



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE FILOSOFIA DOM AURELIANO MATOS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA**

DENIS PONTES QUEIROZ

**DINÂMICA NÃO LINEAR DA TRANSIÇÃO À SINCRONIZAÇÃO DE MEDIDAS EM
SISTEMAS HAMILTONIANOS DE DUFFING ACOPLADOS COM QUEBRA DE
SIMETRIA**

**LIMOEIRO DO NORTE – CEARÁ
2022**

DENIS PONTES QUEIROZ

DINÂMICA NÃO LINEAR DA TRANSIÇÃO À SINCRONIZAÇÃO DE MEDIDAS EM
SISTEMAS HAMILTONIANOS DE DUFFING ACOPLADOS COM QUEBRA DE
SIMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em licenciatura em
Física do Faculdade de Filosofia Dom Aureliano
Matos da Universidade Estadual do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
licenciado em licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Tavares de
Oliveira Abagaro

LIMOEIRO DO NORTE – CEARÁ

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Queiroz, Denis Pontes.

Dinâmica não linear da transição à sincronização de medidas em sistemas hamiltonianos de Duffing acoplados com quebra de simetria [recurso eletrônico] / Denis Pontes Queiroz. – 2022.

49 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (GRADUAÇÃO) – Universidade Estadual do Ceará, Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos, Curso de Física, Limoeiro do Norte, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Bruno Tavares de Oliveira Abagaro.

1. Dinâmica não linear. 2. Sincronização. 3. Sistemas hamiltonianos.. I. Título.

DENIS PONTES QUEIROZ

DINÂMICA NÃO LINEAR DA TRANSIÇÃO À SINCRONIZAÇÃO DE MEDIDAS EM
SISTEMAS HAMILTONIANOS DE DUFFING ACOPLADOS COM QUEBRA DE
SIMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em licenciatura em
Física do Faculdade de Filosofia Dom Aureliano
Matos da Universidade Estadual do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
licenciado em licenciatura em Física.

Aprovada em: 09 de fevereiro de 2022

BANCA EXAMINADORA

Bruno Tavares de Oliveira Abagaro,

Prof. Dr. Bruno Tavares de Oliveira Abagaro (Orientador)
Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos - FAFIDAM
Universidade Estadual do Ceará – UECE

José Robson Maia

Prof. Dr. José Robson Maia
Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos – FAFIDAM
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Fellipe dos Santos Campêlo Rêgo

Prof. Dr. Fellipe dos Santos Campêlo Rêgo
Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos – FAFIDAM
Universidade Estadual do Ceará - UECE

A Deus.

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Bruno Tavares de Oliveira Abagaro pela orientação, dedicação, ensino e paciência ao longo deste trabalho. Sem as quais este trabalho não teria acontecido.

Ao prof. Dr. José Robson Maia e ao prof. Dr. Fellipe dos Santos Campêlo Rêgo que se dispuseram prontamente em participar desta banca.

Aos meus pais, Francisca Pontes e Francisco Eustônio, pelo amor incondicional, apoio e apesar de não terem as mesmas oportunidades que tive nunca desistiram da minha educação.

A minha amada Iris Samara pelo amor, carinho, paciência e todo apoio.

Aos meus irmãos e sobrinhos por todo amor, respeito e admiração.

Aos meu amigos, Antenor Júnior, Raul Victor e Gil Soares, pelos conselhos, risadas, companheirismo. Por serem verdadeiros amigos na hora da aflição.

Ao curso de física da FAFIDAM e seu corpo docente por todo ensinamento, em especial, Prof. Dr. Carlos Salomão e Prof. Dr. Francisco Wagner.

A FUNCAP pelo apoio financeiro.

"A tarefa é, não tanto para ver o que ninguém viu ainda, mas pensar o que ninguém ainda pensou, sobre o que todo mundo vê."

(Erwin Schrödinger)

RESUMO

A transição à sincronização de medidas (SM) nos casos periódicos, quasi-periódicos e caóticos foi investigada com base em cálculo numérico em sistemas hamiltonianos com energia potencial de Duffing e acoplados sem e com quebra de simetria. Para dois conjuntos de condições iniciais (condições que levam a transição de estados periódicos-quasiperiódicos e periódicos-quasiperiódicos-caóticos) foram realizados gráficos das energias médias individuais de cada subsistema em função do parâmetro de acoplamento. Adicionalmente, foram calculados para cada caso simulado o expoente máximo característico de Lyapunov (EMCL) com o objetivo de estudar o efeito da quebra de simetria da energia potencial e caracterizar a dinâmica não linear da transição à sincronização de medidas do modelo considerado. Observou-se para cada conjunto de condições iniciais e seus respectivos parâmetros de assimetria comportamentos com características comuns na dinâmica do sistema e na transição à SM, mas com especificidades que dependerão dos valores do parâmetro.

Palavras-chave: Dinâmica não linear; Sincronização; Sistemas hamiltonianos.

ABSTRACT

The transition to measure synchronization (MS) in periodic, quasi-periodic and chaotic cases was investigated based on numerical calculus in Hamiltonian systems with Duffing like potential energy and coupled with and without symmetry breaking. For two sets of conditions initial conditions (conditions that lead to transition from periodic-quasiperiodic and periodic-quasiperiodic-chaotic) were performed graphs of the individual average energies of each subsystem in function of coupling parameter.. Additionally, the maximum Lyapunov characteristic exponent (MLCE) was calculated for each simulated case in order to study the effect of the potential energy symmetry breaking and to characterize the nonlinear dynamics of the transition to synchronization of measurements of the considered model. It was observed, for each set of initial conditions and their respective asymmetry parameters, behaviors with common characteristics in the system dynamics and in the transition to MS, but with specificities that will depend on the value of the parameter.

Keywords: Non linear dynamics; Synchronization; Hamiltonian systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espaço de fase do pêndulo não linear.	17
Figura 2 – Gráfico da energia potencial do tipo Duffing da equação (2.15).	20
Figura 3 – Espaço de fase para o potencial do tipo Duffing.	22
Figura 4 – Evolução de duas trajetórias proximas no espaço de fase.	23
Figura 5 – Original desenho de christiaan Huygens ilustrando seu experimentos com dois relógios de pêndulo colocados em um suporte comum.	25
Figura 6 – Gráfico da energia potencial para diferentes valores de β	28
Figura 7 – Gráficos da energia total do sistema para do conjunto I de condições iniciais para $\beta = 0,0$ e $1,0$	30
Figura 8 – Gráficos da energia total do sistema para conjunto II de condições iniciais para $\beta = 0,0$ e $1,0$	31
Figura 9 – Espaço de fases para sistema com conjunto I de condições iniciais com $\beta = 0,0$.	34
Figura 10 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,0$ e o conjunto I de condições iniciais.	35
Figura 11 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 1,0$ e o conjunto I de condições iniciais.	36
Figura 12 – Espaço de fases para sistema com conjunto I de condições iniciais com $\beta = 1,0$.	37
Figura 13 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,0$.	37
Figura 14 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,2$.	38
Figura 15 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,4$.	38
Figura 16 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,6$.	39
Figura 17 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,8$.	39
Figura 18 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 1,0$.	40

Figura 19 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,0$ e o conjunto II de condições iniciais	41
Figura 20 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,2$ e o conjunto II de condições iniciais.	42
Figura 21 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,4$ e o conjunto II de condições iniciais.	43
Figura 22 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,6$ e o conjunto II de condições iniciais.	44
Figura 23 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,8$ e o conjunto II de condições iniciais.	45
Figura 24 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 1,0$ e o conjunto II de condições iniciais.	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	Sistemas Dinâmicos	15
2.2	Dinâmica não linear	15
2.3	Mecânica Hamiltoniana	16
2.3.1	Coordenadas generalizadas e o espaço de fase	16
2.3.2	As equações de Hamilton	17
2.3.3	Relação entre a Hamiltoniana e a energia total	18
2.4	Equação de Duffing	19
2.4.1	A hamiltoniana do sistema de Duffing	20
2.5	Caos Determinístico	21
2.6	Exponentes de Lyapunov	22
2.7	Sincronização	24
3	OBJETIVOS	27
3.1	Objetivo Geral	27
3.2	Objetivos Específicos	27
4	METODOLOGIA	28
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	33
6	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

A sincronização é um fenômeno onipresente na natureza e o seu estudo remonta a Huygens, o qual observou o fenômeno de sincronização em relógios pendulares acoplados ainda no século XVII (HUYGENS, 1673). Os trabalhos iniciais que abordavam a sincronização eram principalmente os que tratavam da sincronização de fase em osciladores periódicos. Com o advento do desenvolvimento da dinâmica não-linear, observou-se mais recentemente, que a sincronização poderia também ocorrer em sistemas caóticos (PECORA; CARROLL, 1990). Hoje em dia se conhece vários tipos de sincronização, por exemplo, a sincronização completa, a sincronização de fase, a sincronização generalizada (PIKOVSKY, 2001). Em geral, para sistemas dissipativos acoplados as diferentes órbitas aproximam-se a uma órbita idêntica assintoticamente. O estudo da sincronização e dinâmica não linear ocorre em diversas áreas de estudo desde a Física até a Biologia (PIKOVSKY, 2001).

Sistemas Hamiltonianos são importantes do ponto de vista físico, pois constituem-se em modelos típicos de sistemas presentes na mecânica clássica e na mecânica quântica. Sistemas clássicos hamiltonianos acoplados podem servir para modelar por exemplo, redes de osciladores com condições de contorno periódicas em sistemas cristalinos, incluindo-se a anarmonicidade (HU; LI; ZHAO, 2000). Além disso, servem como aproximação em sistemas em que a dissipação é fraca e pode ser desprezada. Ao contrário dos sistemas dissipativos, nos sistemas hamiltonianos, o teorema de Liouville evita o colapso das órbitas, mantendo a preservação do volume ocupado pelas órbitas no espaço de fases. Essa propriedade faz com que em sistemas hamiltonianos acoplados, em geral, a sincronização obtida pela aproximação de órbitas próximas assintoticamente a uma órbita, não ocorra (HAMPTON; ZANETTE, 1999).

O trabalho de A. Hampton e D. H. Zanette, (HAMPTON; ZANETTE, 1999) inaugurou uma nova linha de pesquisa na área do estudo de sistemas hamiltonianos acoplados, quando os autores observaram que quando dois mapeamentos hamiltonianos idênticos (mapa padrão sobre um toro) eram acoplados por meio de um acoplamento global que conservava o caráter conservativo, que inicialmente para diferentes condições iniciais, as diferentes órbitas projetadas nos espaços de fases individuais varriam diferentes regiões no retrato de fases porém, à medida em que a intensidade do acoplamento se tornava maior, as regiões no espaço de fases varridas pelas órbitas se tornavam mais largas até, que para um determinado valor crítico da constante de acoplamento, as duas órbitas embora nunca coincidiam simultaneamente no mesmo ponto do retrato de fases, cada uma delas passava próxima a qualquer ponto visitada pela outra, com-

partilhando um mesmo domínio no espaço de fases. Em outras palavras, após um acoplamento crítico, as órbitas compartilham uma medida invariante idêntica no espaço de fases. Para essa forma de evolução coerente que não se trata de uma coincidência assintótica das órbitas, como na sincronização em sistemas dissipativos, os autores a denominaram de sincronização de medidas (em inglês, measure synchronization - MS). O efeito da sincronização de medidas ocorre tanto em sistemas com órbitas periódicas e quase-periódicas em estado de não sincronização de medidas até órbitas quasi-periódicas em sincronização de medidas, a transição para a sincronização de medidas também foi observada com órbitas quase-periódicas para órbitas caóticas, dependendo dos parâmetros e condições iniciais adotadas no sistema estudado (HAMPTON; ZANETTE, 1999),(WANG *et al.*, 2003),(WANG *et al.*, 2003).

Os autores observaram que esse comportamento ocorre para qualquer valor maior do que o valor crítico da constante de acoplamento, exceto alguns intervalos estreitos para os quais as órbitas separam-seumas das outras (HAMPTON; ZANETTE, 1999),(GHOSH; SHAH; CHAKRABORTY, 2018). Wang et al.[9], observaram que para sistemas do tipo osciladores quârticos com mais de dois elementos acoplados, era possível a ocorrência do que ele chamou de sincronização parcial de medidas (Partial Measure Synchronization - PMS), em que observou que para três elementos em relação a região ocupada pelas órbitas no espaço de fases, ocorrerem três comportamentos: a não sincronização de medidas, sincronização parcial de medidas (dois osciladores) ou uma sincronização completa das medidas.

Ademais, desde o trabalho seminal de Hampton e Zanette (HAMPTON; ZANETTE, 1999) o comportamento crítico que leva a sincronização de medidas foi observado em diversos modelos de sistemas e subsistemas hamiltonianos acoplados: sistemas do tipo osciladores quârticos (WANG *et al.*, 2003), modelos hamiltonianos do tipo Frenkel-Kontorova (ZHANG *et al.*, 2012), osciladores com potencial do tipo Duffing anarmônicos conservativos (potencial duplo simétrico) (VINCENT, 2005), em que foi observada ocorrência da transição de órbitas inicialmente quase-periódicas não sincronizadas para órbitas quase-periódicas no regime de sincronização de medidas e também da ocorrência da transição à sincronização de medidas de órbitas quase-periódicas para órbitas caóticas varrendo uma mesma medida invariante no espaço de fases, para um sistema com dois osciladores acoplados. O autor também encontrou o efeito da sincronização parcial de medidas com três osciladores individuais acoplados, em acordo com os resultados de Wang et al. para o modelo de hamiltoniano ϕ^4 (WANG *et al.*, 2003).

É importante destacar que o efeito de comportamento coletivo para esse mesmo sistemas individuais sujeitos a esse mesmo tipo de potencial anarmônicos e globalmente acoplados,

porém com grande quantidade de elementos (da ordem de centenas e milhares de elementos acoplados) (ZANETTE; MIKHAILOV, 1997). Nesse trabalho os autores observam que as não linearidades no sistema hamiltoniano utilizado implicam na coexistência de órbitas regulares e caóticas para um número de osciladores individuais maior ou igual que dois osciladores, mas não foi apresentando explicitamente o efeito de sincronização de medidas. Os trabalhos (VINCENT, 2005) e (ZANETTE; MIKHAILOV, 1997) sobre o acoplamento de osciladores anarmônicos usou além das simulações de evolução temporal, o recurso de retratos de fase, para a visualização do efeito de sincronização de medidas. Destaca-se que existem outros recursos para uma melhor caracterização da transição a sincronização de medidas que foram usados em outros modelos, tais como: cálculo da média das energias dos subsistemas, variações das diferenças de fases, cálculo da média da energia de interação (GHOSH; SHAH; CHAKRABORTY, 2018), além da caracterização mais detalhada da dinâmica caótica através, por exemplo, da determinação do máximo expoente de Lyapunov (WANG *et al.*, 2003).

Por fim, o objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica não linear de sistemas hamiltonianos acoplados com energia potencial do tipo polinomial e os efeitos na quebra da simetria deste potencial. Desta forma, o presente trabalho destina contribuir qualitativamente e quantitativamente para o estudo desta área. Os capítulos seguintes deste trabalho abordarão: aspectos teóricos gerais sobre sistemas dinâmicos, dinâmica não linear, equação de Duffing, caos determinístico, expoentes de Lyapunov e sincronização e seus fenômenos, capítulo 2; em seguida no capítulo 3 são apresentados os objetivos deste trabalho; O procedimento metodológico no capítulo 4. Os resultados e discussões sobre o estudo da dinâmica do sistema foram realizados no capítulos 5. Finalmente, as conclusões no capítulo 6.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Sistemas Dinâmicos

Todo sistema que evolui com o tempo pode ser considerado um tipo de sistema dinâmico (BRIN, 2002). Geralmente são usados para esboçar a evolução temporal de sistemas físicos, biológicos, financeiros, assim sendo, de grande aplicabilidade na modelagem de sistemas reais. Há basicamente duas formas em que os sistemas evoluem; quando há uma evolução em que os intervalos de um ponto ao outro são contantes, esse sistema é denominado como discreto, quando esse sistema evolui de forma contínua ao longo do espaço de fase, chama - se sistema dinâmico contínuo.

A teoria dos sistemas dinâmicos é ampla e quanto a classe dos sistemas podem ser classificados como, lineares e não lineares, conservativos e não conservativos, autônomos e não autônomos, determinístico e estocásticos.

Um sistema dinâmico discreto de primeira ordem pode ser expresso por:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Em que, $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \dots \dot{x}_n]$ define - se como vetor da variação das posições que formam as órbitas do sistema, $f = [f_1 \dots f_n]$ é a função geradora vetorial e $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]$ é o conjunto de soluções do sistema.

2.2 Dinâmica não linear

Na teoria dos sistemas dinâmicos muitos sistemas apresentam em suas dinâmicas a não-linearidade na qual suas evoluções temporais podem ter uma série de possibilidades para dadas condições iniciais, contudo alguns podem ser reduzidos a linearidade (STROGATZ, 1994). Como citado, tais sistemas podem ser representados por modelos de equações diferenciais, porém suas soluções analíticas tornam-se inviáveis recorrendo, assim, à soluções numéricas.

Dado um sistema autônomo composto por duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

Onde o sistema será não-linear, se f_1 e f_2 não forem combinações lineares de x e y .

2.3 Mecânica Hamiltoniana

O matemático irlandês Willian R. Hamilton apresentou uma nova formulação para mecânica clássica, a mecânica hamiltoniana (LEMOS, 2007). Essa formulação, traz consigo, algumas características que a deixa especial.

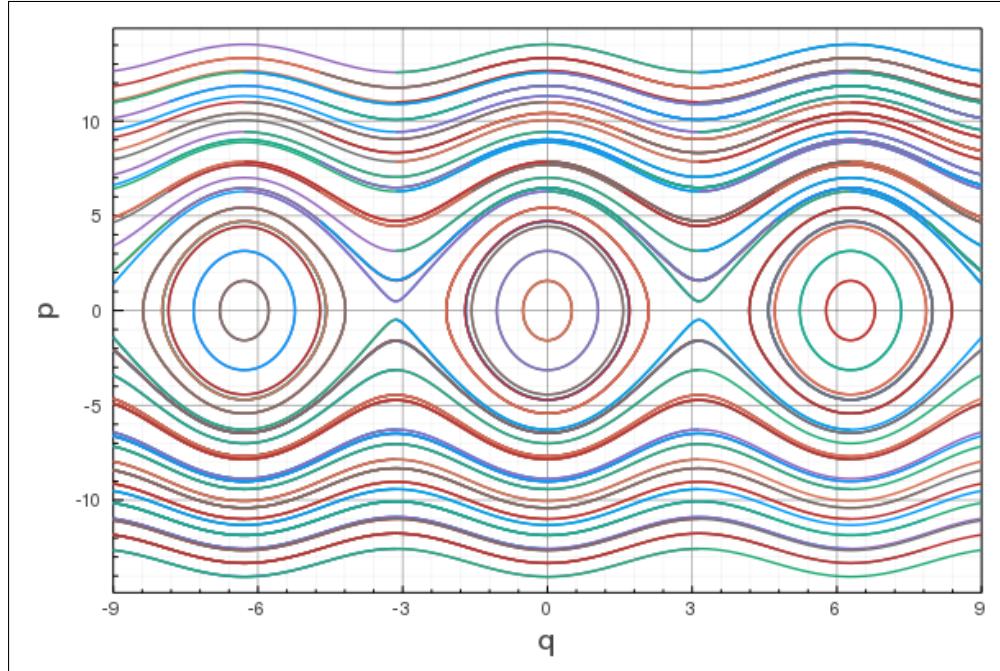
Para um sistema físico com N graus de liberdade sua dinâmica, no formalismo lagrangiano, é descrita por N equações diferenciais de segunda ordem. Por meio do formalismo hamiltoniano é possível substituir esse conjunto de N equações por um um conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem (AGUIAR, 2011).

Na mecânica hamiltoniana o momento é tratado como sendo grandeza mais fundamental do que a velocidade, fazendo, assim, com que o sistema dependa implicitamente do tempo, ou seja, um sistema autônomo. O formalismo hamiltoniano apesar de ser um formalismo tratado na mecânica clássica, serve como base para adentrar na mecânica estatística e na mecânica quântica (NETO, 2004).

2.3.1 Coordenadas generalizadas e o espaço de fase

O espaço onde descreve - se a dinâmica de um sistema é chamado de espaço de fase e as coordenadas que o constituem com a evolução temporal das N equações diferenciais de primeira ordem, são denominadas de coordenadas generalizadas (MONTEIRO, 2011). Geralmente essas coordenadas são as posições generalizadas q_i, \dots, q_n e os momentos p_i, \dots, p_n , onde são variáveis autônomas. A Figura 1 é um exemplo de um espaço de fase reproduzida a partir das equações canônicas de hamilton do pêndulo não linear.

Figura 1 – Espaço de fase do pêndulo não linear.



Fonte: Próprio autor

2.3.2 As equações de Hamilton

Partindo - se da definição matemática de momento canonicamente conjugado em função da lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ e da velocidade generalizada \dot{q}_i :

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \quad (2.4)$$

Na formulação lagrangiana as coordenadas generalizadas são (q, \dot{q}) , por meio da transformada de Legendre pode - se haver uma substituição por (p, q) , que resulta na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos conjugados (LEMOS, 2007). Define - se então, a função hamiltoniana:

$$H(p, q) = \sum_{n=1}^m \dot{q}_n p_n - L(q, \dot{q}) \quad (2.5)$$

Por meio do princípio variacional de Hamilton (NETO, 2004), pode - se definir as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad (2.6)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \quad (2.7)$$

Onde a equação (2.5) é uma identidade e as equações (2.6) e (2.7) formam um conjunto de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem acopladas, portanto há uma relação entre as equações de Hamilton e as N equações diferenciais de segunda ordem do formalismo lagrangiano (LEMOS, 2007).

2.3.3 Relação entre a Hamiltoniana e a energia total

Dada a definição da lagrangiana como sendo $L(q, \dot{q}) = T - U$ (TAYLOR, 2013), (LEMOS, 2007), onde $T(\dot{q}_n) = \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{q}_n^2$ é a energia cinética do sistema e U sendo a energia potencial. Substituindo esta definição na equação (2.5) com $p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$, obtém -se:

$$H(q, p) = T + U \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é válida para os casos que a energia cinética seja função apenas da velocidade quadrática e a energia potencial não seja função das velocidades (LEMOS, 2007). As condições sendo satisfeitas observa - se que a hamiltoniana tem características conservativas, e $H(q, p)$ equivale a energia total do sistema em função das coordenadas generalizadas p e q .

Dado um sistema conservativo com energia cinética $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ (onde m é a massa do sistema, v a velocidade e p o momento linear) e energia potencial do oscilador harmônico, $U = \frac{1}{2}kq^2$ (onde k é uma constante e q a posição generalizada).

A função hamiltoniana deste sistema pode ser expressa:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \quad (2.9)$$

Considerando $m = 1$ e substituindo a equação (2.9) nas (2.5) e (2.6):

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -kq \end{cases} \quad (2.10)$$

Onde,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \vdots \\ \dot{p}_n \end{bmatrix} = -k \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Observando as equações (2.0) e (2.8) conclui-se que as equações canônicas de Hamilton formam um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem caracterizadas de um tipo de sistema dinâmico conservativo. As equações de Hamilton descrevem a evolução do sistema e $\dot{\mathbf{q}}$ e $\dot{\mathbf{p}}$ são, respectivamente, os vetores posição e momento generalizados e p_n e q_n formam um conjunto de soluções do sistema.

2.4 Equação de Duffing

O engenheiro alemão Georg Duffing, em 1918, formulou um modelo com equações diferenciais com oscilações forçadas, afim de simular suas observações em sistemas reais. Em seu trabalho Duffing aborda soluções numéricas e analíticas para tal modelo (ZENI; GALLAS, 1995). Desse modo este padrão de equações diferenciais recebeu o nome de equação de Duffing.

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = \delta \cos(\omega t) \quad (2.13)$$

Em que o movimento do sistema se dá pela função periódica $\cos(\omega t)$, $\alpha\dot{x}$ representa o termo dissipativo do sistema, para $\alpha = 0$ o sistema é conservativo, γx^3 quebra a linearidade do sistema. Esse sistema dinâmico serve de modelo para vários sistemas de acordo com as combinações e variações de parâmetros. Como exemplos de aplicações sistemas massa-mola anarmônicos. É de salientar que este trabalho abordará um sistema conservativo e não linear, portanto uma equação sem amortecimento e forças externas, com $\beta = -1$ e $\gamma = 1$.

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0 \quad (2.14)$$

A energia potencial será dada por:

$$U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (2.15)$$

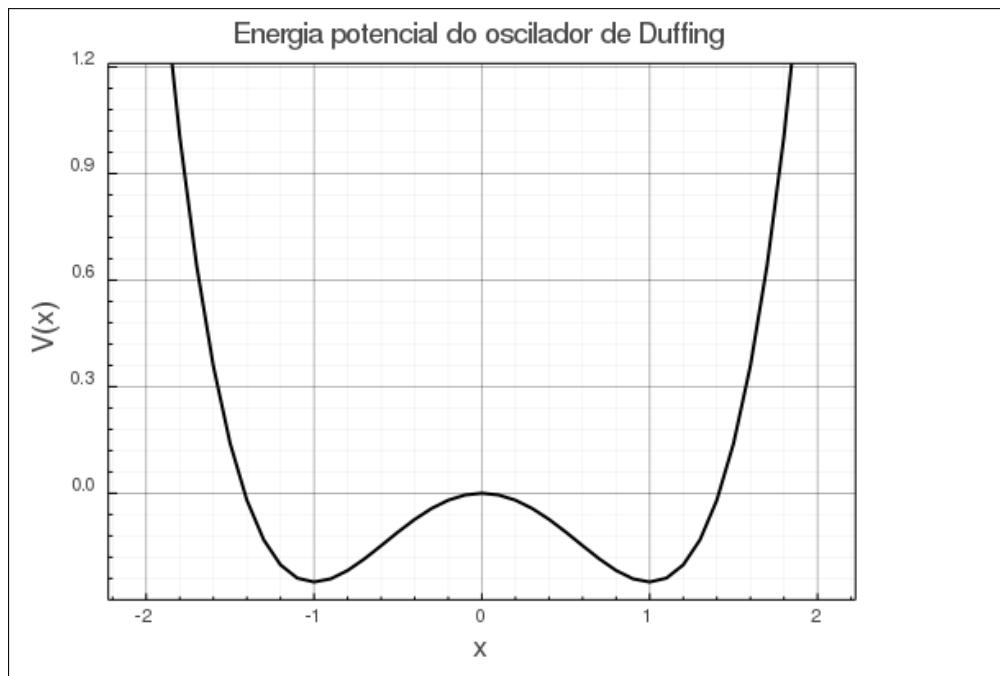
Igualando - se força a zero, obtêm - se as posições de equilíbrio:

$$F(x) = -x + x^3 = 0 \quad (2.16)$$

$$x(-1 + x^2) = 0 \quad (2.17)$$

Logo os pontos de equilíbrio são $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$, pode - se observar tais pontos na figura 2. Onde é possível visualizar dois pontos de mínimos para $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$, nesses pontos o sistema fica quase inalterável quando acometido por pequenas perturbações são conhecidos como pontos estáveis e um ponto de máximo para $x_1 = 0$, é uma região em que qualquer perturbação no sistema pode alterar a sua dinâmica. Este ponto é chamado de instável (FERRARA, 1994).

Figura 2 – Gráfico da energia potencial do tipo Duffing da equação (2.15).



Fonte: Próprio autor

2.4.1 A hamiltoniana do sistema de Duffing

A função hamiltoniana é dada pela soma das energias cinética e potencial. Para um tipo de oscilador de Duffing conservativo e não linear, as respectivas energias são dadas, para m

= 1.

$$\begin{cases} T = \frac{p^2}{2} \\ U(q) = -\frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4} \end{cases} \quad (2.18)$$

A hamiltoniana, portanto, será:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4} \quad (2.19)$$

Logo, as equações canônicas de Hamilton para o oscilador de Duffing conservativo serão:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q + q^3 \end{cases} \quad (2.20)$$

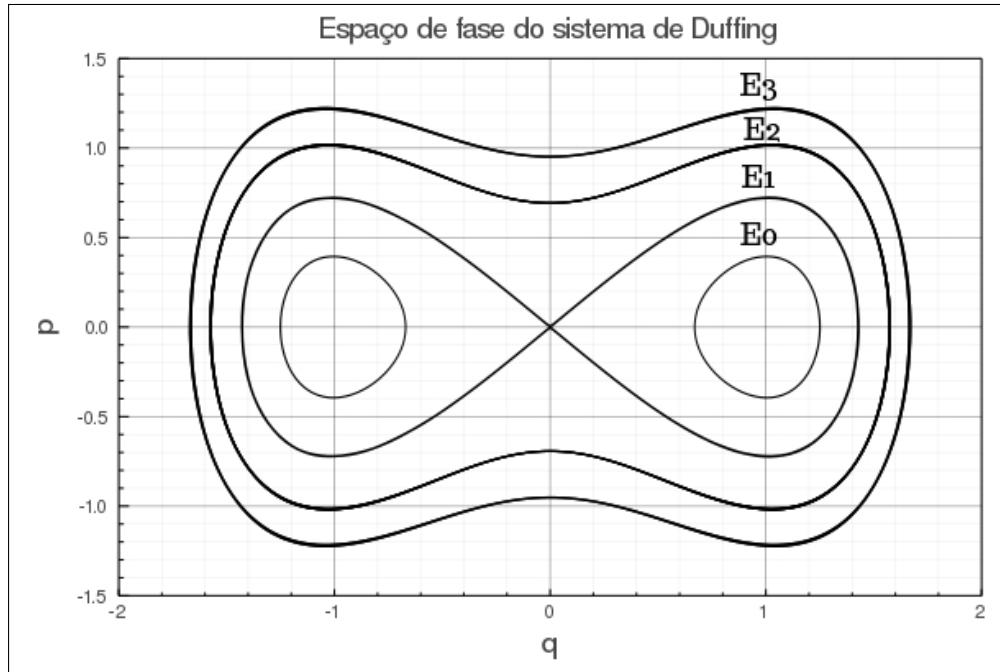
A evolução destas equações gerará um conjunto de soluções para tal sistema, este conjunto contudo formará o espaço de fase do oscilador de Duffing conservativo. A figura 3 mostra as órbitas do espaço de fase para cada nível de energia E_0 , E_1 , E_2 e E_3 . Para E_0 o movimento do sistema é aproximadamente harmônico, em E_1 ocorre a transição para o movimento anarmônico, que se chama separatriz. Para os demais níveis como falado, ocorre o movimento anarmônico (REICHL; ZHENG, 1984).

2.5 Caos Determinístico

O físico matemático francês Henri Poincaré, no final do XIX, ao estudar a dinâmica de três corpos em mecânica celeste, observou que as órbitas dos corpos são altamente sensíveis as condições iniciais do sistema, em outras palavras, uma pequena variação nas condições iniciais resultaria em diferentes posições finais para o sistema (POINCARÉ, 1899), dando início ao que hoje se conhece como uma nova propriedade dos sistemas dinâmicos não lineares: o caos determinístico.

Podemos definir que o caos determinístico se apresenta para um conjunto de soluções de sistema dinâmico vinculados ao um conjunto de parâmetros pela imprevisibilidade dos estado dos sistema, isto é a dependência sensível as condições iniciais resultando em soluções aperiódicas. Entretanto, apesar da aperiodicidade, as órbitas do sistema tendem a ser estacionárias, ou seja, repetem um padrão (HIRSCH, 2012).

Figura 3 – Espaço de fase para o potencial do tipo Duffing.



Fonte: Próprio autor

Para tanto, é importante destacar que nem todo sistema não linear pode apresentar caos, porém sistemas caóticos são sistemas não lineares, uma vez que para o sistema apresentar comportamento caótico dependerá dos valores atribuíveis aos parâmetros do mesmo. Ademais, a metodologia para detecção e análise do caos é de muita relevância para a dinâmica haja vista que em geral as soluções de um sistema não linear não são explicitamente conhecidas, logo a análise qualitativa das órbitas que percorrem o espaço de fase se torna um recurso para caracterizar os sistemas dinâmicos, uma vez que a visualização de órbitas no espaço de fases permite a identificação qualitativa do comportamento das órbitas, por exemplo, órbitas periódicas são fechadas, enquanto órbitas características da dinâmica caótica tendem a percorrer todo um volume no espaço de fases, ás órbitas quasi-periódicas se limitam em uma região bem definida percorrendo um toro no espaço de fase (FERRARA, 1994).

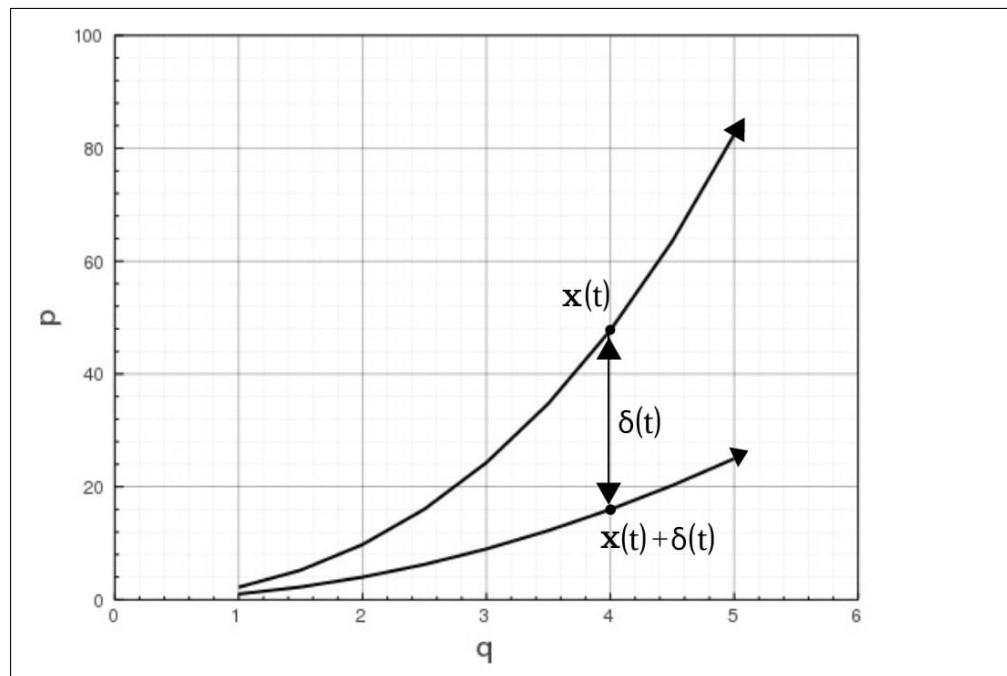
2.6 Exponentes de Lyapunov

Em sistemas caóticos é de interesse analisar o comportamento complexo de como as órbitas evoluem, pois tais órbitas não seguem uma simetria, ou seja, se divergem umas das outras exponencialmente - devido à sensibilidade de pequenas variações das condições iniciais - ao longo do espaço de fase. Com isso, adota-se o conceito de expoente de Lyapunov, que descreve com que velocidade dois pontos próximos no espaço de fase aproximam-se ou afastam-

se (STROGATZ, 1994). Em virtude disso é possível caracterizar se um sistema não - linear é caótico ou não.

Considere duas órbitas, respectivamente $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(t) + \delta(t)$, inicialmente próximas, onde $\delta(t)$ é a distância entre as duas órbitas. A medida em que o sistema evolui, percebe -se que $\delta(t)$ pode variar exponencialmente, representado pela **Figura 4**.

Figura 4 – Evolução de duas trajetórias proximas no espaço de fase.



Fonte: Próprio autor

Pode -se expressar, a variação de $\delta(t)$, como:

$$|\delta(t)| = |\delta(t_0)| e^{\lambda t} \quad (2.21)$$

Onde,

$$e^{\lambda t} = \frac{|\delta(t)|}{|\delta(t_0)|} \quad (2.22)$$

e,

$$\ln(e^{\lambda t}) = \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(t_0)|} \quad (2.23)$$

Logo, obtêm - se:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(t_0)|} \quad (2.24)$$

Onde λ é o expoente de Lyapunov e $\ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(t_0)|}$ representa o logaritmo de separação das órbitas. Ademais, para um problema n-dimensional haverão n expoentes de Lyapunov correspondentes, que formarão o espectro de Lyapunov, representado como:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n \quad (2.25)$$

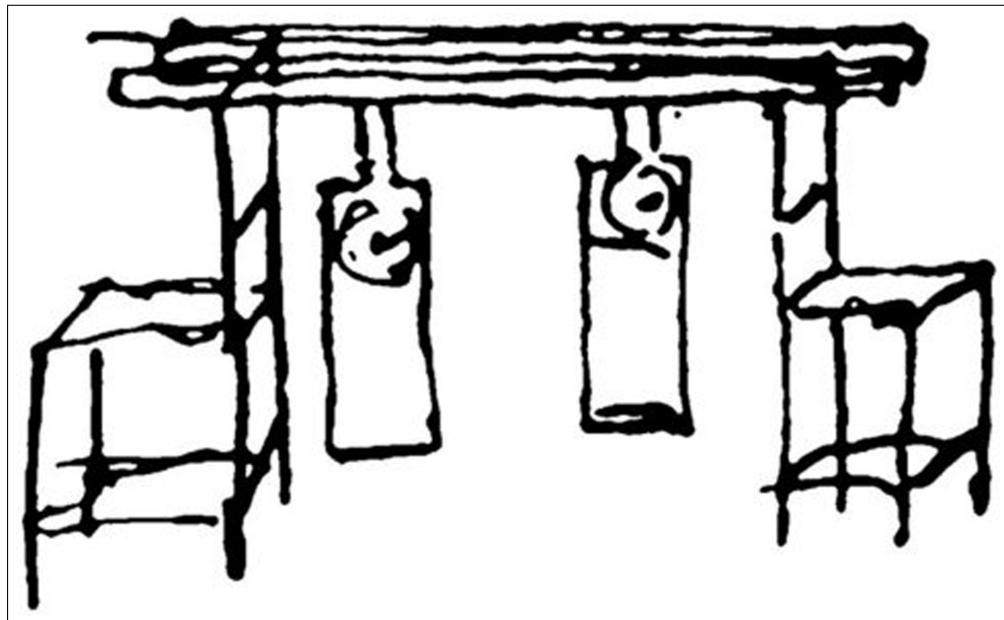
Portanto, para valores positivos haverá uma divergência exponencial de órbitas, o que caracteriza comportamento caótico, sendo suficiente apenas que o maior expoente de Lyapunov seja positivo ($\lambda_1 > 0$) (MONTEIRO, 2011).

2.7 Sincronização

Sincronização significa “compartilhar o tempo comum”, “ocorrendo no mesmo tempo”. Logo sistemas que apresentam comportamentos harmoniosos ou ocorrem ao mesmo tempo estão sincronizados. Christiaan Huygens, no século XVII, físico e matemático holandês com contribuições em óptica, desenvolvimento em telescópios e relógios foi um dos primeiros a observar o fenômeno da sincronização. Huygens observou que dois relógios de pêndulo presos em um suporte comum tendem a sincronizar seus pêndulos em fase conforme a Figura 5. Até mesmo quando alguma perturbação era aplicada aos relógios, depois de alguns minutos a sincronização se restabelecia (PIKOVSKY, 2001) (HUYGENS, 1673). A sincronização pode ser observadas desde sistemas mecânicos, como pêndulos até em sistemas biológicos em que os neurônios sincronizam seus potenciais de ação em processos cognitivos (BUZSÁKI; DRAGUHN, 2004), vaga-lumes sincronizam suas luzes para chamar a atenção das fêmeas (BUCK, 1988).

Com o avanço nos estudos na área, (FUJISAKA; YAMADA, 1983) (PECORA; CARROLL, 1990) observaram que a sincronização também poderia ocorrer em sistemas caóticos, embora parecesse improvável já que tais sistemas apresentam sensibilidades às condições iniciais e que uma pequena variação nestas condições faz com que suas órbitas divirjam exponencialmente com o tempo.

Figura 5 – Original desenho de christiaan Huygens ilustrando seu experimentos com dois relógios de pêndulo colocados em um suporte comum.



Fonte: Horologium Oscillatorium (Apud F. Maguet, Paris, 1673)

Em sistemas, podem haver vários tipos diferentes de sincronização como: sincronização completa ou idêntica, generalizada, de fase etc. A sincronização completa ou idêntica consiste na perfeita igualdade entre as órbitas dos dois osciladores, obtida devido ao acoplamento entre eles, de tal maneira que eles se mantém sincronizados um com o outro no curso do tempo. Na sincronização generalizada ocorre quando os osciladores acoplados são completamente diferentes, e o comportamento dinâmico de um dos osciladores é determinado pelo outro. Sincronização de fase pode ser considerada como um regime intermediário de sincronização, onde as fases dos osciladores evoluem de forma sincronizadas, enquanto suas amplitudes permanecem diferentes (PIKOVSKY, 2001).

Em 1999, (HAMPTON; ZANETTE, 1999) observaram um novo tipo de sincronização, measure synchronization (MS) - em português, sincronização de medidas (SM). Observaram que quando dois mapeamentos hamiltonianos idênticos eram acoplados globalmente e a evolução temporal do sistema a partir do espaço de fases de órbitas individuais dos subsistemas era considerada, observava-se que à medida em que se variava o parâmetro de acoplamento, as regiões percorridas pelas respectivas órbitas se tornavam mais largas, chegando-se a um valor crítico, em que embora as órbitas não coincidissem simultaneamente, cada uma delas passava próxima a qualquer ponto visitada pela outra e que acima de um valor crítico para o parâmetro de acoplamento, as órbitas de cada subsistema compartilhavam a mesma região (medida invariante)

nos espaços de fases (VINCENT, 2005) (WANG *et al.*, 2003). Este presente trabalho abordará este tipo de sincronização e suas caracterizações.

A sincronização está relacionado a interação entre dois sistemas. A interação se dá pelo um vínculo entre os sistemas que é chamado de acoplamento. Quando a evolução de um dos sistemas acoplados permanece inalterada tem-se a configuração denominada de acoplamento unidirecional ou mestre-escravo que um sistema que evolui livremente, denominado de mestre, impõe sua dinâmica sobre um outro sistema, o escravo (PIKOVSKY, 2001). Por outro lado, quando ambos os sistemas são acoplados, de modo que eles se influenciam mutuamente em suas dinâmicas, tem-se o acoplamento bidirecional ou mútuo (LEYVA *et al.*, 2004).

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Estudar a dinâmica não linear de sistemas hamiltonianos acoplados com energia potencial do tipo polinomial.

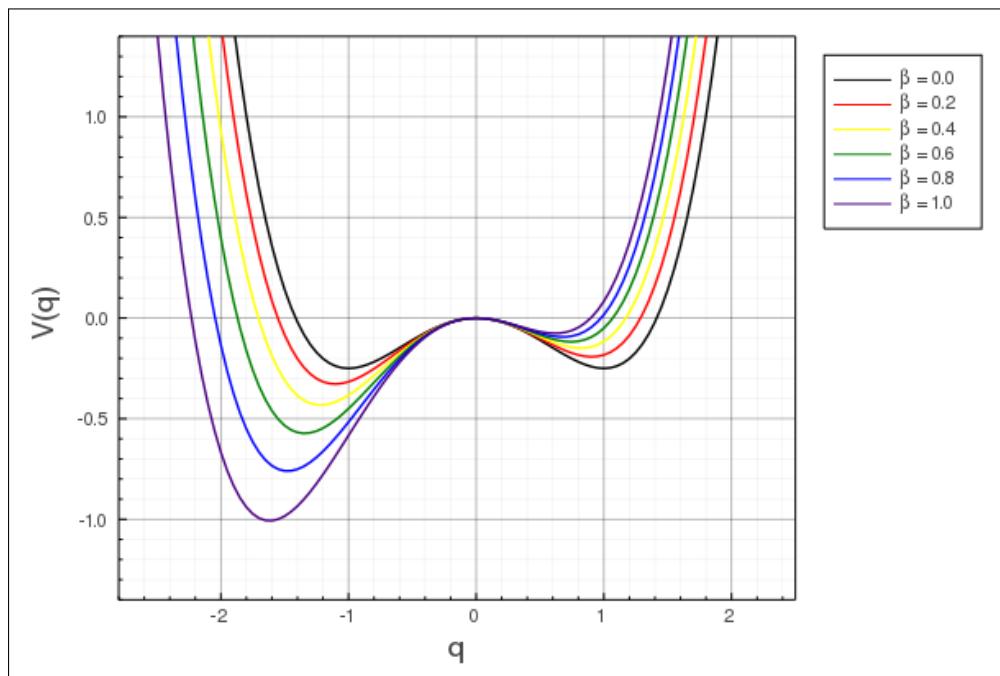
3.2 Objetivos Específicos

- Caracterização da transição à sincronização de medidas para modelo considerado;
- Calcular os máximos expoentes de Lyapunov em função da constante de acoplamento;
- Estudar o efeito da quebra da simetria do potencial do tipo Duffing conservativo sobre a dinâmica do sistema.

4 METODOLOGIA

O sistema hamiltoniano aqui tratado consiste em dois elementos individuais descritos por uma função hamiltoniana $H_i(q_i, p_i) = \frac{p_i^2}{2} + U(q_i)$, $i = 1, 2$. A função energia potencial $U(q_i)$ é descrita como $\frac{q_i^4}{4} - \frac{q_i^2}{2} + \beta \frac{q_i^3}{3}$. A energia potencial assim descrita representa um poço duplo simétrico de energia potencial (energia potencial conservativa de Duffing, conforme a seção (2.4.1) quando o parâmetro $\beta = 0$). Com outros valores de β o gráfico da função energia potencial se torna assimétrico em relação a origem. O intervalo para β foi $0,0 \leq \beta \leq 1,0$. Os valores de β aqui considerados foram $\{0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0\}$. Isto é, β é considerado como um parâmetro de perturbação compondo o termo de assimetria $\beta \frac{q_i^3}{3}$ para a função de energia potencial, conforme pode se notar na figura 6.

Figura 6 – Gráfico da energia potencial para diferentes valores de β



Fonte: (Próprio autor)

Os dois elementos individuais foram acoplados com um termo do tipo difusivo, $k(q_1 - q_2)^2$. Dessa forma, na função hamiltoniana, esse termo representa a energia de interação entre os dois elementos hamiltonianos individuais (cada partícula de massa unitária) no sistema, sendo o termo responsável pela troca de energia entre esses elementos individuais, resultando, após se atingir um valor crítico da constante de acoplamento k , um estado de compartilhamento das mesmas regiões de visitação das órbitas no espaço de fases, isto é, o estado de sincronização de medidas (SM).

A função hamiltoniana total é dada por

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{q_1^4 + q_2^4}{4} - \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + \frac{\beta(q_1^3 + q_2^3)}{3} + k(q_1 - q_2)^2 \quad (4.1)$$

Aplicando as equações canônicas de Hamilton, resulta o seguinte sistema dinâmico não linear:

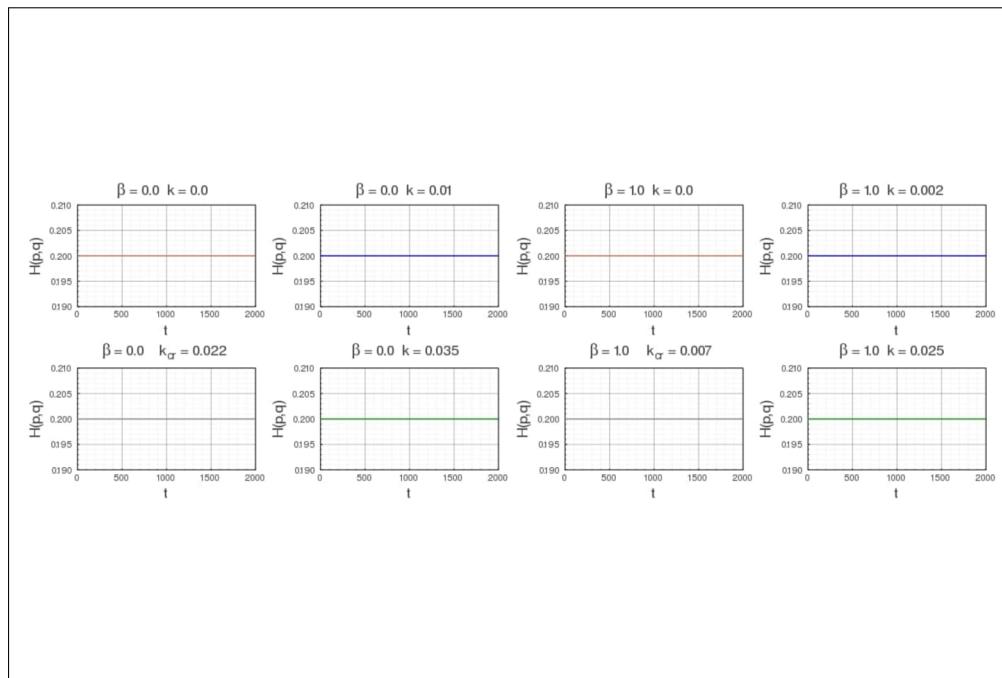
$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{q}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = -q_1^3 + q_1 - \beta q_1^2 + 2k(q_2 - q_1) \\ \dot{p}_2 = -q_2^3 + q_2 - \beta q_2^2 + 2k(q_1 - q_2) \end{cases} \quad (4.2)$$

O sistema de equações dadas em (4.2) consiste em um sistema dinâmico não linear autônomo formado por um conjunto de quatro equações diferenciais de primeira ordem acopladas, o que corresponde a um sistema hamiltoniano conservativo com quatro graus de liberdade. Esse sistema dinâmico depende dos parâmetros de acoplamento k , do parâmetro de assimetria β e de um conjunto formado de quatro condições iniciais $\{q_1(0); q_2(0); p_1(0); p_2(0)\}$. Dois conjuntos de condições iniciais diferentes foram escolhidos, foram as mesmas condições iniciais adotadas em (VINCENT, 2005). Para os dois conjuntos de condições iniciais, a energia total do sistema é a mesma. Porém as energias de cada subsistema é diferente. A energia total depende apenas das condições iniciais, as quais foram as mesmas da referência (VINCENT, 2005), cujo sistema dinâmico coincide quando $\beta = 0,0$ e $k = 0,0$. O que faz com que a energia permaneça fixa é o fato de que as condições iniciais são avaliadas para as coordenadas de posição generalizadas como sendo identicamente nulas: $q_1(0) = q_2(0) = 0,0$, deixando a energia total fixa em valores que só dependem das condições iniciais associadas às coordenadas de momento generalizadas do sistema $p_1(0); p_2(0)$, tal que $\mathcal{H}(q_1(0), q_2(0), p_1(0), p_2(0)) = E = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}$, conforme a metodologia proposta em (WANG *et al.*, 2003).

Dentre várias opções de integração desse sistema de EDOs, foram testados diversos integradores contidos no pacote Julia (RACKAUCKAS; NIE, 2017). Testes de validação foram realizados comparando com os modelos contidos nas referências (WANG *et al.*, 2003), (VINCENT, 2005). Com o intuito de manter a conservação da energia total média constante, o que se é exigido em sistemas hamiltonianos e além disso, manter as propriedades de invariância no fluxo de órbitas (incompressibilidade no espaço de fases) e considerando que o sistema é do tipo separável em relação a energia cinética e potencial: $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}) = K(\vec{p}) + U(\vec{p})$, optou-se pelo integrador simplético, o qual mantém todas essas propriedades exigidas para um sistema

dinâmico hamiltoniano (STUCHI, 2002). O integrador usado foi um integrador simplético de quinta ordem (MCLACHLAN; ATELA, 1992). Os parâmetros usados nas simulações foram tempo de evolução, $t_0 = 0,0$ à $t_f = 2000,0$ u. t., $\beta = \{0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0\}$, $dk = 0,001$ e condições periódicas $\{q_1(0) = q_2(0) = 0,0; p_1(0) = 0,2; p_2(0) = 0,6\}$ e condições caóticas $\{q_1(0) = q_2(0) = 0,0; p_1(0) = 0,0142; p_2(0) = 0,632\}$. A figura a seguir, mostra o comportamento da energia total em função tempo, o que demonstra que efetivamente, a energia total não está apresentando perdas reforçando o fato de que o método escolhido para encontrar a solução numérica do sistema hamiltoniano na eq.(4.2) mostrou-se adequado.

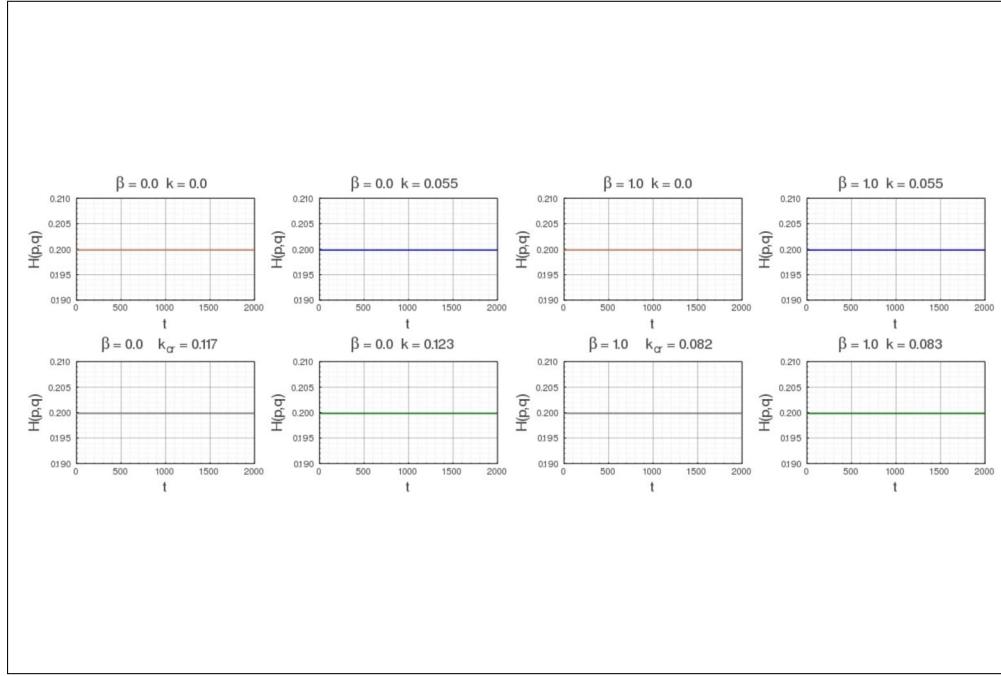
Figura 7 – Gráficos da energia total do sistema para o conjunto I de condições iniciais para $\beta = 0,0$ e $1,0$



Fonte: (Próprio autor)

Após a obtenção dos valores numéricos de coordenadas generalizadas de posição e momento (validados de acordo com as referências (VINCENT, 2005)), as órbitas de cada subsistema (oscilador) individual em um espaço de fases bidimensional comum. Permitindo-se assim, observar de forma qualitativa os comportamentos periódicos, quasi-periódicos, caóticos, antes e depois da sincronização de medidas. O estado de sincronização de medidas pode ser facilmente visualizado quando as órbitas varrem uma mesma área no espaço de fases bidimensional para o caso aqui considerado. Essa mesma propriedade permite estabelecer também uma forma quantitativa de determinar o parâmetro de acoplamento crítico que caracteriza a transição à sincronização de medidas. Pelo fato de nos estados de sincronização de medidas

Figura 8 – Gráficos da energia total do sistema para conjunto II de condições iniciais para $\beta = 0,0$ e $1,0$



Fonte: (Próprio autor)

uma área comum ser compartilhada, a média espacial da função de energia mecânica (energia cinética mais energia potencial) de cada elemento individual tornam-se idênticas. Como as órbitas varrem uma área cheia apresentam a propriedade de ergodicidade, permitindo-se trocar médias espaciais por médias temporais, então se calcula a média da energia mecânica individual (h_i , com $i = 1, 2$) de cada subsistema durante todo o tempo de evolução temporal T considerado, isto é, calcula-se numericamente as quantidades (WANG *et al.*, 2003):

$$h_{1,2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{p_{1,2}^2}{2} + \frac{q_{1,2}^4}{4} - \frac{q_{1,2}^2}{2} + \frac{\beta(q_{1,2}^3)}{3} \right) dt \quad (4.3)$$

O método de cálculo escolhido foi o método numéricico dos trapézios para o cálculo de uma integral definida. Os gráficos da média da energia individual h_i foram obtidos para cada valor do parâmetro de acoplamento k , produzindo-se gráficos do tipo forquilha (ou gráficos de bifurcação) por meio dos quais se obteve para cada conjunto de condições iniciais e parâmetros, o valor de crítico do parâmetro de acoplamento para o qual inicia-se a transição para a fase de estados em sincronização de medidas no espaço de fases.

Por fim, o expoente de Lyapunov (EMCL) λ para cada valor do parâmetro de acoplamento k no sistema hamiltoniano 4.2 foi obtido através do pacote julia Dynamics usando

como método o algoritmo com distâncias normalizadas obtidas a partir de uma distância de separação inicial entre duas órbitas vizinhas, conforme (BENETTIN *et al.*, 1980).

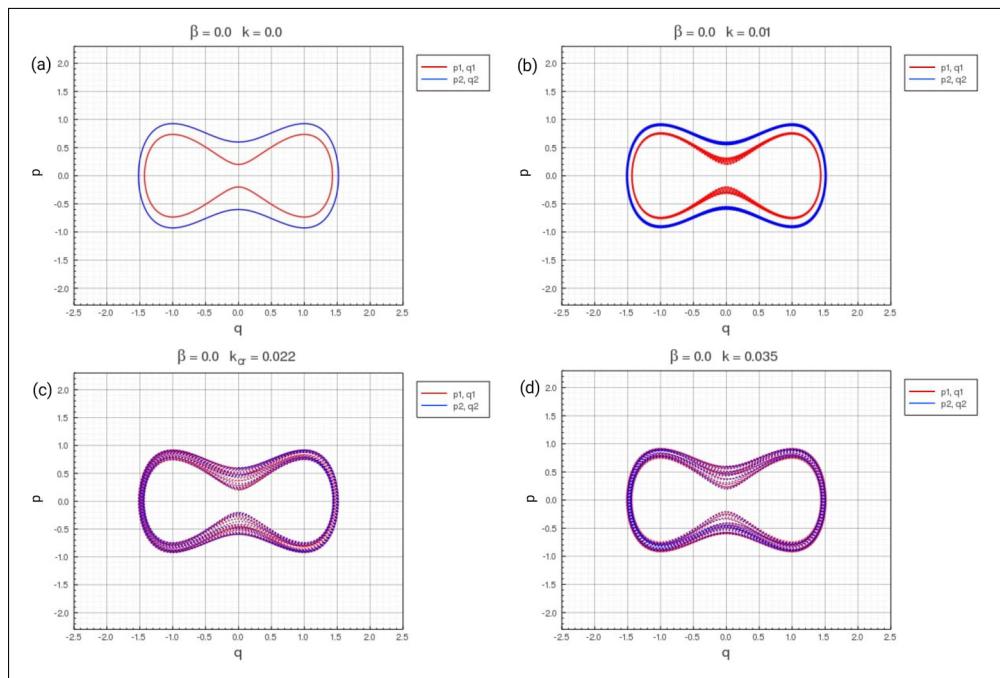
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram escolhidos dois conjuntos de condições iniciais. Para o primeiro conjunto: $\{q_1(0) = q_2(0) = 0,0; p_1(0) = 0,2; p_2(0) = 0,6\}$ (conjunto I), os subsistemas partem de estados com órbitas periódicas (para $k = 0,0$) para estados com órbitas quasi-periódicas (para valores de $k > 0,0$). O outro conjunto escolhido de condições iniciais: $\{q_1(0) = q_2(0) = 0,0; p_1(0) = 0,0142; p_2(0) = 0,632\}$ (conjunto II), para $k = 0,0$ o sistema parte de órbitas periódicas passando com valores do parâmetro de acoplamento $k > 0,0$ para estados de órbitas quasi-periódicas e também órbitas caóticas. Os valores foram tomados como sendo os mesmos da referência (Vicent, 2005), mas aqui o termo de acoplamento foi duplicado. A energia total do sistema foi de $E = 0,2$ que é a mesma para os dois conjuntos de condições iniciais. O hamiltoniano total do sistema dado na eq. (4.2) torna-se então dependente das condições iniciais, do parâmetro de acoplamento k e do parâmetro perturbativo β (como será discutido a seguir). Para cada conjunto de condições iniciais e seus respectivos parâmetros, podem-se observar comportamentos com características comuns mas com especificidades que dependerão dos valores dos parâmetros.

O comportamento de cada oscilador (hamiltoniano individual do sistema) com o auxílio das ferramentas de visualização das órbitas no espaço de fases e do usos das energias médias de cada elemento, vide a metodologia (4) e da determinação do expoente máximo de Lyapunov. Para o caso o primeiro conjunto de condições iniciais escolhidas, observa-se nos gráficos da figura 9, com o parâmetro $\beta = 0,0$, que à medida em que o parâmetro de acoplamento aumenta, as órbitas de cada subsistema hamiltoniano, cada oscilador, percorrem uma maior região do espaço de fases. Partindo-se de um estado em que para $k = 0,0$ as órbitas destacadas em cores azul e vermelho, descrevem uma dinâmica de órbitas periódicas para uma dinâmica de órbitas quasi-periódicas (figura 9, item (b), por exemplo.). O estado de quasi-periodicidade segue para todas as órbitas para todo o intervalo de valores de k utilizados. Desta-se o efeito observado a partir de uma valores maiores que um valor crítico k (k_{cr}) para o qual as órbitas compartilham a mesma região no espaço de fases, comportamento denominado de sincronização de medidas (SM). O valor de crítico de k e a sincronização de medidas podem ser observadas também no gráfico da figura 10 (a), em que um gráfico do tipo forquilha se observa, de forma análoga a uma transição de fase de primeira ordem, com k sendo um parâmetro critico. A partir do valor crítico de k , as médias das energias individuais são idênticas, o que se justifica, já que as órbitas varrem as mesmas regiões no espaço de fases, e a partir de um tempo suficiente, as médias espaciais idênticas podem ser trocadas por médias temporais, uma propriedade de

ergodicidade local (LICHENBERG; LIEBERMAN, 1983). Esse comportamento dos gráficos de energia média dos subsistemas também já foi observado na literatura (WANG *et al.*, 2003) (GUPTA *et al.*, 2017). Os valores de k crítico obtidos aqui são compatíveis com os da referência (VINCENT, 2005), a diferença aqui não está nas condições iniciais mas na expressão para a energia associada ao termo de acoplamento, o qual lá corresponde a metade do que foi usado aqui. Nesse caso, o valor obtido aqui para o k_{cr} foi cerca de 2 vezes do valor da citada referência. O que é algo esperado, pois uma diferente distribuição de energia interna por meio de mudanças nos termos ou parâmetros mudará o valor para o parâmetro de acoplamento a partir do qual ocorre a sincronização de medidas, pois a energia total dos dois subsistema é sempre conservada, dada a natureza conservativa da energia em sistemas hamiltonianos.

Figura 9 – Espaço de fases para sistema com conjunto I de condições iniciais com $\beta = 0,0$.

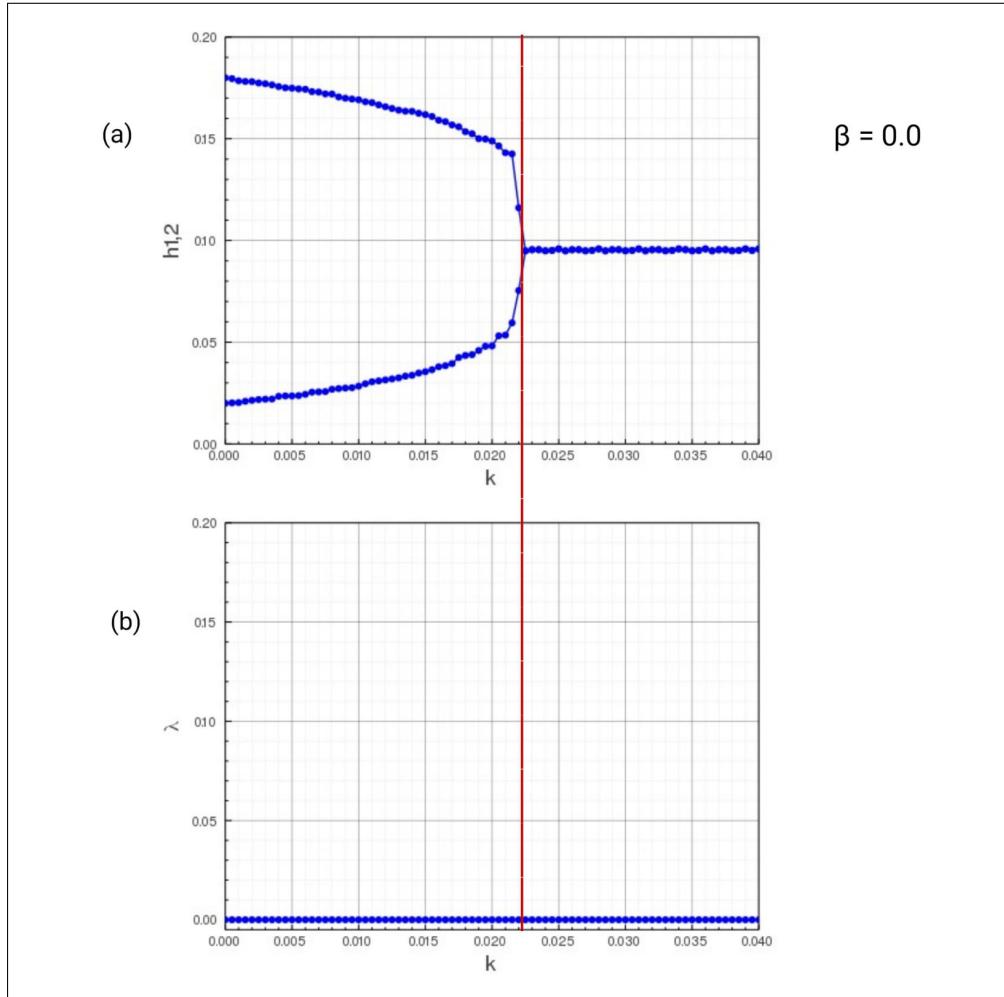


Fonte: (Próprio autor)

Na figura 10 (b) observa-se que o máximo expoente característico (EMCL) de Lyapunov é nulo para todos os valores de k ($\beta = 0,0$). O que é correspondente a presença de órbitas periódicas e quasi-periódicas, obtidas e visualizadas na figura 6 conforme a discussão no parágrafo anterior. Ressalta-se que metodologia idêntica de visualização e quantificação foi realizada na literatura para sistemas hamiltonianos constituídos de osciladores com potencial do tipo quártico (ϕ^4) (WANG *et al.*, 2003).

Simulações para diferentes valores de k no intervalo entre 0,0 e 0,040 com um

Figura 10 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,0$ e o conjunto I de condições iniciais.

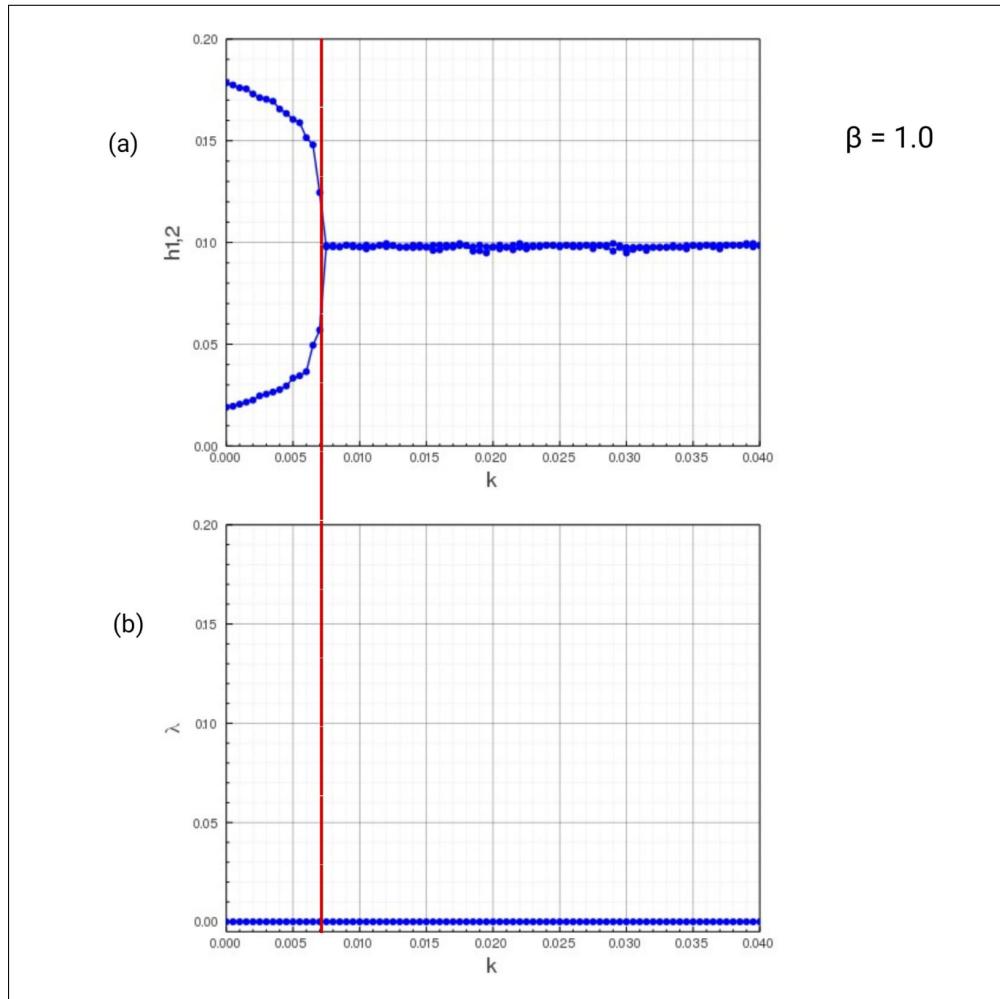


Fonte: (Próprio autor)

tempo de integração total de 2000,0 para cada valor de k , foram realizadas para diferentes valores do parâmetro β utilizando-se das mesmas técnicas de visualização das órbitas no espaço de fases. Para todos os valores de β , observou-se, o mesmo valor nulo para o MCL, conforme a Figura 11 (b). Ou seja, o parâmetro de assimetria não faz com que as órbitas evoluam para uma dinâmica caótica, pelo menos para esse conjunto específico de condições iniciais. Uma hipótese sobre isso, é que o termo é muito pequeno, pois o comportamento de assimetria se traduz também na deformação assimétrica das órbitas no espaço de fases. Isso se manifesta, de forma gradativa, ocorrendo de forma aqui mais pronunciada para o caso em que o valor de $\beta = 1,0$, conforme mostra a figura 12. A figura 11 (a) mostra que com um maior valor de $\beta = 1,0$ o valor do parâmetro crítico para o regime de sincronização de medidas (SM), diminuiu de $k_{cr} = 0,022$ ($\beta = 0,0$) para $k_{cr} = 0,007$ ($\beta = 1,0$).

Para o outro conjunto de condições iniciais adotadas, condições caóticas $\{q_1(0) =$

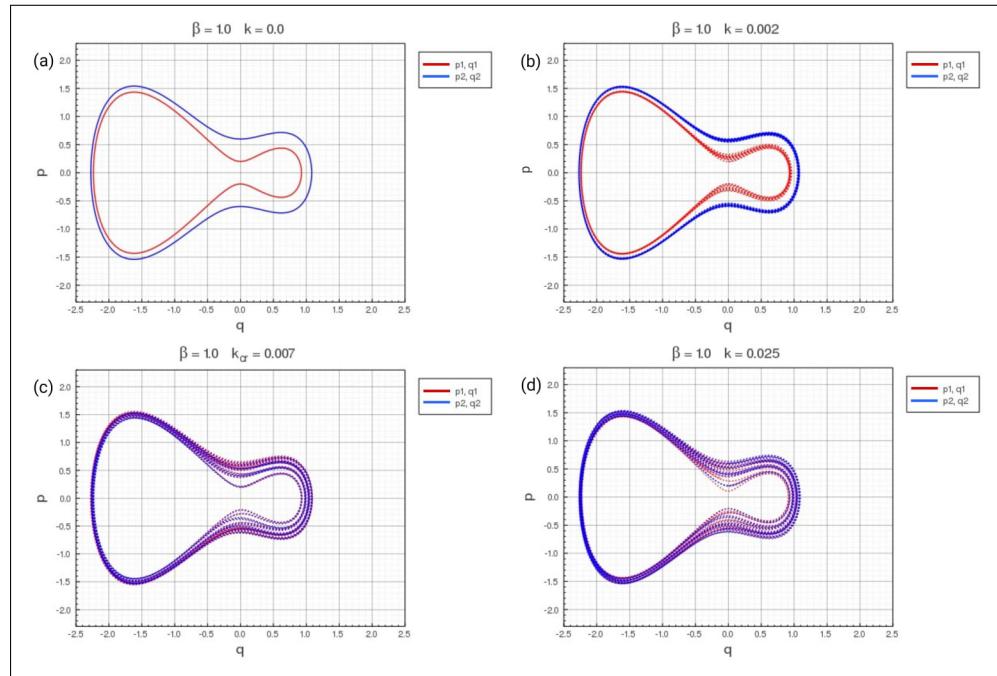
Figura 11 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 1,0$ e o conjunto I de condições iniciais.



Fonte: (Próprio autor)

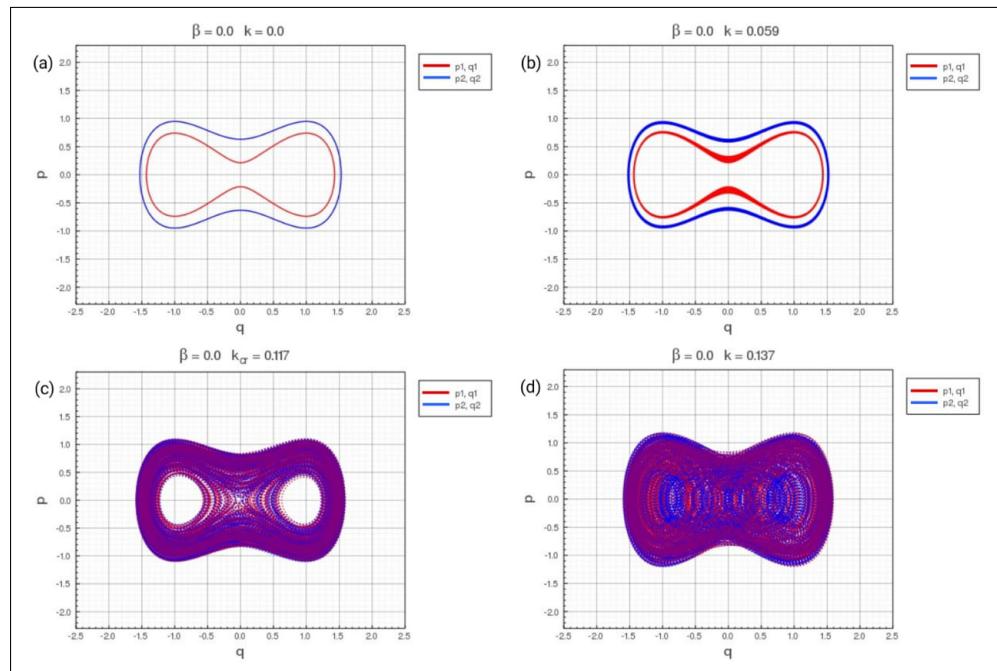
$q_2(0) = 0,0; p_1(0) = 0,0142; p_2(0) = 0,632\}$. Observa-se para todos os casos mostrados nas figuras correspondentes a evolução temporal das órbitas de cada subsistema (oscilador) para $k = 0,0$ com órbitas periódicas, depois para outros valores de k (inclusive, para valores de k_{cr} , isto é, mesmo após ser alcançada a transição ao estado de sincronização de medidas) as órbitas possuem uma dinâmica quasi-periódica, com o máximo expoente característico de Lyapunov nulo (ver figuras - figura 19, figura 20, figura 21, figura 22, figura 23 e figura 24). Destaca-se que a transição para uma dinâmica caótica é observado em todos os casos, porém depois de atingido o estado de sincronização de medidas. Conforme observado para o conjunto anterior de condições iniciais, o valor crítico para que se alcance o estado de (SM), diminui conforme o valor de β aumenta, além da deformação gradativa das regiões visitadas pelas órbitas no espaço de fase com o aumento do valor do parâmetro de assimetria β . Um outro interessante efeito, relacionado à transição da dinâmica quasi-periódica para a dinâmica caótica é bastante perceptível (ver

Figura 12 – Espaço de fases para sistema com conjunto I de condições iniciais com $\beta = 1,0$.



Fonte: (Próprio autor)

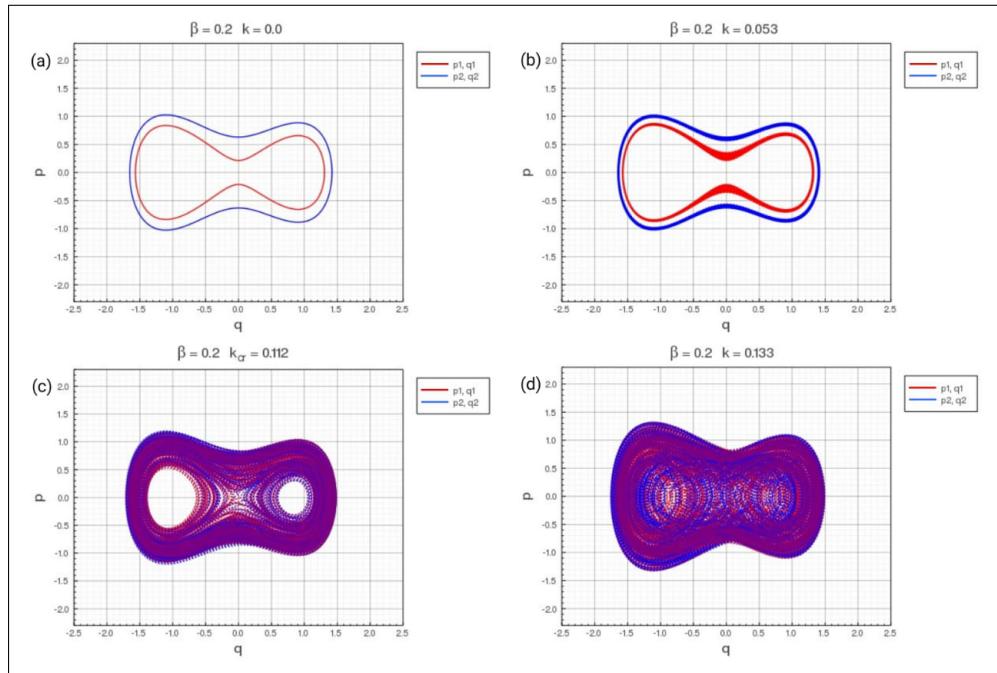
Figura 13 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,0$.



Fonte: (Próprio autor)

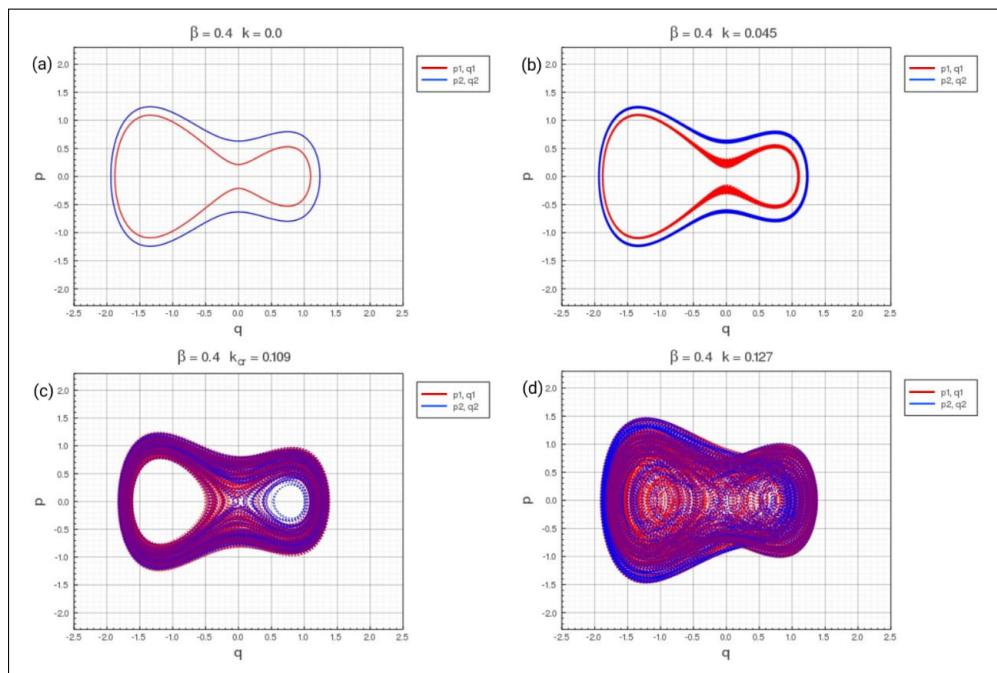
figuras - figura 13, figura 14, figura 15, figura 16, figura 17 e figura 18), para esse conjunto de condições iniciais: A medida em que o valor de β aumenta, o valor de k em que ocorre um salto

Figura 14 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,2$.



Fonte: (Próprio autor)

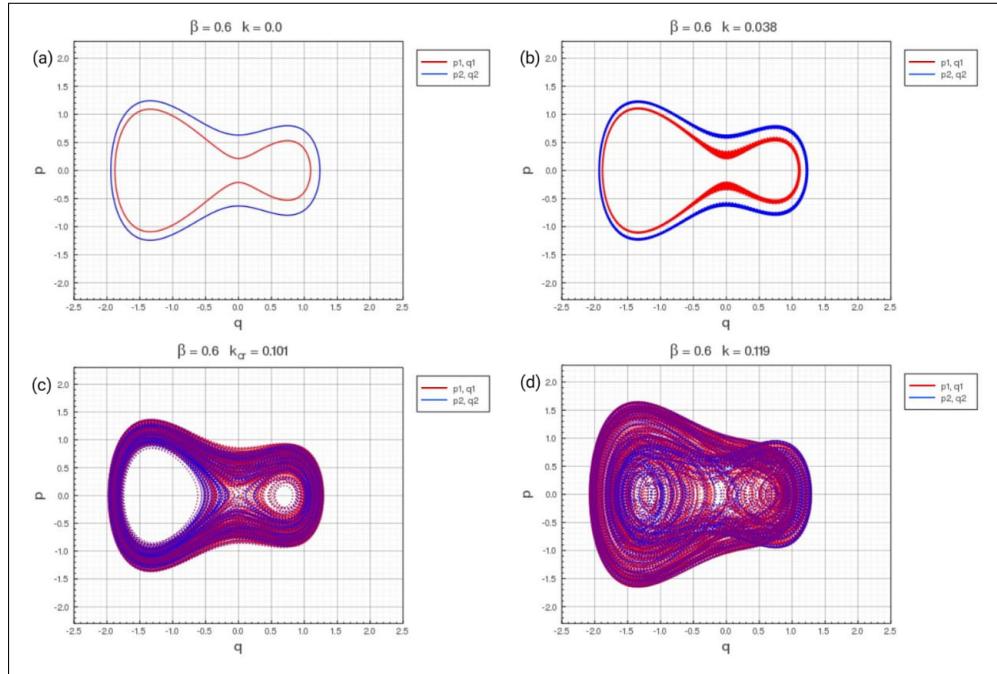
Figura 15 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,4$.



Fonte: (Próprio autor)

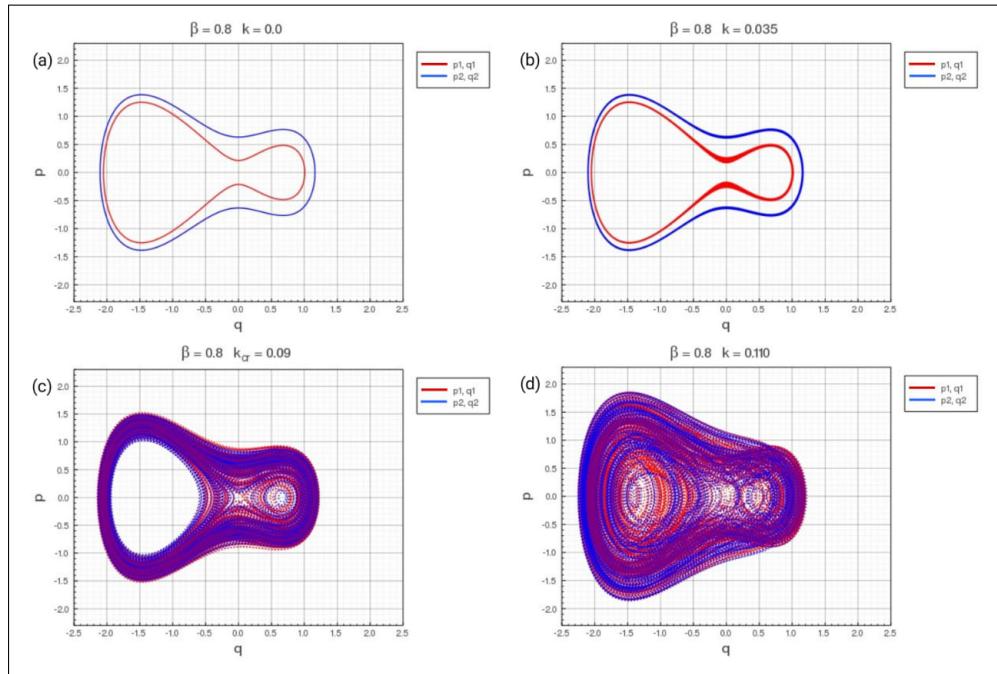
de um expoente nulo para um expoente positivo (indicativo de uma dinâmica caótica) diminui. Importante lembrar que essa transição para a dinâmica caótica ocorre após o valor critico de k

Figura 16 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,6$.



Fonte: (Próprio autor)

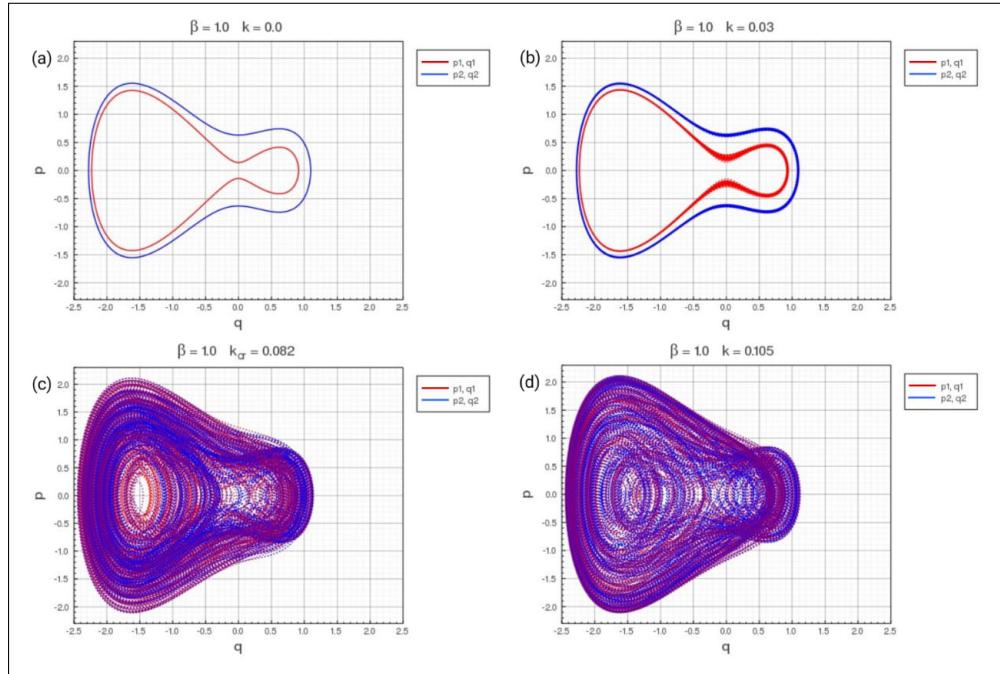
Figura 17 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 0,8$.



Fonte: (Próprio autor)

ser atingido, mas vai se aproximando cada vez mais do valor de k crítico para cada valor de β , na medida em que o valor desse parâmetro de assimetria na energia potencial aumenta. Isso fica

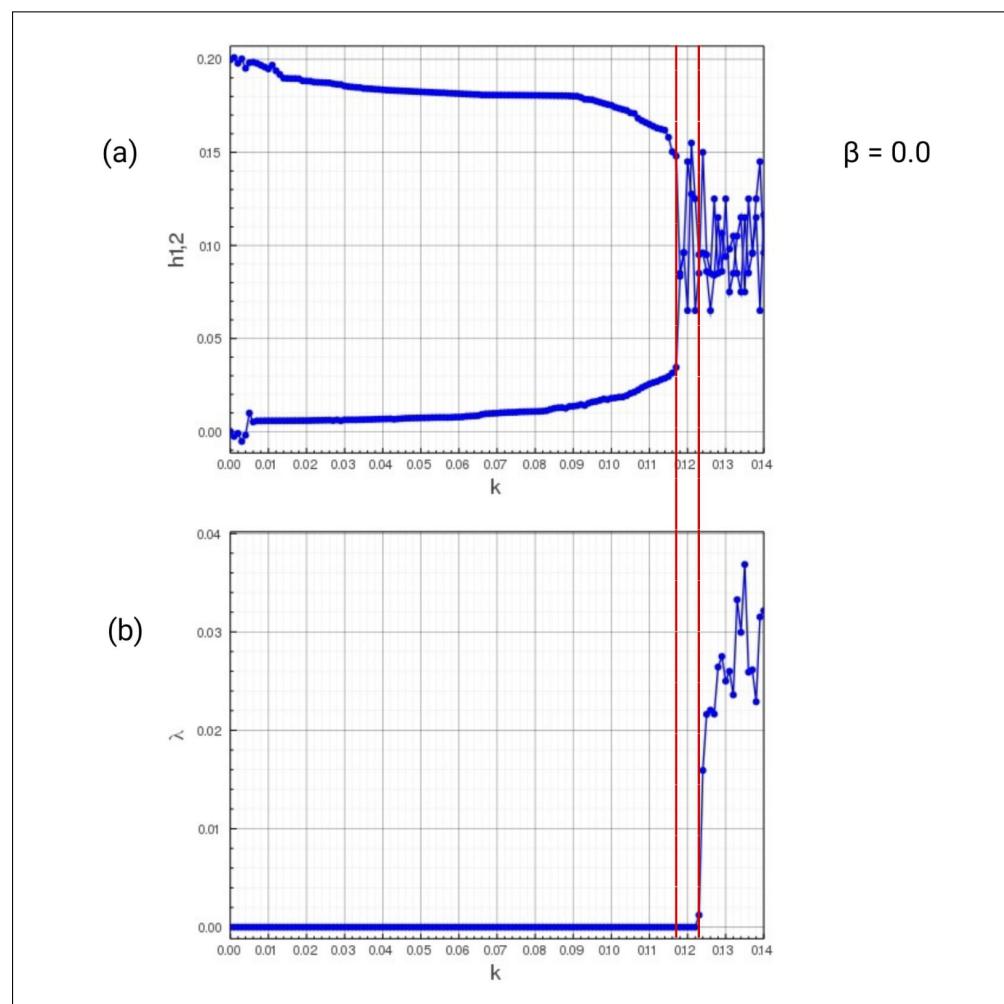
Figura 18 – Espaço de fases para sistema com conjunto II de condições iniciais com $\beta = 1,0$.



Fonte: (Próprio autor)

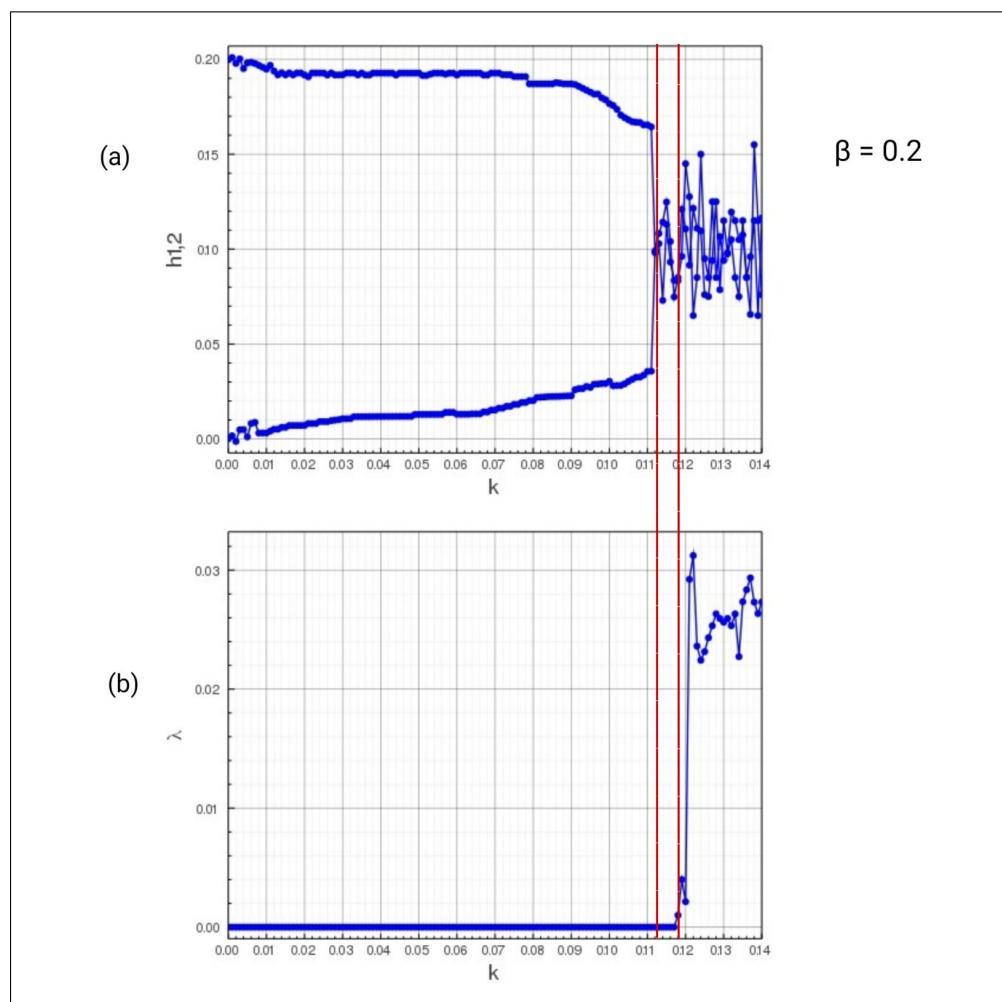
mais evidente para os valores de $\beta = 0,8$ e $\beta = 1,0$, conforme mostrado nas separações em vermelhos nas figuras contendo os gráficos de médias de energias individuais que evidenciam a transição à sincronização de medidas e os gráficos que mostram o salto nos expoentes máximos de Lyapunov (figura 23 e figura 24). Em outras palavras observa-se que a assimetria na energia potencial dos elementos individuais faz com que, pelo menos para esse conjunto de condições iniciais, haja uma tendência de aproximação entre a transição do estado de sincronização de medidas e a transição entre a evolução temporal de uma dinâmica quasi-periódica para uma dinâmica caótica. Sugerindo-se uma rota para controle de caos no sistema por meio da variação dos dois parâmetros, destaca-se que essa rota e método é inédita. Uma proposta de controle diferente foi trabalhada em (WANG; YING; HU, 2002).

Figura 19 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,0$ e o conjunto II de condições iniciais



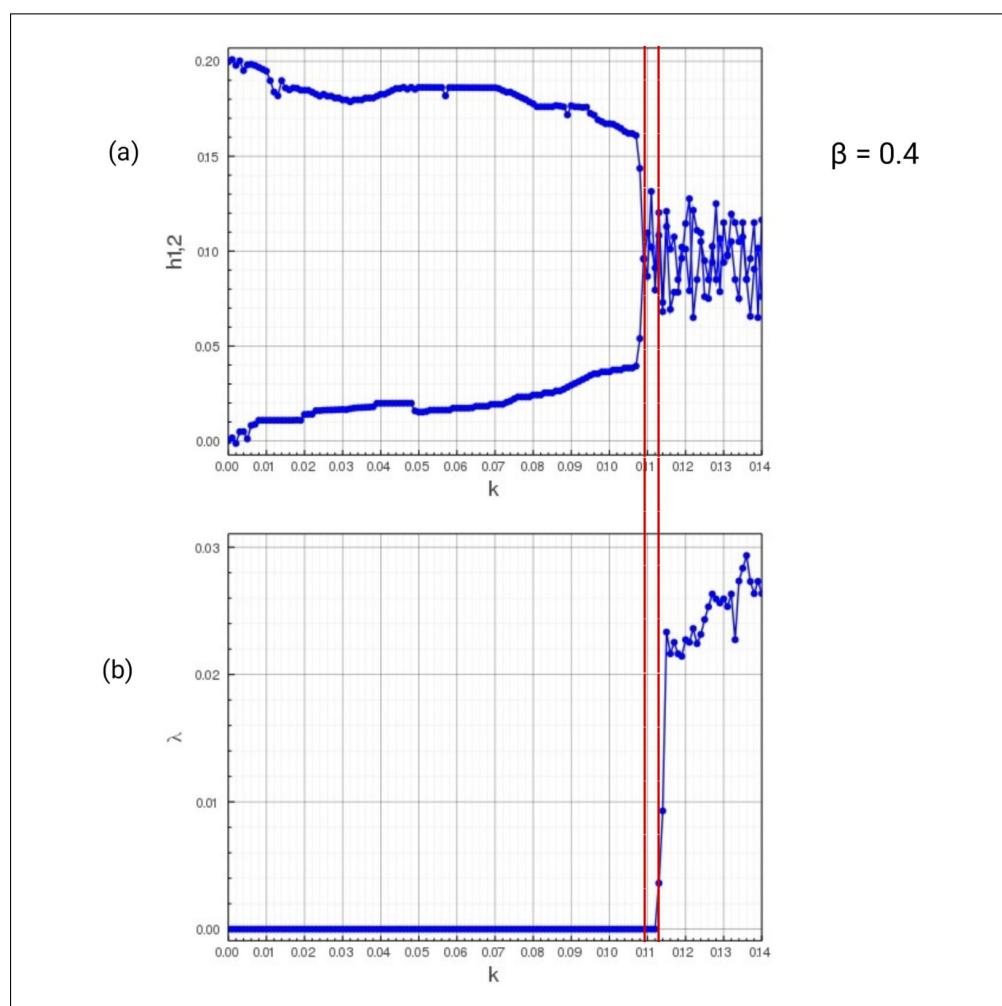
Fonte: (Próprio autor)

Figura 20 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,2$ e o conjunto II de condições iniciais.



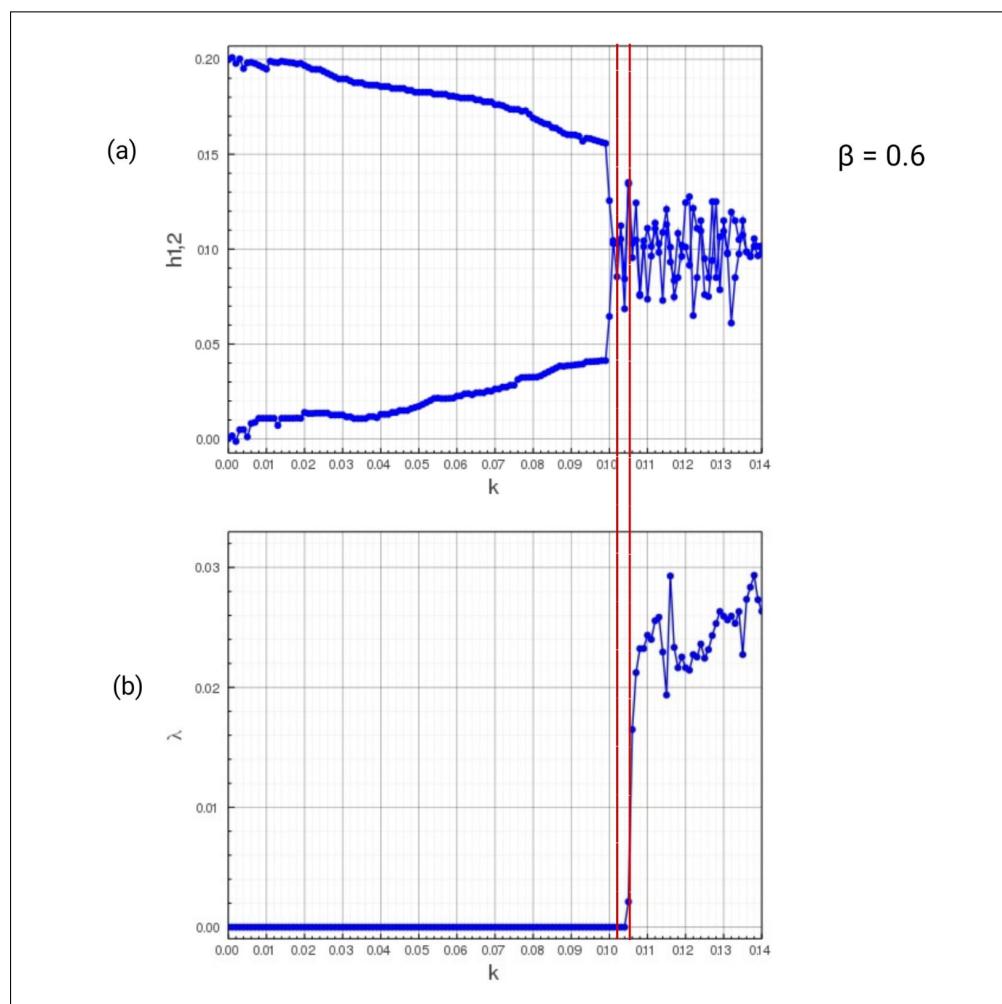
Fonte: (Próprio autor)

Figura 21 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,4$ e o conjunto II de condições iniciais.



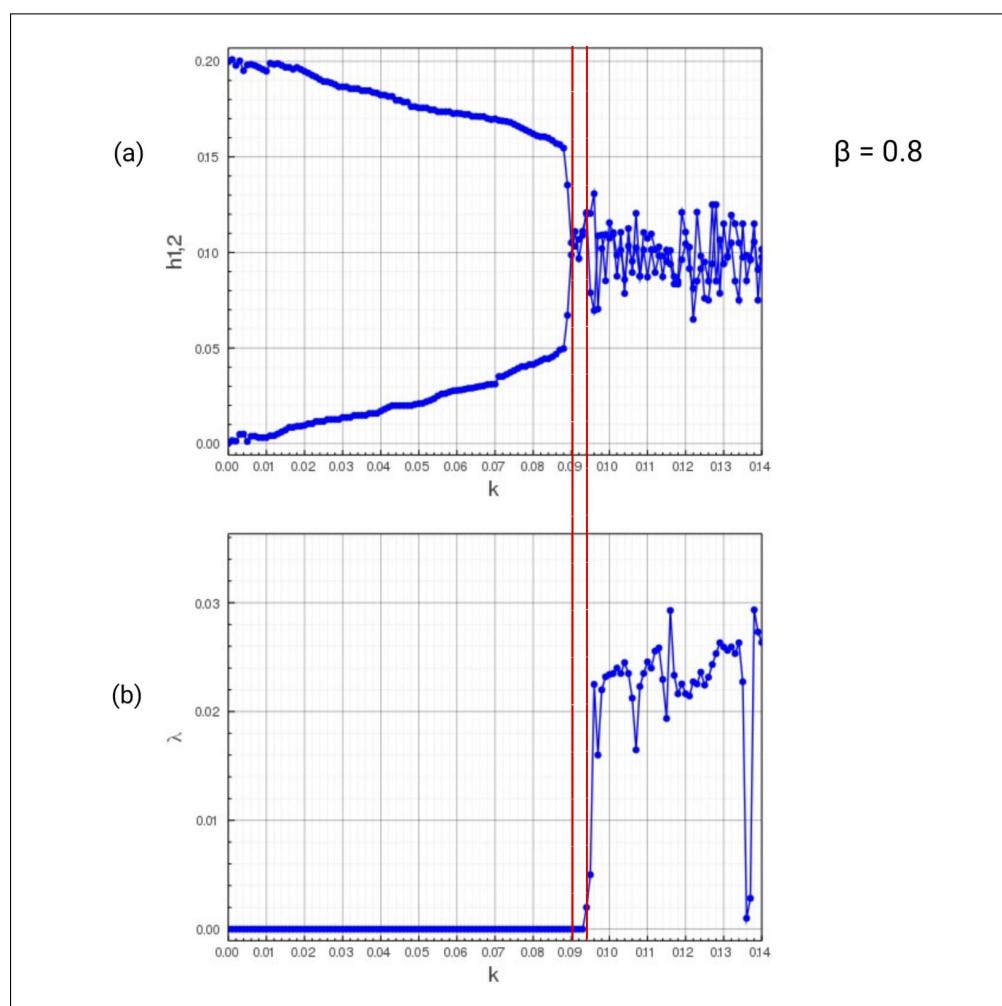
Fonte: (Próprio autor)

Figura 22 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,6$ e o conjunto II de condições iniciais.



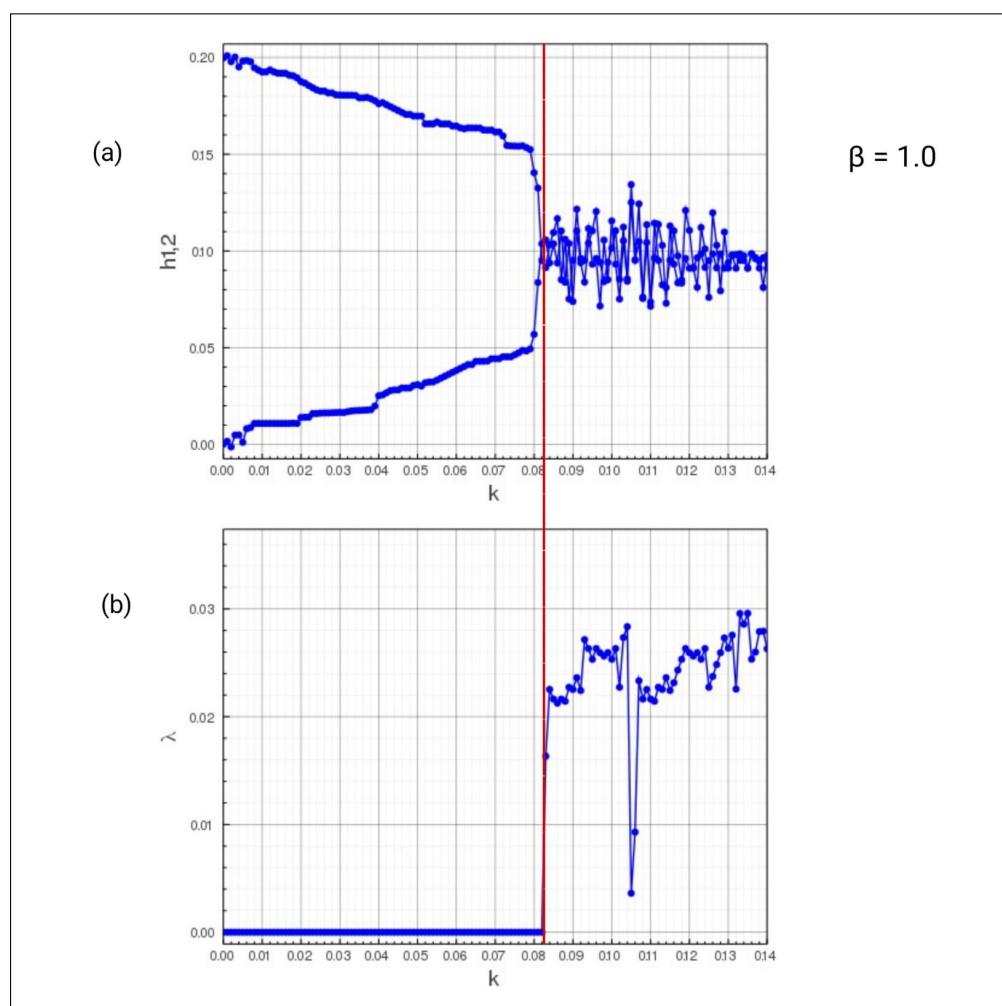
Fonte: (Próprio autor)

Figura 23 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 0,8$ e o conjunto II de condições iniciais.



Fonte: (Próprio autor)

Figura 24 – (a) Gráficos das energias médias (b) Gráfico do máximo expoente de Lyapunov para $\beta = 1,0$ e o conjunto II de condições iniciais.



Fonte: (Próprio autor)

6 CONCLUSÃO

Ao longo do presente trabalho, uma caracterização numérica e qualitativa da dinâmica não linear de sistemas hamiltonianos de Duffing conservativos acoplados sem e com assimetria na função da energia potencial para cada elemento foi realizada. Observaram-se os aspectos da dinâmica não linear de sistemas hamiltonianos com o uso das ferramentas numéricas adequadas (método de integração simplético, cálculo do máximo expoente característico de Lyapunov, gráficos do tipo forquilha para determinação do valor do parâmetro de acoplamento crítico), como essa dinâmica é influenciada pelas condições iniciais e também pelos parâmetros de acoplamento e assimetria, conservando a energia total de todo o sistema. Assim, uma distribuição diferente de energia para cada elemento individual provoca ao longo de uma variação gradativa dos parâmetro de acoplamento comportamentos dinâmicos diferentes. Ocorre, como já observado na literatura (VINCENT, 2005), a evolução de órbitas inicialmente periódicas para órbitas quasi-periódicas ou de um conjunto de órbitas periódicas passando por uma fase de órbitas quasi-periódicas para órbitas caóticas. Isso pode ocorrer em compasso ou não, com o efeito da sincronização de medidas (SM), característica da dinâmica dos elementos individuais que atingem um estado em que as órbitas de cada sistema individual varrem o mesmo espaço de fases, conforme foi aqui observado e discutido na seção de resultados e discussão (citar a seção). Determinaram-se diferentes valores de parâmetros críticos para os estados de sincronização de medidas de forma similar ao encontrado anteriormente na literatura (VINCENT, 2005).

Um resultado interessante e que se destaca, foi a influência da quebra de simetria em relação a origem na energia potencial de cada elemento, através do parâmetro perturbativo β . A variação desse parâmetro para o conjunto de transição de órbitas periódicas para quasi-periódicas com a sincronização de medidas, não alterou a mudança de periodicidade-quasi-periodicidade para estados caóticos, apenas houve uma redistribuição das componentes internas das energias individuais, deformando as regiões compactas no espaço de fases e também mudando os parâmetros de acoplamentos críticos para o estado de transição de sincronização de medidas. Já para o conjunto de condições que levam a transição de estados periódicos-quasiperiódicos-caóticos, observou-se a deformação das regiões no espaço de fases, a variação dos parâmetros críticos e o mais interessante, foi que ao se variar o parâmetro de assimetria, os estados quasi-periódicos foram transitando para caóticos cada vez mais próximos do ponto crítico correspondente à transição de sincronização de medidas, isto é, à medida em que β aumenta, observa-se uma maior correspondência de $k_c r$ com a transição quasi-periódica para caótica (observada pelo

salto do maior expoente característico de Lyapunov de zero - estado dinâmico quasi-periódico - para uma valor positivo - estado de dinâmica caótica). Essa efeito do parâmetro de assimetria, é interessante, pois pode servir como uma forma de controle de da dinâmica caótica com o parâmetro crítico de sincronização de medidas para sistemas dinâmicos hamiltonianos que podem ter esse descompasso entre o estado de sincronização de medidas e transição de uma dinâmica quasi-periódica para uma dinâmica caótica, o que abre uma perspectiva para aplicações em diversos sistemas descritos por hamiltonianos clássicos com essas características.

Finalmente, destaca-se o alcance dos métodos da dinâmica não linear se apresentaram de forma muito clara neste trabalho, em que sistemas de poucos graus de liberdade e descritos por equações diferenciais, aparentemente simples, apresentam comportamentos dinâmicos complexos com uma variação na forma como a energia de cada elemento pode ser distribuída obedecendo a regra da conservação da energia total característica dos sistemas hamiltonianos autônomos.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, M. **Tópicos de mecânica clássica**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. **Meccanica**, Springer, v. 15, n. 1, p. 9–20, 1980.
- BRIN, M. **Introduction to dynamical systems**. Cambridge, U.K New York: Cambridge University Press, 2002.
- BUCK, J. Synchronous rhythmic flashing of fireflies. II. **The Quarterly Review of Biology**, University of Chicago Press, v. 63, n. 3, p. 265–289, set. 1988.
- BUZSÁKI, G.; DRAGUHN, A. Neuronal oscillations in cortical networks. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 304, n. 5679, p. 1926–1929, jun. 2004.
- FERRARA, N. **Caos : uma introdução**. São Paulo: Blucher, 1994.
- FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press (OUP), v. 69, n. 1, p. 32–47, jan. 1983.
- GHOSH, A.; SHAH, T.; CHAKRABORTY, S. Occasional uncoupling overcomes measure desynchronization. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, AIP Publishing LLC, v. 28, n. 12, p. 123113, 2018.
- GUPTA, S.; DE, S.; JANAKI, M.; IYENGAR, A. S. Exploring the route to measure synchronization in non-linearly coupled hamiltonian systems. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, AIP Publishing LLC, v. 27, n. 11, p. 113103, 2017.
- HAMPTON, A.; ZANETTE, D. H. Measure synchronization in coupled hamiltonian systems. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 83, n. 11, p. 2179–2182, set. 1999.
- HIRSCH, M. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. San Diego: Elsevier Science, 2012.
- HU, B.; LI, B.; ZHAO, H. Heat conduction in one-dimensional nonintegrable systems. **Physical Review E**, APS, v. 61, n. 4, p. 3828, 2000.
- HYUGENS, C. **Horologium oscillatorium sive de motu pendolorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae**. [S.l.]: apud F. Muguet, 1673.
- LEMOS, N. **Mecânica analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- LEYVA, I.; ALLARIA, E.; BOCCALETTI, S.; ARECCHI, F. T. In phase and antiphase synchronization of coupled homoclinic chaotic oscillators. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, AIP Publishing, v. 14, n. 1, p. 118–122, mar. 2004.
- LICHENBERG, A.; LIEBERMAN, M. **Regular and stochastic motion**. New York: Springer-Verlag, 1983. ISBN 0-387-90707-6.
- MCLACHLAN, R. I.; ATELA, P. The accuracy of symplectic integrators. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 5, n. 2, p. 541, 1992.

- MONTEIRO, L. **Sistemas dinâmicos**. São Paulo (SP: Livraria da Física, 2011.
- NETO, J. **Mecânica newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 64, n. 8, p. 821–824, fev. 1990.
- PIKOVSKY, A. **Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- POINCARÉ, H. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1899. v. 3.
- RACKAUCKAS, C.; NIE, Q. Differentialequations.jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia. **Journal of Open Research Software**, Ubiquity Press, v. 5, n. 1, 2017.
- REICHL, L. E.; ZHENG, W. M. Field-induced barrier penetration in the quartic potential. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 29, n. 4, p. 2186–2193, abr. 1984.
- STROGATZ, S. **Nonlinear dynamics and Chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. Reading, Mass: Addison-Wesley Pub, 1994.
- STUCHI, T. Symplectic integrators revisited. **Brazilian Journal of Physics**, FapUNIFESP (SciELO), v. 32, n. 4, p. 958–979, dez. 2002.
- TAYLOR, J. **Mecânica Clássica**. sn: Bookman, 2013.
- VINCENT, U. E. Measure synchronization in coupled duffing hamiltonian systems. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 7, p. 209–209, out. 2005.
- WANG, X.; HU, G.; HU, K.; LAI, C.-H. Transition to measure synchronization in coupled hamiltonian systems. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 17, n. 22n24, p. 4349–4354, 2003.
- WANG, X.; YING, Z.; HU, G. Controlling hamiltonian systems by using measure synchronization. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 298, n. 5-6, p. 383–387, 2002.
- WANG, X.; ZHAN, M.; LAI, C.-H.; GANG, H. Measure synchronization in coupled hamiltonian systems. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 67, n. 6, jun. 2003.
- ZANETTE, D. H.; MIKHAILOV, A. S. Complex behavior of globally coupled hamiltonian elements. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 235, n. 2, p. 135–138, 1997.
- ZENI, A. R.; GALLAS, J. A. Lyapunov exponents for a duffing oscillator. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier BV, v. 89, n. 1-2, p. 71–82, dez. 1995.
- ZHANG, J.-R.; JIANG, H.; YANG, Y.; DUAN, W.-S.; CHEN, J.-M. Synchronization and phase transition in the frenkel–kontorova-type model system. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 86, n. 6, p. 065602, 2012.
- ZHENG, Z.; HU, G. Generalized synchronization versus phase synchronization. **Physical Review E**, American Physical Society (APS), v. 62, n. 6, p. 7882–7885, dez. 2000.