3. Übung

Dienstag, 23. April 2024 11:11

Aufgabe 1

a) $$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) + j\cdot\sin(\omega t) - (\cos(-\omega t) + j\sin(\omega t))$$
$$= \cos(\omega t) + j\cdot\sin(\omega t) - \cos(-\omega t) - \sin(-\omega t)$$

$\cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$ $$= \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) - \cos(\omega t) - j\sin(-\omega t)$$

$\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$ $$= j\sin(\omega t) - j\cdot\sin(-\omega t)$$

$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)$ $$= j\,(\sin(\omega t) - \sin(-\omega t))$$
$$= j\,(\sin(\omega t) + \sin(\omega t))$$
$$= 2j\sin(\omega t)$$

b) $$\sin(\omega t) = \frac{j}{2}e^{-j\cdot\omega t} - \frac{j}{2}e^{j\omega t}$$
$$= \frac{j}{2}\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right)$$

Rückrechnung $$\hat{=}\ \frac{j}{2}\left(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t) - (\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\right)$$
$$= \frac{j}{2}\left(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t) - \cos(\omega t) - j\cdot\sin(\omega t)\right)$$
$$= \frac{j}{2}\left(-2j\sin(\omega t)\right)$$
$$= -j^2\sin(\omega t)$$
$$= -(-1)\sin(\omega t)$$
$$= \sin(\omega t)$$

c) $$\tan(\omega t) = \frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}$$
$$= \frac{\frac{j}{2}\cdot\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right)}{1/2\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)}$$
$$= \frac{j\left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right)}{\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)}$$

d) $$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

e) $$\frac{j}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) = \frac{j}{2}\cdot\left(\cos(\omega t) + j\cdot\sin(\omega t) + \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t)\right)$$

e) $\frac{j}{2}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right) = \frac{j}{2}\cdot\left(\cos(\omega t)+j\cdot\sin(\omega t)+\cos(-\omega t)+j\sin(-\omega t)\right)$

$= \frac{j}{2}\cdot\left(\cos(\omega t)+j\cdot\sin(\omega t)+\cos(\omega t)-j\cdot\sin(\omega t)\right)$

$= \frac{j}{2}\cdot(2\cos(\omega t))$

$= j\cos(\omega t) = j\cdot\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$

f) $\sin(\omega t)-\cos(\omega t) = \frac{j}{2}\left(e^{-j\omega t}-e^{j\omega t}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)$

$= \frac{j}{2}e^{-j\omega t}-\frac{j}{2}e^{j\omega t}-\frac{1}{2}\cdot e^{j\omega t}-\frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega t}$

$= \frac{1}{2}\left(je^{-j\omega t}-je^{j\omega t}-e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t}(-j-1)+e^{-j\omega t}(j-1)\right)$

$= \frac{-j-1}{2}\cdot e^{j\omega t}+\frac{j-1}{2}\cdot e^{-j\omega t}$

$= \sqrt{2}\cdot\cos\left(\omega t+\frac{5\pi}{4}\right)$

Aufgabe 2.

$5\cdot\sum_{i=0}^{N-1}e^{-j5\omega_0 t} = 5\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\cos(-5\omega_0 t)+j\cdot\sin(-5\cdot\omega_0 t)$

$= 5\cdot\left(\sum_{i=0}^{N-1}\cos(-5\omega_0 t)+j\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\sin(-5\omega_0 t)\right)$

$\sum_{i=0}^{N-1}e^{j\omega_0 t\cdot 0} = \sum_{i=0}^{N-1}\cos(0\cdot\omega_0\cdot t)+j\cdot\sin(0\cdot\omega_0 t)$

$= \sum_{i=0}^{N-1}\cos(0\,\omega_0\cdot t)+j\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\sin(0\cdot\omega_0 t)$

Aufgabe 3.

a) geg: $T = 10ms = 0{,}01ms$ ges: ω_0, f_0

lsg: $\omega_0 = 2\pi f_0$

$= \frac{2\pi}{T_p}$

$$= \frac{2\pi}{T_p}$$

$$= \frac{2\pi}{0{,}01} \quad \frac{1}{s}$$

$$= 628{,}32 \quad \frac{1}{s}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_p}$$

$$= \frac{1}{0{,}01} \quad \frac{1}{s} = 100 \text{ Hz}$$

b) $$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \sin(\omega_0 t \cdot (2 \cdot i - 1)) \; \frac{1}{2 \cdot i - 1}$$

c) Fourier-Reihe:

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega t n) + b_n \cdot \sin(\omega t n)) \\ a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\, dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(\omega n t)\, dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(\omega t n)\, dt \end{aligned}}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \; \sin(\omega_0 t \cdot (2 \cdot i - 1))$$

$$b_i = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin(\omega_0 t\, (2i-1))\, dt$$

$$b_i = \frac{1}{2i-1}$$

d) $$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j\omega n x} \\ c_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot e^{-j\omega n x} \end{aligned}}$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \; \frac{j}{2} \cdot \left(e^{-j\omega (2 \cdot i - 1) \cdot t} - e^{j\omega \cdot (2i-1) \cdot t} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{j}{4i-2}}_{a_i} \left(e^{-j\omega (2 \cdot i - 1) t} \right) - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{j}{4i-2}}_{b_i} e^{j\omega (2 \cdot i - 1)}$$

a_i b_i

$$\left.\begin{array}{l} a_i = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{j\omega(2i-1)\cdot t}\,dt = \frac{j}{4i-1} \\[2ex] b_i = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T x(t)\cdot e^{-j\omega(2i-1)\,t}\,dt = \frac{j}{4i-1} \end{array}\right\} = c_i$$