7. Übung

Samstag, 15. Juni 2024 12:06

Aufgabe 1: Symmetrie der Fourier-Transformierten

a) Geben Sie die Symmetrieeigenschaft der Fourier Transformation an.

b) Welche Eigenschaft hat das Spektrum eines Zeitsignals $y(t) = j \cdot x(t)$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$?

a) $x(t) = x_g^{(R)}(t) + x_u^{(R)}(t) + j \cdot x_g^{(I)}(t) + j \cdot x_u^{(I)}(t)$

$X(j\omega) = X_g^{(R)}(j\omega) + X_u^{(R)}(j\omega) + j \cdot X_g^{(I)}(j\omega) + j \cdot X_u^{(I)}(j\omega)$

$x_g^{(R)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; X_g^{(R)}(j\omega)$

$x_u^{(R)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; j\, X_u^{(I)}(j\omega)$

$j \cdot x_g^{(I)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; j \cdot X_g^{(I)}(j\omega)$

$j \cdot x_u^{(I)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; X_u^{(R)}(j\omega)$

b) $y(t) = j \cdot x(t)$

$=$

$y(t) = j \cdot (x_g^{(R)}(t) + x_u^{(R)}(t) + j \cdot x_g^{(I)}(t) + j \cdot x_u^{(I)}(t))$

$= j \cdot x_g^{(R)}(t) + j \cdot x_u^{(R)}(t) - x_g^{(I)}(t) - x_u^{(I)}(t)$

Aufgabe 2: Beweisen Sie den Modulation- und Verschiebungssatz der DFT.

$$x[n-k] \circ\!\!-\!\!\bullet \; X[m] \cdot e^{-j2\pi\frac{km}{N}} = X[m] \cdot W_N^{km}$$

$$X[m-k] \bullet\!\!-\!\!\circ \; x[n] \cdot W_N^{-kn} = x[n] \cdot e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$$

(Hinweis: Setzen Sie die Definition der DFT ein und formen Sie geeignet um.)

$$\begin{aligned}
x[n-k] &= X[m] \cdot e^{-j2\pi \cdot \frac{km}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n-k]\, e^{-j2\pi \frac{n \cdot m}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n'=-k}^{N-1-k} x[n'] \cdot e^{-j2\pi \cdot (n') \frac{m}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \cdot e^{-j2\pi (n'+k) \cdot \frac{m}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \cdot e^{-j2\pi \frac{n'm}{N}} \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot m}{N}} \\
&= e^{-j2\pi \cdot \frac{km}{N}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \cdot e^{-j2\pi \frac{n'm}{N}} \\
&= e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \cdot X[m]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[n] &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} X[m] \cdot e^{j2\pi \frac{mn}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} X[m+k] \cdot e^{j2\pi \frac{m \cdot n}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum^{N-1} X[m+k] \; e^{j2\pi (n+k) \cdot \frac{m}{N}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n+k] \cdot e^{j2\pi \frac{nm}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n+k]\, e^{j2\pi (n+k) \cdot \frac{m}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[m]\, e^{j2\pi \frac{nm}{N}} \cdot e^{j2\pi \cdot \frac{km}{N}}$$

$$= e^{j2\pi \frac{kn}{N}} \quad x[n]$$

Aufgabe 3: Arbeiten im Spektrum

Gegeben ist ein System mit folgenden Parametern:

- Abtastfrequenz F_s = 50 kHz
- Aufzeichnungsdauer T_D = 0,1 s
- Das Eingangssignal ist gegeben mit $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + 2\cos\left(2\pi f_3 t + \frac{\pi}{2}\right)$

  Mit f_1 = 30 Hz, f_2 = 0,1 kHz und f_3 = 0.2 kHz

1. Geben Sie $x[n]$ als zeitdiskretes Äquivalent zu $x(t)$ an.
2. Ist das Eingangssignal bezogen auf die Aufnahmedauer ein periodisches Signal?
3. Wieviel Abtastwerte N hat die Aufzeichnung?
4. Berechnen Sie mit Hilfe der FFT X[m]. Wie viele Werte von $|X[\mathrm{m}]|$ sind > 10^{-10} ?
   Geben Sie auch einen MATLAB Code an, um diese Zahl zu bestimmen.
5. Geben Sie für die Frequenzen f_1, f_2 und f_3 die entsprechenden Frequenzindizes m_1, m_2 und m_3 an.
6. Geben Sie für die Frequenzen $-f_1$, $-f_2$ und $-f_3$ die entsprechenden Frequenzindizes m_{-1}, m_{-2} und m_{-3} für $m \in \{0 \ldots N-1\}$ an.
7. Überprüfen Sie die Werte mit der Berechneten Spektrum in MATLAB. Was müssen Sie beachten?
8. Bauen Sie für jedes der 3 Schwingungen ein Filter und berechnen Sie das entstandene Spektrum. Transferieren Sie diese Spektren in den Zeitbereich und plotten Sie das Ergebnis über der Zeit. Sind die Signale realwertig? Vergleiche Sie das Ergebnis mit der gegebenen Signaldefinition.

1. $x[n] = \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot n\,(1/F_S) + \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot n\,(1/F_S) + 2 \cdot \cos(2\pi f_3\, n\,(1/F_S) + \frac{\pi}{2})$

2. $T_1 = \frac{1}{30}\,s = 0{,}033\ s$

   $T_2 = \frac{1}{100}\,s = 0{,}01\ s$

   $T_3 = \frac{1}{200}\,s = 0{,}005\ s$

   KgV (0,033, 0,01, 0,005) = 0,33 s

   ↝ Dauer für eine Periode

   ↝ 0,333 > 0,1 s ↝ es wird keine ganze Periode aufgenommen

3. $T_S = \frac{T_D}{N}$

   $N = \frac{T_D}{T_S}$

   $= T_D \cdot F_S$

   $= 0{,}1\,s \cdot 50000\,\frac{1}{s}$

   $= 5000$

5. $f_i = m_i \cdot f_0$

   $f_0 = \frac{1}{T_D}$

   $m_i = f_i \cdot T_D$

$$m_1 = f_1 \cdot T_D = 30\,\frac{1}{s} \cdot 0{,}1\,s = 3$$

$$m_2 = f_2 \cdot T_D = 100\,\frac{1}{s} \cdot 0{,}1\,s = 10$$

$$m_3 = f_3 \cdot T_D = 200\,\frac{1}{s} \cdot 0{,}1\,s = 20$$

6.

$$m_{-1} = -m_1 \pmod{N} = N - m_1 = 4997$$

$$m_{-2} = -m_2 \pmod{N} = N - m_2 = 4990$$

$$m_{-3} = -m_3 \pmod{N} = N - m_3 = 4980$$

8.