

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA TIERRA Y ASTROFÍSICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FTA21

Elaboración de un modelo numérico de interior estelar

Development of a stellar-interior numerical model

Supervisor/es: Sergio Pascual / Nicolás Cardiel

Raúl Rebollo Añover

Grado en Física

Curso académico 2021-22

Convocatoria Ordinaria

Resumen:

Construcción de un modelo numérico de interior estelar dados unos parámetros constantes (masa total y fracciones en masa de hidrógeno y helio) y unos valores iniciales (radio y luminosidad totales y temperatura central). A partir de las ecuaciones fundamentales para las fases convectiva y radiativa, se integran numéricamente siguiendo un método mixto para encontrar el error relativo mínimo en la unión entre fases.

El modelo se construye programando en Python. El método se lleva a cabo a través de capas. Se integra primero desde la superficie hacia el centro. En una segunda integración se invierte el sentido. Se unen las soluciones en la frontera entre fases y se minimiza el error variando la temperatura central. A continuación se repite el proceso variando el radio y la luminosidad total mediante intervalos. Alrededor del par de valores más óptimo, se centra un intervalo menor para encontrar una solución más precisa. Se vuelve a repetir este paso para dar con los valores definitivos del radio total, luminosidad total y temperatura central.

Con los valores finales, se genera un modelo completo del interior para esa estrella. Se obtienen la presión, la temperatura, la luminosidad y la masa para las distintas capas creadas para el modelo, y, en definitiva, en función del radio. Con estos datos puede utilizarse el modelo para comprobar cómo afectan los diferentes parámetros a las distintas magnitudes de la estrella o comparar con estrellas reales.

El código está disponible en el [repositorio de GitHub](#) [1].

Abstract:

Development of a stellar-interior numerical model given a set of constant parameters (total mass, hydrogen and helium mass fractions) and three initial values (total radius, total luminosity and core temperature). Starting from the fundamental equations for the convective and radiative phases, they are integrated numerically following a mixed method to find the minimum total relative error in the inter-phase junction.

Python is the language selected for the construction of the model. The method is carried out by layering. First, it is integrate from the surface to the core. In a second integration the direction is reversed. Solutions are joined at the boundary between phases and the total relative error is minimized by varying the core temperature. Then, the process is repeated but now modifying total radius and total luminosity. With the help of intervals, a couple of values are found and another interval is centered around the solutions to find a more accurate solution. This step is taken again to obtain the final values for total radius, total luminosity and core temperature.

With the final values, a complete model of the interior is generated for that star. Pressure, temperature, luminosity and mass are obtained for the different layers created, and ultimately as a function of radius. With these data, the model can be used to study how the different parameters can affect the different magnitudes of the star or to compare with real stars.

The code is available in the [GitHub repository](#) [1].

Índice

1. INTRODUCCIÓN	2
1.1. Objetivo e hipótesis de partida	2
1.2. Introducción al método	2
2. METODOLOGÍA	2
2.1. Peso molecular medio	3
2.2. Ritmo de generación de energía	4
2.3. Algoritmo Predictor-Corrector	5
2.4. Método de diferencias	5
2.5. Integración desde la superficie	6
2.5.1. Envoltura radiativa	6
2.5.2. Núcleo convectivo	8
2.5.3. Frontera en la primera integración	8
2.6. Integración desde el centro	8
2.6.1. Fase convectiva	8
2.6.2. Frontera en la segunda integración	10
2.7. Ajuste en la frontera entre fases y mejora del error	10
2.8. Ajustar el modelo variando R_{tot} y L_{tot}	10
2.9. Modelo completo	11
3. RESULTADOS	11
3.1. Parámetros constantes y valores iniciales	11
3.2. Puesta en marcha del modelo	11
4. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES	16
4.1. ¿Eso es todo? Exprimiendo el código	17
4.1.1. Comparación con ejemplos reales	17
4.1.2. Jugando con los parámetros iniciales	18
5. VALORACIÓN TÉCNICA Y PERSONAL DEL TRABAJO	19

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Objetivo e hipótesis de partida

El trabajo que se va a exponer busca encontrar un modelo numérico de interior estelar para unos valores de masa total M_{tot} y composición química $\{X, Y\}$ dados. Para ello, se empleará Python como lenguaje de programación debido a la gran cantidad de recursos que ofrece.

La estrella en cuestión contará con una envoltura radiativa y su núcleo será convectivo. Como cabe esperar ante un modelo numérico de un fenómeno tan complejo, se tomarán hipótesis para hacer algo más sencillo el trabajo:

1. Modelo homogéneo. Esto es, la composición química constante.
2. Material totalmente ionizado. Además, el peso molecular, μ , será constante.
3. Se tomará la ecuación de estado de los gases ideales no degenerados.
4. La convección será adiabática

1.2. Introducción al método

El método utilizado es un método mixto compuesto por dos integraciones. La primera de ellas es una integración desde la superficie hacia el interior; la segunda, en sentido opuesto. Se unen ambas en lo que marcará la frontera entre las fases radiativa y convectiva. Esto es posible a que los valores en los límites son conocidos, por lo que sólo será necesario introducir al método unos valores iniciales para la temperatura central T_c , radio total R_{tot} y luminosidad total L_{tot} .

Para cada integración se tomarán las ecuaciones fundamentales correspondientes a los casos radiativo y convectivo [9]. Se utilizarán también distintos algoritmos para tratar la envoltura y el núcleo. Debido a todo esto, en el punto intermedio, en la frontera entre las distintas fases, la unión de ambos métodos deberá ser tratada para distintos valores de la temperatura central y ajustarla lo mejor posible para obtener un error relativo mínimo e intentar se lo más fiel a lo que ocurre realmente en una estrella real.

Por lo que resumiendo, el método busca, a partir de unos valores iniciales para T_c , R_{tot} y L_{tot} , una solución que minimice el error relativo.

2. METODOLOGÍA

Como se ha comentado, el lenguaje de programación es Python. Esto marcará el flujo de trabajo y la manera en la que el código estará dividido en bloques para hacer más fácil su comprensión en caso de que haya errores. Además, gracias al alto número de recursos que pueden encontrarse en internet, Python resulta un lenguaje bastante intuitivo para adentrarse por primera vez en la programación.

El proceso que a continuación se va a explicar se ha realizado como modelo prueba con un conjunto de valores para los parámetros constantes $\{M_{tot}, X, Y\}$ e iniciales $\{T_c, R_{tot}, L_{tot}\}$. Pueden tomarse los propuestos en el guion [10] y los resultados a obtener para ir comprobando el correcto funcionamiento del código. Es lo más recomendable si se quiere reproducir este trabajo desde cero.

Magnitud	Símbolo	Unidad
Radio	r	10^{10} cm
Presión	P	10^{15} din cm $^{-2}$
Temperatura	T	10^7 K
Masa	M	10^{33} g
Luminosidad	L	10^{33} erg s $^{-1}$
Densidad	ρ	g cm $^{-3}$
Generación Energía	ε	erg g $^{-1}$ s $^{-1}$
Opacidad	$\bar{\kappa}$	cm

Tabla 1: Unidades a emplear en el modelo. Tabla extraída del guion [10] (página 4).

Por comodidad y eficiencia a la hora de trabajar, se adoptará un sistema de unidades para el modelo. El sistema de unidades es el *c.g.s.* con las unidades que se indican en la Tabla 1. Las ecuaciones fundamentales que se van a integrar y que van a permitir obtener la masa, la presión, la luminosidad y la temperatura son:

■ Caso radiativo

$$\frac{dM(r)}{dr} = C_m \frac{P}{T} r^2 \quad C_m = 0.01523\mu \quad (1)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -C_p \frac{P}{T} \frac{M}{r^2} \quad C_p = 8.084\mu \quad (2)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = C_l P^2 T^{\nu-2} r^2 \quad C_l = 0.01845\varepsilon_1 X_1 X_2 10^\nu \mu^2 \quad (3)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -C_t \frac{P^2}{T^{8.5}} \frac{L}{r^2} \quad C_t = 0.01679Z (1 + X) \mu^2 \quad (4)$$

■ Caso convectivo

$$\frac{dM(r)}{dr} = C_m K' T^{1.5} r^2 \quad C_m = 0.01523\mu \quad (5)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -C_p K' T^{1.5} \frac{M}{r^2} \quad C_p = 8.084\mu \quad (6)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = C_l K'^2 T^{3+\nu} r^2 \quad C_l = 0.01845\varepsilon_1 X_1 X_2 10^\nu \mu^2 \quad (7)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -C'_t \frac{M}{r^2} \quad C'_t = 3.234\mu \quad (8)$$

Para el caso convectivo se han relacionado la presión y la temperatura en un polítropo

$$P = K' T^{\gamma/(\gamma-1)} = K' T^{2.5} \quad (9)$$

imponiendo la cuarta hipótesis, que la convección es adiabática, siendo $\gamma = 3/5$ (gas perfecto monoatómico).

2.1. Peso molecular medio

Tomando las dos primeras hipótesis, el peso molecular medio se tomará constante durante todo el trabajo y puede expresarse como

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}, \quad (10)$$

siendo $Z = 1 - X - Y$.

ε_{pp}			ε_{CN}		
$T/10^6$	$\log_{10} \varepsilon_1$	ν	$T/10^6$	$\log_{10} \varepsilon_1$	ν
4.0 - 6.0	-6.84	6.0	12.0 - 16.0	-22.2	20
6.0 - 9.5	-6.04	5.0	16.0 - 22.5	-19.8	18
9.5 - 12.0	-5.56	4.5	22.5 - 27.5	-17.1	16
12.0 - 16.5	-5.02	4.0	27.5 - 36.0	-15.6	15
16.5 - 24.0	-4.40	3.5	36.0 - 50.0	-12.5	13

Tabla 2: Parámetros para el cálculo del ritmo de generación de energía según la temperatura y el ciclo en cuestión. Tabla extraída de Schwarzschild [12] (1965; página 83). La temperatura T está expresada en Kelvin

2.2. Ritmo de generación de energía

La generación de energía para este modelo vendrá producida por reacciones nucleares de dos ciclos: la cadena protón-protón (de ahora en adelante, PP) y del ciclo CN. Dependerá principalmente de la temperatura.

El ritmo de generación de energía viene dado por la expresión

$$\varepsilon = \varepsilon_1 X_1 X_2 \rho \left(\frac{T}{10^6} \right)^\nu, \quad (11)$$

con ε_1 , X_1 , X_2 y ν parámetros que dependen del ciclo de las reacciones nucleares que domine y de la temperatura. Los valores pueden verse en la Tabla 2. Para el ciclo pp se tiene $X_1 = X_2 = X$; mientras que para el ciclo CN, $X_1 = X$ y $X_2 = \frac{1}{3}Z$. Para tener estos valores durante el trabajo puede optarse por una de las dos siguientes opciones: crear un fichero con estos datos para luego leerlo; o construir cuatro vectores, dos por ciclo, que guarden los datos y acudir a ellos durante el trabajo. El elegido para este proyecto ha sido el segundo.

Se construye para cada ciclo una función que, a partir de la temperatura y la presión, devuelva la energía producida por cada ciclo. Es importante introducir bien los condicionales *if* para los distintos rangos de temperatura. Una vez construidas estas funciones solo hará falta seleccionar el ciclo que genere más energía ya que el hidrógeno será consumido únicamente en uno de los dos ciclos (¡Cuidado! No se suman las energías de cada ciclo para obtener una energía total)

Tras este paso, es muy conveniente construir una función que, mediante la temperatura y la presión, obtenga los valores de ε_1 y ν para calcular la energía producida (Tabla 2). Esto hará que el trabajo más adelante sea mucho más eficiente y el código quede más limpio y organizado. Es necesario haber definido las funciones para cada ciclo, pues estos parámetros varían en función del ciclo empleado.

La densidad ρ , partiendo de la tercera hipótesis, se puede expresar de la forma

$$\rho = \frac{\mu}{N_A k} \frac{P}{T}, \quad (12)$$

tomando el número de Avogadro N_A y la constante de Boltzmann k en el sistema *c.g.s.*.

2.3. Algoritmo Predictor-Corrector

El algoritmo Predictor-Corrector es un algoritmo iterativo que permite averiguar si dos variable son aproximadamente iguales para continuar con el trabajo. Esto lo hace añadiendo una tolerancia entre los dos valores. En este caso, lo que se va a comparar son una magnitud calculada y una magnitud estimada. La comparación se hace de la siguiente manera: sea $x_{calculada}$ la magnitud calculada e $y_{estimada}$ la magnitud estimada, entonces

$$\frac{|x_{calculada} - y_{estimada}|}{x_{calculada}} < \text{Tolerancia}, \quad (13)$$

siendo la tolerancia un valor dado tan pequeño como precisión se quiera obtener. Para este trabajo se ha empleado que la tolerancia sea 0.001.

El algoritmo se encarga de dar la respuesta a la pregunta: ¿se cumple la desigualdad anterior? En caso afirmativo, la precisión exigida se ha logrado, por lo que puede continuarse trabajando en el siguiente paso. Por el contrario, si la respuesta es negativa, el algoritmo automáticamente impondrá $y_{estimada} = x_{calculada}$. Este algoritmo al estar implementado en ciertas partes del código donde se estará trabajando con bucles, hará que ciertos pasos se repitan hasta que la precisión pedida se alcance.

2.4. Método de diferencias

Para llevar a cabo las integraciones y poder resolver las ecuaciones diferenciales necesarias en el trabajo, se empleará el método seguido por Novotny [11] (1973; capítulo 8).

Esta integración requiere un intervalo regular h entre las capas consecutivas $(i, i + 1)$. Mediante un desarrollo en serie de Taylor se puede obtener la magnitud en cuestión integrada.

$$\frac{d\nu}{dz} \equiv f(z, \nu, w, \dots) \longrightarrow \nu_{i+1} = \nu_i + h \left(\frac{d\nu}{dz} \right)_i + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{d^2\nu}{dz^2} \right)_i + \dots \simeq \nu_i + h \left(\frac{d\nu}{dz} \right)_i = \nu_i + hf_i \quad (14)$$

Cuanto mayor sea el orden escogido, mayor será la precisión en el cálculo. Para este trabajo se ha elegido el segundo orden. Esto hace que se simplifique el problema de manera significativa ya que no es tan sencillo obtener derivadas terceras, cuartas, etc. La segunda derivada se va a calcular con el llamado método de diferencias. Tiene principalmente dos expresiones: una primera para hallar magnitudes estimadas y otra para magnitudes calculadas.

$$\nu_{i+1} = \nu_i + hf_i + \frac{1}{2} {}^1\Delta_i + \frac{5}{12} {}^2\Delta_i \quad \text{para magnitudes estimadas.} \quad (15)$$

$$\nu_{i+1} = \nu_i + hf_{i+1} - \frac{1}{2} {}^1\Delta_{i+1} - \frac{1}{12} {}^2\Delta_{i+1} \quad \text{para magnitudes calculadas.} \quad (16)$$

Estas dos expresiones se obtienen al imponer hf como un polinomio de grado igual al mayor orden de las diferencias a calcular y con

$$\begin{aligned} {}^1\Delta_i &= hf_i - hf_{i-1} \\ {}^1\Delta_{i+1} &= hf_{i+1} - hf_i \\ {}^2\Delta_i &= {}^1\Delta_i - {}^1\Delta_{i-1} = hf_i - 2hf_{i-1} + hf_{i-2} \\ {}^2\Delta_{i+1} &= {}^1\Delta_{i+1} - {}^1\Delta_i = hf_{i+1} - 2hf_i + hf_{i-1} \end{aligned}$$

Las expresiones (15) y (16) serán las utilizadas para obtener los valores de las distintas magnitudes para las sucesivas capas.

2.5. Integración desde la superficie

2.5.1. Envoltura radiativa

La integración desde la superficie es la primera de las dos integraciones que se harán, tal y como se ha comentado en la primera sección. Al ser la envoltura radiativa, las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) son las requeridas a continuación para integrar. Sin embargo, puede verse en (15) y (16) que son necesarios al menos los valores de tres capas.

La integración comenzará para un radio que no será el radio total, sino $R_{\text{ini}} = 0.9R_{\text{tot}}$. La integración se llevará a cabo a través de 100 capas, que iniciarán en $r = R_{\text{ini}}$ y acabarán en $r = 0$. El salto entre capa y capa será así

$$h = -\frac{R_{\text{ini}}}{100},$$

dando el signo negativo el sentido de integración.

Para almacenar los datos de los distintos parámetros se construyen vectores nulos de dimensión fija. En cada capa, esto es para cada posición dentro del vector, se irá sustituyendo el cero inicial por el valor correspondiente a cada parámetro. Puede obtenerse por otra vía: crear vectores vacíos e ir añadiendo los valores capa a capa. Este último camino es menos eficiente en cuanto a tiempo de ejecución del código, pues los distintos vectores con los que se trabaja van a estar siendo continuamente redimensionados. Por este motivo y otros que más tarde se comentarán en el capítulo 5, se opta por crear vectores nulos de dimensión fija.

Cerca de la superficie se pueden tomar los siguientes valores:

$$M(r) = M_{\text{tot}}, \quad L(r) = L_{\text{tot}},$$

pues mediante una aproximación, la densidad superficial es despreciable respecto a la de las regiones más interiores y porque, al no haber ningún mecanismo de producción de energía, la luminosidad no varía. Hay que recordar que en este modelo sólo nos centramos en dos ciclos de producción de energía (pp o CN), por lo que no hay forma otra de producir energía fuera de estos dos citados. Para la temperatura y la presión se toman

$$T = A_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\text{tot}}} \right), \quad A_1 = 1.9022\mu M_{\text{tot}} \quad (17)$$

$$P = A_2 T^{4.25}, \quad A_2 = 10.645 \sqrt{\frac{1}{\mu Z(1+X)} \frac{M_{\text{tot}}}{L_{\text{tot}}}} \quad (18)$$

Tras calcular los distintos parámetros para las tres primeras capas, se calculan las variaciones entre capa y capa para cada parámetro, es decir, f_i en (14). Estos son los gradientes. Al haber hecho la aproximación, f_i para la masa y la luminosidad es cero, mientras que para la presión y la temperatura se acudirá a (2) y (4). Estos valores se almacenan en vectores siguiendo el mismo proceso que se ha aplicado para los parámetros mencionados antes.

Una vez se han calculado las tres primeras capas, se puede integrar para el resto. Se hace uso del primer algoritmo, el Algoritmo A.1., mostrado en la Figura 1. Los bloques naranjas denotan pasos a ejecutar; mientras que los verdes indican además la toma de una decisión. Se conocen tanto los parámetros, así como sus gradientes en las tres primeras capas. Por lo que basta con construirse un código que concuerde con ese esquema. Dicho algoritmo está explicado detalladamente en el guion del trabajo [10] (página 11). Cabe hacer mención al paso 10, pues es el que detendrá el cálculo para la fase radiativa y la separará de la fase convectiva.

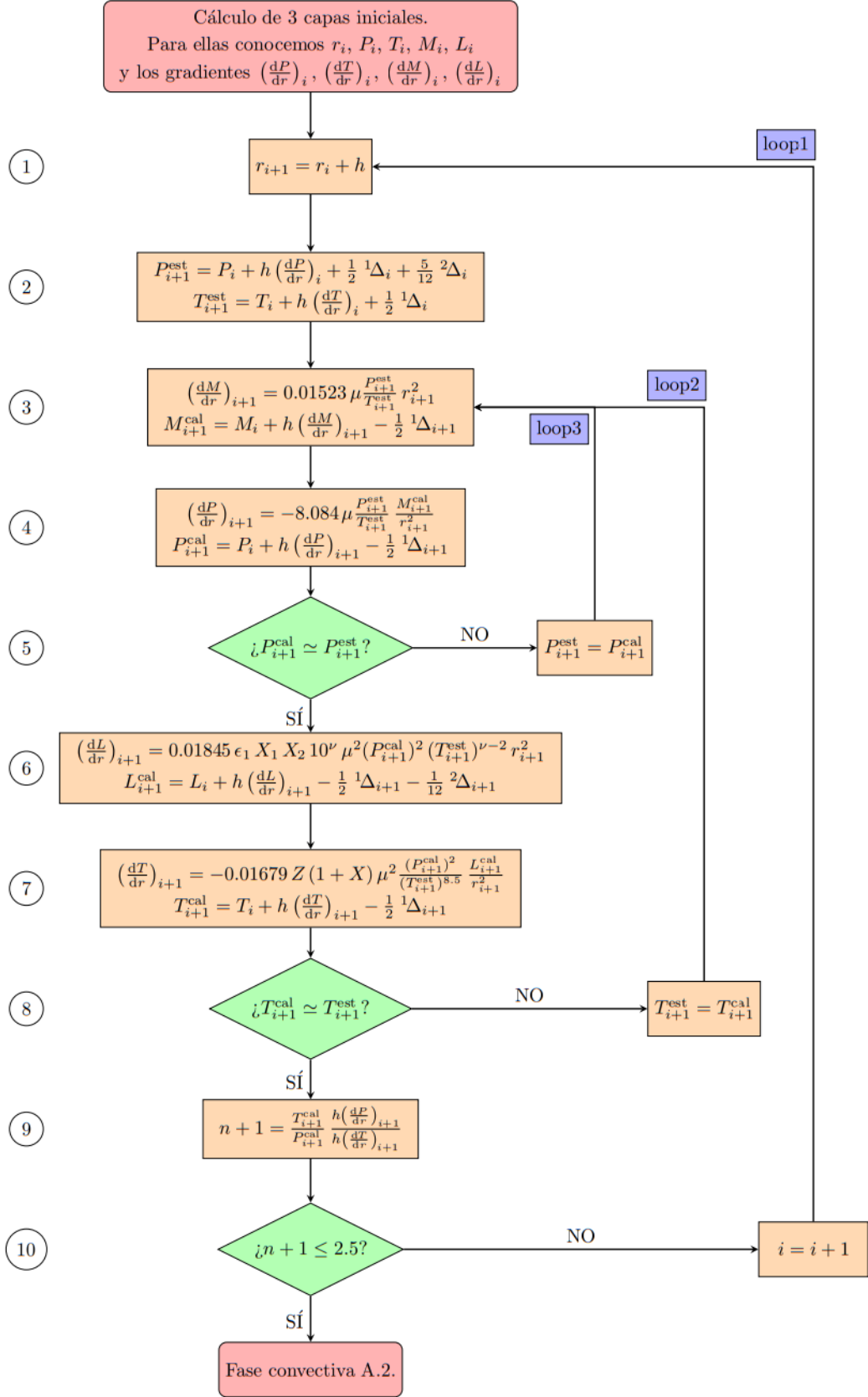


Figura 1: Algoritmo A.1. para la envoltura radiativa. Figura extraída del guion [10] (página 11)

2.5.2. Núcleo convectivo

Una vez se haya llegado a la fase convectiva, la primera capa cumplirá $n + 1 > 0$ y las ecuaciones a utilizar serán las reservadas al caso convectivo, es decir, las ecuaciones (5), (6), (7) y (8). Se necesita conocer la relación entre la presión y la temperatura en (9), pero basta con despejar K' e introducir los valores para la presión y la temperatura de esta primera capa convectiva para obtenerla. A partir de este momento, K' se considerará constante a lo largo de este modelo, que hay que recordar que es para unos valores dados de los tres parámetros constantes y los otros tres iniciales.

Como se conocen las tres capas anteriores, no hace falta calcular previamente otras tres, por lo que se pasa directamente a la integración a través del Algoritmo A.2., que puede verse en la Figura 2. Es suficiente con calcularse la primera capa para futuros cálculos, pero es muy recomendable integrar hasta el centro, hasta que $r = 0$, para comprobar que el código funciona correctamente. Nótese la insistencia en la puesta en práctica de un modelo prueba para ir chequeando la funcionalidad del código, ya que será fundamental cuando se quiera mejorar el error relativo y conseguir el objetivo último de este trabajo.

2.5.3. Frontera en la primera integración

El método mixto utilizado implica la unión de dos métodos de integración distintos. Esa unión tiene que ser lo más suave posible en caso de que se quiera obtener un modelo lo más realista posible. Es por esta razón por la que se calcula el valor del radio en el que las fases se unen. Este radio frontera se obtiene a través de una interpolación lineal para que $n + 1 = 2.5$, lo cual se da entre la última capa radiativa y la primera capa convectiva. Se realiza el mismo proceso para el resto de parámetros.

Los valores obtenidos son los datos en la frontera obtenidos en la primera integración, que serán los que más tarde se compararán para calcular el error relativo total.

2.6. Integración desde el centro

2.6.1. Fase convectiva

El proceso para calcular la fase radiativa, comenzando desde el centro, es similar al seguido para calcular la envoltura radiativa. La diferencia radica en las ecuaciones que se utilizarán y en los parámetros iniciales. Ahora, el salto entre capas h es positivo.

Las ecuaciones en este caso son (5), (6), (7) y (8). Inicialmente se parte de:

$$r = 0, \quad M = 0, \quad L = 0, \quad T = T_c$$

Para las sucesivas capas se tiene

$$M(r) = 0.005077 \mu K' T_c^{1.5} r^3 \quad (19)$$

$$L(r) = 0.006150 \varepsilon_1 X_1 X_2 10^\nu \mu^2 K'^2 T_c^{3+\nu} r^3 \quad (20)$$

$$T(r) = T_c - 0.008207 \mu^2 K' T_c^{1.5} r^2 \quad (21)$$

$$P(r) = K' [T(r)]^{2.5} \quad (22)$$

Se calculan las tres primeras capas y se aplica el Algoritmo A.2. (Figura 2). La integración debe parar en el radio para el cual comenzaba el núcleo convectivo en la primera integración. Se debe tener sumo cuidado con el “paso 7bis”, ya que al trabajar con decimales siempre hay que añadir una cierta tolerancia alrededor del cero. Se ha escogido una millonésima como tolerancia.

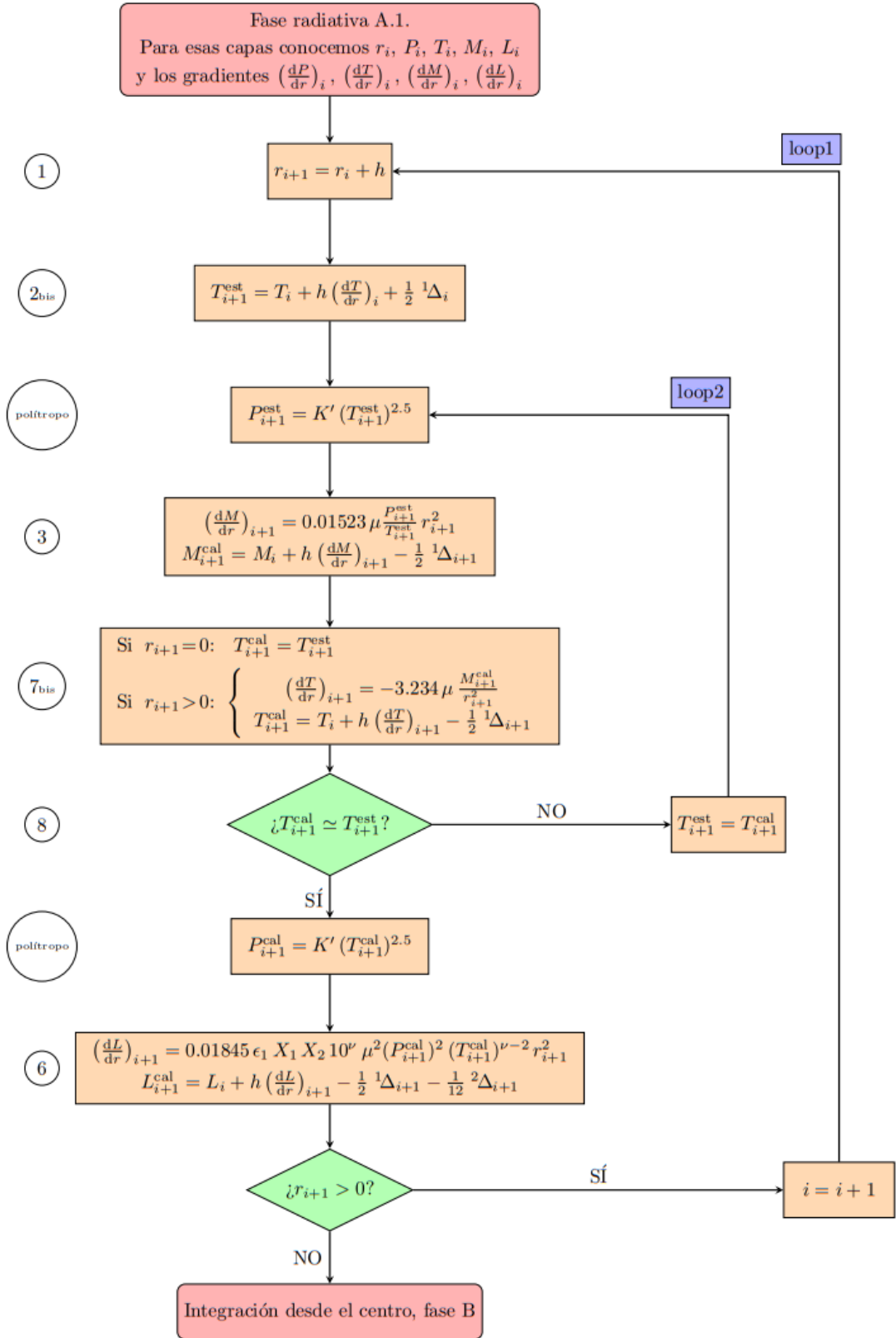


Figura 2: Algoritmo A.2. para la envoltura convectiva. Figura extraída del guion [10] (página 12)

2.6.2. Frontera en la segunda integración

Como se ha mencionado anteriormente, habrá que unir los resultados obtenidos con las dos integraciones en la frontera. Así, otra vez interpolando linealmente, pero esta vez entre las dos últimas capas de esta fase convectiva, se obtienen los valores en la frontera para el resto de parámetros.

2.7. Ajuste en la frontera entre fases y mejora del error

A la hora de unir los resultados obtenidos para la frontera por cada integración, se comparan los resultados. El nivel de precisión viene dado por el error relativo total, que no es más que la suma cuadrática de los errores relativos en cada uno de los parámetros: presión, temperatura, luminosidad y masa.

$$\begin{aligned} \text{Error relativo total} &= \sqrt{E_{\text{relativo}, P}^2 + E_{\text{relativo}, T}^2 + E_{\text{relativo}, L}^2 + E_{\text{relativo}, M}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{P_1 - P_2}{P_1}\right)^2 + \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{L_1 - L_2}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1}\right)^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

siendo x_1 y x_2 los valores obtenidos por la primera y segunda integración respectivamente.

El objetivo desde el principio ha sido reducir el error relativo total. Es ahora cuando se reducirá modificando la temperatura central T_c . Según varíe T_c , el error se hará mayor o menor, así que el proceso será calcular el error relativo total para un rango de temperaturas centrales. Se construirá un intervalo centrado en el valor inicial de T_c y se irá recorriendo posición a posición calculando para cada una el error relativo total. Finalmente, se escogerá la T_c que menor error relativo total proporcione. Lo más cómodo y eficiente es automatizar la búsqueda de este error mínimo, en lugar de probar intervalos. En este trabajo se ha procedido de la siguiente manera: se recorre cuatro veces un bucle en el que se calcula el error para 500 valores de T_c , se escoge el que minimiza el error, y vuelta a empezar con una precisión mayor. Para cada vuelta en el bucle se ha escogido el intervalo $(T_c \pm 0.1 \cdot s)$, en el que s indica el número de la vuelta.

2.8. Ajustar el modelo variando R_{tot} y L_{tot}

Todo lo recogido en los apartados anteriores de este capítulo hace referencia a un modelo completo para una serie de parámetros constantes $\{M_{\text{tot}}, X, Y\}$ y otros iniciales $\{R_{\text{tot}}, L_{\text{tot}}, T_c\}$. Variando la temperatura central se ha podido lograr encontrar una solución más precisa, o lo que es lo mismo, se ha minimizado el error relativo total en la frontera entre las fases radiativa y convectiva.

A continuación, se procede a convertir todo lo anterior en una única función (llámese *Función modelo*). El propósito de introducir todo lo anterior en una única función es el de generar un modelo lo más preciso posible para un par de valores iniciales $\{R_{\text{tot}}, L_{\text{tot}}\}$ que devuelva la temperatura central óptima para dicho par de valores. Pero, y he aquí el principal motivo, esos valores iniciales ahora son los que variarán para intentar reducir aún más, si es posible, el error relativo total.

Se recorrerá un bucle tres veces, afinando cada vez más la precisión decimal. Este bucle consiste en generar intervalos alrededor de unos valores iniciales elegidos para R_{tot} y L_{tot} , e ir ejecutando la función citada anteriormente introduciendo distintas combinaciones de R_{tot} y L_{tot} para obtener el error relativo mínimo y la temperatura central óptima. En la segunda y tercera vuelta, se escogerá el par $\{R_{\text{tot}}, L_{\text{tot}}\}$ que minimice el error, calculado en la vuelta anterior, para volver a repetir el proceso pero cogiendo un intervalo más acotado, más preciso. Al final de cada vuelta se mostrará

un mapa de color en el que podrá verse cómo evoluciona el error en función de los valores iniciales dados. Este proceso hace algo parecido a ir haciendo zoom en la zona del mapa en la que el error es mínimo.

Tras la tercera vuelta, se tendrá un modelo más que suficiente para recrear con mucha fidelidad cómo varían las distintas magnitudes en el interior de una estrella con ciertas propiedades.

2.9. Modelo completo

Ya con los parámetros constantes $\{M_{\text{tot}}, X, Y\}$ y los iniciales $\{R_{\text{tot}}, L_{\text{tot}}, T_c\}$ obtenidos siguiendo el apartado 2.8, se puede construir un modelo completo que aporte más información: gráficas, tablas en las que se vea la dependencia de las distintas magnitudes en función del radio, comparaciones con estrellas reales...

En este caso, se ha optado por crear una nueva función similar a la antes llamada *Función modelo*. La diferencia entre ambas es que la nueva incluye representaciones de las distintas magnitudes en función del radio, una representación de la estrella modelo en el diagrama HR y una tabla completa con todas las capas y los valores de las magnitudes en cada una de ellas.

3. RESULTADOS

Se comenzó por el modelo prueba, obteniéndose lo acordado con los valores del guion. De hecho, fueron exactamente iguales, desde el principio hasta el final del modelo prueba. Este paso fue fundamental pues permitió avanzar con seguridad en lo que se va a presentar a continuación. Nota importante: hay que acogerse a las unidades de la Tabla 1 si no se especifican.

3.1. Parámetros constantes y valores iniciales

Los valores asignados a este trabajo son

Parámetros constantes			Valores iniciales		
X	Y	M_{tot} ($\times 10^{33}$ g)	R_{tot} ($\times 10^{10}$ cm)	L_{tot} ($\times 10^{33}$ erg/s)	T_c ($\times 10^7$ K)
0.85	0.10	5.1	12.0	25.0	1.5

Tabla 3: Valores asignados al modelo realizado para este trabajo.

3.2. Puesta en marcha del modelo

Introduciendo los valores de la Tabla 3 y siguiendo el desarrollo explicado hasta el apartado 2.7, incluido, se obtienen los siguientes resultados.

$$\text{Error relativo mínimo} = 22.129\% \quad T_c = 1,776 \times 10^7 \text{ K} \quad R_{\text{frontera}} = 2.033 \times 10^{10} \text{ cm}$$

Cuando se pasa al apartado 2.8, se ve cómo el modelo se ajusta perfectamente a una solución más óptima que minimiza el error relativo. En cada vuelta los intervalos para el radio total y luminosidad total y se van haciendo más precisos como puede verse en la Tabla 4, tal y como se ha comentado en dicho apartado. Nótese que para generar el efecto zoom (ir ampliando la zona en la que se minimiza el error), cada intervalo disminuye a razón de 10 en cada vuelta.

En las Figuras 3 - 6, están representados mediante un mapa de color el error relativo (izda.) y la temperatura central (dcha.) para cada par de valores. La forma de elipse que presentan los mapas de color, se debe a la ecuación (23). Es de mención también el comportamiento caótico a la izquierda en el mapa del error, mientras hay 'suavidad' al otro lado. (Figura 3). Otra manera de localizar el error relativo mínimo es mediante una tabla como la de la Figura 4.

Vuelta 1											
R	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5
L	15.0	17.0	19.0	21.0	23.0	25.0	27.0	29.0	31.0	33.0	35.0

Vuelta 2											
R	11.25	11.30	11.35	11.40	11.45	11.50	11.55	11.60	11.65	11.70	11.75
L	28.0	28.2	28.4	28.6	28.8	29.0	29.2	29.4	29.6	29.8	30.0

Vuelta 3											
R	11.525	11.530	11.535	11.540	11.545	11.550	11.555	11.560	11.565	11.570	11.575
L	28.50	28.52	28.54	28.56	28.58	28.60	28.62	28.64	28.66	28.68	28.70

Tabla 4: Intervalos utilizados para el radio total y la luminosidad total en la búsqueda del par $\{R_{\text{tot}}, L_{\text{tot}}\}$ que minimice el error. En negrita se muestran los valores que minimizan el error

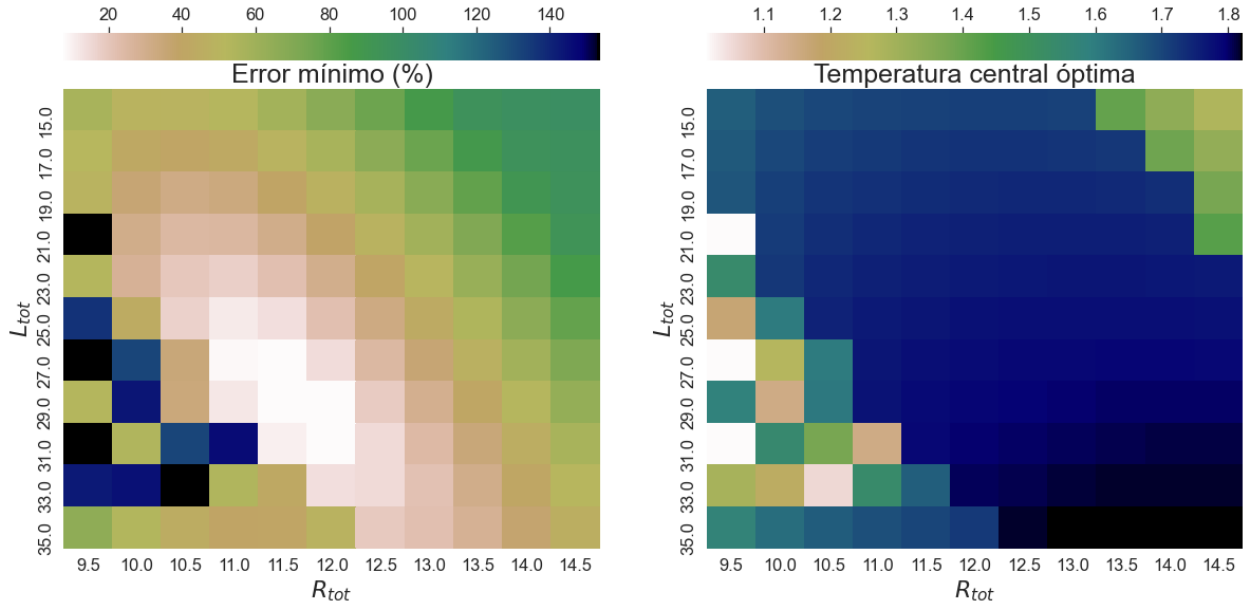


Figura 3: Mapa para la primera vuelta – Error relativo mínimo = 2.502 %, $T_c = 1.7854$

	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5
15.0	56.861	49.605	49.381	52.745	58.977	67.141	76.631	87.009	95.375	97.319	98.608
17.0	52.055	42.172	40.287	43.036	48.982	57.115	66.683	77.202	88.363	94.995	96.545
19.0	48.955	35.875	32.306	34.01	39.593	47.694	57.373	68.053	79.374	91.113	94.954
21.0	45.855	30.974	25.451	25.618	30.675	38.775	48.561	59.346	70.775	82.637	93.763
23.0	53.314	28.178	20.131	17.926	22.122	30.276	40.21	51.095	62.564	74.434	86.58
25.0	136.621	44.243	17.226	11.476	13.842	22.129	32.334	43.34	54.81	66.594	78.668
27.0	123.391	131.476	34.742	8.669	5.746	14.481	25.023	36.088	47.503	59.195	71.104
29.0	52.907	131.337	34.252	12.282	2.502	8.206	18.831	29.716	40.809	52.244	63.905
31.0	158.11	54.227	131.411	10.65	7.617	14.763	24.596	35.131	45.969	57.195	
33.0	153.633	100.534	15.133	53.974	42.332	13.686	14.836	21.697	30.791	40.799	51.303
35.0	65.799	53.511	44.726	39.491	40.15	48.326	19.383	22.113	28.663	37.093	46.512

Figura 4: Tabla para la primera vuelta – Error relativo mínimo = 2.502 %, $T_c = 1.7854$

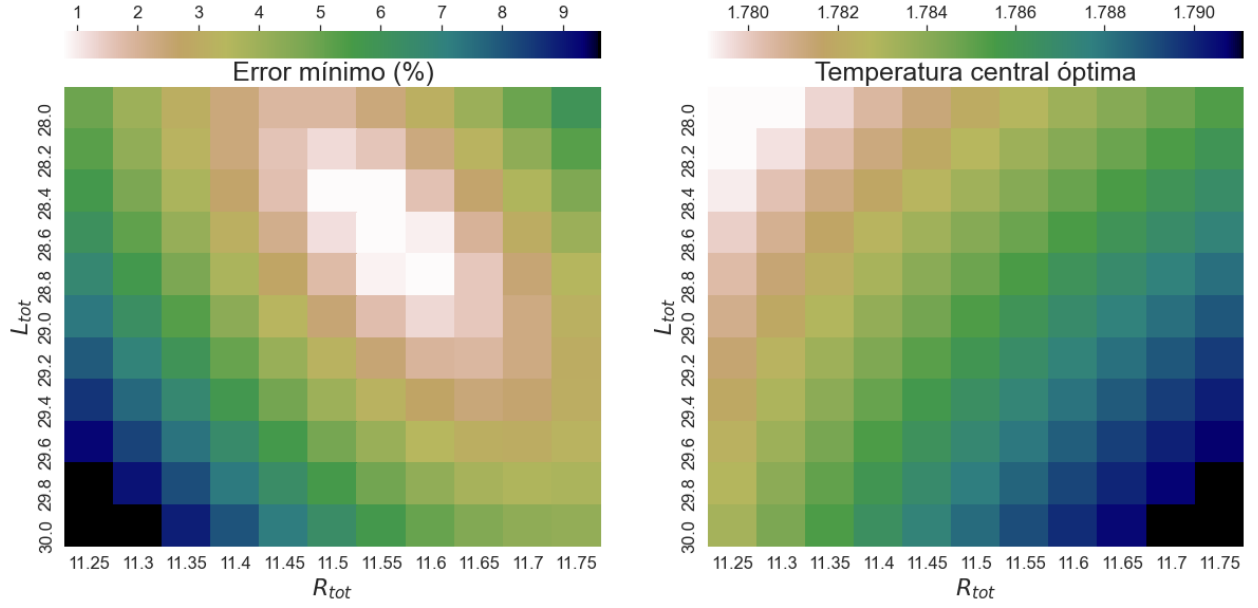


Figura 5: Mapa para la segunda vuelta – Error relativo mínimo = 0.060 %, $T_c = 1.7848$

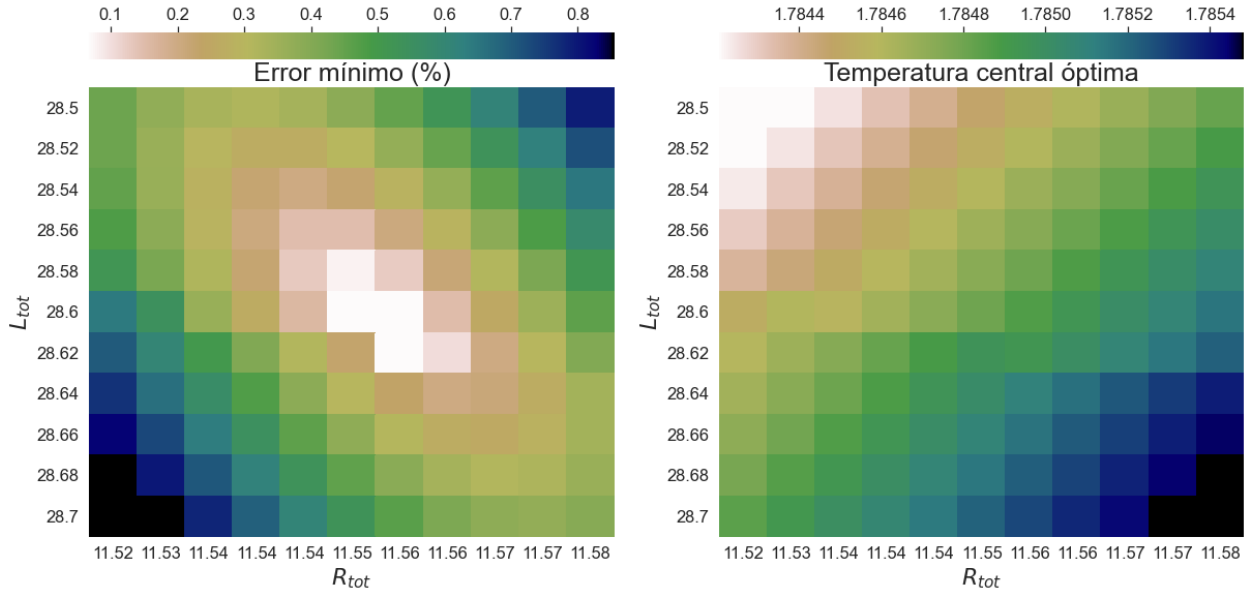


Figura 6: Mapa para la tercera vuelta – Error relativo mínimo = 0.041 %, $T_c = 1.7849$

Tras haber obtenido el error relativo mínimo aplicando lo explicado en el apartado 2.8, se inicia el modelo para calcular y recopilar los resultados obtenidos para los valores recogidos en la Tabla 5.

Parámetros constantes			Valores iniciales		
X	Y	M_{tot} ($\times 10^{33}$ g)	R_{tot} ($\times 10^{10}$ cm)	L_{tot} ($\times 10^{33}$ erg/s)	T_c ($\times 10^7$ K)
0.85	0.10	5.1	11.555	28.62	1.785

Tabla 5: Valores calculados finales.

Los resultados obtenidos para las distintas capas están ordenados en la Tabla 6.

Ciclo	Fase	Capa	r	P	T	L	M	$n + 1$
-	INICIO	0	10.399500	0.00007	0.0518	28.6200	5.1000	0.00000
-	INICIO	1	10.295505	0.00010	0.0571	28.6200	5.1000	0.00000
-	INICIO	2	10.191510	0.00015	0.0624	28.6200	5.1000	0.00000
-	RADIAT	3	10.087515	0.00021	0.0679	28.6200	5.0999	4.23818
-	RADIAT	4	9.983520	0.00030	0.0734	28.6200	5.0995	4.23140
-	RADIAT	5	9.879525	0.00041	0.0792	28.6200	5.0991	4.23143
-	RADIAT	6	9.775530	0.00056	0.0850	28.6200	5.0986	4.22942
-	RADIAT	7	9.671535	0.00075	0.0909	28.6200	5.0980	4.23234
-	RADIAT	8	9.567540	0.00098	0.0970	28.6200	5.0973	4.23083
-	RADIAT	9	9.463545	0.00128	0.1032	28.6200	5.0964	4.23409
-	RADIAT	10	9.359550	0.00165	0.1096	28.6200	5.0953	4.23239
-	RADIAT	11	9.255555	0.00210	0.1161	28.6200	5.0940	4.23525
-	RADIAT	12	9.151560	0.00266	0.1227	28.6200	5.0926	4.23353
-	RADIAT	13	9.047565	0.00334	0.1295	28.6200	5.0908	4.23548
-	RADIAT	14	8.943570	0.00417	0.1364	28.6200	5.0888	4.23400
-	RADIAT	15	8.839575	0.00518	0.1435	28.6200	5.0865	4.23554
-	RADIAT	16	8.735580	0.00638	0.1508	28.6200	5.0839	4.23423
-	RADIAT	17	8.631585	0.00783	0.1582	28.6200	5.0808	4.23498
-	RADIAT	18	8.527590	0.00956	0.1658	28.6200	5.0773	4.23378
-	RADIAT	19	8.423595	0.01162	0.1736	28.6200	5.0734	4.23387
-	RADIAT	20	8.319600	0.01406	0.1816	28.6200	5.0690	4.23270
-	RADIAT	21	8.215605	0.01694	0.1898	28.6200	5.0640	4.23222
-	RADIAT	22	8.111610	0.02035	0.1982	28.6200	5.0583	4.23094
-	RADIAT	23	8.007615	0.02436	0.2068	28.6200	5.0520	4.22997
-	RADIAT	24	7.903620	0.02908	0.2156	28.6200	5.0450	4.22847
-	RADIAT	25	7.799625	0.03460	0.2246	28.6200	5.0372	4.22704
-	RADIAT	26	7.695630	0.04106	0.2339	28.6200	5.0285	4.22523
-	RADIAT	27	7.591635	0.04860	0.2434	28.6200	5.0188	4.22333
-	RADIAT	28	7.487640	0.05739	0.2531	28.6200	5.0082	4.22113
-	RADIAT	29	7.383645	0.06762	0.2631	28.6200	4.9964	4.21874
-	RADIAT	30	7.279650	0.07951	0.2734	28.6200	4.9835	4.21606
-	RADIAT	31	7.175655	0.09329	0.2840	28.6200	4.9693	4.21313
-	RADIAT	32	7.071660	0.10927	0.2948	28.6200	4.9537	4.20989
-	RADIAT	33	6.967665	0.12776	0.3060	28.6200	4.9366	4.20636
-	RADIAT	34	6.863670	0.14913	0.3174	28.6200	4.9179	4.20248
-	RADIAT	35	6.759675	0.17380	0.3292	28.6200	4.8976	4.19826
-	RADIAT	36	6.655680	0.20224	0.3413	28.6200	4.8754	4.19366
-	RADIAT	37	6.551685	0.23501	0.3537	28.6200	4.8513	4.18866
-	RADIAT	38	6.447690	0.27272	0.3665	28.6200	4.8252	4.18323
-	RADIAT	39	6.343695	0.31606	0.3796	28.6200	4.7968	4.17735
-	RADIAT	40	6.239700	0.36584	0.3931	28.6200	4.7661	4.17097
PP	RADIAT	41	6.135705	0.42295	0.4070	28.6200	4.7330	4.16408
PP	RADIAT	42	6.031710	0.48840	0.4214	28.6200	4.6972	4.15663
PP	RADIAT	43	5.927715	0.56335	0.4361	28.6200	4.6587	4.14859
PP	RADIAT	44	5.823720	0.64908	0.4512	28.6199	4.6173	4.13991
PP	RADIAT	45	5.719725	0.74705	0.4668	28.6199	4.5728	4.13056

PP	RADIAT	46	5.615730	0.85890	0.4828	28.6198	4.5250	4.12049
PP	RADIAT	47	5.511735	0.98645	0.4993	28.6197	4.4740	4.10965
PP	RADIAT	48	5.407740	1.13175	0.5163	28.6196	4.4194	4.09799
PP	RADIAT	49	5.303745	1.29708	0.5338	28.6194	4.3611	4.08545
PP	RADIAT	50	5.199750	1.48499	0.5518	28.6191	4.2990	4.07199
PP	RADIAT	51	5.095755	1.69830	0.5703	28.6187	4.2330	4.05752
PP	RADIAT	52	4.991760	1.94011	0.5893	28.6181	4.1628	4.04200
PP	RADIAT	53	4.887765	2.21387	0.6089	28.6172	4.0885	4.02534
PP	RADIAT	54	4.783770	2.52333	0.6290	28.6160	4.0099	4.00748
PP	RADIAT	55	4.679775	2.87262	0.6497	28.6144	3.9269	3.98834
PP	RADIAT	56	4.575780	3.26620	0.6710	28.6121	3.8395	3.96783
PP	RADIAT	57	4.471785	3.70890	0.6929	28.6090	3.7476	3.94586
PP	RADIAT	58	4.367790	4.20592	0.7154	28.6048	3.6511	3.92235
PP	RADIAT	59	4.263795	4.76279	0.7385	28.5992	3.5502	3.89722
PP	RADIAT	60	4.159800	5.38539	0.7622	28.5917	3.4448	3.87035
PP	RADIAT	61	4.055805	6.07982	0.7865	28.5816	3.3351	3.84136
PP	RADIAT	62	3.951810	6.85251	0.8115	28.5683	3.2211	3.81114
PP	RADIAT	63	3.847815	7.71003	0.8371	28.5507	3.1031	3.77832
PP	RADIAT	64	3.743820	8.65899	0.8633	28.5275	2.9813	3.74363
PP	RADIAT	65	3.639825	9.70603	0.8902	28.4973	2.8559	3.70684
PP	RADIAT	66	3.535830	10.85765	0.9176	28.4581	2.7273	3.66775
PP	RADIAT	67	3.431835	12.12000	0.9457	28.4075	2.5958	3.62631
PP	RADIAT	68	3.327840	13.49878	0.9744	28.3438	2.4619	3.58234
PP	RADIAT	69	3.223845	14.99900	1.0037	28.2649	2.3261	3.53567
PP	RADIAT	70	3.119850	16.62478	1.0335	28.1668	2.1888	3.48633
PP	RADIAT	71	3.015855	18.37917	1.0639	28.0459	2.0508	3.43419
PP	RADIAT	72	2.911860	20.26383	1.0948	27.8980	1.9127	3.37915
PP	RADIAT	73	2.807865	22.27889	1.1262	27.7189	1.7750	3.32108
PP	RADIAT	74	2.703870	24.42267	1.1581	27.5038	1.6385	3.25983
PP	RADIAT	75	2.599875	26.69151	1.1905	27.2482	1.5040	3.19521
PP	RADIAT	76	2.495880	29.07960	1.2232	26.9486	1.3722	3.12686
PP	RADIAT	77	2.391885	31.57883	1.2562	26.6037	1.2438	3.05421
PP	RADIAT	78	2.287890	34.17873	1.2896	26.2121	1.1194	2.97682
PP	RADIAT	79	2.183895	36.86645	1.3233	25.7725	1.0000	2.89422
PP	RADIAT	80	2.079900	39.62682	1.3573	25.2848	0.8859	2.80587
PP	RADIAT	81	1.975905	42.44251	1.3915	24.7507	0.7780	2.71116
PP	RADIAT	82	1.871910	45.29426	1.4260	24.1735	0.6766	2.60941
PP	CONVEC	83	1.767915	48.16374	1.4607	23.5592	0.5821	0.00000
PP	CONVEC	84	1.663920	51.02458	1.4948	22.9209	0.4951	0.00000
CN	CONVEC	85	1.559925	53.85855	1.5274	22.2249	0.4158	0.00000
CN	CONVEC	86	1.455930	56.64500	1.5586	21.3163	0.3442	0.00000
CN	CONVEC	87	1.351935	59.36276	1.5881	20.0796	0.2802	0.00000
CN	CONVEC	88	1.247940	61.99042	1.6158	18.5159	0.2239	0.00000
CN	CONVEC	89	1.143945	64.50657	1.6417	16.6438	0.1750	0.00000
CN	CONVEC	90	1.039950	66.89013	1.6657	14.4974	0.1332	0.00000
CN	CONVEC	91	0.935955	69.12059	1.6877	12.1507	0.0984	0.00000
CN	CONVEC	92	0.831960	71.17833	1.7077	9.7135	0.0699	0.00000
CN	CONVEC	93	0.727965	73.04492	1.7254	7.3222	0.0473	0.00000
CN	CONVEC	94	0.623970	74.70330	1.7410	5.1229	0.0301	0.00000

CN	CONVEC	95	0.519975	76.13808	1.7543	3.2490	0.0176	0.00000
CN	CONVEC	96	0.415980	77.33547	1.7653	1.7979	0.0091	0.00000
CN	CONVEC	97	0.311985	78.28262	1.7739	0.8100	0.0039	0.00000
-	CENTRO	98	0.207990	78.96293	1.7801	0.2573	0.0011	0.00000
-	CENTRO	99	0.103995	79.36952	1.7837	0.0322	0.0001	0.00000
-	CENTRO	100	0.000000	79.50533	1.7849	0.0000	0.0000	0.00000

Tabla 6: Lista valores para las distintas capas.

4. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Se ha logrado conseguir el objetivo de este trabajo, que era desde el principio, construir un modelo a partir de ciertos parámetros con el menor error relativo total posible. Se ha pasado de un error del 22.13 % con los valores iniciales (Tabla 3) a un error del 0.04 % con los calculados tras realizar el ajuste (Tabla 5). La Figura 7 muestra que la unión entre las fases convectiva y radiativa es suave y no presenta discontinuidades. El método seguido ha sido un éxito y las mallas/mapas de color creados han servido para visualizar el proceso.

Dejando a un lado el objetivo de minimizar el error, puede estudiarse el modelo obtenido. Para ello pueden representarse los datos de la Tabla 6 para visualizarlos.

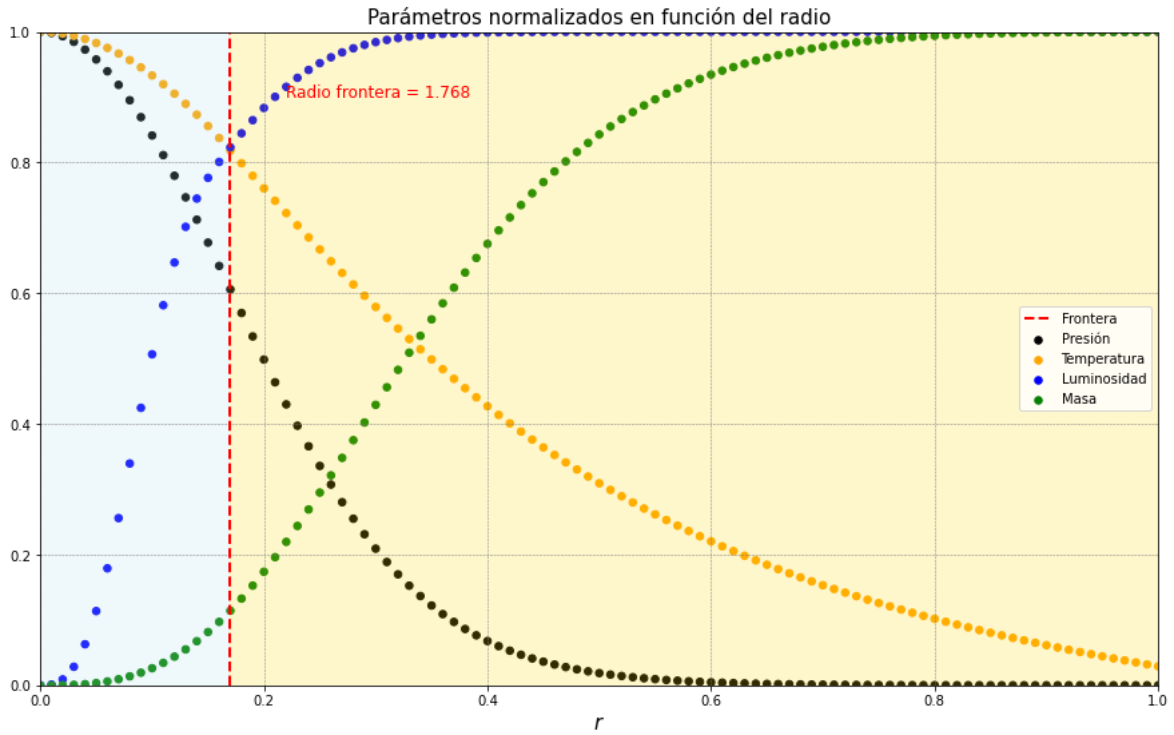


Figura 7: Parámetros del modelo ajustado normalizados (entre 0 y 1) en función del radio. La zona azul clara representa la región convectiva; mientras que la beige, la radiativa.

- Presión: En el centro de la estrella, la presión es máxima. Esto se debe a que la temperatura es máxima también y las capas superiores están ejerciendo presión hacia el centro. A medida

que aumenta el radio, tanto el número de capas por encima como la temperatura disminuyen, por lo que se espera que la presión tienda a cero, tal y como se observa.

- **Temperatura:** Al igual que la presión, la temperatura es máxima en el centro. Esto es así porque en el centro es donde suceden las reacciones nucleares y donde la producción de energía es mayor. Según se aleja uno del centro, el ritmo de producción de energía disminuye, la presión igual, y esto se traduce en un descenso de la temperatura.
- **Luminosidad:** Al contrario que las dos anteriores, la luminosidad es nula en el centro y máxima en la superficie. Esto último ha sido una de las condiciones de la que se partía para el cálculo de las tres primeras capas en la primera integración (apartado 2.5). Aumenta a medida que lo hace el radio, pues al ser radiativa la envoltura, además de que aumente la opacidad, la estrella en esas capas es más luminosa.
- **Masa:** En la superficie la masa es máxima, y es cero en el centro (condiciones en apartados 2.5.1 y 2.6.1). En la superficie, bajo el radio total, se contiene toda la masa de la estrella. Según disminuye el radio, la masa contenida en las capas inferiores irá disminuyendo.

Se puede concluir que el modelo construido recrea el interior de un estrella con mucha fidelidad y precisión a partir de las hipótesis hechas en el apartado 1.1 y los valores obtenidos a través del trabajo.

4.1. ¿Eso es todo? Exprimiendo el código

4.1.1. Comparación con ejemplos reales

Lo primero que vale la pena preguntarse es si todo lo calculado es un caso inventado o realmente puede tratarse de una estrella existente; o qué posición ocupa en el diagrama HR. Para saberlo vamos a calcular la temperatura eficaz a partir de la ley de cuerpo negro de Stefan-Boltzmann.

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} = 7405.878 \text{ K} \quad (24)$$

Conociendo los valores para el Sol del radio, la luminosidad y la temperatura efectiva, se puede conocer la posición de la estrella en el diagrama HR (Figura 8). Para recrear la secuencia principal se han tomado los datos de [Wikipedia](#) [3]. También se puede calcular su magnitud bolométrica absoluta utilizando:

$$M_{\text{bol}} = 4.74 - 2.5 \log (L/L_{\odot}) = 2.56 \quad (25)$$

La estrella de este trabajo se encuentra en la secuencia principal, siendo más luminosa y caliente que el Sol. Tiene sentido lo obtenido por el alto valor de X , que indica que la proporción en masa del hidrógeno en la estrella es mucho mayor que las de He y los metales, lo cual es característico de estrellas pertenecientes a la secuencia principal pues no les ha dado tiempo a consumir el suficiente hidrógeno.

	T_{eff} (K)	R/R_{\odot}	L/L_{\odot}	M_{bol}
<i>Beta Pictoris</i>	8620	1.7	20.0	1.49
Estrella modelo	7406	1.66	7.4	2.56
<i>Beta Virginis</i>	7240	1.3	6.0	2.79

Tabla 7: Comparación con estrellas reales de la secuencia principal.

De las estrellas utilizadas para componer la secuencia principal, la estrella se encuentra entre *Beta Pictoris* y *Gamma Virginis*, estando más cerca de la última como puede verse en la Figura 8.

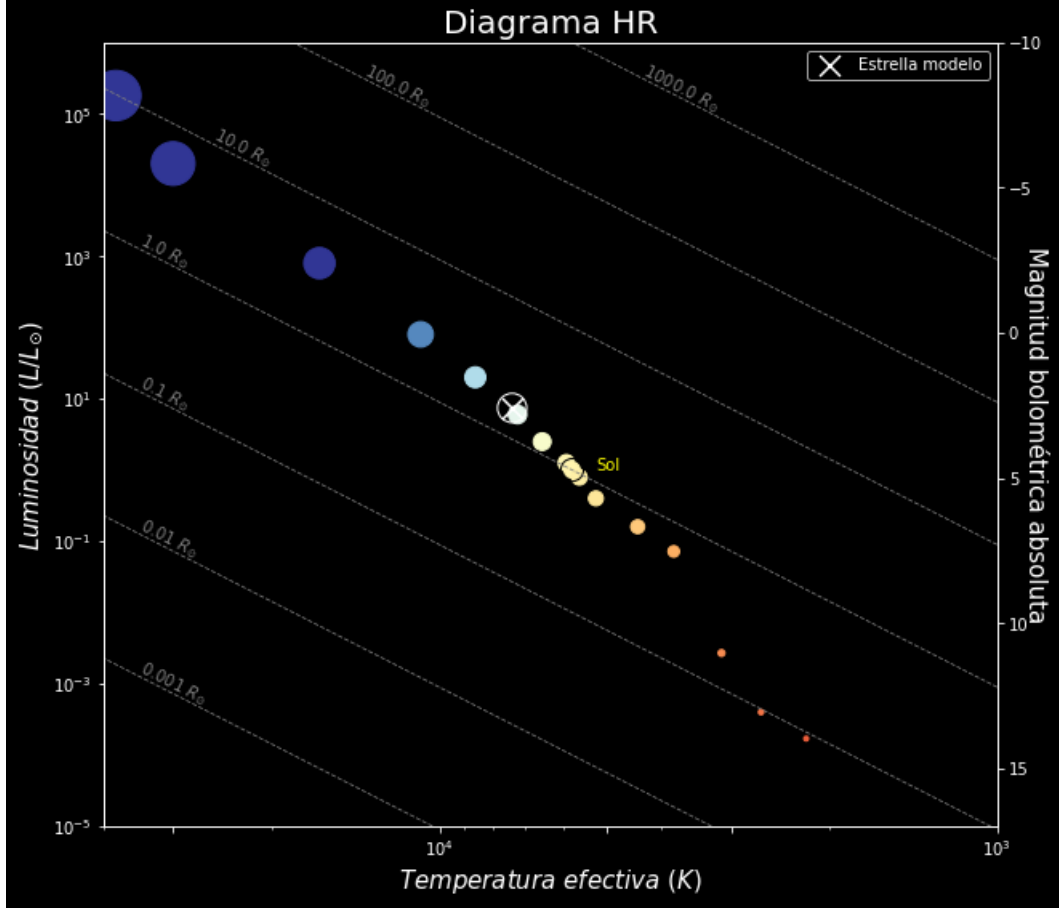


Figura 8: Representación en el diagrama HR. Datos para la secuencia principal extraídos de [3].

La estrella es una estrella de tipo espectral F (en concreto, F0), por lo que su color estará entre amarillo-blanco y sus líneas espectrales serán las de H (y metales ionizados como hierro o calcio). Otras estrellas dentro de este grupo son, por ejemplo, *Canopus* y *Procyon*.

4.1.2. Jugando con los parámetros iniciales

¿Qué ocurre si variamos los valores iniciales? ¿Se reproducirán estrellas compatibles con las observaciones? Esto es lo que se tratará a continuación.

Se pueden sacar conclusiones a partir de los resultados obtenidos en la Tabla 8.

- Al variar tanto X como Y , la metalicidad Z se ve afectada según (10). Al aumentar X o Y , la metalicidad disminuye. Esto implica que la estrella genera más energía al tener más hidrógeno y helio. Esto a su vez lleva a un aumento de la luminosidad y de las temperaturas efectiva y central. La opacidad también se ve afectada según [12]

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{bf} = \frac{4.34 \cdot 10^{25}}{t/\bar{g}_{bf}} Z(1 + X), \quad \text{absorción bound-free} > \text{free-free del H y He} \quad (26)$$

Así, la opacidad también disminuye, haciendo que la atmósfera absorba menos radiación y, en consecuencia, el radio disminuya.

- Al aumentar la masa, la temperatura y la presión también lo hacen, haciendo que el ritmo de reacciones nucleares sea mayor y desembocando en un aumento de la luminosidad. Además, el radio se ve afectado de manera proporcional, por lo que aumenta.

(a)	X	R_{tot}	L_{tot}	T_c	T_{eff} (K)	λ_{max} (nm)	Mag. abs.
Modelo	0.80	12.545	19.30	1.715	6441	449.9	14.49
	0.85	11.555	28.62	1.785	7406	391.6	12.42
	0.87	10.925	42.88	1.858	8426	343.9	10.30
(b)	Y	R_{tot}	L_{tot}	T_c	T_{eff} (K)	λ_{max} (nm)	Mag. abs.
Modelo	0.08	11.965	20.56	1.728	6700	432.5	14.16
	0.10	11.555	28.62	1.785	7406	391.6	12.42
	0.12	10.955	47.68	1.876	8641	335.4	9.75
(c)	M_{tot}	R_{tot}	L_{tot}	T_c	T_{eff} (K)	λ_{max} (nm)	Mag. abs.
Modelo	4.7	10.968	19.02	1.735	6863	422.2	14.57
	5.1	11.555	28.62	1.785	7406	391.6	12.42
	6.6	13.700	104.20	1.933	9395	308.5	5.65

Tabla 8: Resultados obtenidos aplicando todo lo explicado en el capítulo 2 (a) variando X (b) variando Y (c) variando M_{tot} .

La longitud de onda máxima se ha calculado aplicando la Ley de Wien para un cuerpo negro, que dice

$$\lambda_{\text{max}} = 0.0029 / T_{\text{eff}} . \quad (27)$$

Como puede deducirse de la ecuación, cuanto mayor sea la temperatura efectiva, menos será la longitud de onda, es decir, más azul. Hecho que sucede al disminuir la metalicidad o al aumentar la masa.

5. VALORACIÓN TÉCNICA Y PERSONAL DEL TRABAJO

Para la parte del trabajo asociada al desarrollo del código debe comentarse que ésta ha sido realizada utilizando [Spyder](#) [8] como entorno de desarrollo integrado, IDE (o editor) para Python. En un principio, se ha trabajado con [Jupyter Notebooks](#) [2] para testar ciertos bloques del código y poder hacer pruebas, pero han acabado por ensamblarse en *Spyder* debido a la comodidad cuando se tiene un código extenso. Es importante destacarlo porque ambos son gratuitos, lo que permite un mayor acceso a programar, compartir y encontrar recursos en la red.

Para la parte de la redacción se ha empleado el editor online [OverLeaf](#) [6] de \LaTeX . También gratuito, posibilita trabajar desde diferentes dispositivos un mismo documento, lo cual resulta útil si se comparte equipo o no se puede trabajar cuando se quiera con el equipo habitual.

En lo personal se han de remarcar muchas cosas, pero aquí se recogen las más importantes:

- Antes de comenzar el trabajo la iniciativa y las expectativas eran muy grandes. A medida que se avanzaba en el trabajo, el código se volvía más complicado y más engorroso, pero el proceso de aprendizaje era muy satisfactorio al ir consiguiendo avance tras avance. No han sido pocas horas de trabajo en el código, por lo que se ha podido aprender de cada uno de los errores que iba marcando el editor y se ha mejorado la forma en la que se venía trabajando en la programación, desde entender la sintaxis de ciertas funciones hasta conocer qué manera de proceder es la más eficiente.
- Los paquetes importados más importantes utilizados han sido [numpy](#) [5], [matplotlib](#) [4] y [pandas](#) [7].

- Relacionado con lo anterior, cuando se logró tener una primera versión del código, cada una de las tres vueltas (descritas en el apartado 2.8) se ejecutaba en un tiempo de aproximadamente 25 minutos. En una segunda versión el tiempo se redujo a la mitad sólo cambiando unas pocas líneas de código. En la siguiente versión se pasó a siete minutos cada vuelta, pasando de redimensionar *arrays* a utilizar *arrays* de dimensión fija (apartado 2.5.1). Y ya en la última, 4 minutos eran los necesarios. Todo este proceso de mejora ha sido muy gratificante.
- El código completo está recogido y puede verse en [GitHub](#) [1]. El fin de compartir algo que ha llevado tanto tiempo es el mismo que ha hecho posible este trabajo: colaborar y cooperar para la comunidad científica en la medida de lo posible.
- Una vez acabado el código, toca analizar, y aquí toman forma las nociones adquiridas a lo largo del Grado. El modelo obtenido es compatible con lo real, hasta el punto de poder encontrar estrellas reales semejantes. El modelo devuelve un resultado que concuerda con lo predicho antes de comenzar, que la estrella pertenece a la secuencia principal.
- A pesar del gran éxito del modelo, y tras haber explotado al máximo su potencial, debe reconocerse que es algo simple pero potente. Se ha intentado salir un poco de ciertos límites y el modelo en ocasiones se ha detenido o reproduce casos no muy precisos. Por ejemplo, cuando se calcula la opacidad (no necesaria para realizar cálculos), los valores obtenidos son mucho más altos de lo esperado. Se ha tomado el factor t/\bar{g}_{bf} : i) constante y ii) t del orden la unidad y \bar{g}_{bf} inversamente proporcional a la temperatura, pero aun así no se ha logrado.
- Insistir en el que el modelo obtenido mediante el método desarrollado en este trabajo es muy preciso y compatible con casos de estrellas reales, reproduciendo comportamientos posibles de describir con lo aprendido en las distintas asignaturas de Astrofísica.

Referencias

- [1] Repositorio de GitHub: <https://github.com/Raul17-1998/Stellar-interior-numerical-model>.
- [2] Jupyter Notebook documentation: <https://docs.jupyter.org/en/latest/>.
- [3] Main sequence: Sample Parameters: https://en.wikipedia.org/wiki/Main_sequence.
- [4] Matplotlib user guide: <https://matplotlib.org/>.
- [5] NumPy user guide: <https://numpy.org/doc/stable/user/index.html#user>.
- [6] OverLeaf documentation: <https://www.overleaf.com/learn>.
- [7] Pandas user guide: https://pandas.pydata.org/docs/user_guide/index.html.
- [8] Sitio web oficial Spyder: <https://www.spyder-ide.org/>.
- [9] E. Böhm-Vitense. *Introduction to Stellar Astrophysics*. Cambridge University Press, 1992.
- [10] N. Cardiel and S. Pascual. *Guion: Elaboración de un modelo numérico de interior estelar*. UCM, 2021-2022.
- [11] E. Novotny. *Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors*. Oxford University Press, New York, 1973.
- [12] M. Schwarzschild. *Structure and Evolution of the Stars*. Dover Publications, New York, 1965.