdurch hat man die Möglichkeit, die Messung entsprechend einzurichten und den kritischen Größen besondere Aufmerksamkeit zu widmen.
Das Prinzip der Fehlerabschätzung besteht hauptsächlich in der Abschätzung des mittleren Fehlers der Einzelmessung aufgrund der verwendeten Anordnung. So kann z.B. bei einer Zeitmessung mit einem mittleren Stoppfehler von $\Delta t = \pm 0{,}1$ s oder bei einer Wägung auf einer Analysewaage mit einem mittleren Fehler von $\Delta m = \pm 1$ mg gerechnet werden. Ähnlich kann man auch vermutete systematische Fehler abschätzen, z.B. bei einem Thermometer $\Delta T = \pm 1$ °C. Daraus ergeben sich nach den obigen Regeln die absoluten und relativen Fehler der

Mittelwerte und nach eventueller Anwendung des Fehlerfortpflanzunggesetz der Fehler des Gesamtergebnis. Bei der Abschätzung der Fehler sei daran erinnert, dass alle Fehler, von denen in der Fehlerfortpflanzung die Rede ist, mittlere Fehler sind, und dass daher auch mittlere Fehler der Einzelmessung geschätzt werden müssen. Setzt sich der Gesamtfehler aus verschiedenen Anteilen zusammen, von denen einer um eine Größenordnung die anderen überragt, so wird der Gesamtfehler praktisch nur von diesem Anteil bestimmt. Ist z.B. $A = U\ V$ gesucht, wobei der Faktor U auf 1 %, der Faktor V jedoch auf 0,1 % genau gemessen wurde, so ergibt sich:

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm\sqrt{(1\%)^2 + (0{,}1\%)^2} = \pm\sqrt{1+0{,}01}\% = \pm 1{,}005\% \approx \pm 1\%$$

4 Signifikante Stellen

4.1 Runden auf die richtige Anzahl signifikanter Stellen

Der Gebrauch des Taschenrechners verursacht ein bekanntes Problem – welche Stellen der Anzeige sind signifikant?
Behalten Sie nur diejenigen Ziffern, deren Stellen mindestens der Größe des Messfehlers entspricht, runden Sie auf die korrekte Zahl von signifikanten Stellen. Geben Sie deshalb niemals ein Resultat von 23,343 g an, wenn Sie nur auf 0,1 g genau messen können. Der korrekte Wert lautet (23,3 ± 0,1) g. Die Anzahl signifikanter Stellen ist somit genau die Anzahl die notwendig ist, um ohne Verlust an Genauigkeit ein Messresultat oder das Ergebnis einer Rechung, die auf Messwerten gründet, aufzuschreiben.
Der Wechsel der Messeinheit verändert die Anzahl signifikanter Stellen im Allgemeinen nicht. In den Größen 10,05 cm = 100,5 mm = 0,1005 m sind jeweils vier signifikante Ziffern enthalten. Multiplikation oder Division einer Zahl mit einer Konstanten wie 10, 2, 5, 4 usw. verändert die Zahl signifikanter Stellen nicht.

4.2 Addition und Subtraktion

Wenn Sie zwei oder mehr Zahlen addieren oder subtrahieren, runden Sie das Resultat auf die letzte Stelle des weniger genauen Wertes. Also 10,01 cm + 352,2 cm + 0,0062 cm = 362,2162 cm, der Wert wird auf 362,2 cm gerundet. Es wird auf die erste Dezimalstelle gerundet, da sie die letzte Stelle von 352,2 cm ist, der Zahl mit der geringsten Genauigkeit.

4.3 Multiplikation und Division

Wenn Sie zwei Zahlen multiplizieren oder dividieren, runden Sie auf die kleinere Anzahl signifikanter Stellen. Für ein Rechteck der Länge l = 63,52 cm (vier signifikante Stellen) und der Breite b = 3,17 cm (drei signifikante Stellen) ergibt sich A = $l \cdot h$ = 63,52 cm · 3,17 cm = 201,3584 cm². Auf der signifikante Stellen gerundet, ergibt sich eine Fläche von A = 201 cm².
Wenn Sie im Zweifel sind, behalten Sie eine weitere Stelle, im letzten Beispiel also 201,4 cm². Schreiben Sie aber niemals alle Stellen von der Anzeige Ihres Rechners ab.
Eine weitere Regel ist zu berücksichtigen: Wenn die erste Ziffer eine „1“ ist, fügt man eine signifikante Stelle zu. Es gilt also 3 · 0,34 = 1,02 und nicht 1,0.
In der Regel gibt man nur eine Stelle für die Unsicherheit an, da Fehler selten sehr genau bekannt sind und sie deshalb nur abgeschätzt werden können.

5 Beispiele

a) Die Länge eines Stabs wurde 10 mal gemessen:

gemessene Länge	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
x in mm	$(x-\bar{x})$ in mm	$(x - \bar{x})^2$ in mm²
100,0	-0,2	0,04
100,5	0,3	0,09
100,3	0,1	0,01
99,5	-0,7	0,49
98,6	-1,6	2,56
101,6	1,4	1,96
99,2	-1,0	1,00
100,9	0,7	0,49
101,1	0,9	0,81
99,8	-0,4	0,16

Tabelle 1: Messergebnisse.

Anzahl der Messwerte: n = 10

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 100{,}2$ mm

Standardabweichung: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0{,}92$ mm

Mittlerer quadratischer Fehler: $\Delta x = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}29$ mm, d.h. gerundet $\Delta x = 0{,}3$ mm

Endergebnis: $\bar{x} = \left(100{,}2 \pm 0{,}3\right)$ mm

b) Messung des elektrischen Widerstands:
Messwerte: $U = \left(200 \pm 6\right)$ V und $I = \left(3 \pm 0{,}15\right)$ A

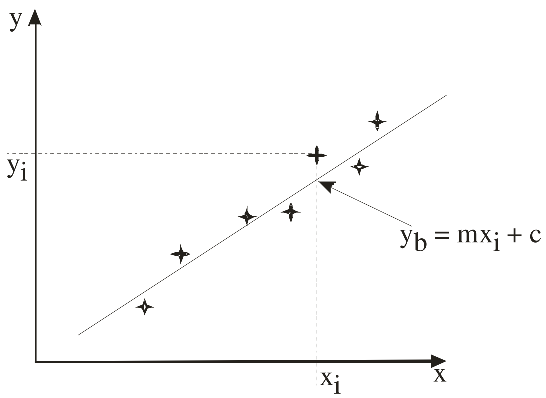
Ergebnis: $R = \frac{U}{I} = \frac{200V}{3A} = 66{,}6????...\Omega \pm ?$

Fehler: $\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = \sqrt{(0{,}03)^2 + (0{,}05)^2} = 0{,}06$

$\Rightarrow \qquad \Delta R = R \cdot 0{,}06 = 4{,}0\Omega \Rightarrow R = \left(67 \pm 4\right)\Omega$

6 Bestimmung der Ausgleichsgeraden

Die Ausgleichs- oder Regressionsgerade kann nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Untersucht wird eine Größe *y* als Funktion der Größe *x*; es soll ein linearer Zusammenhang vorliegen:
$y = m\,x + c$.
Die Messung liefert *n* Wertepaare $(x_i;\ y_i)$.



Die am besten angepasste Gerade (beste Steigung *m* und bester Achsenabschnitt *c* soll vorliegen, wenn die Summe *S* über die Quadrate der Abweichungen $(y_i - y_b)$ minimal wird:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_b\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - mx_i - c\right)^2$$

Notwendige Bedingungen für ein Minimum von $S = f(m, c)$ sind:

$$\frac{\partial S}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n}\left(-2x_i\right)\left(y_i - mx_i - c\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n}\left(-2\right)\left(y_i - mx_i - c\right) = 0$$

d.h. man hat zwei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten *m* und *c*. Daraus folgt:

$$m\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i \quad \text{und} \quad m\sum x_i^2 + nc = \sum y_i$$

Mit $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ und $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$ ergibt sich:

$$m\sum x_i^2 + \left(\frac{\sum y_i}{n} - m\frac{\sum x_i}{n}\right)\sum x_i = \sum x_i y_i \qquad \Rightarrow$$

$$m\left(\sum x_i^2 - \bar{x}\sum x_i\right) = \sum x_i y_i - \frac{\sum y_i \sum x_i}{n} = \sum\left(x_i - \bar{x}\right)y_i$$

Damit folgt für die Steigung *m* und den Achsenabschnitt *c*:

$$m = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right) y_i}{\sum \left(x_i - \bar{x}\right) x_i} \qquad c = \bar{y} - m\bar{x}$$

Mit den Gleichungen:

$$\sum \bar{x} x_i = \bar{x} \sum x_i = n\bar{x}^2 = \sum \bar{x}^2 \qquad \sum x_i \bar{y} = \bar{y} \sum x_i = n\bar{x}\bar{y} = \sum \bar{x}\bar{y}$$

$$\sum \left(x_i - \bar{x}\right) x_i = \sum \left(x_i^2 - \bar{x}^2\right) = \sum \left(x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2\right) = \sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

können andere Ausdrücke für die Steigung *m* hergeleitet werden:

$$m = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right) y_i}{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$