ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის
კომპიუტერული მეცნიერებების დეპარტამანტი

დ ი ს კ რ ე ტ უ ლ ი   ა ლ ბ ა თ ო ბ ა

შესავალ ლექციათა კურსი
„მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკა“

პროფ: გია სირბილაძე

- 2023 -

სარჩევი

შესავალი: ადამიანის ინტელექტს გააჩნია საოცარი თვისება: არაზუსტი, არასაკმარისი და საკმაოდ წინააღმდეგობრივი ინფორმაციის არსებობის შემთხვევაშიც კი გააკეთოს საკმაოდ სწორი, დასაჯერებელი და სანდო დასკვნები მიმდინარე მოვლენის, ცდის თუ ექსპერიმენტის შედეგებთან მიმართებაში. ყოველივე ამის თეორიული საფუძვლები რა თქმა უნდა მრავალი დარგიდან თუ მიმართულებიდან მოდის, რომელთა გამაერთიამებელი მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკაა. ინფორმაციის წყარო მისი ბუნება და რა თქმა უნდა თვითონ მონაცემები განმსაზღვრელია თუ რა მიდგომა, მეთოდი თუ სქემა უნდა გამოვიყენოთ კვალიფიციური და სანდო შეფასებებისა და დასკვნების გასაკეთებლად. მათ კი გაცილებით მაღალი ღირებულება უნდა გააჩნდეს გამოყენებებში, ვიდრე ინტუიციასა და გამოცდდილებას.

თქვენთვის სკოლის მათემატიკის კურსიდან ცნობილია რომ, სტატისტიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის დასაბუთებულ პირველადი დამუშავებისა და შეფასების მეთოდებსა და ხერხებს პოპულაციის უცნობი პარამეტრებისთვის, როგორიცაა მოლოდინი, საშუალო კვადრატული გადახრა და ა.შ. ასევე თქვენ გაეცანით ალბათობის ცნების ინტუიციურ წარმოდგენას და ალბათობათა აღრიცხვის ძირითად მარტივ წესებს.

მიმდინარე კურსში *„მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკა“* თქვენ გაეცნობით იგივე პრობლემატიკას, რაც სკოლის კურში იყო წარმოდგენილი, ოღონდ კვალიფიციურ და შედარებით ღრმა დონეზე. გავივლით პროგრამას, რომლის ცოდნა აუცილებელია ინფორმატიკის მიმართულების საბაკალავრო პროგრამების სწავლების სტუდენტებისთვის და რომელიც რეკომენდირებულია მსოფლიოში აღიარებული *კომპიუტერული საზოგადოება ACM-ის სწავლების მეთოდოლოგიით.*

სასწავლო კურსი *„დისკრეტული ალბათობა“* წარმოადგენს *„მონაცემთა ანალიზი და სტატისტიკა“* –ს სწავლების შესავალ, აუცილებელ ნაწილს. კურსში მოცემულია დისკრეტული ალბათობის ძირითადი ობიქტები და მათი სტრუქტურები. ყოველი თავის ბოლოს წარმოდგენილია სავარჯიშო ამოცანები და ზოგიერთი მათგანის გადაწყვეტა EXCEL- ის სტატისტიკურ ფუნქციათა გარემოში.

თავი I. შემთხვევითი ექსპერიმენტი . ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე და ალბათობა

§ 1. შემთხვევითი ექსპერიმენტი და ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე

სკოლის მათემატიკის კურსში თქვენ გაეცანით ***შემთხვევითი ექსპერიმენტს***. იგი სამი მთავარი მოთხოვნით განისაზღვრება. 1. *ექსპერიმენტის შედეგის წინასწარ ამოცნობა შეუძლებელია.* 2. *არსებობს ექსპერიმენტის შედეგთა სიმრავლურ-ფორმალური აღწერის შესაძლებლობა.* 3. *არსებობს განმეორებითი ექსპერიმენტის ჩატარების შეუზღუდავი შესაძლებლობა.* განვიხილოთ შემთხვევითი ექსპერიმენტის შემდეგი მარტივი მაგალითი.

მაგალითი 2.1. ვთქვათ, ექსპერიმენტი ნიშნავს სიმეტრიული მონეტის აგდებას. ვაკვირდებით, „რა მოდის“ დავარდნილ მონეტაზე. ამ ექსპერიმენტის შედეგებია; „გერბის მოსვლა“ (გ) და „საფასურის მოსვლა“ (ს). ცხადია, სახეზეა შემთხვევითი ექსპერიმენტის სამივე პირობა.

შემთხვევითი ექსპერიმენტი აღიწერება მისი ურთიერთგამომრიცხავი შედეგების სრული ჩამონათვალით. ამ შედეგებს *ელემენტარული ხდომილობები* ეწოდება, ხოლო მათ სრულ ერთობლიობას – ***ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე***. უკანასკნელი Ω ასოთი აღინიშნება, თვით ელემენტარული ხდომილობა კი – ω ასოთი უინდექსოდ ან ინდექსით.

2.1 მაგალითისათვის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე იქნება

$$\Omega = \{გ,ს\}.$$ ♦

მაგალითი 2.2. აგორებენ ერთ კამათელს. ცდას ექვსი შედეგი შეიძლება ჰქონდეს (ზედა წახნაგზე წერტილების რაოდენობის მიხედვით)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$ ♦

მაგალითი 2.3. აგდებენ ორ სხვადასხვა მონეტას. აქ ოთხი შესაძლო შედეგია და

$$\Omega = \{გგ, გს, სგ, სს\}. \qquad \blacklozenge$$

მაგალითი 2.4. აგორებენ ორ გარჩევად კამათელს, ან ორჯერ აგორებენ ერთ კამათელს. ყოველ მოსალოდნელ შედეგს შევუსაბამოთ რიცხვთა წყვილი (i, j), სადაც i პირველ კამათელზე მოსასვლელი რიცხვია, ხოლო j – მეორეზე. ამ ცდისათვის

$$\begin{aligned}\Omega = \{ &(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\\ &(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\ &(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\\ &(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\\ &(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\\ &(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}. \qquad \blacklozenge\end{aligned}$$

მაგალითი 2.5. მონეტას აგდებენ გერბის პირველ გამოჩენამდე. აქ

$$\Omega = \{გ, სგ, სსგ, \ldots\}.$$

განსხვავებით პირველი 4 მაგალითისაგან, რომლებშიც Ω შეიცავდა ელემენტების სასრულ რაოდენობას (შესაბამისად 2, 6, 4 და 36 ელემენტარულ ხდომილობას), ამ მაგალითში Ω უსასრულოა, მაგრამ თვლადი, ანუ ისეთი, რომ შესაძლებელია ელემენტების გადანომრვა. ♦

§ 2. ხდომილობა. ოპერაციები ხდომილობებზე

ელემენტარული ხდომილობების რაიმე ერთობლიობას შედგენილ ხდომილობას, ან უბრალოდ ***ხდომილობას*** უწოდებენ.

ვიტყვით, რომ ცდის შედეგად ხდება A ხდომილობა, თუ ცდას მოჰყვა ისეთი ω ელემენტარული ხდომილობა, რომელიც A-ს ეკუთვნის. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე ვერ ვიტყვით, მოხდება თუ არა A. რაც შეეხება Ω-ს, იგი ცდის ყოველი ჩატარებისას ხდება, ანუ *აუცილებელი ხდომილობაა*, ხოლო $\varnothing$, ანუ ცარიელი სიმრავლე (რომელიც არცერთ ელემენტარულ ხდომილობას არ შეიცავს), წარმოადგენს *შეუძლებელ ხდომილობას*, რომელიც ცდის არცერთი ჩატარებისას არ მოხდება.

როგორც ვხედავთ, ხდომილობა სხვა არაფერია, თუ არა სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ობიექტი – სიმრავლე; ამიტომ ოპერაციები შემთხვევით ხდომილობებზე ზუსტად იმდაგვარად განიმარტება, როგორც ჩვეულებრივ სიმრავლეებზე. უბრალოდ ამ ოპერაციებს სიმრავლეთა თეორიისაგან განსხვავებული სახელები ჰქვია (თუმცა, ჩვენ ხშირად მივმართავთ სიმრავლეთა თეორიის ენასაც). ქვემოთ მოყვანილია ცხრილი, საიდანაც ზემოთქმული ნათელი გახდება.

ცხრილი 2.1

	სიმრავლეთა თეორიის ენა	**ალბათობის თეორიის ენა**
Ω	უნივერსალური სივრცე	აუცილებელი ხდომილობა
$\varnothing$	ცარიელი სიმრავლე	შეუძლებელი ხდომილობა
$\overline{A}$	A სიმრავლის დამატება	A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობა (A ხდომილობა არ ხდება)
$A\cap B$	A და B სიმრავლეების თანაკვეთა	A და B ხდომ. ნამრავლი (თანაკვეთა) (A და B ხდომილობები ერთად ხდება)
$A\cup B$	A და B სიმრავლეების გაერთიანება	A და B ხდომ. ჯამი (გაერთიანება) (ხდება ერთი მაინც A და B ხდომ.)
$A\backslash B$	A და B სიმრავლეების სხვაობა	A და B ხდომილობათა სხვაობა (ხდება A და არ ხდება B ხდომ.)
$A\subset B$	A სიმრავლე შედის B-ში	A ხდომილობა იწვევს B-ს

A და B ხდომილობათა $A \cup B$ *ჯამი* (ანუ გაერთიანება) ეწოდება ისეთი ω ელემენტარული ხდომილობების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნის ერთს მაინც *A* და *B* ხდომილობათაგან (ან მხოლოდ *A*-ს ან მხოლოდ *B*-ს, ან *A*-სა და *B*-ს ერთად).

A და B ხდომილობათა $A \cap B$ *ნამრავლი* (ანუ თანაკვეთა) ეწოდება ისეთი ω-ების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნიან *A*-ს და *B*-ს ერთად. თუ $A \cap B = \varnothing$, მაშინ ვიტყვით, რომ *A* და *B* ხდომილობები უთავსებადია (ისინი ვერ თავსდება ერთად, არ ხდება ერთად).

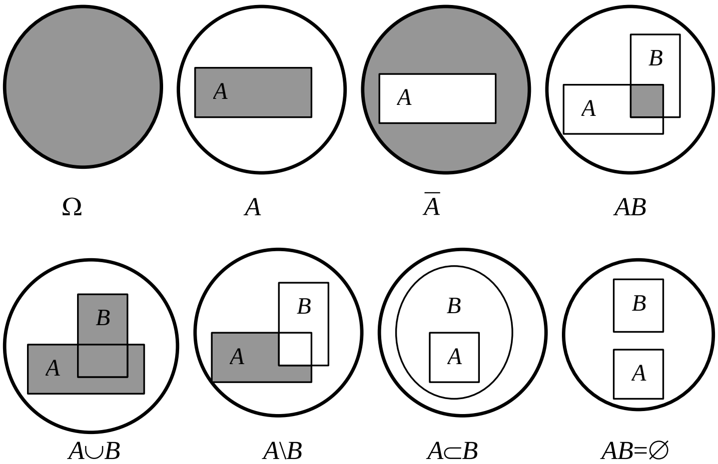
სიმოკლისათვის *A* და *B* ხდომილობათა ნამრავლს (თანაკვეთას) ჩვენ აღვნიშნავთ *AB*-თი. ხოლო უთავსებად *A* და *B* ხდომილობათა ჯამისათვის ვამჯობინებთ $A+B$ აღნიშვნას.

A და B ხდომილობათა $A \setminus B$ *სხვაობა* ეწოდება ისეთი ω-ების ერთობლიობას, რომლებიც ეკუთვნის *A*-ს და არ ეკუთვნის *B*-ს.

A-ს საწინააღმდეგო ხდომილობაა $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

ამბობენ, რომ *A ხდომილობა იწვევს B-ს* (თუ მოხდა *A*, მომხდარა *B* ხდომილობაც) და წერენ $A \subset B$, თუ *A*-ში შემავალი ყოველი ელემენტარული ხდომილობა შედის *B*-შიც.

თუ წარმოვიდგენთ, რომ წრიდან შემთხვევით ვირჩევთ წერტილს. მაშინ ელემენტარული ხდომილობები ამ წრის წერტილებია, აუცილებელი ხდომილობაა მთელი წრე, ხოლო სხვა ხდომილობები ამ წრის ქვესიმრავლეებია. ზემოთ ჩამოთვლილი ოპერაციები შეიძლება თვალსაჩინოდ გამოვსახოთ ე.წ. *ვენის (Venn) დიაგრამების* საშუალებით:



ნახ. 2.1. ვენის დიაგრამები

მაგალითი 2.6. (2.2. მაგალითის გაგრძელება) ამ შემთხვევაში ელემენტარული ხდომილობებია $\omega_1=\{1\}$, $\omega_2=\{2\}$, $\omega_3=\{3\}$, $\omega_4=\{4\}$, $\omega_5=\{5\}$, $\omega_6=\{6\}$. განვსაზღვროთ ხდომილობები: *A* – „კამათელზე ლუწი რიცხვის მოსვლა“, *B* – „კამათელზე სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლა“. ზემოთ თქმულის თანახმად, აღნიშნული ხდომილობები ასე ჩაიწერება $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$.

ჩამოთვლილი ოპერაციებისათვის მივიღებთ:

$A \cup B$ ნიშნავს კამათელზე ლუწი ან სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლას, $A \cup B=\{2,3,4,6\}$.

$A \cap B$ კამათელზე ერთდროულად ლუწი და სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლაა, ე.ი. $A \cap B=\{6\}$.

ლუწის საწინააღმდეგო კენტია და ამიტომ $\overline{A}=\{1,3,5\}$.

$A \setminus B$ ნიშნავს ლუწი, მაგრამ არა სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლას, ე.ი. *A*-დან უნდა ამოვაგდოთ 6 და მაშასადამე, $A \setminus B=\{2,4\}$. ♦

§ 3. ალბათობა

ვთქვათ, შემთხვევით ექსპერიმენტის *n*-ჯერ ჩატარების შედეგად რაიმე *A* ხდომილობა $\nu_n(A)$-ჯერ განხორციელდა. მაშინ *A* *ხდომილობის ფარდობით სიხშირეა*

$$f_n(A) = \frac{\nu_n(A)}{n}. \tag{2.1}$$

ფარდობით სიხშირეთა უმთავრესი თვისებაა მათი *მდგრადობა*, რაც შემდეგში მდგომარეობს. თუ დავაკვირდებით ფარდობითი სიხშირის ყოფაქცევას ექსპერიმენტის განმეორებათა ზრდის კვალობაზე, უამრავი მაგალითია იმისა, რომ $f_n(A)$ მცირედ იცვლება ცდათა საკმაოდ დიდი რაოდენობის მიღწევის შემდეგ და მრავალი ცდისაგან შემდგარი ერთი სერიიდან სხვა ასეთივე სერიაზე გადასვლისას.

ფარდობითი სიხშირის მდგრადობა გვაფიქრებინებს დავუშვათ, რომ $f_n(A)$ ზომავს ობიექტურად არსებულ *$P(A)$ რიცხვს – A ხდომილობის ალბათობას*, რომელიც მოცემულ ცდაში ***ხდომილობის შესაძლებლობის ხარისხის*** მახასიათებელია:

$$f_n(A) \approx P(A). \tag{2.2}$$

ალბათობის უკანასკნელ განმარტებას *ალბათობის სტატისტიკურ განმარტებას* უწოდებენ.

> ალბათობის სტატისტიკურ განმარტება
> რაიმე A ხდომილობის $P(A)$ ალბათობა არის ამ ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის "ზღვრული" მნიშვნელობა მრავალჯერ განმეორებადი ცდებისათვის.

მოვიყვანოთ ე.წ. ***ალბათობის კლასიკური განმარტება***. თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე სასრულია და, ვთქვათ, N წერტილისაგან შედგება,

$$\Omega = \{\omega_1, \dots ,\omega_N\},$$

ხოლო M არის იმ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, რომლებიც განსაზღვრავენ A ხდომილობას (ხელს უწყობენ A ხდომილობის განხორციელებას) და შემთხვევითი ექსპერიმენტის ყველა შედეგი ერთნაირადაა მოსალოდნელი (*ელემენტარულ ხდომილობათა განხორციელება ტოლშესაძლოა*), მაშინ

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{M}{N}. \tag{2.3}$$

> **ალბათობის კლასიკური განსაზღვრება**
> თუ შემთხვევით ექსპერიმენტს აქვს ერთნაირად მოსალოდნელ (ტოლშესაძლო) შედეგთა სასრული რაოდენობა, მაშინ ხდომილობის ალბათობა ტოლია *მისი ხელშემწყობი შედეგების რაოდენობის შეფარდებისა ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობასთან.*

დაშვება ელემენტარულ ხდომილობათა ტოლშესაძლობლობის შესახებ იმის ეკვივალენტურია, რომ $P(\Omega)=1$ და ნებისმიერი $A\subset\Omega$ ხდომილობის ალბათობა მასში შემავალი ელემენტარული ხდომილობების რაოდენობის პროპორციულია. არსებობს ბევრი ამოცანა, რომლისათვისაც აღნიშნული განსაზღვრა სავსებით საკმარისია. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრა ისტორიულად პირველია.

მაგალითი 2.7. (2.2. მაგალითის გაგრძელება) სიმეტრიის მოსაზრებიდან გამომდინარე კამათლის ყოველ წახნაგს ერთი და იგივე ალბათობა შეგვიძლია მივანიჭოთ. აქედან, თუ A ლუწი რიცხვის მოსვლას ნიშნავს, გამოვა, რომ $P(A)=3/6=1/2$. ♦

მაგალითი 2.8. (2.3. მაგალითის გაგრძელება) სიმეტრიული მონეტისათვის გერბის და საფასურის ალბათობები ტოლი გამოვა. რაც შეეხება ორი სხვადასხვა სიმეტრიული მონეტის აგდებას, ბუნებრივია, რომ გგ, გს, სგ, სს ელემენტარულ ხდომილობათაგან ყოველს 1/4 ალბათობა მიენიჭოს. თუ A ნიშნავს, რომ მონეტებზე სხვადასხვა გვერდები მოვიდა, გვექნება $P(A)=1/2$. ♦

ახლა შევუდგეთ *ალბათობის ცნების ფორმალიზაციას.* თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე სასრულია და, ვთქვათ, N წერტილისაგან შედგება,

$$\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \dots ,\omega_N\}},$$

ელემენტარულ ხდომილობებს შევუსაბამოთ $p_1,\dots,p_N$ რიცხვები, რომლებიც ისეთია, რომ

(ა) $\boldsymbol{0 \le p_i \le 1,\ \ i = 1, \dots , N;}$ **(ბ)** $\mathbf{p_1 + \cdots + p_N = 1.}$

ეს ნიშნავს, რომ p_i არის ω_i ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა $\boldsymbol{P(\{\omega_i\})=p_i}$.

თუ სასრული Ω სივრცის A ხდომილობა შეიცავს M წერტილს

$$\boldsymbol{A = \{} \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M} \boldsymbol{\}},$$

მაშინ

$$\boldsymbol{P(A)} = p_{i_1} + \dots + p_{i_M}. \tag{2.4}$$

ცხადია, რომ

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = p_1+\cdots+p_N = 1. \qquad (2.5)$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ A-სა და B-ს საერთო ელემენტი არ გააჩნიათ, ანუ $AB=\varnothing$, მაშინ

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}),$$

რაც (2.5)-ის გათვალისწინებით გვაძლევს, რომ

$$P(A)+P(\overline{A}) = 1 \qquad (2.6)$$

ანუ

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

ხდომილობის (2.3) თანაფარდობით შემოღებულ ალბათობას შემდეგი თვისებები გააჩნია.

P1. ყოველი A ხდომილობისათვის $0 \le P(A) \le 1$;

P2. $P(\Omega)=1$;

P3. თუ A და B ხდომილობები უთავსებადია, მაშინ $P(A+B) = P(A)+ P(B)$.

უკანასკნელ თვისებას ***ალბათობათა შეკრების თვისება*** ანუ ალბათობის ადიციურობა ეწოდება.

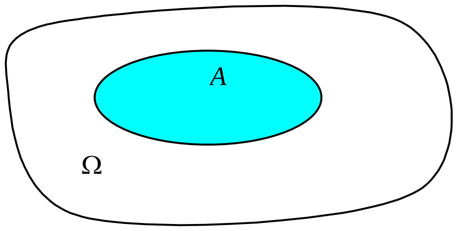
§ 4. გეომეტრიული ალბათობა

თუ ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე Ω არათვლადია, მაშინ ალბათობები მიეწერება არა Ω-ს ცალკეულ ω წერტილებს, არამედ მის ქვესიმრავლეებს. ჩვენ შემოვიფარგლებით ე.წ. ალბათობის გეომეტრიული განსაზღვრით.

ვთქვათ, Ω ბრტყელი არეა და შემთხვევით ვირჩევთ ω წერტილს Ω-დან, ხოლო A ხდომილობა წარმოადგენს Ω ბრტყელი არის რაიმე ნაწილს. მაშინ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით არჩეული ω წერტილი ეკუთვნის A-ს, (შეადარე 2.6 მაგალითს), ალბათობის კლასიკური განსაზღვრის მსგავსად არის

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad (2.7)$$

სადაც $|A|$ აქ უკვე ფართობს ნიშნავს. (2.4) ფორმულით გამოთვლილ ალბათობას გეომეტრიულ



ნახ. 2.2

ალბათობას უწოდებენ. აღსანიშნავია, რომ (2.8)-ის ძალით ცალკეული წერტილის ალბათობა ნულის ტოლია, რადგან წერტილის ფართობი ნულის ტოლია (შეადარე დისკრეტულ შემთხვევას).

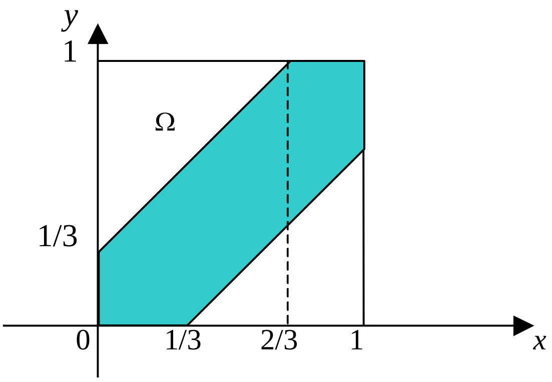
მაგალითი 2.9. (შეხვედრის ამოცანა). ორი პირი შეთანხმდა გარკვეულ ადგილზე შეხვდეს ერთმანეთს 18-იდან 19 საათამდე. თითოეული შემთხვევით მომენტში მიდის და მეორეს ელოდება 20 წუთის მანძილზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს პირები ერთმანეთს შეხვდებიან.

თუ $18+x$ პირველი პირის მოსვლის მომენტია, ხოლო $18+y$ – მეორე პირისა (სადაც x და y საათებში იზომება), ელემენტარული ხდომილობის როლში შეგვიძლია ავირჩიოთ (x, y) წერტილი, რომელიც Ω ერთეულოვან კვადრატს ავსებს. ცხადია, რომ ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილობა არის სიმრავლე:

$$A = \{(x,y) : |x-y|\le 1/3\}\cap\Omega.$$

ამრიგად, ყოველი ფიქსირებული x-ისათვის, $0\le x\le 1$,

$$x-1/3 \le y \le x+1/3.$$



ნახ. 2.3.

როცა $0\le x\le 1/3$, $y = x-1/3$ წრფის მაგიერ ქვედა საზღვრის როლში იქნება x ღერძი: $0\le y\le x+1/3$, ხოლო როცა $2/3\le x\le 1$, ზედა საზღვარი $y=x+1/3$ წრფის მაგიერ იქნება $y=1$.

დაშტრიხული არე, ცხადია, ტოლდიდია ორი კვადრატის სხვაობისა, რომელთაგან ერთი ერთეულოვანია, მეორეს გვერდი კი არის 2/3. საბოლოოდ:

$$P(A) = 5/9.$$ ♦

§ 5. ხდომილობათა ჯამის ალბათობა

ალბათობის P3 თვისება, შემდეგნაირად ზოგადდება: ნებისმიერი A და B ხდომილობებისათვის

$$\boldsymbol{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).} \qquad (2.8)$$

მართლაც, $A\cup B=A+\overline{A}\,B$ და $B=AB+\overline{A}\,B$ წარმოდგენები P3-ის ძალით გვაძლევს $P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}\,B)$ და $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}\,B)$ ფორმულებს (შესაკრებთა უთავსებადობის გამო), საიდანაც მიიღება (2.8).

ორზე მეტი ხდომილობისათვის ოპერაციები რეკურენტულად განისაზღვრება და შესაბამისი ფორმულებიც ასევე მიიღება. მაგალითად,

$$P(A\cup B\cup C) = P((A\cup B)\cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

§ 6. მცირე ალბათობის მქონე ხდომილობის განხორციელების შეუძლებლობის პრინციპი

დავუშვათ A ხდომილობის ალბათობა მცირეა (ახლოსაა ნულთან). დაკვირვებათა ხანგრძლივი პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ მცირე ალბათობის მქონე ხდომილობა ერთეულოვან ცდაში, უმრავლეს შემთხვევაში, არ ხორციელდება. ამ ფაქტის საფუძველზე შესაძლებელია მივიღოთ ე.წ.

> **მცირე ალბათობის მქონე ხდომილობის განხორციელების შეუძლებლობის პრინციპი:**
> თუ შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა მცირეა (ახლოსაა ნულთან), მაშინ პრაქტიკულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ერთეულოვან ცდაში ის არ განხორციელდება.

ამგვარად, თუ A ხდომილობის ალბათობა მცირეა (ახლოსაა ნულთან), მაშინ საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილობის ალბათობა ახლოსაა ერთთან და მცირე ალბათობის მქონე ხდომილობის განხორციელების შეუძლებლობის პრინციპიდან გამომდინარე მივიღებთ მეტად მნიშვნელოვან შედეგს:

> თუ შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა ახლოსაა ერთთან, მაშინ პრაქტიკულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ დიდი ალბათობის მქონე ხდომილობა ერთეულოვან ცდაში ყოველთვის განხორციელდება

§ 7. პირობითი ალბათობა, ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 2.10. ცდა მდგომარეობს კამათლის გაგორებაში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთი კამათლის გაგორებისას 4-ზე ნაკლები რიცხვი მოვა (A ხდომილობა), თუ ცნობილია, რომ ლუწი რიცხვი მოვიდა (B ხდომილობა).

ამოხსნა. განვსაზღვროთ შემდეგი ხდომილობები: $A = \{1,2,3\}$, $B=\{2,4,6\}$. ამრიგად საძიებელია A ხდომილობის პირობითი ალბათობა B ხდომილობის პირობით (B პირობით). ამ ფაქტს ჩვენ ასე ჩავწერთ $P(A|B)$. B პირობის გარეშე, ალბათობის კლასიკური განმარტებით, $P(A)=1/2$. B პირობის შესრულებისას, რომელშიც შედის სამი $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ ელემენტარული ხდომილობა, A ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობაა $\{2\}$, რის გამოც $P(A|B)=1/3$.

ადვილი დასანახია, რომ $P\{AB\} = 1/6$ და $P\{B\} = 3/6$, საიდანაც საბოლოოდ,

$$P\{A|B\}=\frac{P(AB)}{P(B)}=1\text{ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობ }/3.$$

რაც წარმოადგენს ***პირობითი ალბათობის*** ზოგად განსაზღვრებას. ♦

A ხდომილობის *პირობითი ალბათობა* B ხდომილობის პირობით (B პირობით, $P(B)>0$) ეწოდება

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{2.9}$$

წილადს.

პირობითი ალბათობისათვის აგრეთვე მიღებულია აღნიშვნა $P_B(A)$. პირობით ალბათობას $P(A|B)$ უპირობო $P(A)$ ალბათობის თვისებები გააჩნია.

ცხადია, რომ თუ $P(B)>0$, (2.5) თანაფარდობა გვაძლევს

$$\boldsymbol{P(AB) = P(B)\cdot P(A|B)} \tag{2.10}$$

ტოლობას, რომელსაც ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის ფორმულას ვუწოდებთ. ამავე დროს თუ $P(A)\neq 0$, მაშინ

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B).} \tag{2.11}$$

ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა
ორი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა ტოლია ერთ-ერთი მადგანის ალბათობის ნამრავლისა მეორის პირობით ალბათობაზე პირველის პირობით.

(2.11) ფორმულა გამოიყენება ხდომილობათა ალბათობების განსაზღვრისათვის, როდესაც ამოცანის პირობიდან ნათელია პირობით ალბათობათა მნიშვნელობები.

§ 8. ხდომილობათა დამოუკიდებლობა

A და B ***ხდომილობებს ეწოდება დამოუკიდებელი***, თუ

$$\boldsymbol{P(AB) = P(A)P(B).} \tag{2.12}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $P(A)>0$, $P(B)>0$, (2.8) ეკვივალენტურია ორი თანაფარდობისა:

$$\boldsymbol{P(A|B) = P(A), \qquad P(B|A) = P(B),} \tag{2.13}$$

ანუ ერთი ხდომილობის მოხდენა არ ცვლის მეორის ალბათობას.

ამრიგად, დადებითი ალბათობის მქონე A და B ხდომილობებისათვის დამოუკიდებლობის განსაზღვრებად შეიძლება მივიღოთ ერთ-ერთი (2.13) თანაფარდობებიდან (რომელიც ავტომატურად იწვევს მეორე თანაფარდობას).

თუ (2.13) არ სრულდება, A და B ხდომილობებს *დამოკიდებული ხდომილობები* ეწოდება.

მაგალითი 2.11. ყუთში s ბირთვია, მათ შორის t თეთრია, დანარჩენი კი შავი. A_1 ნიშნავს, რომ ყუთიდან ამოღებული პირველი ბირთვი თეთრია, A_2 კი ნიშნავს, რომ ყუთიდან ამოღებული მეორე ბირთვია თეთრია. ყუთიდან დაბრუნების გარეშე ამოღებისას ეს ხდომილობები დამოკიდებულია, ვინაიდან

$$P(A_2|A_1) \neq P(A_2).$$

თუ ამოღება დაბრუნებით ხდება, მაშინ ცხადია, რომ

$$P(A_2|A_1) = P(A_2).$$ ♦

სამი A_1, A_2 *და* A_3 *ხდომილობის დამოუკიდებლობა ნიშნავს*, რომ ისინი წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია, ანუ

$$\boldsymbol{P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)}, \text{ სადაც } i \neq j,\ i, j = 1,2,3, \tag{2.14}$$

და გარდა ამისა

$$\boldsymbol{P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)}. \tag{2.15}$$

აღსანიშნავია, რომ (2.14)-ის ან (2.15)-ის დარღვევა დამოუკიდებლობას გამორიცხავს. არსებობს მარტივი მაგალითები იმისა, რომ ერთი პირობიდან მეორე არ გამომდინარეობს.

მაგალითი 2.12. ყუთში 4 ბირთვია წარწერებით 1,2,3 და 123. A_i ნიშნავდეს, რომ შემთხვევით ამოღებულ ბირთვს აწერია ციფრი i, i=1,2,3.

ცხადია, რომ $P(A_i)$=1/2, $P(A_iA_j)$=1/4, $i \neq j$, i, j=1,2,3, მაგრამ

$$P(A_1A_2A_3)=1/4 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=1/8,$$

მაშინ, როცა ყოველი i, j=1,2,3, წყვილისათვის ($i \neq j$) $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$. ♦

3-ზე მეტი ხდომილობისათვის დამოუკიდებლობა ანალოგიურად განისაზღვრება.

§ 9. გამრავლების პრინციპი, დენდროგრამა

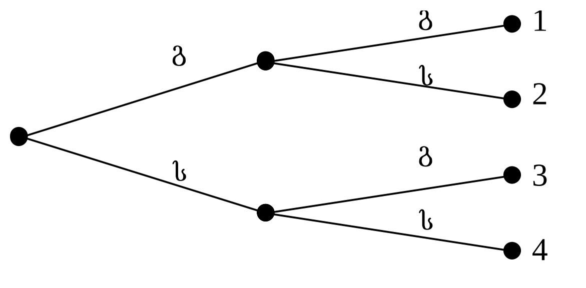
ხშირად ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცისა და ხდომილობის ალბათობის განსაზღვრა *პირდაპირი გადათვლით შეუძლებელია*. ასეთ შემთხვევაში უნდა მივმართოთ კომბინატორული ანალიზის მიერ შემუშავებულ მეთოდებს.

ახლა ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ *კომბინატორული ანალიზის ძირითად პრინციპს*, რომელსაც ***გამრავლების პრინციპი*** ეწოდება.

თუ ასარჩევია k საგანი და არსებობს პირველი საგნის არჩევის n_1 ვარიანტი, ხოლო პირველი საგნის არჩევის შემდეგ არსებობს მეორე საგნის არჩევის n_2 ვარიანტი, ... , და ბოლოს, k–1 საგნის არჩევის შემდეგ არსებობს k-ური საგნის არჩევის n_k ვარიანტი, მაშინ არსებობს ამ k საგნის ამ მიმდევრობით არჩევის $\boldsymbol{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k}$ ვარიანტი.

მოყვანილ პრინციპთან დაკავშირებით ხშირად სასარგებლოა ხის მსგავსი (ხისებრი) დიაგრამის ანუ ***დენდროგრამის*** გამოყენება.

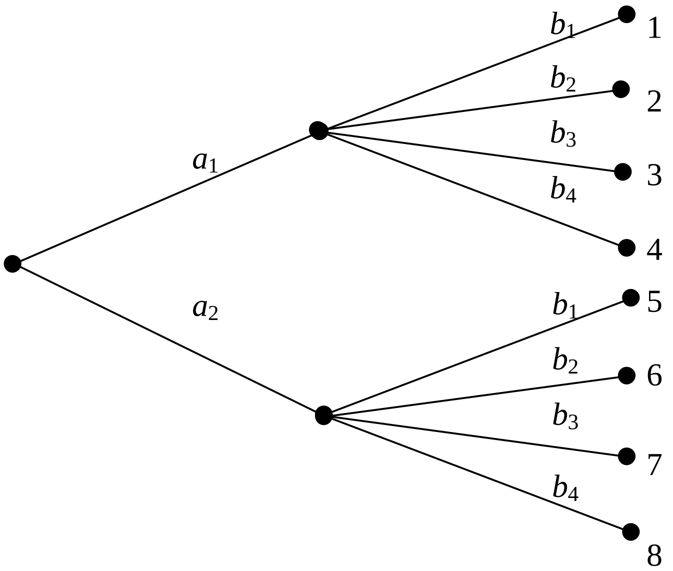
მაგალითი 2.13. გამოვსახოთ დენდროგრამით მონეტის ორჯერ აგდების შესაბამისი შედეგების სიმრავლე. „გ“ ნიშნავდეს გერბს, ხოლო „ს“ – საფასურს.



ნახ. 2.3. ♦

მაგალითი 2.14. თუ მამაკაცს აქვს 2 პერანგი და 4 ჰალსტუხი, მაშინ მას ჰქონია პერანგის და ჰალსტუხის შერჩევის 2·4=8 ვარიანტი.

თუ a_1, a_2 აღნიშნავს პერანგებს, ხოლო b_1, b_2 b_3, b_4 – ჰალსტუხებს, მაშინ პერანგისა და ჰალსტუხის არჩევის სხვადასხვა გზა შეიძლება შემდეგი დენდროგრამით ავსახოთ



ნახ. 2.4. ♦

§ 10. წყობა, გადანაცვლება, ჯუფთება

ვთქვათ, მოცემულია n განსხვავებული ობიექტი და ჩვენ გვსურს r მათგანი ერთ ხაზზე გავამწკრივოთ. ვინაიდან პირველს ავირჩევთ n-ნაირად, შემდეგ ავირჩევთ მეორეს n–1-ნაირად, . . . , მე-r-ეს [n–(r–1)]-ნაირად, მათ ერთობლიობას, ანუ r ობიექტის დალაგებულ კომპლექტს, რომელსაც ***წყობას*** უწოდებენ, ავირჩევთ

$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) \equiv (n)_r \qquad (2.16)$$

რაოდენობით. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ გამრავლების პრინციპი ($n_1=n$, $n_2=n-1$, ... , $n_r=n-r+1$).

როდესაც $r = n$, (2.16)-იდან მიიღება

$$A_n^n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

(n! იკითხება როგორც n ფაქტორიალი) და ამგვარ წყობას ***გადანაცვლება*** ეწოდება. წყობები განსხვავდებიან რიგით ან შემადგენლობით, მაშინ როცა გადანაცვლებებს ერთი და იგივე შემადგენლობა აქვთ და მხოლოდ რიგით განსხვავდებიან.

(2.16)-ის ჩაწერა ფაქტორიალებით შეიძლება შემდეგნაირად:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad (2.17)$$

სადაც იგულისხმება, რომ 0! = 1.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა n საგნიდან r საგანს ვირჩევთ განმეორებით, ანუ ყოველი არჩეული საგანი უკან ბრუნდება მისი ფიქსაციის შემდეგ. მაშინ გამრავლების პრინციპში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_r = n$$

და ე.წ. განმეორებითი წყობა n საგნიდან ამოირჩევა

$$G_n^r = n^r \tag{2.18}$$

რაოდენობით.

ჯუფთება ეწოდება წყობათა მთელ კლასს, რომელთაც ერთი და იგივე შემადგენლობა გააჩნია. ამგვარად r-ელემენტიანი ჯუფთება n ელემენტიდან წარმოადგენს n ელემენტის r-ელემენტიან ქვესიმრავლეს (მაგალითად ab და ba ერთი და იგივე 2-ელემენტიანი ჯუფთებებია).

ჯუფთებათა რაოდენობა C_n^r აღინიშნება.ას, იქედან, რომ $C_n^r r! = A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, მივიღებთ ჯუფთებათა რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულას

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{2.19}$$

(2.19) ფორმულიდან ჩანს და თვით განმარტებიდან ცხადია (n-ელემენტიანი სიმრავლის არჩევით ავტომატურად ვირჩევთ (n–r)-ელემენტიან სიმრავლეს), რომ

$$C_n^r = C_n^{n-r}.$$

მაგალითი 2.15. ვთქვათ, 5 ბირთვიდან, რომლებსაც აწერიათ ციფრები 1;2;3;4;5, შემთხვევით უნდა შეირჩეს სამი ბირთვი. შერჩევის შედეგი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ქვემოთ წარმოდგენილი ვარიანტებიდან

123	132	213	231	312	321
124	142	214	241	412	421
125	152	215	251	512	521
134	143	314	341	413	431
135	153	315	351	513	531
145	154	415	451	514	541
234	243	324	342	423	432
235	253	325	352	523	532
245	254	425	452	524	542
345	354	435	354	534	543

5 ელემენტიან სიმრავლის ყველა შესაძლო 3 ელემენტიან წყობათა რაოდენობა

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60\text{-ის}$$

ტოლია. ამასთან ცხრილის ყოველ სტრიქონში მითითებული ვარიანტები განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტთა თანმიმდევრობით, ანუ მათი რაოდენობა ტოლია 3 ელემენტიან გადანაცვლებათა რიცხვის 3!=6. ცხრილის სხვადასხვა სტრიქონებში მითითებული ვარიანტები ერთი ელემენტით მაინც განსხვავდებიან და მათი რაოდენობაა

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-2)!} = 10$$

აქედან გამომდინარე ცხრილის ყოველ ცალკე აღებულ სვეტში ელემენტების რაოდენობა C_5^3-ის ტოლია. ამასთან ჯუფთების თვალსაზრისით სვეტები იდენტურია. ♦

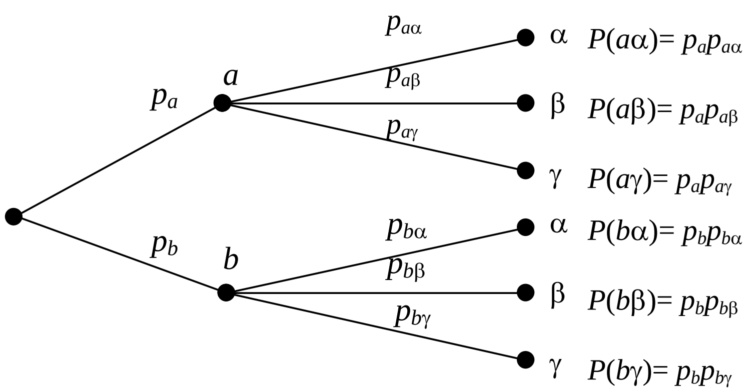
§ 11. ალბათობათა გამოთვლა დენდროგრამების მეშვეობით

დენდროგრამები ჩვენ რთული ექსპერიმენტების შედეგების აღსაწერად შემოვიღეთ. თუ „შტოების“ ანუ „უბნების" ერთობლიობას დენდროგრამის „ფესვიდან“ ბოლომდე „ბილიკს“ დავარქვევთ, მაშინ, თუ ყველა „ბილიკი" ტოლალბათურია, თითოეული მათგანის ალბათობა იქნება ერთი შეფარდებული „ბილიკების" საერთო რაოდენეობასთან. ხშირად თვით „ბილიკის" ალბათობის გამოთვლას სჭირდება ალბათობათა გამრავლების ჯაჭვური წესის გამოყენება, რასაც მივყევართ სხვადასხვა ალბათობის მქონე „ბილიკებამდე" და რთული ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელად გვჭირდება თითოეული „ბილიკის" ალბათობის გამოთვლა თვით „ბილიკის" აგებულებისა და მოცემული ალბათობისა და პირობითი ალბათობის საშუალებით.

ვთქვათ, ერთმანეთის მიყოლებით ტარდება ორი ექსპერიმენტი: A, რომლის შედეგებია a და b და B, რომლის შედეგებია α, β, γ, მაშინ როცა ექსპერიმენტი Ω, რომელიც ნიშნავს ჯერ A-სა და შემდეგ B-ს ჩატარებას არის წყვილების შემდეგი სიმრავლე

$$\Omega = AB=\{a\alpha, a\beta, a\gamma, b\alpha, b\beta, b\gamma\}.$$

თუ ახლა მოცემულია A-ს შედეგების p_a და p_b ალბათობები $p_a+p_b=1$ და გარდა ამისა, პირობითი ალბათობები $p_{a\alpha}$, $p_{a\beta}$, $p_{a\gamma}$ ($p_{a\alpha}+p_{a\beta}+p_{a\gamma}=1$), $p_{b\alpha}$, $p_{b\beta}$, $p_{b\gamma}$ ($p_{b\alpha}+p_{b\beta}+ p_{b\gamma}=1$), მაშინ ყოველი „ბილიკის“ ალბათობა მოიცემა როგორც ალბათობისა და პირობითი ალბათობის ნამრავლი

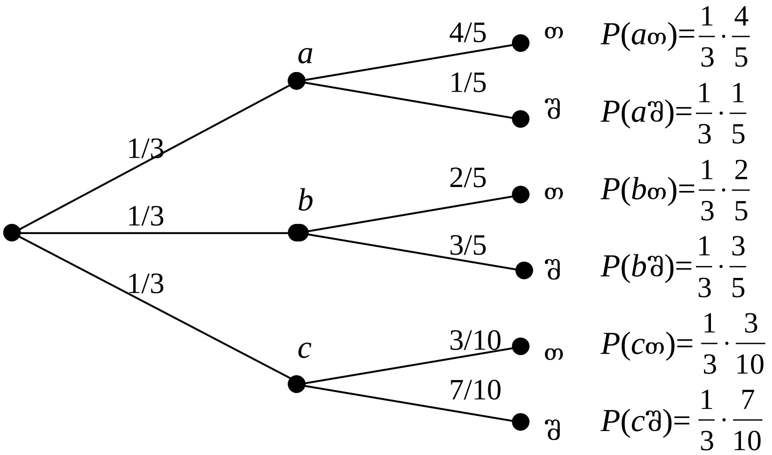


ნახ. 2.5.

ადვილი წარმოსადგენია, თუ როგორ შეიცვლება ეს დენდროგრამა მესამე, მეოთხე და ა.შ. ექსპერიმენტის არსებობისას. ნათელია, რომ დენდროგრამის თითოეული „ბილიკის“ ალბათობა მისი „შტოების " (ანუ „უბნების") ალბათობათა ნამრავლის ტოლია.

მაგალითი 2.16. სამი ერთნაირი ურნა a, b და c შეიცავს სხვადასხვა რაოდენობის თეთრ და შავ ბირთვებს. პირველში 4 თეთრი და 1 შავი ბირთვია, მეორეში – 2 თეთრი და 3 შავი, ხოლო მესამეში – 3 თეთრი და 7 შავი ბირთვი. შემთხვევით ვირჩევთ ურნას და ამ ურნიდან შემთხვევით ვირჩევთ ბირთვს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბირთვი თეთრია?

ამოხსნა. მივმართოთ დენდროგრამას. თეთრ ბირთვს შევუსაბამოთ „თ“ ასო, ხოლო შავს „შ“. გვექნება



ნახ. 2.6.

ცხადია, რომ შემოღებული A ხდომილობაა არის aთ, bთ და cთ „ბილიკების“ ერთობლიობა და ამიტომ

$$P(A) = P(a\text{თ}) + P(b\text{თ}) + P(c\text{თ}) = 1/2. \qquad \blacklozenge$$

ამ მაგალითში განხილული *დენდროგრამების მეთოდი და ე.წ. სრული ალბათობის ფორმულა სირთულის მიხედვით დიდად არ განსხვავდება* (ორკომპონენტიან შედგენილ ცდებში ეს ყოველთვის ასეა), თუმცა დენდროგრამების მეთოდი უფრო თვალსაჩინოა, რაც უფრო მეტად ვლინდება, როდესაც ცდათა რაოდენობა ორზე მეტია.

§ 12. სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები

$H_1,H_2,\ldots,H_n$ ხდომილობათა ერთობლიობას ***ხდომილობათა სრული სისტემა*** ეწოდება, თუ

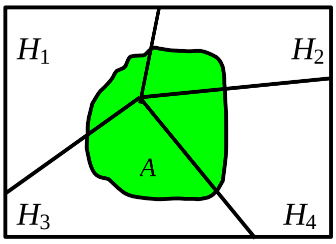
$$\boldsymbol{H_1+H_2+\cdots+H_n=\Omega}$$

და

$$\boldsymbol{H_iH_j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j=1,\ldots,n.}$$

თუ $H_1,H_2,\ldots,H_n$ ხდომილობათა სრული სისტემაა, მაშინ ნებისმიერი A ხდომილობისათვის (იხ. ნახ. 2.7)

$$A = AH_1+AH_2+\cdots+AH_n\,,$$



ნახ. 2.7.

საიდანაც $P(AH_i)=P(H_i)P(A|H_i)$ ტოლობა (იხ. (2.11)) და ალბათობის ადიციურობა გვაძლევს სრული ალბათობის ფორმულას

$$\boldsymbol{P(A)= P(H_1)P(A|H_1)+\cdots+P(H_n)P(A|H_n)}=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\,|\,H_i)\,. \qquad (2.20)$$

$H_1,H_2,\ldots,H_n$ ხდომილობებს ზოგჯერ *ჰიპოთეზებს* უწოდებენ.

მაგალითი 2.17. (მაგალითი 2.16-ის გაგრძელება) გამოვიყენოთ სრული ალბათობის ფორმულა. H_1 ნიშნავს პირველი ურნის არჩევას, H_2 – მეორესი, H_3 – მესამე ურნისა. $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$. თეთრი ბირთვის არჩევა იყოს A ხდომილობა. ცხადია, რომ $P(A|H_1)=4/5$, $P(A|H_2)=2/5$, $P(A|H_3)=3/10$. სრული ალბათობის ფორმულით. (შეადარე ნახ. 2.7. მოცემული დენდროგრამის ბილიკებს)

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{7}{10}. \qquad \blacklozenge$$

ამრიგად, სრული ალბათობის ფორმულა საშუალებას იძლევა ალბათობა გამოითვალოს ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის აუგებლად.

თუ ახლა გავიხსენებთ (2.11) ფორმულას და B-ს მაგივრად ჩავსვამთ H_i-ს , გამოვა, რომ

$$\boldsymbol{P(H_i|A)} = \frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{P(A)},$$

საიდანაც სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ ***ბაიესის ფორმულებს***

$$\boldsymbol{P(H_i|A)} = \frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A\,|\,H_j)},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

ხშირად ბაიესის ფორმულები მოიხსენიება, როგორც *ჰიპოთეზათა ალბათობების*, ან მიზეზთა ალბათობების ფორმულები. მათ შემდეგი შინაარსი ეძლევა:

$H_1,H_2,...,H_n$ ის მიზეზებია (ჰიპოთეზებია), რომელთაც შეეძლოთ გამოეწვიათ A ხდომილობის მოხდენა. ცნობილია $P(H_1)$, $P(H_2)$,..., $P(H_n)$ ალბათობები ცდის ჩატარებამდე (a priori), რომელთაც ჰიპოთეზათა *აპრიორულ ალბათობებს* უწოდებენ. ბაიესის ფორმულებით მოიცემა ის შესაძლო ცვლილებები, რასაც ცდის ჩატარების შემდეგ (a posteriori) განიცდიან აპრიორული ალბათობები და მიღებულ მნიშვნელობებს *აპოსტერიორულ ალბათობებს* უწოდებენ.

მაგალითი 2.18. (მაგალითი 2.17-ის გაგრძელება) ვთქვათ ურნიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი თეთრია. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბირთვი ამოღებულ იქნა b ურნიდან?

ამოხსნა. ბაიესის ფორმულის თანახმად $P(H_2|A)=4/5$. ♦

§ 13. EXCEL

განვიხილოთ Excel-ის შემდეგი ფუნქციები

FACT, PERMUT, COMBIN.

ამ ფუნქციების ჩაწერისას გამოყენებული აღნიშვნების ინტერპრეტაცია და შინაარსობრივი დატვირთვა მოცემულია ცხრილში

აღნიშვნა	შინაარსი
Number	ელემენტთა რაოდენობა მოცემულ სიმრავლეში (პოპულაციაში)
Number chosen	ელემენტთა რაოდენობა ამორჩეულ სიმრავლეში

FACT ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:

FACT(Number).

FACT– გამოიანგარიშება n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი ფორმულით FACT(n)= $1\cdot2\cdot\ldots\cdot n=n!$.

მაგალითი.

რამდენი განსხვავებული თანმიმდევრობით შეიძლება განვალაგოთ თაროზე ხუთი სხვადასხვა წიგნი?

ამოხსნა.

საძიებელი ვარიანტების რაოდენობა ტოლია n=5 ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვის. ამ მაგალითისათვის **FACT** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:

FACT(Number)= FACT(5).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ ხუთი სხვადასხვა წიგნი თაროზე შეიძლება დავაწყოთ 120 სხვადასხვა თანმიმდევრობით. ♦

PERMUT ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:

PERMUT (Number, Number chosen).

PERMUT- გამოიანგარიშება n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო k ელემენტიან წყობათა რიცხვი ფორმულით $\frac{n!}{(n-k)!}$,

მაგალითი.

რამდენი ხერხით შეიძლება ხუთი კაცის არჩევა ხუთ სხვადასხვა თანამდებობაზე, თუ კანდიდატთა რიცხვია 9?

ამოხსნა.

ცხადია, ვარიანტების საძიებელი რაოდენობა ტოლია n=9 ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო k=5 ელემენტიან წყობათა რიცხვის. ამ ამოცანისათვის **PERMUT** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:

PERMUT(Number, Number chosen)= PERMUT(9, 5).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ მწვრთნელს პირველი ხუთეულის დასაკომპლექტებლად აქვს 15120 ვარიანტი. ♦

COMBIN ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:

COMBIN (Number, Number chose).

COMBIN- გამოიანგარიშება n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო k ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი ფორმულით COMBIN (n, k)= $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

მაგალითი.

სკოლის კალათბურთის გუნდში 9 მოსწავლეა. გუნდის შესადგენად საჭიროა ხუთი მოთამაშე. რამდენი ხერხით შეუძლია მწრთვნელს ძირითადი გუნდის შედგენა?

ამოხსნა.

ძირითადი გუნდის შედგენის ვარიანტთა რაოდენობა ტოლია n=9 ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო k=5 ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვის. ამ ამოცანისათვის **COMBIN** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:

COMBIN (Number, Number chosen)= COMBIN (9.5).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ მწვრთნელს განსხვავებული შემადგენლობის პირველი ხუთეულის დასაკომპლექტებლად აქვს 15120 ვარიანტი. ♦

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

- როგორ განიმარტება შემთხვევითი ექსპერიმენტი?
- ჩამოაყალიბეთ ელემენტარული ხდომილების განმარტება
- რას უწოდებენ ელემენტარულ ხდომილობა სივრცეს?
- რას უწოდებენ (შემთხვევით) ხდომილობას?
- რას ეწოდება ორი ხდომილობის გაერთიანება, ჯამი, სხვაობა?
- რას ნიშნავს $A \subset B$?
- რას ეწოდება ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა?
- როგორ გამოითვლება პირობითი ალბათობა?
- რა შემთხვევაში ეწოდებათ ხდომილობებს დამოუკიდებელი?
- როგორ გამოითვლება ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობა?
- ხდომილობათა როგორ სისტემას ეწოდება სრული?
- რაში მდგომარეობს სრული ალბათობის ფორმულის შინაარსი?
- რაში მდგომარეობს ბაიესის ფორმულის შინაარსი?
- რას ეწოდება გადანაცვლება? წყობა? ჯუფთება?
- მოიყვანეთ გადანაცვლების, წყობისა და ჯუფთების ფორმულები.

- როგორ გამოითვლება ალბათობები დენდროგრამების საშუალებით?

სავარჯიშოები

2.1. ჩამოთვლილი ხდომილობებიდან რომელია აუცილებელი, შემთხვევითი და შეუძლებელი:
ა) ცდა-კამათლის გაგორება; ხდომილობები:
A_1-კენტი რიცხვის მოსვლა;
A_2- სამის ჯერადი რიცხვის მოსვლა;
A_3-ერთნიშნა რიცხვის მოსვლა;
A_4- ორნიშნა რიცხვის მოსვლა;
ბ) ცდა-სამიზნეს ესვრიან ოთხჯერ; ხდომილობები:
A_1-ერთი მოხვედრა მაინც;
A_2- სამი მოხვედრა;
A_3- არც ერთი მოხვედრა;
A_4- ხუთი მოხვედრა;
გ) ცდა- სათამაშო კარტის დასტიდან ხუთი კარტის ამოღება;ხდომილობები:
A_1- ამოღებულ კარტებში ერთი მაინც ტუზია;
A_2- სამი ტუზია;
A_3- ყველა ტუზია;
A_4- ერთ-ერთი მადგანი წითელია ან შავი;
დ) ცდა- შვიდი კამათლის გაგორება; ხდომილობები:
A_1- ყველა კამათელზე ერთი და იგივე ქულის მოსვლა;
A_2- კამათლებზე განსხვავებული ქულების მოსვლა;
A_3- კამათლებზე მოსული ქულების ჯამი 45-ს არ აღემატება;
A_4- კამათლებზე მოსული ქულების ჯამი ექვს არ აღემატება ;

2.2. დაასახელეთ მოცემული ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობა:
ა)კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლა; ბ) კამათელზე ორიანის მოსვლა; გ) ორი კამათლის გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი 12-ს არ აღემატება; დ) ორი მონეტის აგდებისას ორივეზე გერბის მოსვლა.

2.3. თავსებადია თუ არა შემდეგი ხდომილობები
ა) ცდა- კარტის ამოღება დასტიდან ;ხდომილობები:
A_1- ამოღებულია ჯვრის კარტი;
A_2- ამოღებულია ტუზი ;
ბ) ცდა- კამათლის გაგორება; ხდომილობები:
A_1- ლუწი რიცხვის მოსვლა;
A_2- სამის ჯერადი რიცხის მოსვლა;
A_3- უდიდესი შესაძლო რიცხის მოსვლა.
გ) ცდა- კამათლის გაგორება; ხდომილობები:
A_1- ლუწი რიცხვის მოსვლა;
A_2- კენტი რიცხის მოსვლა.
დ) ცდა- ორი კამათლის გაგორება; ხდომილობები:
A_1- ერთ კამათელზე კენტი რიცხვის მოსვლა;
A_2- ერთ კამათელზე ლუწი რიცხვის მოსვლა.
A_3- კამათლებზე ერთი და იგივე ქულის მოსვლა;
ე) ცდა- დასტიდან ორი კარტის ამოღება; ხდომილობები:
A_1- ორივე კარტი ერთი და იგივე ფერისაა;
A_2- ერთ-ერთი კარტი ტუზია;
A_3- ერთ-ერთი კარტი ექვსიანია ;

2.4. ტოლშესაძლებელია თუ არა ხდომილობები
ა) ცდა- კამათლის გაგორება; ხდომილობები:

A_1- ლუწი რიცხვის მოსვლა;

A_2- კენტი რიცხის მოსვლა.

ბ) ცდა-სამიზნეს ესვრიან ორჯერ; ხდომილობები:

A_1-ერთი მოხვედრა;

A_2- ორი აცდენა;

A_3- ერთი მოხვედრა, ერთი აცდენა;

გ) ცდა- კამათლის გაგორება; ხდომილობები:

A_1- ლუწი რიცხვის მოსვლა;

A_2- სამის ჯერადი რიცხის მოსვლა.

დ) ცდა- დასტიდან კარტის ამოღება; ხდომილობები:

A_1- ტუზის ამოღება;

A_2- ექვსიანის ამოღება.

ე) ცდა- ორი მონეტის აგდება; ხდომილობები:

A_1- ორივე მონეტაზე გერბის მოსვლა;

A_2- ორივე მონეტაზე საფასურის მოსვლა;

A_3- ერთ მონეტაზე საფასურის მოსვლა, მეორზე-გერბის.

2.5. A და B -ორი ნებისმიერი ხდომილობაა. ჩაწერეთ შემდეგი ხდომილობები:
ა) მოხდა მხოლოდ A ხდომილობა;
ბ) მოხდა მხოლოდ B ხდომილობა;
გ) ორივე ხდომილობა მოხდა;
დ) არც ერთი ხდომილობა არ მოხდა;
ე) მოხდა მხოლოდ ერთ-ერთი ხდომილობა;

2.6. A,B,C -სამი ნებისმიერი ხდომილობაა. ჩაწერეთ შემდეგი ხდომილობები:
ა) მოხდა მხოლოდ B ხდომილობა;
ბ) მოხდა მხოლოდ B და C ხდომილობები;
გ) სამივე ხდომილობა მოხდა;
დ) არც ერთი ხდომილობა არ მოხდა;
ე) მოხდა ერთ-ერთი ხდომილობა მაინც;
ვ) მოხდა ორი ხდომილობა მაინც;
ზ) მოხდა მხოლოდ ერთ-ერთი ხდომილობა;
თ) მოხდა მხოლოდ ორი ხდომილობა;
ი) მოხდა არა უმეტეს ორი ხდომილობისა.

2.7. ყოველი აღწერილი ექსპერიმენტისათვის ჩამოთვალეთ ყველა ელემენტარული ხდომილობა და გამოყავით ისინი, რომლებიც დასახელებულ ხდომილობას შეადგენენ:
ა) ექსპერიმენტი: კარტის სტანდარტული დასტიდან ვირჩევთ ერთ კარტს;
    ხდომილობა: მოდის „ვალეტი“.
ბ) ექსპერიმენტი: ბავშვს ჯიბეში აქვს 5-თეთრიანი, 10-თეთრიანი, 20-თეთრიანი და 50-თეთრიანი თითო მონეტა და იგი შემთხვევით იღებს ჯიბიდან ერთ მონეტას;
    ხდომილობა: მონეტის ღირებულება 20 თეთრს არ აღემატება.
გ) ექსპერიმენტი: ორი მონეტის ამოღება შემთხვევით (b)-ს პირობებში;
    ხდომილობა: მონეტების ჯამური ღირებულება არ აღემატება 30 თეთრს.
დ) ექსპერიმენტი: სამშვილიან ოჯახში ვიწერთ ბავშვების სქესს და ვალაგებთ ასაკის მიხედვით;
    ხდომილობა: ოჯახში არაუმეტეს ორი ვაჟია.

2.8. აგდებენ 5-თეთრიან, 10-თეთრიან და 20-თეთრიან თითო მონეტას და ასეთივე მიმდევრობით იწერენ გერბისა და საფასურის მიმდევრობას.
ა) ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები;
ბ) მიანიჭეთ ელემენტარულ ხდომილობებს ალბათობები;
გ) იპოვეთ შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები:

A={ერთი გერბი მაინც მოდის},

B={მოდის ზუსტად ერთი გერბი},
C={პირველად გერბი მოდის}.

2.9. აგორებენ წესიერ კამათელს და აგდებენ წესიერ მონეტას.
ა) ჩამოთვალეთ ელემენტარული ხდომილობები;
ბ) მიანიჭეთ ელემენტარულ ხდომილობებს ალბათობები;
გ) იპოვეთ შემდეგ ხდომილობათა ალბათობები:
A={კამათელზეა 6, მონეტაზე – გერბი},
B={კამათელზეა ლუწი რიცხვი, მონეტაზე – საფასური},
C={მონეტაზეა საფასური}.

2.10. 1000 ახალშობილიდან 5214 ვაჟია. განსაზღვრეთ ვაჟის დაბადების ფარდობითი სიხშირე.

2.11. პირველ 4000 ნატურალურ რიცხვს შორის 551 მარტივი რიცხვია. განსაზღვრეთ მარტივი რიცხვის ფარდობითი სიხშირე.

2.12. ყოველ 1000 დეტალში საშუალოდ 4 წუნდებულია. დაახლოებით რამდენი წუნდებული დეტალი იქნება 2400 დეტალში?

2.13. ურნაში 3 თეთრი, 7 შავი და 5 წითელი ბირთვია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ურნიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი: ა) იქნება თეთრი, ბ) არ იქნება შავი

2.14. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სამი მონეტის აგდებისას:
ა) მხოლოდ ერთზე მოვა გერბი, ბ) მხოლოდ ორზე მოვა გერბი, გ) სამივეზე მოვა გერბი, დ) არა უმეტეს ორ მათგანზე მოვა გერბი.

2.15. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ კამათლის გაგორებისას მოვა:
ა) რიცხვი 4; ბ) არანაკლებ სამი ქულისა; გ) ლუწი რიცხვი?

2.16. ორი კამათლის გაგორებისას ვიხილავთ ხდომილობებს:
A-პირველ კამათელზე მოვიდა ექვსი ქულა;
B- ერთ-ერთ კამათელზე მოვიდა ხუთი ქულა;
გამოთვალეთ A, B, $\overline{A}$, $A\overline{B}$ ხდომილობების ალბათობები.

2.17. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას: ა) მოსულ რიცხვების ჯამი ხუთს არ აღემატება; ბ) ერთ-ერთზე მაინც მოვა ხუთი ქულა; გ) მოსულ ქულათა ჯამი 3-ის ჯერადია; დ) მოსულ რიცხვების სხვაობის მოდული 2-ის ტოლია; ე) მოსულ რიცხვების ნამრავლია 6; ვ) ჯამში არ მიიღება რიცხვი 7.

2.18. კარტის დასტიდან, რომელშიც 36 კარტია, შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს კარტი: ა) ტუზია; ბ) ჯვრის ვალეტია; გ) გულის შვიდიანი ან გულის ათიანია; დ) არც ექვსიანია, არც ჯვარი.

2.19. ერთი ქვემეხიდან სროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,9. ხოლო მეორედან სროლისას 0,8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ქვემეხებიდან თითო გასროლის შემდეგ მიზანი დაზიანებული იქნება?

2.20. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი სწორად უპასუხებს საგამოცდო ბილეთის თეორიულ საკითხს, არის 0.8 და რომ ამოხსნის პრაქტიკულ ამოცანას – არის 0.7. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი არ ჩაიჭრება გამოცდაზე, თუ ნიშნის მისაღებად საკმარისია თეორიულ საკითხზე პასუხის გაცემა ან პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნა.

2.21. სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად თითოჯერ ესვრის ერთ და იმავე სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობაა 0.8, მეორისათვის – 0.9, მესამისათვის – 0.85. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სროლის შემდეგ სამიზნე დაზიანებული აღმოჩნდება.

2.22. ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ორ-ორჯერ ესვრის ერთ და იმავე სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობაა 0.8, მეორისათვის – 0.9. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სროლის შემდეგ სამიზნე დაზიანებული აღმოჩნდება.

2.23. სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად თითოჯერ ესვრის ერთ და იმავე სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობაა 0.9, მეორისათვის – 0.9, მესამისათვის – 0.6. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: 1) სამივე მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს; 2) ერთი მსროლელი მაინც მოახვედრებს სამიზნეს; 3) მხოლოდ ერთი მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს.

2.24. ალბათობა იმისა, რომ პირველი ქვემეხიდან გასროლილი ჭურვი სამიზნეს მოხვდება, არის 0.8, ხოლო მეორე ქვემეხიდან გასროლისას –0.6. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ამ ორი ქვემეხიდან ერთდროულად გასროლისას სამიზნეს მოხვდება მხოლოდ ერთი ჭურვი.

2.25. ხისაგან დამზადებული კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, ათას ტოლ ნაწილად დახერხეს. მიღებული პატარა კუბები აურიეს და შემთხვევით აირჩიეს ერთი მათგანი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ არჩეულ კუბს ორი წახნაგი შეღებილი აქვს.

2.26. ადგენენ თუ არა ხდომილობათა სრულ სისტემას ხდომილობათა შემდეგი ჯგუფები:

1) ცდა- მონეტის აგდება; ხდომილობები:
   - A_1- გერბის მოსვლა;
   - A_2- საფასურის მოსვლა.
2) ცდა- კამათლის გაგორება; ხდომილობები:
   - A_1- ლუწი რიცხვის მოსვლა მოსვლა;
   - A_2- კენტი რიცხვის მოსვლა მოსვლა.
3) ცდა- კამათლის გაგორება; ; ხდომილობები:
   - A_1- მოსული რიცხვი ხუთს არ აღემატება;
   - A_2- მოსული რიცხვი სამზე ნაკლები არაა.
4) ცდა- ორი კამათლის გაგორება ; ხდომილობები:
   - A_1- ორი კამათელზე ერთი და იგივე რიცხვის მოსვლა;
   - A_2- კამათლებზე სხვადასხვა რიცხის მოსვლა.
5) ცდა- კამათლის გაგორება ; ხდომილობები:
   - A_1- ლუწი რიცხვის მოსვლა;
   - A_2- სამის ჯერადი რიცხის მოსვლა.
6) ცდა- ორი მონეტის აგდება; ხდომილობები:
   - A_1- ორივეზე გერბის მოსვლა;
   - A_2- ორივეზე საფასურის მოსვლა;
7) ცდა- სამიზნეს ესვრიან ორჯერ; ხდომილობები:
   - A_1- ერთი მოხვედრა მაინც;
   - A_2- ერთი აცდენა მაინც;

2.27. სამშობიარო სახლში უკანასკნელ 24 საათში ოთხი ბავშვი დაიბადა. ვთქვათ, ჩვენ სხვა ინფორმაცია არ გაგვაჩნია და მხოლოდ ახალშობილთა სქესი გვაინტერესებს.

ა) ჩამოთვალეთ ყველა შესაძლო ელემენტარული ხდომილობა და მიაწერეთ მათ შესაბამისი ალბათობები;

ბ) გამოსახეთ შემდეგი ხდომილობები ელემენტარულ ხდომილობათა საშუალებით:

A={გაჩნდა ორი ვაჟი და ორი ქალი},

B={ვაჟები არ გაჩნდა},

C={ერთი მაინც ვაჟია}.

გ) გამოთვალეთ: $P\{AB\}$, $P\{AC\}$, $P\{BC\}$, $P\{\overline{C}\}$, $P\{\overline{AC}\}$;

დ) გამოთვალეთ $P\{A|C\}$. უთავსებადია თუ არა A და C ხდომილობები? დამოუკიდებელია თუ არა A და C ხდომილობები?

ე) გამოთვალეთ $P\{B|C\}$. უთავსებადია თუ არა B და C ხდომილობები? დამოუკიდებელია თუ არა B და C ხდომილობები?

2.28. ვთქვათ ექსპერიმენტი ოთხი ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 ელემენტარული ხდომილობით აღიწერება, რომელთა ალბათობებია 1/3, 1/3, 1/6 და x; თუ $A=\{\omega_1,\omega_3\}$, $B=\{\omega_1,\omega_4\}$ და $C=\{\omega_2,\omega_3\}$,
ა) იპოვეთ $P(A)$ და $P(B)$;
ბ) იპოვეთ $P(A|B)$ და $P(B|C)$;
გ) იპოვეთ $P(A\cup B)$ და $P(A\cup C)$;
დ) უთავსებადია თუ არა A და B? დამოუკიდებელია თუ არა A და B?

2.29. ცდა მდგომარეობს ორი მონეტის აგდებაში. განსაზღვრეთ დამოუკიდებელია თუ არა A და B ხდომილობები:
ა) A={ღერბი პირველ მონეტაზე}, B={ღერბი მეორე მონეტაზე}.
ბ)A=(ერთი საფასური მაინც ორივე მონეტაზე}, B={ერთი ღერბი მაინც ორივე მონეტაზე}.
გ) A={ღერბი პირველ მონეტაზე}, B={ერთი ღერბი მაინც ორივე მონეტაზე}.

2.30. დასტიდან იღებენ ორ კარტს, რომელთაგან ერთ-ერთი ათიანია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ამ ორი კარტიდან შემთხვევით აღებული კარტი ტუზი აღმოჩნდება?

2.31. ხარისხის სახელმწიფო ინსპექტორი ამოწმებს სასურსათო მაღაზიაში რძის პროდუქტებს. ცნობილია, რომ რძის 20 პაკეტიდან ორი ამჟავებულია. ინსპექტორი შემთხვევით ირჩევს გასასინჯად 2 პაკეტს 20-დან. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის:
ა) არცერთი არ იქნება ამჟავებული;
ბ) მხოლოდ ერთი იქნება ამჟავებული;
გ) ორივე ამჟავებული იქნება.

2.32. წინა ამოცანის პირობებში დამატებით დავუშვათ, რომ რძის 90% წინა დღისაა და ამჟავებული რძის შემცველი ის 2 პაკეტიც წინა დღისაა. ინსპექტორი ირჩევს ახალ სტრატეგიას. მას სურს ჯერ თარიღი შეამოწმოს, მერე კი თითო პაკეტი შეარჩიოს როგორც ძველი, ისე ახალი პაკეტებიდან. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ერთ პაკეტში მაინც იქნება ამჟავებული რძე?

2.33. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ერთ-ერთ მათგანზე მაინც მოვა ექვსიანი, თუ ცნობილია, რომ ორივეზე სხვადასხვა რიცხვი მოვიდა.

2.34. სტუდენტმა 25 საგამოცდო ბილეთიდან 20 იცის. გამომცდელი მისთვის 3 საკითხს არჩევს. პირობითი ალბათობის ცნების გამოყენებით იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტმა სამივე საკითხი იცის.

2.35. ვთქვათ, სტუდენტმა 25 საგამოცდო ბილეთიდან მხოლოდ 5 ბილეთი იცის. როდის უფროა მოსალოდნელი, რომ მას მომზადებული ბილეთი შეხვდება, პირველ ნომრად თუ მეორე ნომრად გასვლისას?

2.36. ჩათვლა ტარდება შემდეგი წესით: დასმული ერთი საკითხის არცოდნის შემთხვევაში სტუდენტს დამატებით აძლევენ კიდევ ერთ საკითხს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ჩათვლას ვერ მიიღებს, თუ ჩათვლისათვის განკუთვნილი 10 საკითხიდან მან იცის 7 საკითხი?

2.37. სამი ქვემეხიდან ერთობლივი გასროლისას ორი ჭურვი მოხვდა მიზანს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ქვემეხიდან გასროლილი ჭურვი მოხვდა მიზანს, თუ პირველი, მეორე და მესამე ქვემეხისათვის სამიზნეს დაზიანების ალბათობებია 0.5, 0.7 და 0.8.

2.38. იმ ყუთიდან, რომელშიც 3 თეთრი და 2 შავი ბირთვია, შემთხვევით ამოიღეს 2 ბირთვი და ჩადეს მეორე ყუთში, რომელშიც 4 თეთრი და 4 შავი ბირთვი იყო. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი თეთრია.

2.39. ყუთიდან, რომელშიც 3 თეთრი და 2 შავი ბირთვია, შემთხვევით ამოიღეს 1 ბირთვი და ჩადეს მეორე ყუთში, რომელშიც 4 თეთრი და 4 შავი ბირთვი იყო. ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან შემთხვევით იღებენ

ერთ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველი ყუთიდან მეორეში გადაიტანეს თეთრი ფერის ბირთვი, თუ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი თეთრია?

2.40. დომინოს 28 სათამაშო ქვიდან შემთხვევით ირჩევენ 2 ქვას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თამაშის წესების შესაბამისად ქვები მიედება ერთმანეთს?

2.41. ნაკეთობა აკმაყოფილებს სტანდარტს 0.96 ალბათობით. გამარტივებული კონტროლის პროცედურა დადებით შედეგს იძლევა 0.98 ალბათობით სტანდარტული ნაკეთობისათვის, ხოლო 0.05 ალბათობით ისეთივე შედეგს არასტანდარტული ნაკეთობისათვის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა, რომელიც ამ პროცედურას წარმატებით გაივლის, სტანდარტულია?

2.42. პირველ ყუთში 2 თეთრი და 3 შავი, მეორეში 2 თეთრი და 4 შავი, ხოლო მესამეში კი 3 თეთრი და 2 შავი ბურთია. თანმიმდევრობით ასრულებენ შემდეგ მოქმედებებს: პირველი ყუთიდან შემთხვევით არჩეული ერთი ბურთი გადააქვთ მეორეში, მეორიდან შემთხვევით არჩეული ერთი ბურთი გადააქვთ მესამეში, ხოლო მესამიდან კვლავ შემთხვევით არჩეული ერთი ბურთი გადააქვთ პირველში. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ პირველ ყუთში ბურთების შემადგენლობა არ შეიცვლება?

2.43. გამოთვალეთ შემდეგი ფაქტორიალების რიცხვითი მნიშვნელობები: ა) 5!, ბ) $2!\cdot 3!$, გ) $\dfrac{6!}{4!\cdot 2!}$.

2.44. იპოვეთ კომბინაციათა რაოდენობები: ა) C_3^2, ბ) C_6^4, გ) C_5^5.

2.45. ურნაში ორი თეთრი და სამი შავი ბირთვია. იღებენ ორ ბირთვს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

A={ორივე ბირთვი თეთრია},

B={ბირთვები სხვადასხვა ფერისაა},

C={ორივე ბირთვი შავია}.

2.46. ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ პირველი ბირთვი ურნაში უკან ბრუნდება.

2.47. ყუთიდან, რომელშიც აწყვია ბარათები ასოებით „ი", „ლ", „ო", „პ", „ს", შემთხვევით იღებენ ბარათებს და ალაგებენ მიმდევრობით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შედეგად მიიღება სიტყვა „სპილო„?

2.48. ყუთიდან, რომელშიც აწყვია ბარათები ასოებით „ი", „მ", „ო", „ს", „უ", „ხ" შემთხვევით იღებენ ბარათებს და ალაგებენ მიმდევრობით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შედეგად მიიღება სიტყვა „სოხუმი„?

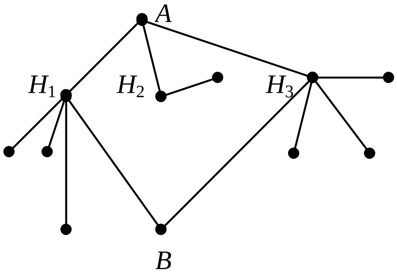
2.49. ყუთიდან, რომელშიც აწყვია ბარათები ასოებით „ა", „ბ", „გ", „დ", „ე", „ვ", „ზ", „თ", „ი",, შემთხვევით იღებენ 3 ბარათს და ალაგებენ მიმდევრობით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შედეგად მიიღება სიტყვა „ათი„?

2.50. იგივე პირობა, რაც წინა ამოცანაშია, მხოლოდ შეიძლება ამოღებული ბარათების ნებისმიერი გადანაცვლება.

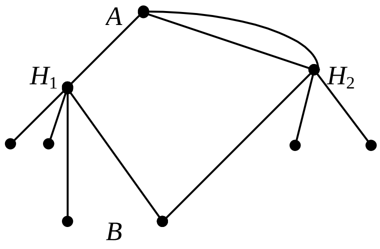
2.51 ურნაში 6 თეთრი 8 შავი ბირთვია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ურნიდან შემთხვევით ამოღებული ორი ბირთვიდან ორივე ბირთვი შავი იქნება?

2.52. ურნაში 8 თეთრი და 12 შავი ბირთვია.ურნიდან შემთხვევით, თანმიმდევრობით, ამოიღეს ორი ბირთვი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბირთვი თეთრია?

2.53. ტურისტი გზათა ყოველ გასაყარზე თანაბარი ალბათობით ირჩევს გზის გაგრძელებას (ოღონდ უკან არ ბრუნდება). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იგი A წერტილიდან მივა B წერტილში, თუ გზათა სქემა შემდეგია



2.54. ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ გზათა სქემა შემდეგია



2.55. სამმა ზეინკალმა დაამზადა ახალი პროდუქციის ერთი და იგივე რაოდენობა. ამ პროდუქციის მაღალი ხარისხის მიღწევისათვის გამოიყო პრემია 560 ლარი. გაანაწილეთ ეს პრემია ზეინკლებს შორის, თუ ალბათობა იმისა, რომ ზეინკლები მაღალი ხარისხის პროდუქციას დაამზადებენ, შესაბამისად არის 0.9, 0.94 და 0.96.

2.56. სამი ხარატი ამზადებდა ერთი და იგივე დასახელების ერთი და იგივე რაოდენობის დეტალებს. დამზადებული დეტალებიდან ზოგიერთი დეფექტიანი აღმოჩნდა, რის გამოც ხარატებმა უნდა გადაიხადონ 105 ლარი ჯარიმა. გაანაწილეთ ჯარიმა ხარატებს შორის, თუ ცნობილია, რომ ამ ხარატების მიერ დეფექტიანი დეტალების დამზადების ალბათობებია შესაბამისად 0.01, 0.02 და 0.03.

2.57. საპრიზო ფონდის მოსაგებად ორი A და B პირი თამაშობს თამაშს, რომელიც გრძელდება 3 მოგებამდე. ერთ პარტიაში A-ს მოგების ალბათობაა p, ხოლო B-ს მოგებისა კი – $q = 1–p$. ვთქვათ თამაში შეწყდა, როდესაც A-ს მოგებული ჰქონდა 2, ხოლო B-ს კი – 1 პარტია. როგორ უნდა განაწილდეს საპრიზო ფონდი? (მითითება: გამოიყენეთ A-სა და B-ს მოგების ალბათობები თამაშის გაგრძელების შემთხვევაში ორი დამატებითი პარტიით; ასეთი ტიპის ამოცანა პირველად გადაწყვიტეს პასკალმა და ფერმამ XVII საუკუნეში).

2.58. ვაშლის პარტიების ხარისხის ინსპექტორი მისაღებად თვლის „ცუდი“ პარტიების მხოლოდ 10%-ს და იწუნებს „კარგი“ პარტიების 5%-ს. საზოგადოდ, გამოგზავნილი პარტიების 90% „კარგია“.
ა) განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ:

1. მიიღება „ცუდი“ პარტია;
2. დაწუნებულია „კარგი“ პარტია.

ბ) ააგეთ ალბათობათა ცხრილი, ერთი მხრივ „კარგი“ და „ცუდი“ პარტიების, ხოლო მეორე მხრივ ინსპექტორის მიერ მიღების ან დაწუნების მიხედვით.
გ) განსაზღვრეთ ალბათობა იმისა, რომ ინსპექტორი მცდარ გადაწყვეტილებას მიიღებს შემთხვევით შერჩეული პარტიის შემოწმებისას.

2.59. წინა ამოცანაში ააგეთ დენდროგრამა. პირველ ნაბიჯზე იყოს პარტიის ხარისხი, მეორეზე – ინსპექტორის ქმედება. განსაზღვრეთ ყოველი ცალკეული ბილიკის ალბათობა.

2.60. ყუთში 6 თეთრი, 4 შავი და 5 წითელი ბირთვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან 3 ბირთვის რიგ-რიგობით ამოღებისას გვექნება ბირთვების მიმდევრობა „წითელი, შავი, თეთრი“, თუ ბირთვების ამოღება ხდება: ა) დაბრუნებით; ბ) დაბრუნების გარეშე.

2.61. ურნაში 4 თეთრი და 3 შავი ბირთვია. ურნიდან რიგ-რიგობით იღებენ ბირთვებს მანამ, სანამ არ ამოვა თეთრი ბირთვი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ:

ა) თეთრი ბირთვი ამოვა პირველ ნაბიჯზე;
ბ) თეთრი ბირთვი ამოვა მეორე ნაბიჯზე;
გ) თეთრი ბირთვი ამოვა მესამე ნაბიჯზე;
დ) თეთრი ბირთვი ამოვა მეოთხე ნაბიჯზე;
დახაზეთ შესაბამისი დენდროგრამა. რას უდრის მიღებულ ალბათობათა ჯამი?

2.62. როგორ გამოითვლიდით ანალოგიურ ალბათობებს, რომ წინა ამოცანაში ბირთვები ყოველ ამოღებაზე უკან ბრუნდებოდეს?

2.63. ერთ ურნაში 10 თეთრი და 2 შავი ბირთვია, მეორეში- 4 თეთრი და 8 შავი. ყოველი ურნიდან იღებენ თითო ბირთვს. როგორია იმის ალბათობა, რომ ორივე ამოღებული ბირთვი შავია?

2.64. წინა ამოცანის პირობებში გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვებიდან ერთი თეთრია, მეორე-შავი.

2.65. ერთ ურნაში 3 თეთრი, 4 შავი და 2 წითელი ბირთვია, მეორეში 5 თეთრი, 2 შავი და 3 წითელი ბირთვი. თითოეული ურნიდან შემთხვევით იღებენ თითო ბირთვს. როგორია იმის ალბათობა, რომ მათ შორის არ იქნება წითელი ბირთვი?

2.66. ურნაში 8 თეთრი და 2 შავი ბირთვია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ურნიდან ერთდროულად ამოღებული სამივე ბირთვი თეთრი იქნება?

2.67. ურნაში 12 თეთრი, 4 შავი, 8 წითელი და 1 მწვანე ბირთვია. როგორია იმის ალბათობა, რომ ურნიდან მიმდევრობით ამოღებული სამი ბირთვიდან პირველი შავი იქნება, მეორე-თეთრი, მესამე-წითელი?

2.68. ერთ ურნაში 5 თეთრი და 15 შავი ბირთვია, მეორეში 3 თეთრი და 2 შავი ბირთვი. პირველი ურნიდან მეორეში გადააქვთ ერთი ბირთვი. ბირთვების არევის შემდეგ მეორე ურნიდან პირველში შემთხვევით აბრუნებენ ერთ ბირთვს. როგორია იმის ალბათობა, რომ ამის შემდეგ პირველი ურნიდან ამოღებული ბირთვი თეთრი იქნება?

2.69. ერთ ურნაში 3 თეთრი და 5 წითელიავი ბირთვია, მეორეში- 2 თეთრი და 3 წითელი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან ამოღებული ბირთვი თეთრი იქნება?

თავი II. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები

ცვლად სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობები დამოკიდებულია შემთხვევითი ექსპერიმენტის ან მოვლენის შედეგზე, ეწოდება ***შემთხვევითი სიდიდე***. შემთხვევით სიდიდეთა მაგალითებს წარმოადგენენ: რაიმე ფიზიკური სიდიდის გაზომვის შედეგები, მონეტის რომელიმე მხრის, ვთქვათ, გერბის გამოჩენათა რაოდენობა მონეტის განმეორებითი აგდებისას, სხვადასხვა დღეს გარკვეულ საქონელზე მოთხოვნათა რაოდენობა მაღაზიაში, ბროუნის ნაწილაკის მდგომარეობა, რომელსაც ვაკვირდებით მიკროსკოპში დროის სხვადასხვა მომენტში და სხვა.

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ***დისკრეტული***, თუ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრული ან თვლადია (ანუ უსასრულოა, მაგრამ შესაძლებელია მნიშვნელობათა გადანომრვა).

დისკრეტულის გარდა ჩვენ განვიხილავთ ისეთ შემთხვევით სიდიდეებსაც, რომელთა შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე ავსებს მთელ წრფეს, ნახევარწრფეს ან რაიმე სასრულ ინტერვალს. ასეთ შემთხვევით სიდიდეებს ***უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეებს*** უწოდებენ.

შემდგომში შემთხვევით სიდიდეებს ჩვენ აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით, მაგალითად X, Y, Z, ხოლო შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

§ 1. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

მოვიყვანოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების მაგალითები.

მაგალითი 3.1. (2.1. მაგალითის გაგრძელება)

ექსპერიმენტი - მონეტის აგდება,

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა $\Omega = \{$გ, ს$\}$.

შემთხვევითი სიდიდე - გერბის გამოჩენის რაოდენობა მონეტის ერთჯერადი აგდებისას.

ამ შემთხვევაში X შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს ორ, ნულის და ერთის ტოლ მნიშვნელობებს. ექსპერიმენტის ჩატარებამდე შეუძლებელია ექსპერიმენტის შედეგის ცალსახად განსაზღვრა.

მაგალითი 3.2. (2.3. მაგალითის გაგრძელება)

ექსპერიმენტი - აგდებენ ორ სხვადასხვა მონეტას.

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცეა $\Omega = \{$გგ, გს, სგ, სს$\}$.

შემთხვევითი სიდიდე - გერბის გამოჩენის რაოდენობა მონეტის ორ აგდებისას.

ამ შემთხვევაში (გგ) ელემენტარულ ხდომილობას შეესაბამება ხდომილობა "X შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს X=2-ის ტოლ მნიშვნელობას" , ხდომილობას (გს, სგ) -ხდომილბა $\{X=1\}$, ხოლო ელემენტარულ ხდომილობას (სს) -ხდომილობა $\{X=0\}$. ამრიგად X შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა 0,1,2.

მაგალითი 3.3. (2.4. მაგალითის გაგრძელება)

ექსპერიმენტი - აგორებენ ორ გარჩევად კამათელს, ან ორჯერ აგორებენ ერთ კამათელს. ამ შემთხვევაში

$$\begin{aligned}\Omega =\{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\\ & (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\\ & (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\\ & (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}.\end{aligned}$$

ამ შემთხვევაში შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება განვსაზღვროდ მრავალნაირად. მაგალითად, X და Y შემთხვევითი სიდიდეები განვსაზღვროდ შემდეგნაირად

X - "კამათლებზე მოსულ რიცხვთა ჯამი",

Y - "კამათლებზე მოსულ რიცხვთა სხვაობის მოდული".

მიუთითეთ ამ სიდიდეთა ყველა შესაძლო რიცხვითი მნიშვნელობები.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე არის Ω-ზე განსაზღვრული ფუნქცია; ამ შემთხვევით სიდიდეთა მნიშვნელობათა სიმრავლე სასრულია. ის რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს ამა თუ იმ რიცხვით მნიშვნელობას დამოკიდებულია შემთხვევითი ექსპერიმენტის შედეგზე.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის ***განაწილების კანონი*** წარმოადგენს თანადობას შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებსა და შესაბამის ალბათობებს შორის. ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი სახის ცხრილი

X -

x_1	x_2	. . .	x_r
p_1	p_2	. . .	p_r

(3.1)

სადაც პირველ სტრიქონში ჩამოთვლილია X სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა $x_1,x_2,\ldots,x_r$, ხოლო მეორეში – ამ სიდიდის მიერ ყოველი შესაძლო x_k მნიშვნელობის მიღების ალბათობები

$$p_k=P\{X=x_k\},\ p_k>0,\qquad k=1,2,..,r,\ \text{და}\ \ p_1+p_2+\cdots+p_r=1.$$

(3.1) სახის ცხრილს დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ან უბრალოდ განაწილებას უწოდებენ. (3.1)-ში იგულისხმება, რომ $x_1<x_2<\cdots<x_r$.

ანალოგიურად განისაზღვრება ისეთი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონიც, რომლის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლე თვლადია:

X-

x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$
p_1	p_2	$\cdots$	p_r	$\cdots$

(3.2)

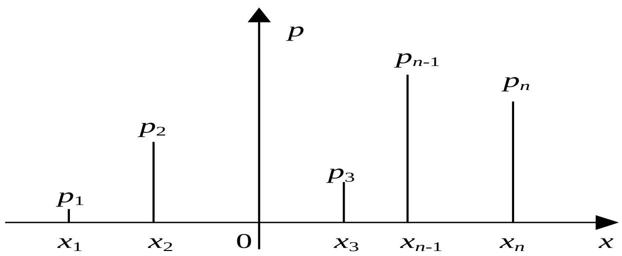
სადაც $p_k=P\{X=x_k\}>0$, $k=1,2,\ldots,r,\ldots$ და $p_1+p_2+\cdots+p_r+\cdots=1$; $x_i \neq x_k$, თუ $i\neq k$. უფრო მეტიც, ჩვენი განხილვის ფარგლებში სავსებით საკმარისია ვიგულისხმოთ, რომ (3.2) ში $x_1<x_2<\cdots<x_r<\cdots$.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის ცოდნა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ შემთხვევით სიდიდესთან დაკავშირებული *ნებისმიერი ხდომილობის ალბათობა.* მაგალითად, რადგან ხდომილობა $\{a<X\leq b\}=\bigcup\limits_{a<x_k\leq b}\{X=x_k\}$ და $\{X = x_k\}$, $k=1,2,\ldots$, ხდომილობები წყვილ-წყვილად უთავსებადია, გვექნება

$$P\{a<X\leq b\}=\sum_{a<x_k\leq b}P(X=x_k)=\sum_{k:a<x_k\leq b}p_k\ , \tag{3.3}$$

სადაც $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.

ხშირად მოხერხებულია განაწილების კანონის *გრაფიკული წარმოდგენა*; ამისათვის შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებს გადაზომავენ აბსცისათა ღერძზე და ამ წერტილებში აღმართავენ შესაბამისი ალბათობების ტოლი სიგრძის მართობებს:



ნახ. 3.1.

მაგალითი 3.4. X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X

–1	0	1	2	3
0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

(3.4)

ვიპოვოთ ალბათობა, იმისა რომ: 1) $X \leq 0$; 2) $X < 3$; 3) $0 < X \leq 3$.

ამოხსნა. (3.3)-ისა და (3.4)-ის თანახმად

$P\{X\leq0\}=P\{X=-1\}+P\{X=0\}=0.1+0.15=0.25;$

$P\{X<3\}=P\{X\leq2\}=P\{X=-1\}+P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1-P\{X=3\}= 0.8;$

$P\{0<X\leq2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=P\{X\leq2\}-P\{X\leq0\}=0.55.$

ამრიგად, სამივე შემთხვევაში, საძიებელ ხდომილობათა ალბათობების გამოთვლა ხდება $\{X\leq x\}$ სახის ხდომილობათა ალბათობების მეშვეობით. შევნიშნოთ, რომ ეს ფაქტი სამართლიანია არა მხოლოდ ამ კონკრეტული მაგალითისათვის, არამედ ზოგადადაც. ♦

§ 2. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (საშუალო მნიშვნელობა), მოდა

შემთხვევითი სიდიდის რიცხვით მახასიათებლებს შორის, უპირველეს ყოვლისა, უნდა განვსაზღვროთ ისეთები, რომელთა "გარშემოც" ჯგუფდება შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობანი. ერთ-ერთ ასეთ რიცხვით მახასიათებელს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის ***მათემატიკური ლოდინი***, რომელსაც მისი არსიდან გამომდინარე საშუალო მნიშვნელობასაც უწოდებენ.

განვიხილოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების კანონია (3.1). შემთხვევითი სიდიდის *მათემატიკური ლოდინი ანუ მისი საშუალო მნიშვნელობა (აღინიშნება EX-ით, E არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა Expectation – ლოდინი, მოსალოდნელობა*) ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების შესაბამის ალბათობებზე ნამრავლთა ჯამს, ანუ რიცხვს

$$\boldsymbol{EX} = \sum_{i=1}^{r} x_i p_i = \boldsymbol{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_r p_r} \tag{3.5}$$

მათემატიკური ლოდინის *შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს*: შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი დაახლოებით ტოლია ამ შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებულ მნიშვნელობების არითმეტიკული საშუალოსი.

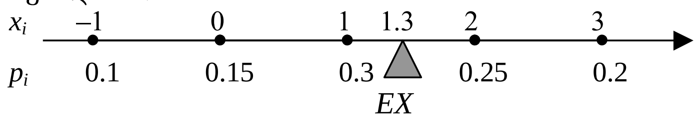
ცხადია, რომ აუცილებელი არ არის შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ტოლი იყოს მისი რომელიმე შესაძლო მნიშვნელობისა.

თუ გავიხსენებთ არითმეტიკული საშუალოს ფიზიკურ ინტერპრეტაციას პირველი თავიდან და წარმოვიდგენთ, რომ p_i (p_1=0.1, p_2=0.15, p_3=0.3, p_4=0.25, p_5=0.2) მასები მოთავსებულია OX ღერძის x_i (x_1= –1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, x_5=3) წერტილებში და თავად OX ღერძს მასა არა აქვს, მაშინ ამ ღერძის არცერთ წერტილს არა აქვს დადებითი მასა გარდა $x_1, x_2, \ldots, x_5$ წერტილებისა და EX არის იმ საყრდენი წერტილის აბსცისა, რომლის მიმართ ღერძი წერტილოვანი მასებით წონასწორობაში იქნებოდა (იხ. ნახ. 3.2).

წერტილოვანი მასების (3.1) სახის განაწილების კანონისათვის (ერთეულოვანი ჯამური მასით) ეს ფაქტი ასე გამოითქმის:

$$\sum_{i=1}^{r} (x_i - EX) p_i = 0$$

(შეადარე (3.5) თანაფარდობას).



ნახ. 3.2

იმ შემთხვევაში, როდესაც განაწილების კანონს აქვს (3.2) სახე

$$EX = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i,$$

თუ ცნობილია, რომ $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, p_i < \infty$.

დამტკიცების გარეშე მოგვყავს *მათემატიკური ლოდინის ძირითადი თვისებები*, რომლებიც უშუალოდ მოწმდება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის.

1. $Ec=c$, ანუ მუდმივის მათემატიკური ლოდინი ამ მუდმივის ტოლია.
2. $EcX=cEX$, ანუ მუდმივი გადის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ;
3. $E(c_1X_1+c_2X_2)=c_1EX_1+c_2EX_2$, ანუ წრფივი კომბინაციის მათემატიკური ლოდინი ლოდინების წრფივი კომბინაციის ტოლია;
4. თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები *დამოუკიდებელია*, მაშინ $EXY=EX \cdot EY$.

მაგალითი 3.5. გამოვთვალოთ 3.4 მაგალითში მოცემული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. გამოთვლების შესასრულებლად მონაცემები წარმოვიდგინოთ 3.1. ცხრილის სახით, რის შემდეგ შესასრულებელი გამოთვლები კომენტარს არ საჭიროებს.
ცხრილი 3.1.

i	x_i	p_i	$x_i\,p_I$
1	–1	0.10	– 0,1
2	0	0.15	0
3	1	0.30	0,3
4	2	0.25	0,5
5	3	0.20	0,6
			$EX=\sum_{i=1}^{5} x_i\,p_i$ =1.3

განვსაზღვროთ განაწილების მოდა დისკრეტული ტიპის განაწილებებისათვის. დისკრეტული ტიპის ***განაწილებების მოდა*** ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის იმ მნიშვნელობას, რომლის გახორციელების ალბათობა უდიდესია.

მაგალითით 3.1-ით განსაზღვრული განაწილების მოდა 1-ის ტოლია.

§ 3*. შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი

ხშირად მოცემულია რაიმე X შემთხვევითი სიდიდე ცნობილი განაწილების კანონით და გვაინ-ტერესებს $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის გამოთვლა, სადაც $h(x)$ ნამდვილი x ცვლადის რაიმე ფუნქციაა.

გავარჩიოთ შესაბამისი მაგალითი.

მაგალიიი 3.6. ვთქვათ, $h(x)=x^3–4x$ და X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–2	–1	0	2
	0.1	0.3	0.4	0.2

რისი ტოლია $Y=X^3$-$4X$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი?

ამოხსნა. დავალების შესასრულებლად ჯერ შეიძლება დავადგინოთ Y შემთხვევითი სიდიდის განაწილება და შემდეგ გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი.

ა) დავადგინოთ $Y = h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი;

ცხადია, რომ $h(–2)=h(0)=h(2)=0$ და $h(–1)=(–1)^3–4\cdot(–1)=3$. ამიტომ Y შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0 და 3. დავადგინოთ განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{Y=0\}$ და $P\{Y=3\}$. რადგან $\{X=–2\}$, $\{X=0\}$ და $\{X=2\}$ ხდომილობები უთავსებადია, ალბათობათა შეკრების წესის თანახმად გვექნება:

$$P\{Y=0\}=P\{\{X=–2\}\cup\{X=0\}\cup\{X=2\}\}=P\{X=–2\}+P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.1+0.4+0.2=0.7$$

და $P\{Y=3\}=P\{X=–1\}=0.3$. ამიტომ საბოლოოდ, $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს ექნება შემდეგი სახე:

Y	0	3
	0.7	0.3

რომლისთვისაც EY=0,9.

უფრო მარტივია $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი გამოითვალოს X-ის განაწილების ტერმინებში.

ბ) გამოვთვალოთ $Y=h(X)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი.შემდეგი ფორმულით:

$$Eh(X)=\sum_i h(x_i)P\{X=x_i\}. \qquad (3.6)$$

(3.6)-ის საფუძველზე გვაქვს

$$EY=h(–2)\cdot 0,1+h(–1)\cdot 0,3+h(0)\cdot 0,4+h(2)\cdot 0,2=0\cdot 0,1+3\cdot 0,3+0\cdot 0,4+0\cdot 0,2=0,9.$$ ♦

§ 4. დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა

დავიწყოთ მაგალითის განხილვით. განვიხილოთ ორი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე განაწილების შემდეგი კანონებით:

X_1

–3	1
1/4	3/4

X_2

–90	45
1/3	2/3

განხილულ მაგალითში ორივე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი 0-ის ტოლია. მართლაც, $EX_1=(–3)\cdot1/4+1\cdot3/4=0$, $EX_2=(–90)\cdot1/3+45\cdot2/3=0$, მაგრამ ამ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებანი განსხვადება იმით, რომ X_1-ის შესაძლო მნიშვნელობები გაცილებით ახლოსაა მათემატიკურ ლოდინთან (ნულთან), ვიდრე X_2 შემთხვევითი სიდიდისა.

შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობების მათემატიკური ლოდინის მიმართ *გაფანტულობის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საზომს წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.*

X შემთხვევითი სიდიდის *დისპერსია (აღინიშნება DX-ით, D არის პირველი ასო ინგლისური სიტყვისა – Dispersion) ეწოდება* $(X–EX)^2$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს

$$\boldsymbol{DX = E(X–EX)^2}\,. \tag{3.7}$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$DX = E(X–EX)^2 = E(X^2–2X\,EX+(EX)^2) = EX^2–2\,EXEX+(EX)^2 = EX^2–(EX)^2, \tag{3.8}$$

სადაც, EX^2-ს ეწოდება X შემთხვევითი სიდიდის *მეორე რიგის მომენტი* და

$$EX^2 = \sum_k x_k^2 p_k\,.$$

მაგალითი 3.7. გამოვთვალოთ 3.1 მაგალითში მოცემული შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

ამოხსნა. დისპერსია მარტივად გამოითვლება, თუ გამოვიყენებთ შემდეგი სახის ჩანაწერს ცხრილი 3.2.

i	x_i	p_i	x_ip_i	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	–1	0.10	–0.1	1	0,1
2	0	0.15	0	0	0
3	1	0.30	0.3	1	0,3
4	2	0.25	0.5	4	1
5	3	0.20	0.6	9	1,8
			$EX=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1.3$		$EX^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 3.2$
$DX=EX^2–(EX)^2=1,51$					

მოვიყვანოთ დისპერსიის თვისებები:

1) თუ C მუდმივია, მაშინ $DC=0$.
2) $D(aX+b)=a^2DX$, ე.ი. შემთხვევით სიდიდეზე მუდმივის დამატება მის დისპერსიას არ ცვლის, ხოლო მუდმივი მამრავლი კვადრატული ხარისხით გადის დისპერსიის ნიშნის გარეთ.
3) თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები *დამოუკიდებელია*, მაშინ $D(X\pm Y) =DX+DY$.

X შემთხვევითი სიდიდის ***საშუალო კვადრატული გადახრა*** (აღინიშნება σ_X-ით) ეწოდება ამ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიიდან არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს:

$$\sigma_X = +\sqrt{DX}\ . \tag{3.9}$$

σ_X-ს ხშირად *სტანდარტულ გადახრასაც* უწოდებენ. გადახრის ამ მახასიათებლის შემოღება იმითაა მოტივირებული, რომ იგივე ზომის ერთეულებში გამოისახება, რაც X შემთხვევითი სიდიდე.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 3.8. დავუშვათ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X

–2	0	4	5	6
0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

გაეცით პასუხი შემდეგ კითხვებს:

ა) როგორი იქნება Y=X+5 შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი? როგორ შეიცვლება შესაბამისი განაწილების კანონის გრაფიკული წარმოდგენა? რისი ტოლი იქნება EY, DY?
ბ) როგორი იქნება Z=X/2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი? როგორ შეიცვლება შესაბამისი განაწილების კანონის გრაფიკული წარმოდგენა? რისი ტოლი იქნება EZ, DZ? ♦

ვთქვათ, X შემთხვევით სიდიდის მათემატიკური ლოდინია EX, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა σ_X. განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდე

$$Y=\frac{X-EX}{\sigma_X} \tag{3.10}$$

და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებებიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ EY=0, DY=1. მართლაც

$$EY=E\left(\frac{X-EX}{\sigma_X}\right)=\frac{1}{\sigma_X}(EX-EX)=0$$

და

$$DY=D\left(\frac{X-EX}{\sigma_X}\right)=(1/DX)D(X-EX)=1.$$

(3.10) გარდაქმნას ჰქვია X შემთხვევითი სიდიდის ცენტრირება (მათემატიკური ლოდინის გამოკლება) და ნორმირება (σ_X-ზე გაყოფა) ან უფრო მოკლედ შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია.

ვიტყვით, რომ X შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია მთელი დადებითი k *რიგის სასრული საწყისი მომენტი* EX^k, თუ $E|X|^k<\infty$. განიმარტება აგრეთვე X შემთხვევითი სიდიდის k *რიგის ცენტრალური მომენტი*

$$E(X-\mathrm{E}X)^k.$$

დისპერსია $DX=E(X-EX)^2$ მეორე რიგის ცენტრალური მომენტია. ♦

მაგალითი 3.9. არსებობს სამი მეთოდი პროდუქციის პარტიის კონტროლის შესამოწმებლად. ყოველი მეთოდის გამოყენებისას რაოდენობა იმ არასტანდარტული დეტალებისა, რომლებიც კონტროლის შემდეგ ჩაითვლება სტანდარტულად, არის შემთხვევითი სიდიდე შემდეგი შესაბამისი განაწილების კანონით

X

0	1	3	4
0,5	0,4	0,05	0,05

Y

0	1	2	3
0,7	0,1	0,1	0,1

Z

0	1	2	3	4
0,8	0,05	0,05	0,05	0,05

საჭიროა ავირჩიოთ პროდუქციის კონტროლის ის მეთოდი, რომელიც განსაზღვრავს არასტანდარ-ტული დეტალების მინიმუმს პარტიაში.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ კონტროლის თითოეული მეთოდის დამახასიათებელი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი. მივიღებთ

$$EX=0{,}65,\quad EY=0{,}6,\quad EZ=0{,}5$$

პროდუქციის კონტროლის შესამოწმებლად ავირჩიოთ მესამე მეთოდი, ვინაიდან ის ხასიათდება არასტანდარტული დეტალების მინიმალური რაოდენობით შემოწმებულ პარტიაში. ♦

მაგალითი 3.10. ალბათური პროგნოზი აქციის კურსის პროცენტული ცვლილებისა 6 თვის განმავლობაში მოცემულია შემდეგი განაწილების კანონით

X%						
	5	10	15	20	25	30
	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აქციათა ყიდვა უფრო მომგებიანია, ვიდრე თანხის საბანკო დეპოზიტზე შეტანა 6 თვის ვადით თვეში 3%-ის მარტივი სარგებლით.

ამოხსნა. თანხის ნაზრდი საბანკო დეპოზიტზე, თვეში 3% ის სარგებლით, 6 თვის შემდეგ არის [60.03]100%=18%. ალბათობა იმისა, რომ აქციათა ყიდვა უფრო მომგებიანია, ვიდრე თანხის საბანკო დეპოზიტზე შეტანა, განისაზღვრება იმ ალბათობათა ჯამით, რომლებიც გვაძლევენ აქციათა კურსის უფრო მაღალ ზრდას.

$$P(X>18)=0.3+0.2+0.1=0.6 \quad \blacklozenge$$

მაგალითი 3.11. ავტოსალონის ყოველდღიური ხარჯები მომსახურებაზე და რეკლამაზე შეადგენს 120 ლარს. ყოველთვიურად გაყიდული ავტომანქანების რაოდენობა X ემორჩილება შემდეგ განაწილებას

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0.25	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05	0.025	0.025

ა) იპოვეთ ავტოსალონის საშუალო ყოველთვიური შემოსავალი, თუ ავტომანქანის ფასია 8000 ლარი

ბ) იპოვეთ ყოველთვიურად გაყიდული მანქანების საშუალო კვადრატული გადახრა

fvj[cyf. ა) ყოველთვიური შემოსავალი Y გამოითვლება ფორმულით

$$Y=(8000\cdot X-30\cdot 120)$$

და

$$EY=E(8000\cdot X-30\cdot 120)=8000\cdot EX-30\cdot 120=8000\cdot 2.675-3600=17800$$

ბ) საშუალო კვადრატული გადახრა=2.51 ♦

§ 5. ძირითადი დისკრეტული განაწილებანი

§ 5.1. ბერნულის განაწილება

ხშირად ცდის (ექსპერიმენტის) შედეგად ფიქსირდება მხოლოდ, რაიმე ხდომილობის („წარმატების“) ან მისი საწინააღმდეგო ხდომილობის („მარცხის“) მოხდენა. მაგალითად, რაიმე ოპერაციის შედეგად ფირმა მიიღებს მოგებას ან არა; ახალშობილი იქნება ბიჭი ან იქნება გოგო და ა.შ. ყველა ასეთი ექსპერიმენტს ალბათობის თეორიაში აღწერენ შემთხვევითი სიდიდით, რომელიც „წარმატების“ შემთხვევაში 1-ია, ხოლო „მარცხის“ შემთხვევაში 0. ამავე დროს წარმატებას მიაწერენ p ალბათობას, ხოლო მარცხს – $(1–p)$ ალბათობას, ასეთ X შემთხვევით სიდიდეს *ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს* უწოდებენ. მისი განაწილების კანონია:

X	0	1
	$1-p$	p

(3.11)

(3.11)-ით განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეს ბერნულის შემთხვევითი სიდიდე ეწოდება, ხოლო (3.11) განაწილებას – ბერნულის განაწილება p პარამეტრით.

.

ბერნულის განაწილება

X ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეა წარმატების p ალბათობით, თუ

$$P\{X=1\}=p,\ P\{X=0\}=1–p.$$

$$EX=p, \quad DX=p(1–p), \quad \sigma_X=\sqrt{p(1-p)}$$

§ 5.2. ბერნულის ცდათა სქემა. ბინომური განაწილება

ვთქვათ, ვატარებთ განმეორებით დამოუკიდებელ ცდებს და თითოეული ცდის შედეგია 1 ("წარმატება"), ან 0 ("მარცხი"). ჩვენ განვიხილავთ ცდათა ისეთ მიმდევრობას, როდესაც წარმატებათა ალბათობა ცდიდან ცდამდე უცვლელია და p-ს ტოლია, ანუ ყოველი ცდის შედეგი აღიწერება ბერნულის შემთხვევითი სიდიდით. *დამოუკიდებელ ცდათა ასეთ მიმდევრობას ბერნულის ცდათა სქემას* უწოდებენ.

ვთქვათ ვატარებთ n ცდას. მაშინ ცხადია, რომ ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგი აღიწერება 1-ებისა და 0-ების ყველანაირი მიმდევრობით.

განვიხილოთ ახლა ასეთი შემთხვევითი სიდიდე:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \tag{3.12}$$

რადგან $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევითი სიდიდეები ღებულობენ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, ნულსა და ერთს, მათი ჯამი ტოლი იქნება ერთიანების რაოდენობისა $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შემთხვევით შესაკრებებს შორის, ანუ S_n ტოლი იქნება წარმატებათა რაოდენობისა n ცდაში. ამიტომ S_n-ის შესაძლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\{0,1,2,\ldots,n\}$. იმის დასადგენად, თუ რისი ტოლია $\{S_n=k\}$, $k=0,1,2,\ldots,n$ ხდომილობის ალბათობა, ზოგადი შემთხვევის განხილვამდე განვიხილოთშემდეგი მაგალითი.

ვთქვათ $n=4$, ხოლო წარმატებათა ალბათობა p-ს ტოლია. რადგან $n=4$, ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე შედგება $2^4=16$ ელემენტარული ხდომილობისაგან. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:. დავუშვათ შემოკლებული ჩანაწერი 0000 აღნიშნავს შემდეგ ელემენტარულ ხდომილობას $\{X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0\}$, ხოლო $P(0000)$ – მის ალბათობას. ახლა დავუშვათ, რომ $k=2$. მაშინ ხდომილობა $\{S_4=2\}$ შედგება შემდეგი ელემენტარული ხდომილობებისაგან $\{S_4=2\}=\{0011,\ 0101,\ 1001,\ 0110,\ 1010,\ 1100\}$ (შეამოწმეთ). X_1, X_2, X_3, X_n შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობის გამო

$$P(0011)=P(0)\cdot P(0)\cdot P(1)\cdot P(1)=p^2(1-p)^2$$

$\{S_4=2\}$ხდომილობაში შემავალ ელემენტარულ ხდომილობებს „წარმატებათა" და „მარცხთა" ერთი და იგივე რაოდენობა გააჩნიათ. ჯუფთების განსაზღვრების თანახმად, მათი რაოდენობა C_4^2-ის ტოლია. ამრიგად, $\{S_4=2\}$ ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_4\{S_4 = 2\} = C_4^2\ p^2\,(1-p)^2\ .$$

საზოგადოდ, S_n წარმოადგენს დისკრეტული ტიპის შემთხვევით სიდიდეს, რომლის შესაძლო მნიშვნელობებია $0, 1, 2, \ldots, n$ და $\{S_n=k\}$ ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$\mathbf{P_n(k, p) \equiv P_n\{S_n = k\} = C_n^k\ p^k\,(1-p)^{n-k}\ ,\ k = 0,1,\ldots,n,} \tag{3.13}$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ . \tag{3.14}$$

(3.14)-ით განმარტებულ რიცხვებს *ბინომურ კოეფიციენტებს* უწოდებენ. ამდენად, ბუნებრივია, S_n შემთხვევით სიდიდეს ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო ალბათობათა (3.13) განაწილებას კი – ბინომური განაწილება ვუწოდოთ. ამრიგად, ბინომურად განაწილებული S_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

S_n	**0**	**1**	**2**	**…**	$\boldsymbol{k}$	**…**	$\boldsymbol{n}$
	$\mathbf{(1-p)^n}$	$\mathbf{np(1-p)^{n-1}}$	$\frac{1}{2}\,\mathbf{n(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$	**…**	$C_n^k\ \mathbf{p^k(1-p)^{n-k}}$	**…**	$\mathbf{p^n}$

მაგალითი 3.12. ყუთში 3 თეთრი და 5 შავი ბურთია. ყუთიდან შემთხვევით, დაბრუნებით იღებენ 4 ბურთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთებიდან თეთრი ბურთების რაოდენობა მეტი იქნება შავი ბურთების რაოდენობაზე.

ამოხსნა. ამოცანის პირობის თანახმად, ერთ ცდაში წარმატების ალბათობაა $p=3/8$. საძიებელი ხდომილობის ხელშემწყობ უთავსებად შემთხვევებს წარმოადგენს ოთხ ცდაში სამი ან ოთხი თეთრი ბურთის ამოღება, რომელთა ალბათობები (3.13) ფორმულის მიხედვით შესაბამისად ტოლია:

$$P\{S_4=3\}=C_4^3\cdot(3/8)^3\cdot(1-3/8)^{4-3}=135/1024 \text{ და } P\{S_4=4\}=(3/8)^4=81/4096.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობაა

$$P\{S_4=3\}+P\{S_4=4\}=135/1024+81/4096=621/4096. \qquad \blacklozenge$$

შევნიშნოთ, რომ ბინომური კოეფიციენტებისათვის სამართლიანია

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

ტოლობა.

მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებების თანახმად ადვილად მივიღებთ, რომ

$$ES_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p = np \qquad \text{და} \qquad DS_n = np(1-p).$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც n=4 და გამოვთვალოთ $P\{S_4 = k\}$, k=0,1,2,3,4 ალბათობები, შემდეგი სამი შემთხვევისათვის ა) p=3/4, ბ) p=1/2, გ) p=1/5. მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ S_4- ის შემდეგ განაწილების კანონებს :

S_4	0	1	2	3	4	
	1/256	12/256	54/256	108/256	81/256	როცა p=3/4,

S_4	0	1	2	3	4	
	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	როცა p=1/2,

S_4	0	1	2	3	4	
	256/625	256/625	96/625	16/625	1/625	როცა p=1/5.

როგორც ჩატარებული გამოთვლებიდან ჩანს, წარმატებათა ყველაზე მოსალოდნელი რაოდენობა (ანუ განაწილების მოდა) დამოკიდებულია ცალკეულ ცდაში წარმატებათა p ალბათობაზე.

ახლა დავსვათ ასეთი შეკითხვა: ვთქვათ, n და p ცნობილი რიცხვებია; *k რიცხვის რომელი მთელი k_0 მნიშვნელობისათვის მიიღებს $P_n(k, p)$ ალბათობა უდიდეს მნიშვნელობას,* ანუ წარმატებათა რა რაოდენობაა ყველაზე მოსალოდნელი n დამოუკიდებელ ცდაში? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განვიხილოთ ფარდობა

$$a_k = P_n(k+1, p)/P_n(k, p) = (n-k)p/((k+1)q)$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $a_k>1$, როცა $k<np-q$; $a_k=1$, როცა $k=np-q$ და $a_k<1$, როცა $k>np-q$. აქედან კი, ცხადია, რომ $P_n(k,p)$ მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს k-ის იმ k_0 მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$np-q \le k_0 \le np+p. \tag{3.15}$$

ბუნებრივია, ასეთ k_0 რიცხვს, რომელიც 1 სიგრძის ინტერვალშია მოთავსებული, მოცემული n და p-სათვის ბინომური განაწილების უალბათესი რიცხვი ანუ ამ განაწილების მოდა ვუწოდოთ. თუ $np-q$ არ არის მთელი, მაშინ უალბათესი რიცხვი ერთადერთია და მისი რიცხვითი მნიშვნელობაა $[(n+1)p]$ (აქ $[x]$ აღნიშნავს x რიცხვის მთელ ნაწილს) და მაშასადამე, განაწილება უნიმოდალურია, ხოლო თუ $np-q$ მთელია, მაშინ $P_n(np-q,p)=P_n(np+p, p))$, ანუ არსებობს ორი უალბათესი რიცხვი $k_0^{(1)} = np-q$ და $k_0^{(2)} = np+p$, და მაშასადამე, განაწილება ბიმოდალურია. მაგალითად, როცა n=19 და p=0.15, $(n+1)p=(19+1)\cdot0.15=3$ მთელი რიცხვია, $P_{19}(k,0.15)$ განაწილება ბიმოდალურია და შესაბამისი უალბათესი რიცხვებია 2 და 3, ხოლო როცა n=19 და p=0.36, $P_{19}(k,0.36)$ განაწილება უნიმოდალურია და უალბათესი რიცხვია $[(19+1)\cdot0.36]=[7.2]=7$. გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ როცა $p<1/(n+1)$, (3.15) ფორმულა უალბათესი რიცხვისათვის გვაძლევს $k_0=0$ და მაშასადამე, $P_n(k,p)$ ალბათობა, როგორც k-ს ფუნქცია სულ კლებადია.

ბინომური განაწილება

n – დამოუკიდებელი ცდების რაოდენობა ბერნულის ცდათა სქემაში

p – წარმატების ალბათობა თითოეულ ცდაში, $q=1-p$

S_n – წარმატებათა რაოდენობა, S_n = 0, 1, 2, . . . , n

$$P_n(k,p) \equiv P\{S_n=k\} = \boldsymbol{C_n^k}\, p^k q^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n$$

$$C_n^k = n!\,/\,(k!(n-k)!),\ m! = 1\cdot2\cdot3\cdots m,\ 0!=1$$

$$ES_n = np,\ DS_n = npq,\ \sigma_{S_n} = (npq)^{1/2}$$

k_0 – უალბათესი რიცხვი, აკმაყოფილებს პირობას:

$$(n+1)p-1 \le k_0 \le (n+1)p$$

მაგალითი 3.13. ინვესტორმა გადაწყვიტა თანაბრად ჩადოს სახსრები სამ საწარმოში იმ პირობით, რომ გარკვეული დროის შემდეგ მას დაუბრუნებენ ჩადებული თანხის 150%-ს. თითოეული საწარმოს გაკოტრების ალბათობა 0,25-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნული ვადის შემდეგ ინვესტორი დაიბრუნებს პროექტებში ჩადებულ თანხას მაინც.

ამოხსნა. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ საწარმოებები, რომლებშიც ჩაიდო სახსრები აწარმოებენ დამოუკიდებელ საფინანსო პოლიტიკას. ამის გამო კრედიტის არ დაბრუნების ალბათობას აქვს ბინომური განაწილება, სადაც n=3, p=0,75, q=0,25, k=0,1,...,3. X-ით აღვნიშნოთ დაბრუნებული თანხა, რომლის განაწილების კანონია

X	0	1	2	3
	0.2	0.14	0.42	0.42

ინვესტორი დაიბრუნებს პროექტებში ჩადებულ თანხას იმ შემთხვევაში, თუ ის თანხას დაიბრუნებს ორი საწარმოდან მაინც, რისი ალბათობაც 0.84-ის ტოლია. ♦

მაგალითი 3.14. . ბანკმა გასცა 5 კრედიტი. კრედიტის დაუბრუნებლობის ალბათობაა 0,2.

ა) შეადგინეთ იმ კრედიტორების რაოდენობის განაწილების კანონი, რომლებიც ვერ აბრუნებენ კრედიტს ვადის გასვლის შემდეგ.

ბ) იპოვეთ კრედიტის არ დაბრუნების მათემატიკური ლოდინი .

ამოხსნა. ვინაიდან კრედიტორები მოქმედებენ დამოუკიდებლად, მათ მიერ კრედიტის დაბრუნება შეიძლება ჩავთვალოთ დამოუკიდებელ ხდომილობებად. 5 გაცემული კრედიტიდან k კრედიტის არ დაბრუნების ალბათობას აქვს ბინომური განაწილება, სადაც n=5, p=0,2, q=0,8, k=0,1,...,5. ამიტომ იმ კრედიტორების რაოდენობის განაწილების კანონს, რომლებიც ვერ აბრუნებენ კრედიტს ვადის გასვლის შემდეგ აქვს შემდეგი სახე

X	5	4	3	2	1	0
	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

ელემენტარული გამოთვლებით მივიღებთ, რომ მოსალოდნელი კრედიტორების რაოდენობა, რომლებიც ვერ დააბრუნებენ კრედიტს ერთის ტოლია. ♦

მაგალითი 3.15. ქარხანამ გამოუშვა სამრეწველო საქონლის 50 პარტია. თითოეული პარტია შედგება 100 ერთგვაროვანი ხელსაწყოდან ალბათობა იმისა, რომ ხელსაწყო საჭიროებს დამატებით რეგულირებას 0,05-ის ტოლია. თუ ყოველი პარტიიდან შემთხვევით შერჩეული 10 ხელსაწყოდან ერთი მაინც საჭიროებს დამატებით რეგულირებას, მაშინ მთელი პარტიას აბრუნებენ დამატებითი რეგულირებისათვის. პარტიის დამატებითი რეგულირებისა ზრდის პარტიის თვითღირებულებას 500 ლარით. დამატებითი რეგულირების გარეშე პარტიის თვითღირებულება 3000 ლარია. იპოვეთ გამოშვებული პროდუქციის საშუალო თვითღირებულება და საშუალო კვადრატული გადახრა.

ამოხსნა. ორჯერ გამოვიყენოთ ბერნულის სქემა. ჯერ გამოვთვალოთ A ხდომილობის ალბა-თობა, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ პარტიას დააბრუნებენ დამატებითი რეგულირებისათვის .

$$P(A)=1-P_{10}(0)= 1-(0,95)^{10}=0,4.$$

ვთქვათ X-გამოშვებული პროდუქციის თვითღირებულებაა, ხოლო Y- დამატებითი რეგულირებისათვის დაბრუნებულ პარტიათა რაოდენობაა. კიდევ ერთხელ ვისარგებლოდ ბერნულის ცდათა სქემით წარმატებათა $P(A)$ ალბათობით, რის გამოც დამატებითი რეგულირებისათვის დაბრუნებულ პარტიათა საშუალო რაოდენობაა

$$EY=n\cdot P(A)=50\cdot 0,4=20$$

Y-ის საშუალო კვადრატული გადახრაა

$$\sigma_Y=\sqrt{npq}=\sqrt{50\cdot 0,4\cdot 0,6}=3,47$$

მთელი გამოშვებული პროდუქციის თვითღირებულება X შედგება საქონლის 50 პარტიის გამოსაშვებად გაწეული ხარჯებისა C= 50·3000=150000 ლარის და დამატებითი რეგულირებისათვის დაბრუნებული პარტიების თვითღირებულებისაგან

$$X=C+500\cdot Y$$

გამოშვებული პროდუქციის საშუალო თვითღირებულება EX და საშუალო კვადრატული გადახრა σ_X შესაბამისად ტოლია

$$EX=E(C+500\cdot Y)= C+500\cdot EY=150000+500\cdot 20=160000,$$
$$\sigma_X=\sigma_{(C+500\cdot Y)}= 500\cdot\sigma_Y=500\cdot 3{,}47=1733. \qquad \blacklozenge$$

§ 5.3. ჰიპერგეომეტრიული განაწილება

ვთქვათ ყუთში N ბირთვია და მათ შორის A თეთრია. შემთხვევით, დაბრუნების გარეშე ვიღებთ n ბირთვს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ზუსტად k ცალი იქნება თეთრი.

თუ n ბირთვს შორის თეთრების რაოდენობას S_n-ით აღვნიშნავთ,

$$\boldsymbol{P(k,n,A,N) = P_n\{S_n=k\}} = \frac{C_A^k\cdot C_{N-A}^{n-k}}{C_N^n},\ \ k=0,...,n. \tag{3.16}$$

რიცხვთა ამ მიმდევრობას *ჰიპერგეომეტრიული განაწილება* ეწოდება.

მაგალითი 3.16. აუდიტორიაში იმყოფება 5 ვაჟი და 10 ქალი, შემთხვევით ირჩევენ 6 სტუდენტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 3 ვაჟია.

ამოხსნა. თუ წარმატებად მივიჩნევთ ვაჟის ამორჩევას, მაშინ პირობის თანახმად, N=15, A=10, n=6 და k=3. ცხადია, რომ $0\le S_n\le 5$ და (3.21)-ის მიხედვით,

$$P_6(3,6,10,15) = \frac{C_{10}^3 C_{15-10}^{6-3}}{C_{15}^6} = \frac{C_{10}^3 C_5^3}{C_{15}^6} = \frac{120\cdot 10}{5005}\approx 0.239\,. \qquad \blacklozenge$$

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება

N – ობიექტების საერთო რაოდენობა;
A – I სახის ობიექტების რაოდენობა;
$(N-A)$ – II სახის ობიექტების რაოდენობა;
n – შემთხვევით (დაბრუნების გარეშე) ამორჩეული ობიექტების რაოდენობა;
S_n – I სახის ობიექტების რაოდენობა ამორჩეულ n ობიექტში,

$$P(\mathrm{K},N,A,N) = P_N\{S_N=K\} = \frac{C_A^k\cdot C_{N-A}^{n-k}}{C_N^n}, \qquad K=0,...,N.$$

§ 5.4. პუასონის განაწილება

პუასონის კანონით განაწილებული ეწოდება ისეთ X შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს 0,1,2,... მთელ მნიშვნელობებს

$$\boldsymbol{P\{X=k\}}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{3.17}$$

ალბათობებით, სადაც λ რაიმე დადებითი რიცხვია, რომელსაც პუასონის განაწილების პარამეტრს უწოდებენ.

(3.17) რომ მართლაც განაწილებაა ემყარება მათემატიკურ ანალიზში ცნობილ ფაქტს, რომ e^{λ} ფუნქციის ტეილორის მწკრივად გაშლას აქვს შემდეგი სახე: $e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$.

გამოვთვალოთ X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი:

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$$

როგორც ვხედავთ, $EX=\lambda$, ე.ი., λ პარამეტრი წარმოადგენს X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს (საშუალო მნიშვნელობას). ასევე ადვილი სანახავია, რომ $DX=\lambda$.

თუ X და Y დამოუკიდებელი პუასონის განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეებია, შესაბამისად, λ_1 და λ_2 პარამეტრებით, მაშინ $(X+Y)$ შემთხვევითი სიდიდე კვლავ პუასონის განაწილების მქონეა $\lambda_1+\lambda_2$ პარამეტრით.

პუასონის განაწილება, როგორც წესი, წარმოადგენს კარგ მათემატიკურ მოდელს იშვიათ ხდომილობათა აღსაწერად: დროის ფიქსირებულ შუალედში მომხდარ ხდომილობათა რაოდენობა ხშირად ემორჩილება პუასონის განაწილებას. მაგალითად შეიძლება გამოდგეს გეიგერის მთვლელის მიერ t დროში რეგისტრირებული რადიაქტიური დაშლის შედეგად α ნაწილაკების რაოდენობა, სატელეფონო სადგურში t დროის განმავლობაში რეგისტრირებულ გამოძახებათა რაოდენობა. გარკვეულ პირობებში პუასონის განაწილება ჩნდება როგორც ბინომური განაწილების მიახლოება წარმატების მცირე ალბათობისა და ცდათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში.

პუასონის განაწილება

პუასონის ეწოდება ისეთ X შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც ღებულობს არაუარყოფით მთელ მნიშვნელობებს ალბათობებით:

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \dots$$

λ განაწილების პარამეტრია, $\lambda>0$,

$$EX=DX=\lambda$$

განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 3.17. ცნობილია, რომ სატელეფონო სადგურში t დროის განმავლობაში შემოსულ გამოძახებათა რაოდენობა წარმოადგენს პუასონის განაწილების მქონე შემთხვევით სიდიდეს λ პარამეტრით. ჩავთვალოთ, რომ დრო იზომება წუთებში. ვთქვათ, $\lambda=9$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა ა) იქნება 3; ბ) არ აღემატება 4-ს.

ამოხსნა. ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობას აქვს პუასონის განაწილება პარამეტრით $\lambda=9$, ამიტომ გვექნება:

$$\text{ა) } P\{X=3\}=\frac{9^3}{3!}e^{-9}, \qquad \text{ბ) } P\{X\le 4\}=\sum_{k=0}^{4}\frac{9^k}{k!}e^{-9}.$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ გამოთვლების თვალსაზრისით საკმარისად რთული გამოსახულებები. აღნიშნული გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობების მისაღებად სარგებლობენ პუასონის განაწილების ცხრილებით. ♦

მაგალითი 3.18. ბანკმა n ორგანიზაციაზე გასცა კრედიტი, თითოეულზე S თანხის ოდენობით, r პროცენტის სარგებლით. იპოვეთ ბანკის მოგების მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია და პირობა პროცენტზე, თუ კრედიტის დაბრუნების ალბათობა p-ს ტოლია.

ამოხსნა. დავუშვათ, რომ კრედიტორები ერთმანეთთან კავშირში არ არიან, რის გამოც საქმე გვაქვს n დამოუკიდებელ ცდასთან წარსატების p ალბათობით. ვთქვათ X კრედიტორების რაოდენობაა, რომლებიც დააბრუნებენ კრედიტს, $X\sim Bi(n,p)$. მაშინ ბანკის მოგება Y არის

$$Y=(1+t/100)SX-nS$$

და

$$EY=(1+r/100)SEX-nS==(1+r/100)Snp-nS=Sn(np/100-q)$$

ვინაიდან კრედიტის გაცემას აზრი აქვს მხოლოდ დადებითი მათემატიკური ლოდინის შემთხვევაში, $EY>0$ პირობიდან გამომდინარეობს პირობა ბანკის პროცენტზე

$$r>100q/p.$$

ბანკის მოგების დისპერსია კი ტოლია

$$DY=D((1+r/100)SDX-nS)=(1+r/100)^2S^2npq. \quad ♦$$

§ 6. EXCEL

განვიხილოთ დისკრეტულ განაწილებებთან დაკავშირებული **Excel-**ის შემდეგი სტატისტიკური ფუნქციები:

PROB, BINOMDIST, CRITBINOM, HYPGEOMDIST, POISSON.

მოცემული სტატისტიკური ფუნქციების ჩაწერისას გამოყენებული აღნიშვნების ინტერპრეტაცია და შინაარსობრივი დატვირთვა მოცემულია ცხრილში

აღნიშვნა	შინაარსი
X	განაწილების სიმკვრივის ან განაწილების ფუნქციის არგუმენტის რიცხვითი მნიშვნელობა
X range	არე, სადაც მითითებულია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები
Prob range	არე, სადაც მითითებულია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების ალბათობები
Lower limit	ქვედა საზღვარი
Upper limit	ზედა საზღვარი
Mean	მათემატიკური ლოდინი
Numbers	რაოდენობა (წარმატებათა)
Trials	ცდათა სერიის სიგრძე
Probability s	ალბათობა
Sample s	I სახის ობიექტთა რაოდენობა შერჩევაში
Number sample	შემთხვევით (დაბრუნების გარეშე) ამორჩეულ ობიექტთა რაოდენობა-შერჩევის მოცულობა
Population s	I სახის ობიექტების რაოდენობა პოპულაციაში
Number pop.	ობიექტების რაოდენობა პოპულაციაში
Cumullative	თუ **Cumullative** პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ნულის ტოლია, მაშინ გამოიანგარიშება $P\{X=k\}$ ალბათობა; თუ **Cumullative** პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ერთის ტოლია, მაშინ გამოიანგარიშება $P\{X\le k\}$ ალბათობა;

PROB ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:

PROB(X range, Prob range, Lower limit, Upper limit)

PROB ფუნქციით გამოიანგარიშება შემდეგი ალბათობა $P\{ a \le X \le b \}$.

მაგალითი.

X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	-1	0	2	4	6	9
	0.05	0.15	0.18	0.22	0.3	0.1

რისი ტოლია $P\{0\le X\le 7\}$

ამოხსნა.

დავუშვათ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი Excel-ის დავთრის ფურცლის შემდეგ არეშია ჩაწერილი

	A	B	C	D	E	F
1	-1	0	2	4	6	9
2	0.05	0.15	0.18	0.22	0.3	0.1

ამ ამოცანისათვის **BINOMDIST** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:**.**

PROB(X range, Prob range, Lower limit, Upper limit)= PROB(A1:F1,A2:F2,0,7).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ საძიებელი ხდომილობის ალბათობა 0,85-ის ტოლია.

BINOMDIST ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:

BINOMDIST(Numbers, Trials, Probability s, Cumullative).

ბინომურად განაწილებული X შემთხვევითი სიდიდისათვის გამოიანგარიშება შემდეგი ალბათობები

$$\begin{cases} P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & \text{როცა Cumullative} = 0, \\ P\{X \le k\} = \sum_{m=o}^{k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, & \text{როცა Cumullative} = 1. \end{cases}$$

მაგალითი.

რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ათი ერთნაირი მსროლელიდან შვიდი დააზიანებს სამიზნეს, თუ თითოეულის მიერ სამიზნეს დაზიანების ალბათობა 0,64-ის ტოლია?

ამოხსნა.

ამ ამოცანისათვის **BINOMDIST** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:

BINOMDIST(**Numbers,Trials**,**Probability s**, **Cumullative**)= **BINOMDIST**(**7,10,0,64,0).**

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ ათი ერთნაირი მსროლელიდან შვიდის მიერ სამიზნეს დააზიანების ალბათობა 0,24-ის ტოლია.

მაგალითი.

რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ათი ერთნაირი მსროლელიდან არაუმეტეს შვიდისა დააზიანებს სამიზნეს, თუ თითოეულის მიერ სამიზნეს დაზიანების ალბათობაა 0,64?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში **BINOMDIST** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:

BINOMDIST(**Numbers,Trials**,**Probabilitys**, **Cumullative**)= **BINOMDIST**(**7,10,0,64,1).**

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, ალბათობა იმისა, რომ ათი ერთნაირი მსროლელიდან არა უმეტეს შვიდისა დააზიანებს სამიზნეს არის 0.24-ის ტოლი.

CRITBINOM ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:

CRITBINOM (Trials, Probability s, Alpha).

მოცემული α-სათვის ფუნქციის მნიშვნელობა არის ნატურალური k-ს ის მინიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\sum_{m=0}^{k} P_n(m) \ge \alpha$.

მაგალითი.

სისტემა შედგება ათი ერთგვაროვანი ელემენტისაგან, რომლებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად 0.4-ის ტოლი ალბათობით შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან.სისტემის ელემენტების რა მინიმალური რაოდენობა გამოსულა მწყობრიდან, თუ ცნობილია, რომ სისტემის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა არაა 0.7-ზე ნაკლები?

ამოხსნა.

მოცემულია – სისტემის თითოეული ელემენტის მწყობრიდან გამოსვლის p ალბათობა, p=0,4; სისტემის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა, რომელიც არაა 0.7-ზე ნაკლები, სისტემის ელემენტთა რაოდენობა n, n=10.

ვისარგებლოდ სტატისტიკური ფუნქციით **CRITBINOM,** რომელიც ასე ჩაიწერება:

CRITBINOM (Trials, Probability s, Alpha)= CRITBINOM (10, 0.4,0.7).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ თუ სისტემის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა არაა 0.7-ზე ნაკლები, მაშინ მწყობრიდან გამოსულა არანაკლები ხუთი ელემენტისა.

HYPGEOMDIST ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:

HYPGEOMDIST(Sample s, Number sample , Population s, Number pop).

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში, თუ N არის ობიექტების საერთო რაოდენობა, A – I სახის ობიექტების რაოდენობა, $(N-A)$ – II სახის ობიექტების რაოდენობა პოპულაციაში, n – შემთხვევით (დაბრუნების გარეშე) ამორჩეული ობიექტების რაოდენობა, S_n – I სახის ობიექტების რაოდენობა ამორჩეულ n ობიექტში, მაშინ ფუნქციით გამოიანგარიშება შემდეგი ალბათობა

$$P_n\{S_n=k\} = \frac{C_A^k \cdot C_{N-A}^{n-k}}{C_N^n}, k=0,...,n.$$

მაგალითი.

პარტიაში 17 დეტალია, რომელთა შორის 10 არასტანდარტულია. შემთხვევით ვირჩევთ 8 დეტალს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 5 არასტანდარტულია.
ამოხსნა.

მოცემულია – ელემენტების რაოდენობა პოპულაციაში, N=17, საინტერესო თვისების მქონე ელემენტების რაოდენობა პოპულაციაში, A=10, შერჩევის მოცულობა, n=8, საინტერესო თვისების მქონე ელემენტების რაოდენობა შერჩევაში, k=5.
ამ ამოცანისათვის **HYPGEOMDIST** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:
HYPGEOMDISTფუნქცია ასე ჩაიწერება:
HYPGEOMDIST(Sample s, Number sample , Population s, Number pop)= HYPGEOMDIST(5,8,10,17).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ 17 ელემენტიან სიმრავლიდან, რომელთა შორის 10 არასტანდარტულია, ალბათობა იმისა, 8 შემთხვევით შერჩეულ ელემენტში 5 იქნება არასტანდარ-ტული 0,27-ის ტოლია.

POISSON ფუნქციის ჩაწერის სინტაქსი ასეთია:
POISSON(x, Mean, Cumullative).
პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის გამოიანგარიშება შემდეგი ალბათობები

$$\begin{cases} P\{X = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot \ell^{-\lambda}, & \text{როცა Cumullative} = 0, \\ P\{X \le k\} = \displaystyle\sum_{m=o}^{k} \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot \ell^{-\lambda}, & \text{როცა Cumullative} = 1, \end{cases}.$$

სადაც λ პუასონის განაწილების პარამეტრია.
მაგალითი. სატელეფონო სადგურში შემოსულ გამოძახებათა ინტენსივობაა 12 გამოძახება წუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა იქნება 7;
ამოხსნა.

მოცემულია – პუასონის განაწილების საშუალო, λ=12. ამ ამოცანისათვის **POISSON** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:
POISSON(x, Mean, cumullative)= POISSON(7, 9, 0).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ ალბათობა იმისა, .რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა იქნება შვიდი არის 0,12-ის ტოლი.

მაგალითი. სატელეფონო სადგურში შემოსულ გამოძახებათა ინტენსივობაა 12 გამოძახება წუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა არ აღემატება შვიდს.;
ამოხსნა.
ამ შემთხვევაში **POISSON** ფუნქცია ასე ჩაიწერება:
POISSON(x, Mean, cumullative)= POISSON(7, 9, 1).

გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ ალბათობა იმისა, .რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა არ აღემატება შვიდს არის 0,32-ის ტოლი.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

- როგორ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული?
- რას წარმოადგენს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი?
- როგორ განიმარტება შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია? ჩამოთვალეთ განაწილების ფუნქციის თვისებები.
- როგორ ავაგოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონით მისი განაწილების ფუნქცია?
- როგორ ავაგოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციით მისი განაწილების კანონი ?

- რას ეწოდება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი; დისპერსია; საშუალო კვადრატული გადახრა?
- რა პირობებშია შემთხვევითი სიდიდეების ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი მათი მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლი?
- რა პირობებშია შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის დისპერსია შესაკრებთა დისპერსიების ჯამის ტოლი?
- როგორ განიმარტება შემთხვევითი სიდიდის მედიანა; მოდა?
- როგორ განიმარტება შემთხვევითი სიდიდის (ან რაც იგივეა, F განაწილების) p რიგის კვანტილი?
- როგორ განიმარტება შემთხვევითი სიდიდის k რიგის ცენტრალური და საწყისი მომენტები?
- შემთხვევითი სიდიდის როგორ გარდაქმნას ეწოდება ცენტრირება; ნორმირება; სტანდარტიზაცია?
- ცდათა როგორ მიმდევრობას უწოდებენ ბერნულის ცდათა სქემას?
- რა შემთხვევაშია დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი ბინომური?
- როგორ განმარტებულ რიცხვებს უწოდებენ ბინომურ კოეფიციენტებს?
- როგორ გამოითვლება ცდათა უალბათესი რიცხვი?
- როდის ემორჩილება შემთხვევითი სიდიდე პუასონის განაწილებას?
- რას უდრის ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია?
- რას უდრის პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია?

სავარჯიშოები

3.1. შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს: $x_1=3$, $x_2=6$, $x_3=8$. ცნობილია პირველი ორი მნიშვნელობის ალბათობები: $p_1=0.3$, $p_2=0.5$. დაწერეთ ამ სიდიდის განაწილების კანონი.

3.2. X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–2	–1	1	2	4	6
	0.1	0.15	0.13	0.17	0.25	0.2

გამოთვალეთ ალბათობა, იმისა რომ: ა) $X \le 0$; ბ) $X \le 3$; გ) $X < 2$; დ) $-1 < X \le 4$; ე) $X>1$.

3.3. აგდებენ სამ სიმეტრიულ მონეტას. დაწერეთ გერბის მოსვლათა რაოდენობის განაწილების კანონი და ააგეთ განაწილების ფუნქციის გრაფიკი.

3.4. აგდებენ ორ კამათელს. დაწერეთ მოსულ რიცხვთა ჯამის განაწილების კანონი.

3.5. აგდებენ ორ კამათელს. დაწერეთ მოსულ რიცხვთა სხვაობის მოდულის განაწილების კანონი და ააგეთ განაწილების ფუნქციის გრაფიკი.

3.6. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–7	–3	0	1	4
	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

იპოვეთ $Y=X+10$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილეის კანონი.

3.7. დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–2	2	3
	0.2	0.3	0.5

იპოვეთ $Y=X^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.8. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია

X

0	1
q_x	p_x

Y

0	1
q_y	p_y

იპოვეთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები
ა) $Z=X+Y$, ბ) $U=X-Y$, გ) $V=X\cdot Y$.

3.9. *X* შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X

1	2	4
0.5	0.2	0.3

იპოვეთ $Y=1/(3-X)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.10. *X* შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X

1	3	5	7	9
0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

იპოვეთ $Z = \min(X,4)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.11. *X* შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X

–1	0	2	3	5
0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

იპოვეთ $Z = \max(X,2)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.12. *X* შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X

–2	–1	0	3	5
0.1	0.15	0.3	0.3	0.15

იპოვეთ მათემატიკური ლოდინი.

3.13. *X* შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X

–1.5	0.2	0.6	2	2.6	3.5
0.1	0.15	0.2	0.35	0.15	0.05

იპოვეთ: ა) მათემატიკური ლოდინი, ბ) დისპერსია გ) საშუალო კვადრატული გადახრა.

3.14. გამოთვალეთ *X* დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის $[EX-\sqrt{DX}\ ,\ EX+\sqrt{DX}\ ]$ შუალედში მოხვედრის ალბათობა, თუ მისი განაწილების კანონია

X

–1	0	1	2
0.3	0.1	0.4	0.2

3.15. გამოთვალეთ *X* დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის $[EX-\sqrt{DX}\ ,\ EX+\sqrt{DX}\ ]$ შუალედში მოხვედრის ალბათობა, თუ მისი განაწილების კანონია

X

–2	–1	0	3
0.05	0.3	0.5	0.15

3.16. *X* სიდიდის დისპერსია 5-ის ტოლია. რისი ტოლია შემდეგი შემთხვევითი სიდიდეების დისპერსიები? ა) $X+1$, ბ) $-2X$, გ) $4X+7$.

3.17. შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელიბებია $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. ასევე ცნობილია, რომ $EX=2.3$, $DX=0.41$. იპოვეთ რა ალბათობით იღებს შემთხვევითი სიდიდე ამ მნიშვნელობებს.

3.18. დისკრეტული *X* შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს ორ x_1 და x_2 მნიშვნელობას, ($x_1<x_2$) და $P\{X=x_1\}=0.6$. იპოვეთ *X*-ის განაწილების კანონი, თუ $EX=1.4$ და $DX=0.24$-ს.

3.19. შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია $x_1=1$, x_2, x_3. ამასთან $x_1<x_2<x_3$. ასევე ცნობილია, რომ $p_1=P\{X=1\}=0.3$; $p_2=P\{X=x_2\}=0.2$; $EX=2.2$, $DX=0.76$. იპოვეთ X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.20. დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს მხოლოდ ორ, x_1 და x_2 მნიშვნელობას, ($x_1<x_2$) და $P\{X=x_1\}=0.2$. იპოვეთ X-ის განაწილების კანონი, თუ $EX=1.8$ და $\sigma=0.4$-ს.

3.21. მოცემულია $p_1=0.5$, $p_2=0.5$, $EX=3$, $DX=1$. როგორია X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი?

3.22. მოცემულია $p_1=0.3$, $p_2=0.7$, $EX=0.4$, $DX=0.84$. იპოვეთ x_1 და x_2 ($x_1<x_2$)

3. 23. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია

X	0	4
	0.6	0.4

Y	-2	0	2	3
	0.1	0.3	0.3	0.3

იპოვეთ $Z=X-Y^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

3.24. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია

X	1	2
	0.6	*0.4*

Y	-2	0	2	4
	0.1	*0.3*	*0.3*	*0.3*

იპოვეთ $Z= Y^2 /X$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.25. ვთქვათ, X ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა. გამოთვალეთ $P\{X=k\}$ ალბათობები, თუ ა) $n=4$, $p=0.5$, $k=2$, ბ) $n=5$, $q=0.3$, $k=3$, გ) $n=6$, $q=0.4$, $k=2$, დ) $n=3$, $p=0.7$, $k=1$.

3.26. იპოვეთ ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და უალბათესი რიცხვი, თუ ა) $n=20$, $p=0.5$, ბ) $n=50$, $q=0.3$, გ) $n=100$, $q=0.4$, დ) $n=200$, $p=0.7$.

3.27. ვთქვათ X ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა პარამეტრებით $n=4$, $p=0.1$. როგორი იქნება X-ის განაწილების კანონი?

3.28. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის ხუთჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა საფასური.

3.29. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის ოთხჯერ აგდებისას ჯამში ერთხელ მაინც დაჯდება შვიდიანი.

3.30. რა უფრო მოსალოდნელია: ტოლი ძალის მოთამაშესთან ოთხიდან ორი პარტიის მოგება, თუ ექვსიდან – სამის? (ყაიმი გამორიცხულია).

3.31. რა უფრო მოსალოდნელია: კამათლის ექვსჯერ გაგორებისას სამის ჯერადი რიცხვის ორჯერ მოსვლა, თუ „შაშის“ ერთხელ მოსვლა?

3.32. ალბათობა იმისა, რომ ოთხი გასროლისას მსროლელი ერთხელ მაინც მოახვედრებს სამიზნეს, არის 0.9984. გამოთვალეთ მსროლელის მიერ ერთხელ გასროლისას სამიზნეში მოხვედრის ალბათობა.

3.33. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 36 კარტიანი ბანქოს დასტიდან 5-ჯერ ერთი კარტის (დაბრუნებით) ამოღებისას ორჯერ ამოვა "ტუზი"?

3.34. სისტემა შედგება ხუთი ერთგვაროვანი ელემენტისაგან, რომლებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად 1/7-ის ტოლი ალბათობით შეიძლება გამოვიდეს მწყობრიდან. რას უდრის ალბათობა

იმისა, რომ სისტემა გამოვა მწყობრიდან თუ ცნობილია, რომ ამისათვის საჭიროა მწყობრიდან გამოვიდეს სისტემის ორი ელემენტი მაინც.

3.35. სროლისას სამიზნეს დაზიანების ალბათობაა 0,8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 5 გასროლისას სამიზნე დაზიანდება ორჯერ?

3.36. ინვესტორმა გადაწყვიტა თანაბრად ჩადოს სახსრები ოთხ საწარმოში იმ პირობით, რომ გარკვეული დროის შემდეგ მას დაუბრუნებენ ჩადებული თანხის 150%-ს. თითოეული საწარმოს გაკოტრების ალბათობა 0.4-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნული ვადის შემდეგ ინვესტორი დაიბრუნებს პროექტებში ჩადებულ თანხას მაინც.

3.37. ინვესტორმა გადაწყვიტა თანაბრად ჩადოს სახსრები ოთხ საწარმოში იმ პირობით, რომ გარკვეული დროის შემდეგ მას დაუბრუნებენ ჩადებული თანხის 150%-ს. თითოეული საწარმოს გაკოტრების ალბათობა 0.35-ის ტოლია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნული ვადის შემდეგ ინვესტორი დაიბრუნებს პროექტებში ჩადებულ თანხას მაინც.

3.38. ბანკმა გასცა 5 კრედიტი. კრედიტის დაუბრუნებლობის ალბათობაა 0,25. შეადგინეთ იმ კრედიტორების რაოდენობის განაწილების კანონი, რომლებიც ვერ აბრუნებენ კრედიტს ვადის გასვლის შემდეგ. იპოვეთ ვალის არ დამბრუნებულ კრედიტორების რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი.

3. 39. ბანკმა გასცა 7 კრედიტი. კრედიტის დაუბრუნებლობის ალბათობაა 0,15. შეადგინეთ იმ კრედიტორების რაოდენობის განაწილების კანონი, რომლებიც ვერ აბრუნებენ კრედიტს ვადის გასვლის შემდეგ. იპოვეთ ვალის არ დამბრუნებულ კრედიტორების რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი.

3.40. ყუთში 3 წითელი, 2 შავი და 5 თეთრი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ერთი ბურთის ოთხჯერ დაბრუნებით ამოღებისას ორჯერ ამოვა თეთრი ბურთი.

3.41. ალბათობა იმისა, რომ ოთხი გასროლისას მსროლელი ერთხელ მაინც მოახვედრებს სამიზნეს არის 0.9919. გამოთვალეთ მსროლელის მიერ ერთხელ გასროლისას სამიზნეს დაზიანების ალბათობა.

3.42. თითოეულ დამოუკიდებელ ცდაში ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობის განხორციელების ალბათობა 0.8-ს ტოლია. რამდენი დამოუკიდებელი ცდა უნდა ჩავატაროთ, რათა ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობის გნხორციელების რაოდენობის უალბათესი რიცხვი იყოს 33-ის ტოლი?

3.43. რას უდრის ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობის გნხორციელების p ალბათობა 129 დამოუკიდებელ ცდაში, თუ ცდათა ამ სერიაში ხდომილობის გნხორციელების უალბათესი რიცხვი 90-ის ტოლია?

3.45. ვთქვათ X ჰიპერგეომეტრიული განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა პარამეტრებით s, t, n. გამოთვალეთ $P\{X=k\}$ ალბათობები, თუ
ა) N=5, A=3, n=3, k=2, ბ) N=10, A=6, n=4, k=3, გ) N=4, A=2, n=3, k=1, დ) N=7, A=4, n=3, k=2.

3.46. ურნაში 35 თეთრი და 5 შავი ბირთვია. ურნიდან შემთხვევით იღებენ 9 ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 შავი ბირთვი იქნება?

3.47. დასტიდან, რომელშიც 52 კარტია შემთხვევით იღებენ სამ კარტს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ზუსტად ერთი ტუზი იქნება.

3.48. დასტიდან, რომელშიც 52 კარტია შემთხვევით იღებენ სამ კარტს. როგორია იმის ალბათობა, რომ მათ შორის არცერთი ტუზი არ იქნება?

3.49. აუდიტორიაში იმყოფება 25 ბიჭი და 10 გოგო, შემთხვევით ირჩევენ 10 სტუდენტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 7 ბიჭია.

3.50. ნაკრძალში 20 ირემია, მათგან 7 დაიჭირეს, დაღი დაადეს და ისევ ტყეში გაუშვეს. გარკვეული დროის შემდეგ იმ 20-იდან 4 კვლავ დაიჭირეს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 დაღდასმული იქნება?

3.51. ყუთში 4 თეთრი და 3 შავი ბურთია. ყუთიდან დაუბრუნებლად იღებენ 4 ბურთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთებიდან შავი ბურთების რაოდენობა მეტია თეთრი ბურთების რაოდენობაზე.

3.52. სატელეფონო სადგურში შემოსულ გამოძახებათა ინტენსივობაა 5 გამოძახება წუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ წუთში გამოძახებათა რაოდენობა იქნება; ა) 2-ის ტოლი, ბ) 2-ზე ნაკლები, გ) არა უმცირეს ორისა. **მითითება:** e^{-10}=0.000045.

3.53. ავტოსალონის ყოველდღიური ხარჯები მომსახურებაზე და რეკლამაზე შეადგენს 120 ლარს. ყოველთვიურად გაყიდული ავტომანქანების რაოდენობა X ემორჩილება შემდეგ განაწილებას

X										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0.25	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05	0.025	0.025

იპოვეთ ავტოსალონის ყოველთვიური საშუალო მოგება, თუ ავტომანქანის ფასია 8000 ლარი.

3.54. ალბათური პროგნოზი აქციის კურსის პროცენტული ცვლილებისა 6 თვის განმავლობაში მოცემულია შემდეგი განაწილების კანონით

X						
	4	6	8	10	12	14
	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აქციათა ყიდვა უფრო მომგებიანია, ვიდრე თანხის საბანკო დეპოზიტზე შეტანა 6 თვის ვადით წლიური 18% ის სარგებლით წელიწადში ყოველთვიური დარიცხვით.

3.55. ალბათური პროგნოზი აქციის კურსის პროცენტული ცვლილებისა 4 თვის განმავლობაში მოცემულია შემდეგი განაწილების კანონით

X						
	5	10	15	20	25	30
	0.1	0.1	0.15	0.35	0.2	0.1

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აქციათა ყიდვა უფრო მომგებიანია, ვიდრე თანხის საბანკო დეპოზიტზე შეტანა 4 თვის ვადით თვეში 4% ის სარგებლით (რთული)

3.56. ავტოსალონის ყოველდღიური ხარჯები მომსახურებაზე და რეკლამაზე შეადგენს 150 ლარს. ყოველთვიურად გაყიდული ავტომანქანების რაოდენობა X ემორჩილება შემდეგ განაწილებას

X										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0.5	0.15	0.1	0.05	0.05	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01

ა) იპოვეთ ავტოსალონის საშუალო ყოველთვიური მოგება, თუ ავტომანქანის ფასია 10000 ლარი
ბ) იპოვეთ ყოველთვიურად გაყიდული მანქანების საშუალო კვადრატული გადახრა

თავი I I I*. ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეები

§ 1. ორგანზომილებიანი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები

X და Y დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებისაგან შედგენილ (X,Y) ვექტორს ***დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორი*** ეწოდება. დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონი განისაზღვრება მისი შესაძლო მნიშვნელობებისა და შესაბამისი ალბათობების მოცემით. განაწილების კანონი ადვილად ჩაიწერება შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

ცხრილი 5.1

$X \backslash Y$	y_1	y_2	. . .	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	. . .	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	. . .	p_{2m}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_n	p_{n1}	p_{n2}	. . .	p_{nm}

(5.1)

სადაც პირველ სვეტში და პირველ სტრიქონში მითითებული $x_1,x_2,\ldots,x_n$ და, შესაბამისად, $y_1,y_2,\ldots,y_m$ რიცხვითი მნიშვნელობები არის X და, შესაბამისად, Y შემთხვევითი სიდიდეების შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო p_{ij} არის X-ის მიერ x_i მნიშვნელობის და ერთდროულად Y-ის მიერ y_j მნიშვნელობის მიღების ალბათობა, $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_h\}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$, და $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1$. ასეთ ცხრილს X და Y შემთხვევით სიდიდეთა ერთობლივი განაწილების კანონი ან მოკლედ, ერთობლივი განაწილება ეწოდება .

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონიდან ადვილად მიიღება მისი ნებისმიერი კომპონენტის განაწილების კანონი. მართლაც, ვინაიდან

$$\{X=x_i\}=\bigcup_{j=1}^{m}\{X=x_i,Y=y_j\},$$

გვექნება

$$p_{i\bullet}\equiv P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{m}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij} \tag{5.2}$$

და ანალოგიურად,

$$p_{\bullet j}\equiv P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{n}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\ . \tag{5.3}$$

ასეთი ხერხით მიღებულ

ჩ

x_1	x_2	...	x_n
$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	...	$p_{n\bullet}$

და

ნ

y_1	y_2	...	t_n
$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	...	$p_{\bullet m}$

განაწილების კანონებს, X და, შესაბამისად, Y შემთხვევითი სიდიდეების *მარგინალური განაწილების კანონებს* უწოდებენ. მაშასადამე, იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $\{X=x_i\}$ $(\{Y=y_j\})$ ხდომილობის $p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$ $(p_{\bullet j}=P\{Y=x_j\})$ ალბათობა, საჭიროა შევკრიბოთ ცხრილის i-ურ სტრიქონში (j-ურ სვეტში) მოთავსებული ალბათობები.

ცხრილი 5.2

$X \backslash Y$	y_1	y_2	. . .	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	. . .	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	. . .	p_{2m}	$p_{2\bullet}$

. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_n	p_{n1}	p_{n2}	. . .	p_{nm}	$p_{n\bullet}$
	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	. . .	$p_{\bullet m}$	1

თუ ერთ-ერთი ან ორივე კომპონენტი მნიშვნელობათა თვლად რაოდენობას იღებს, სასრული ჯამები შესაბამისი უსასრულო ჯამებით შეიცვლება.

როგორც გვახსოვს, A და B ხდომილობებს ეწოდებად დამოუკიდებლები, თუ

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{5.4}$$

დავუშვათ, რომ A და B ხდომილობა შემდეგი სახისაა: $A=\{X=x_i\}$, $B=\{Y=y_j\}$. მაშინ (5.3)-იდან მივიღებთ:

$$p_{ij} = P\{X = x_i\ , Y = y_j\}= P\{X = x_i\}\cdot P\{Y = y_j\}= p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}$$

X და Y დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ ყოველი (i,j) წვილისათვის

$$p_{ij} = P\{X = x_i\ , Y = y_j\}= P\{X = x_i\}\cdot P\{Y = y_j\}= p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}\,. \tag{5.5}$$

მაგალითი 5.1. ვთქვათ ვაგორებთ ორ წესიერ კამათელს. X-ით აღვნიშნოთ პირველ კამათელზე, ხოლო Y-ით – მეორეზე მოსული ქულები. მაშინ (X,Y) წარმოადგენს ორგანზომილებიან დისკრეტულ შემთხვევით ვექტორს. ვნახოთ, როგორია ამ ვექტორის განაწილება და დავადგინოთ, არის თუ არა მისი კომპონენტები დამოუკიდებელი.

ამოხსნა. ალბათობის კლასიკური განსაზღვრების თანახმად, რადგან ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგთა სიმრავლე 36-ელემენტიანია, ამიტომ თითოეული (i,j) წყვილის მოსვლის ალბათობა 1/36-ის ტოლია: $p_{ij}=\{X=i,Y=j\}=1/36$, $i,j=1,2,...,6$. ამავე დროს:

$$p_{i\bullet} = P\{X = i\} = \frac{1}{6}, \quad p_{\bullet j} = P\{Y = j\} = \frac{1}{6}$$

და მაშასადამე,

$$p_{ij}=p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}$$ ♦

მაგალითი 5.2. 5.1 მაგალითის პირობებში შევამოწმოთ, არის თუ არა დამოუკიდებელი X და $|X-Y|$ შემთხვევითი სიდიდეები.

ამოხსნა. ადვილი დასანახია, რომ

$$P\{X=3,\ |X–Y| = 4\}= 0,$$

ხოლო

$$P\{X = 3\} = 1/6,\ \ P\{|X–Y\,| = 4\} = 4/36.$$

ამრიგად, რადგან

$$P\{\ X = 3,\ |X–Y\,| = 4\} \neq P\{X = 3\}\ P\{\ |X–Y\,| = 4\},$$

X და $|X–Y\,|$ შემთხვევითი სიდიდეები არ არის დამოუკიდებელი. ♦

§ 2. ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები.

ვთქვათ, (X,Y) შემთხვევითი ვექტორის კომპონენტების მათემატიკური ლოდინებია შესაბამისად EX-ის და EY-ის ტოლია. მაშინ (EX,EY) რიცხვით ვექტორს (X,Y) შემთხვევითი ვექტორის მათემატიკური ლოდინის (ან ლოდინების ვექტორი) ეწოდება. (EX,EY) ვექტორის კომპონენტებს აქვს ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ყველა თვისება და ამიტომ ჩვენ მათ აღარ გავიმეორებთ.

განვსაზღვროთ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის სხვა რიცხვითი მახასიათებლები.

<u>X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაცია</u> ეწოდება ამ სიდიდეთა მათივე მათემატიკური ლოდინებიდან გადახრების ნამრავლის მათემატიკურ ლოდინს:

$$\mathbf{cov}(X,Y)=E[(X–EX)(Y–EY)]. \tag{5.6}$$

მათემატიკურ ლოდინის თვისებების გამოყენებით, ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\mathbf{cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{EXY}–\boldsymbol{EXEY}. \qquad (5.7)$$

მართაც

$$\text{cov}(X,Y)=E[(X–EX)(Y–EY)]=E[XY\text{-}XEY\text{-}YEX+EXEY]=EXY\text{-}EXEY\text{-}EXEY+EXEY=EXY–EXEY \qquad (5.8)$$

როდესაც (X,Y) (5.1) განაწილების კანონის მქონე დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორია, მაშინ

$$\boldsymbol{EXY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} \,. \qquad (5.9)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ X და Y შემთხვევითი ***სიდიდეები დამოუკიდებელია***, მაშინ $\boldsymbol{EXY=EX\cdot EY}$ და $\mathbf{cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \mathbf{0}$.

ამრიგად,

თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\text{cov}(X,Y) = 0$.

(5.7) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ამ შემთხვევითი სიდიდის თავის თავთან კოვარიაცია. მართლაც, კოვარიაციის განსაზღვრების თანახმად,

$$\text{cov}(X,X)=E(X–EX)(X–EX)=E(X–EX)^2=DX \,.$$

კოვარიაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) $\text{cov}(X,Y)=\text{cov}(Y,X)$ – კოვარიაცია სიმეტრულია;
2) $\text{cov}(X_1+X_2,Y)=\text{cov}(X_1,Y)+\text{cov}(X_2,Y)$ – კოვარიაცია ადიციურია;
3) $\text{cov}(aX+b,Y)=a\text{cov}(X,Y)$ – შემთხვევით სიდიდეზე მუდმივი სიდიდის დამატება მის კოვარიაციას მეორე შემთხვევით სიდიდესთან არ ცვლის, ხოლო მუდმივი მამრავლი გადის კოვარიაციის ნიშნის გარეთ;
4) თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\text{cov}(X,Y)=0$.

კოვარიაცია ახასიათებს კავშირს ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის. სახელდობრ, როგორც კოვარიაციის (5.6) განსაზღვრებიდან ჩანს, ის წარმოადგენს ორი შემთხვევითი სიდიდის მათი საშუალოების მიმართ ყოფაქცევის "მსგავსების" საზომს: კოვარიაცია დადებითია, თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები საშუალოდ ერთსა და იმავე მხარეს იხრებიან შესაბამისად EX და EY მნიშვნელობებიდან და ის უარყოფითია, თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები EX და EY მნიშვნე-ლობებიდან საშუალოდ სხვადასხვა მხარეს არიან გადახრილი. საზოგადოდ კოვარიაციის კოეფიციენტმა შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობა $(-\infty ,\infty)$ ინტერვალიდან.

ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის დამოკიდებულების დასახასიათებლად უფრო მოხერხე-ბულია ე.წ. *კორელაციის კოეფიციენტის* შემოღება.

X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ***კორელაციის კოეფიციენტი*** ეწოდება რიცხვს

$$\boldsymbol{\rho(X,Y)} = \frac{\text{cov}\,(X,Y)}{\sqrt{DX}\,\sqrt{DY}} = \frac{\text{cov}\,(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}\,. \qquad (5.10)$$

როგორც ვხედავთ, მოხდა კოვარიაციის კოეფიციენტის მხოლოდ ნორმირება, მასშტაბის შეცვლა, მაგრამ ამ ნორმირებას აქვს გარკვეული ალბათური შინაარსი, რომელიც კარგად ჩანს კორელაციის კოეფიციენტის ქვემოთ ჩამოთვლილი თვისებებიდან:

1^0 $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$,

2^0 $\rho(aX,Y) = \text{sign}\, a\cdot\rho(X,Y)$, სადაც $\text{sign}\, a = \begin{cases} -1, & \text{თუ } a<0, \\ 0, & \text{თუ } a=0, \\ +1, & \text{თუ } a>0, \end{cases}$

3^0 $|\rho(X,Y)| \le 1$,

4^0 თუ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია, მაშინ $\rho(X,Y) = 0$.

5^0 $|\rho(X,Y)|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y=aX+b$ რაიმე ნამდვილი a და b რიცხვებისათვის ანუ, როცა X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი კავშირი, ამასთან $a>0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho=1$ და $a<0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho=-1$.

საზოგადოდ 4^0 თვისების შებრუნებული დებულება, რომ "თუ $\rho(X,Y)=0$, მაშინ X და Y შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია", არ არის სწორი. როცა $\rho(X,Y)=0$ ამბობენ, რომ X და Y

შემთხვევითი სიდიდეები არაკორელირებულია არსებობს ერთადერთი კლასი უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეებისა, რომელთათვისაც არაკორელირებისა და დამოუკიდებლობის ცნებები ემთხვევა; კერძოდ, ეს არის კლასი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებისა. მოვიყვანოთ მაგალითი იმისა, რომ არაკორელირებულობიდან არ გამომდინარეობს შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა.

მაგალითი 5.3. გამოვთვალოთ X და $|X–Y|$ შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაციის კოეფიციენტი, სადაც X და Y მაგალით 5.2-შია განსაზღვრული.

fvj[cyf. დავუშვათ (X,Y) შემთხვევითი ვექტორი ღებულობს (-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1) მნიშვნელობებს 1/4 –ის ტოლი ალბათობით. გავცეთ კითხვა შემდეგ ორ შეკითხვას:

დამოუკიდებლებია თუ არა X და Y შემთხვევითი სიდიდეები?

რისი ტოლია კოვარიაცია X და Y შემთხვევით სიდიდეებს შორის?.

ამოხსნა. X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი და მარგინალური განაწილების კანონები მოიცემა ცხრილით

X \ Y	-1	0	1	$p_{j\bullet}$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	¼	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p_{\bullet j}$	1/4	1/2	¼	1

საიდანაც ვპოულობთ, რომ

$$EX=0,\ EY=0$$

და ასევე,

$$EXY=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} i\cdot jP\{X=i, Y=j\}=0.$$

მაშასადამე, $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ ანუ $\rho(X,Y)=0$, მიუხედავად იმისა, რომ, X და Y შემთხვევითი სიდიდეები არ არიან დამოუკიდებლები (რატომ?) სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\rho(X,Y)=0$ ტოლობიდან არ გამომდინარეობს X და Y შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობა. ♦

მაგალითი 5.4. ვთქვათ X~$N(0,1)$ და $Y=X^2$-1 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. რისი ტოლია X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაციის კოეფიციენტი?

ამოხსნა. ვინაიდან X~$N(0,1)$, $EX=0$, $EX^3=0$, მივიღებთ

$cov(X,Y)= cov(X,X^2-1)=cov(X,X^2)-cov(X,1)=EX^3-EX\cdot EX^2-EX+EX=0.$ ♦

ნებისმიერი X და Y შემთხვევითი სიდიდეებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$D(X+Y)=E((X+Y)–E(X+Y))^2=E((X–EX)+(Y–EY))^2=$$

$$=E((X–EX)^2+2(X–EX)(Y–EY)+(E–EY)^2).$$

ამრიგად,

$$D(X+Y) = DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y).$$

ეს ფაქტი სამართლიანია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის. უნდა აღინიშნოს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან ფაქტს

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i\right)=a_i^2\sum_{i=1}^{n} DX_i+2\,a_i\,a_j\sum_{i<j}\mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right). \qquad (5.11)$$

$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,..,X_n)$ შემთხვევითი ვექტორის კოვარიაციული მატრიცა ეწოდება nxn რიგის კვადრატულ

$$V=\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}\end{vmatrix},$$

მატრიცას, რომლის ელემენტებია $\sigma_{ii}=\sigma_i^2=DX_i$ .i= 1, 2, ..., n, $\sigma_{ij}=cov(X_i,X_j)$, $i\neq j$, i,j=1, 2, .., ..,n.

კოვარიაციის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ კოვარიაციული მატრიცა სიმეტრიულია და მისი დიაგონალური ელემენტები $X_1, X_2, .., X_n$ შემთხვევითი სიდიდეების დისპერსიების ტოლია.

მოვიყვანოთ უკანასკნელი ფაქტის გამოყენების

მაგალითი 5.5. დავუშვათ ინვესტორი ინვესტიციებს ანხორციელებს ორ სხვადასხვა A და B პროექტში. ამით ის ქმნის საინვესტიციო პორეფელს. დავუშვათ, A პროექტის საშუალო კვადრატული გადახრაა $\sigma_A=15$, ხოლო B პროექტისათვის $\sigma_B=14$ ასევე დავუშვათ, რომ პროექტების წილი პორტფელში ტოლია. გამოვთვალოთ პორტფელის საშუალო კვადრატული გადახრა.

ამოხსნა. უპირველეს ყოვლისა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A და B აქტივებს შორის სრულყოფილი დადებითი კორელაციაა (უ.ი. $r=1$). პორტფელის დისპერსია σ^2 გამოითვლება (5.11) ფორმულით. მივიღებთ,

$$\sigma^2=(0,5)^2(15)^2+(0,5)^2(14)^2+2\cdot0,5\cdot0,5\cdot15\cdot14=210,25; \quad \sigma=14,5.$$

ამრიგად პორტფელის საშუალო კვადრატული გადახრა 14.5-ის ტოლია; ის ცალკეული აქტივების საშუალო კვადრატული გადახრების არითმეტიკული საშუალოს ტოლია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა აქტივებს შორის კორელაცია 0,6-ის ტოლია. ამ შემთხვევაში.

$$\sigma^2=(0,5)^2(15)^2+(0,5)^2(14)^2+2\cdot0,5\cdot0,5\cdot15\cdot14\cdot0,6=168,25; \quad \sigma=12,96$$

ე.ი. პორტფელის საშუალო კვადრატული გადახრა 12.9-ის ტოლია; ის ნაკლებია ცალკეული აქტივის საშუალო კვადრატულ გადახრაზე.

თუ დავუშვებთ, რომ აქტივებს შორის არის სრულყოფილი უარყოფითი კორელაცია, ე.ი. $r=-1$, მაშინ მივიღებთ, რომ პორტფელის საშუალო კვადრატული გადახრა 0.5-ის ტოლია. ამ შემთხვევაში პორტფელის დისპერსია თითქმის განულებულია, ვინაიდან ერთი აქტივის გაზრდისას, მეორე კლებულობს იგივე სიდიდით. იმ შემთხვევაში, როდესაც ფასიანი ქაღალდების ამონაგებები არ არიან სრულყოფილად დადებითად კორელირებული, პორტფელის საშუალო კვადრატული გადახრა ყოველთვის ნაკლებია პორტფელში შემავალი აქტივების საშუალო კვადრატულ გადახრებზე. პორტფელის ამ თვისებას დივერსიფიკაციას უწოდებენ. ეფექტური დივერსიფიკაცია ესაა პორტფელში ისეთი აქტივების დამატება, რომლებსაც პორტფელში არსებულ აქტივებთან აქვთ ყველაზე დაბალი კორელაცია.

§ 3*. პირობითი განაწილება და პირობითი მათემატიკური ლოდინი

დავუშვათ (X,Y) ორგანზომილებიანი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა.

გავიხსენოთ პირობითი ალბათობის განმარტება. როგორც გვახსოვს, თუ $P(B)>0$, მაშინ

$$P\{A\,|\,B\}=\frac{P\{AB\}}{P\{B\}}, \tag{5.12}$$

დავუშვათ, რომ A ხდომილობა შემდეგი სახისაა: $A=\{X=x\}$. მაშინ (5.14)-იდან მივიღებთ:

$$P\{X=x|B\}=\frac{P\{X=x,B\}}{P\{B\}},$$

თუ დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე იღებს $x_1,x_2,...,x_r$ მნიშვნელობებს, მაშინ X-ის პირობითი განაწილება, B პირობით, ეწოდება $p_i(B)$ რიცხვთა ერთობლიობას, სადაც $p_i(B)=P\{X=x_i|B\}$, $i=1,2,...,r$. $P_i(B)$, $i\leq r$.

$p_i(B)$ განაწილების კანონის საშუალებით განიმარტება X შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი (უპირობო მათემატიკური ლოდინის მსგავსად)

$$E(X|B)=\sum_{i=1}^{r}x_i\,p_i(B)$$

ტოლობით.

ჩვეულებრივი უპირობო დისპერსიის ანალოგიურად განიმარტება პირობითი დისპერსია როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში:

$$D(X|B)=E((X-E(X|B))^2|B))=E(X^2|B)-(E(X|B))^2. \tag{5.13}$$

ვთქვათ, (X,Y) დისკრეტული შემთხვევითი ვექტორის განაწილების კანონია $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$, $i=1,2,...,r$, $j=1,2,...,s$. განვიხილოთ ხდომილობა $B=\{Y=y_i\}$. X-ის პირობითი განაწილება იმ პირობით, რომ Y-მა მიიღო მნიშვნელობა y_i, შემდეგნაირად მოიცემა:

$$p_{i|j} = P\{X=x_i|Y=y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \qquad i=1,2,...,r, \qquad (5.14)$$

სადაც $p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{r} p_{ij} >0$, $j=1,2,...,s$. მაშინ X-ის პირობითი მათემატიკური ლოდინი იმ პირობით, რომ $Y=y_{i\bullet}$ ასე გამოითვლება

$$E(X|Y=y_j) = \sum_{i=1}^{r} x_i\, p_{i|j} \ ,$$

პირობითი განაწილებისა და მათემატიკური ლოდინის ცნებების გასააზრებლად განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

მაგალითი 5.6. ვთქვათ Z_1 და Z_2 აღნიშნავს პირველ და მეორე კამათელზე მოსულ ქულებს, ხოლო $X=Z_1$, $Y=|Z_1-Z_2|$. დავადგინოთ Y-ის პირობითი განაწილება $\{X=3\}$ პირობით.

ამოხსნა.

$$P\{Y=k \mid X=3\} = \frac{P_{k3}}{P_{\cdot 3}}$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ცხრილს:

K	0	1	2	3	4	5
$P\{Y=k\|X=3\}$	1/6	2/6	2/6	1/6	0	0

როგორც ვხედავთ, $P\{Y=4|X=3\}=P\{Y=5|X=3\}=0$, ანუ $\{X=3\}$ პირობაში Y შემთხვევით სიდიდეს არ შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები 4 და 5 და ამიტომ Y-ის პირობითი განაწილება $\{X=3\}$ პირობაში, მიიღებს შემდეგ სახეს:

K	0	1	2	3
$P\{Y=k\|X=3\}$	1/6	2/6	2/6	1/6

ცხადია, ჩვენ შეგვიძლია ამ განაწილებისათვის რიცხვითი მახასიათებლების, მათემა-ტიკური ლოდინისა და დისპერსიის გამოთვლა.

$$E(Y|X=3)=0\cdot(1/6)+1\cdot (2/6)+2\cdot (2/6)+3\cdot (1/6)=3/2,$$
$$D(Y|X=3)=0\cdot(1/6)+1\cdot(2/6)+4\cdot(2/6)+9\cdot(1/6)-(3/2)^2=1/4.$$

თუ გამოვთვლით დანარჩენ პირობით მათემატიკურ ლოდინებსაც, საბოლოოდ გვექნება:

$$E(Y|X=1) = E(Y|X=6)=15/6,\ \ E(Y|X=2) = E(Y|X=5)=11/6,\ \ E(Y|X=3) = E(Y|X=4) = 9/6. \quad \blacklozenge$$

მაგალითი 5.7. დავუშვათ სასოფლოსამეურნეო პროდუქციის ხარისხი ხასიათდება ორი შემთხვევითი სიდიდით; X იყოს მოსავლიანობა მოცემულ უბანზე, ხოლო Y იყოს შეტანილი სასუქის რაოდენობა. ვიგულისხმოთ, რომ $\mathbf{X}=(X,Y)$ვექტორის ერთობლივი განაწილების კანონია

X \ Y	0	0.1	0.2	0.3
5	0.2	0.1	0.03	0.05
6	0	0.15	0.15	0.1
7	0	0	0.12	0.1

(5.15)

განვსვზღვროთ მოსავლიანობის საშუალო მნიშვნელობა უბანზე, თუ მასში შეტანილ იქნა სასუქის 0.2 პირობითი ერთეული.

ამოხსნა. მარტივი გამოთვლები გვაძლევს

X	5	6	7
P{X|Y=0.2}	0.1	0.5	0.4

მაგალითი 5.8. გამოვთვალოთ კოვარიაციული მატრიცა 5.7 მაგალითით განსაზღვრული განაწილების კანონისათვის.

ამოხსნა. X და Y შემთხვევითი სიდიდეების მარგინალური განაწილების კანონებია

X

5	6	7
0.38	0.4	0.22

Y

0	0.1	0.2	0.3
0.2	0.25	0.3	0.25

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$EX=5.84, \quad EY=0.16, \quad \sigma_{11}=DX=EX^2-(EX)^2=0.5744, \quad \sigma_{22}=DY=EY^2-(EY)^2=0.0114 .$$

უშუალოდ (5.15) განაწილების კანონის საფუძველზე გვაქვს

$$\mathrm{EXY}=1.5, \qquad \sigma_{12}=\sigma_{21}=\mathrm{cov(X,Y)=EXY-EXEY}=0.0486$$

ამრიგად კოვარიაციული მატრიცაა

$$V=\begin{pmatrix} 0.5744 & 0.0486 \\ 0.0486 & 0.0114 \end{pmatrix} .$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

- როგორ მოიცემა ორგანზომილებიანი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი**?**
- რას ეწოდება ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია? რა თვისებები აქვს ამ ფუნქციას?
- როგორ მოიძებნება ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის კომპონენტების განაწილების კანონი?
- როგორ გამოითვლება ორგანზომილებიანი უწვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივით მარგინალური განაწილების სიმკვრივეები?
- როგორ განისაზღვრება ორგანზომილებიანი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ვექტორი?
- რას ეწოდება X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაცია? რა თვისებები აქვს კოვარიაციას?
- რას ეწოდება X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი? რა თვისებები აქვს კორელაციის კოეფიციენტს ?
- რისი ტოლია ნებისმიერი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის დისპერსია?
- რა პირობებში ეწოდებათ X და Y შემთხვევითი სიდიდეებს დამოუკიდებელი?
- რისი ტოლია დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების კორელაციის კოეფიციენტი?

სავარჯიშოები

5.1. მოცემულია (X,Y) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

X \ Y	–2	0	1
0	1/21	1/21	5/21
1	2/21	4/21	1/21
2	1/21	5/21	1/21

იპოვეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები.

5.2. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია:

ჩ

0	1	2	3
0.2	0.3	0.4	0.1

და **ნ**

1	3	4
0.7	0.2	0.1

ააგეთ $Z = \min(X,2)$, $U = \max(2,Y)$, $T = \min(X,Y)$, $K = \max(X,Y)$
შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონი.

5.3. მოცემულია (X,Y) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

X	–1	1
–1	1/4	3/10

1	1/5	3/20
2	1/20	1/20

იპოვეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების კოვარიაცია.

5.4. მოცემულია (X,Y) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

X \ Y	-2	0
-1	0	1/15
0	1/5	4/15
2	1/3	2/15

იპოვეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ა) კოვარიაცია, ბ) კორელაციის კოეფიციენტი, გ) გამოვთვალოთ $Z=2X-Y+1$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

5.5. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	-1	0	1
	1/9	1/3	5/9

რისი ტოლია კოვარიაცია X და X^2+1 სიდიდეეს შორის?

5.6. ცდა მდგომარეობს ორი ტეტრაედრის აგდებაში, რომლის წახნაგებს აწერია რიცხვები 1, 2, 3, 4. X_1-ით აღვნიშნოთ, ტეტრაედრზე მოსული ქულა ანუ რიცხვი, რომელიც დავარდნილი ტეტრაედრის ფუძეზე წერია, ხოლო X_2-ით მეორე ტეტრაედრზე მოსული რიცხვი. ააგეთ Y_1 დაY_2 შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონები და დაადგინეთ, დამოუკიდებელია თუ არა Y_1 და Y_2 შემთხვევითი სიდიდეები, თუ:

ა) $Y_1 = X_1$, $Y_2 = \min(X_1,X_2)$. დაადგინეთ Y_2-ის პირობითი განაწილება $\{Y_1=2\}$ პირობით, გამოთვალეთ პირობითი მათემატიკური ლოდინი იგივე პირობით.

ბ) $Y_1 = |X_1-X_2|$, $Y_2 = \max(X_1,X_2)$. დაადგინეთ Y_1-ის პირობითი განაწილება $\{Y_2=3\}$ პირობით, გამოთვალეთ პირობითი მათემატიკური ლოდინი იგივე პირობით.

5.7. ცდა მდგომარეობს ორი ტეტრაედრის აგდებაში, რომლის წახნაგებს აწერია რიცხვები 1, 2, 3, 4. X_1-ით აღვნიშნოთ, ტეტრაედრზე მოსული ქულა ანუ რიცხვი, რომელიც დავარდნილი ტეტრაედრის ფუძეზე წერია, ხოლო X_2-ით მეორე ტეტრაედრზე მოსული რიცხვი. ააგეთ Y_1 დაY_2 შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი და მარგინალური განაწილების კანონები, თუ

ა) $Y_1 = X_1+X_2$ და $Y_2 = |X_1-X_2|$, ბ) $Y_1 = X_1$ და $Y_2 = |X_1-X_2|$

დაადგინეთ, დამოუკიდებელია თუ არა Y_1 და Y_2 შემთხვევითი სიდიდეები. იპოვეთ შემთხვევითი სიდიდეების მარგინალური განაწილების კანონები.

5.8. ვთქვათ $T=2X-2Y+Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=2$, $EY=1$, $EZ=2$, $DX=9$, $\text{cov}\,[X,Y]=5$, $DY=25$, $\text{cov}[X,Z]=7$, $DZ=16$, $\text{cov}[Z,Y]=8$.

5.9. ვთქვათ, $T=-2X+Y-Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=-2$, $EY=1$, $EZ=-3$, $DX=9$, $\text{cov}[X,Y]=9$, $DY=16$, $\text{cov}[X,Z]=8$, $DZ=36$, $\text{cov}[Z,Y]=5$.

5.10. ვთქვათ $T=-3X+2Y-Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=3$, $EY=-1$, $EZ=-3$, $DX=4$, $\rho\,[X,Y]=0{,}7$, $DY=9$, $\text{cov}[X,Z]=-4$, $DZ=16$, $\text{cov}[Z,Y]=0$.

5.11. ვთქვათ $T = 2X-Y-2Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=2$, $EY=3$, $EZ=1$, $DX=9$, $DY=16$, $DZ=16$, $\text{cov}[X,Y]=7.2$, $\text{cov}[X,Z]=4.8$, $\text{cov}[Z,Y]=-3.2$

5.12. ვთქვათ $T=X-Y-3Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=7$, $EY=4$, $EZ=1$, $DX=4$, $DY=9$ $DZ=16$, $\rho[X,Y]=0.5$, $\rho[X,Z]=0$, $\rho[Z,Y]=-0.7$.

ტიპიური ამოცანები შუალედური გამოცდისთვის

საკითხი 1

4.10. ტურისტულმა ფირმამ გამოკითხა სამშობლოში დაბრუნებული ტურისტები, თუ რამდენი ფოტო-ფირი დახარჯეს მოგზაურობის დროს, პასუხები შემდეგია:

8 6 3 11 14 8 9 16 9 10 5 11 7 8 10 9 12 13 9

ა) გამოთვალეთ საშუალო, მედიანა, Q_1, Q_3;

ბ) გამოთვალეთ გაბნევის დიაპაზონი, IQR, შერჩევითი დისპერსია, სტანდარტული გადახრა;

4.11. იმისათვის, რომ ამერიკულმა საავადმყოფოებმა მიიღონ დახმარება სხვადასხვა სამთავრობო თუ კერძო პროგრამისაგან, საჭიროა წლიური ფინანსური ანგარიშების წარდგენა, რომლის ერთ-ერთი მთავარი მახასიათებელია სრული რაოდენობა საწოლებისა, რომლებიც განკუთვნილია პაციენტებისათვის. ქვემოთ მოყვანილია მონაცემები იმ 54 საავადმყოფოში საწოლების რაოდენობის შესახებ, რომელთა ფინანსური ანგარიშიც დამაკმაყოფილებლად იქნა მიჩნეული.

303	550	243	282	195	310	288	188	190
335	473	169	292	492	200	478	182	172
231	375	171	262	198	313	600	264	311
371	145	242	278	183	215	719	519	382
249	350	99	218	300	450	337	330	252
400	514	427	533	930	319	210	550	488

ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა განაწილება დაჯგუფების 10 ინტერვალით.

4.12. ამოხსენით 4.11 სავარჯიშო დაჯგუფების სამი ინტერვალისათვის. შეადარეთ მიღებული განაწილება წინას. რომელი უფრო მეტ ინფორმაციას შეიცავს? რატომ ზღუდავს ინტერვალების შეუსაბამო რაოდენობა ფარდობით სიხშირეთა განაწილებაში არსებულ ინფორმაციას?

4.13. ამოხსენით 4.11 სავარჯიშო, ოღონდ უკვე 25 დაჯგუფების ინტერვალისათვის. შეადარეთ შედეგი წინა ორ სავარჯიშოს.

4.14. ქვემოთ მოყვანილია 32 სააქციო საზოგადოების აქციათა მფლობელების მოგებათა პროცენტების ცხრილი გადასახადების გადახდის შემდეგ.

10.6	10.8	14.8	10.8
12.5	6.0	10.7	11.0
14.6	6.0	12.8	10.1
7.9	5.9	10.0	10.6
10.8	16.2	18.4	10.7
10.6	13.3	8.7	15.4
6.5	10.1	8.7	7.5
11.9	9.0	12.0	9.1

(a) ამ მონაცემებით ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა ჰისტოგრამა შვიდი ტოლი ინტერვალით, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა 2 და პირველის მარცხენა ბოლოა 5.55;

(b) ააგეთ ფარდობით სიხშირეთა პოლიგონი;

(c) როგორია თქვენი აზრით იმის შანსი, რომ შემთხვევით არჩეული სააქციო საზოგადოების წევრის მოგების პროცენტი 15.55-ზე მეტია?

(d) როგორია იმის შანსი, რომ შემთხვევით არჩეული სააქციო საზოგადოების წევრის მოგების პროცენტი 9.55-ზე ნაკლებია?

(e) რა შანსი არსებობს იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული სააქციო საზოგადოების წევრის მოგების პროცენტი 9.55-სა და 15.55-ს შორისაა?

საკითხი 2 და 3

მოსამზადებელი ამოცანები

2.5. A და B -ორი ნებისმიერი ხდომილობაა. ჩაწერეთ შემდეგი ხდომილობები:
ა) მოხდა მხოლოდ A ხდომილობა;
ბ) მოხდა მხოლოდ B ხდომილობა;
გ) ორივე ხდომილობა მოხდა;
დ) არც ერთი ხდომილობა არ მოხდა;
ე) მოხდა მხოლოდ ერთ-ერთი ხდომილობა;

2.6. A,B,C -სამი ნებისმიერი ხდომილობაა. ჩაწერეთ შემდეგი ხდომილობები:
ა) მოხდა მხოლოდ B ხდომილობა;
ბ) მოხდა მხოლოდ B და C ხდომილობები;
გ) სამივე ხდომილობა მოხდა;
დ) არც ერთი ხდომილობა არ მოხდა;
ე) მოხდა ერთ-ერთი ხდომილობა მაინც;
ვ) მოხდა ორი ხდომილობა მაინც;
ზ) მოხდა მხოლოდ ერთ-ერთი ხდომილობა;
თ) მოხდა მხოლოდ ორი ხდომილობა;
ი) მოხდა არა უმეტეს ორი ხდომილობისა

2.16. ორი კამათლის გაგორებისას ვიხილავთ ხდომილობებს:
A-პირველ კამათელზე მოვიდა ექვსი ქულა;
B- ერთ-ერთ კამათელზე მოვიდა ხუთი ქულა;
გამოთვალეთ A, B, $\overline{A}$, $A\overline{B}$ ხდომილობების ალბათობები.

2.17. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას: ა) მოსულ რიცხვების ჯამი ხუთს არ აღემატება; ბ) ერთ-ერთზე მაინც მოვა ხუთი ქულა; გ) მოსულ ქულათა ჯამი 3-ის ჯერადია; დ) მოსულ რიცხვების სხვაობის მოდული 2-ის ტოლია; ე) მოსულ რიცხვების ნამრავლია 6; ვ) ჯამში არ მიიღება რიცხვი 7.

2.18. კარტის დასტიდან, რომელშიც 36 კარტია, შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს კარტი: ა) ტუზია; ბ) ჯვრის ვალეტია; გ) გულის შვიდიანი ან გულის ათიანია; დ) არც ექვსიანია, არც ჯვარი.

2.21. სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად თითოჯერ ესვრის ერთ და იმავე სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობაა 0.8, მეორისათვის – 0.9, მესამისათვის – 0.85. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სროლის შემდეგ სამიზნე დაზიანებული აღმოჩნდება.

2.22. ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ორ-ორჯერ ესვრის ერთ და იმავე სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობაა 0.8, მეორისათვის – 0.9. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სროლის შემდეგ სამიზნე დაზიანებული აღმოჩნდება.

2.23. სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად თითოჯერ ესვრის ერთ და იმავე სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნეში მოხვედრის ალბათობაა 0.9, მეორისათვის – 0.9, მესამისათვის – 0.6. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: 1) სამივე მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს; 2) ერთი მსროლელი მაინც მოახვედრებს სამიზნეს; 3) მხოლოდ ერთი მსროლელი მოახვედრებს სამიზნეს.

2.24. ალბათობა იმისა, რომ პირველი ქვემეხიდან გასროლილი ჭურვი სამიზნეს მოხვდება, არის 0.8, ხოლო მეორე ქვემეხიდან გასროლისას –0.6. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ამ ორი ქვემეხიდან ერთდროულად გასროლისას სამიზნეს მოხვდება მხოლოდ ერთი ჭურვი.
2.37. სამი ქვემეხიდან ერთობლივი გასროლისას ორი ჭურვი მოხვდა მიზანს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ქვემეხიდან გასროლილი ჭურვი მოხვდა მიზანს, თუ პირველი, მეორე და მესამე ქვემეხისათვის სამიზნეს დაზიანების ალბათობებია 0.5, 0.7 და 0.8.

2.48. ყუთიდან, რომელშიც აწყვია ბარათები ასოებით „ი", „მ", „ო", „ს", „უ", „ხ" შემთხვევით იღებენ ბარათებს და ალაგებენ მიმდევრობით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შედეგად მიიღება სიტყვა „სოხუმი„?

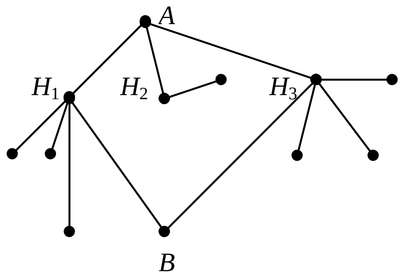
2.49. ყუთიდან, რომელშიც აწყვია ბარათები ასოებით „ა", „ბ", „გ", „დ", „ე", „ვ", „ზ", „თ", „ი", შემთხვევით იღებენ 3 ბარათს და ალაგებენ მიმდევრობით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შედეგად მიიღება სიტყვა „ათი„?

2.50. იგივე პირობა, რაც წინა ამოცანაშია, მხოლოდ შეიძლება ამოღებული ბარათების ნებისმიერი გადანაცვლება.

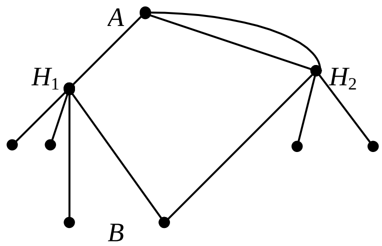
2.51 ურნაში 6 თეთრი 8 შავი ბირთვია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ურნიდან შემთხვევით ამოღებული ორი ბირთვიდან ორივე ბირთვი შავი იქნება?

ტიპიური საგამოცდო ამოცანები ბილეთეის მეორე და მესამე საკითხებისთვის

2.53. ტურისტი გზათა ყოველ გასაყარზე თანაბარი ალბათობით ირჩევს გზის გაგრძელებას (ოღონდ უკან არ ბრუნდება). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იგი A წერტილიდან მივა B წერტილში, თუ გზათა სქემა შემდეგია



2.54. ამოხსენით წინა ამოცანა, თუ გზათა სქემა შემდეგია



2.63. ერთ ურნაში 10 თეთრი და 2 შავი ბირთვია, მეორეში- 4 თეთრი და 8 შავი. ყოველი ურნიდან იღებენ თითო ბირთვს. როგორია იმის ალბათობა, რომ ორივე ამოღებული ბირთვი შავია?

2.64. წინა ამოცანის პირობებში გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბირთვებიდან ერთი თეთრია, მეორე-შავი.

2.65. ერთ ურნაში 3 თეთრი, 4 შავი და 2 წითელი ბირთვია, მეორეში 5 თეთრი, 2 შავი და 3 წითელი ბირთვი. თითოეული ურნიდან შემთხვევით იღებენ თითო ბირთვს. როგორია იმის ალბათობა, რომ მათ შორის არ იქნება წითელი ბირთვი?

2.66. ურნაში 8 თეთრი და 2 შავი ბირთვია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ურნიდან ერთდროულად ამოღებული სამივე ბირთვი თეთრი იქნება?

2.67. ურნაში 12 თეთრი, 4 შავი, 8 წითელი და 1 მწვანე ბირთვია. როგორია იმის ალბათობა, რომ ურნიდან მიმდევრობით ამოღებული სამი ბირთვიდან პირველი შავი იქნება, მეორე-თეთრი, მესამე-წითელი?

2.68. ერთ ურნაში 5 თეთრი და 15 შავი ბირთვია, მეორეში 3 თეთრი და 2 შავი ბირთვი. პირველი ურნიდან მეორეში გადააქვთ ერთი ბირთვი. ბირთვების არევის შექდეგ მეორე ურნიდან პირველში შემთხვევით აბრუნებენ ერთ ბირთვს. როგორია იმის ალბათობა, რომ ამის შემდეგ პირველი ურნიდან ამოღებული ბირთვი თეთრი იქნება?

2.69. ერთ ურნაში 3 თეთრი და 5 წითელიავი ბირთვია, მეორეში- 2 თეთრი და 3 წითელი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან ამოღებული ბირთვი თეთრი იქნება?

2.37. სამი ქვემეხიდან ერთობლივი გასროლისას ორი ჭურვი მოხვდა მიზანს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მეორე ქვემეხიდან გასროლილი ჭურვი მოხვდა მიზანს, თუ პირველი, მეორე და მესამე ქვემეხისათვის სამიზნეს დაზიანების ალბათობებია 0.5, 0.7 და 0.8.

2.38. იმ ყუთიდან, რომელშიც 3 თეთრი და 2 შავი ბირთვია, შემთხვევით ამოიღეს 2 ბირთვი და ჩადეს მეორე ყუთში, რომელშიც 4 თეთრი და 4 შავი ბირთვი იყო. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი თეთრია.

2.39. ყუთიდან, რომელშიც 3 თეთრი და 2 შავი ბირთვია, შემთხვევით ამოიღეს 1 ბირთვი და ჩადეს მეორე ყუთში, რომელშიც 4 თეთრი და 4 შავი ბირთვი იყო. ამის შემდეგ მეორე ყუთიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველი ყუთიდან მეორეში გადაიტანეს თეთრი ფერის ბირთვი, თუ მეორე ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბირთვი თეთრია?

2.40. დომინოს 28 სათამაშო ქვიდან შემთხვევით ირჩევენ 2 ქვას. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თამაშის წესების შესაბამისად ქვები მიედება ერთმანეთს?

2.41. ნაკეთობა აკმაყოფილებს სტანდარტს 0.96 ალბათობით. გამარტივებული კონტროლის პროცედურა დადებით შედეგს იძლევა 0.98 ალბათობით სტანდარტული ნაკეთობისათვის, ხოლო 0.05 ალბათობით ისეთივე შედეგს არასტანდარტული ნაკეთობისათვის. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ნაკეთობა, რომელიც ამ პროცედურას წარმატებით გაივლის, სტანდარტულია?

2.42. პირველ ყუთში 2 თეთრი და 3 შავი, მეორეში 2 თეთრი და 4 შავი, ხოლო მესამეში კი 3 თეთრი და 2 შავი ბურთია. თანმიმდევრობით ასრულებენ შემდეგ მოქმედებებს: პირველი ყუთიდან შემთხვევით არჩეული ერთი ბურთი გადააქვთ მეორეში, მეორიდან შემთხვევით არჩეული ერთი ბურთი გადააქვთ მესამეში, ხოლო მესამიდან კვლავ შემთხვევით არჩეული ერთი ბურთი გადააქვთ პირველში. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ პირველ ყუთში ბურთების შემადგენლობა არ შეიცვლება?

საკითხი 4

3.2. X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–2	–1	1	2	4	6
	0.1	0.15	0.13	0.17	0.25	0.2

გამოთვალეთ ალბათობა, იმისა რომ: ა) $X \le 0$; ბ) $X \le 3$; გ) $X < 2$; დ) $-1 < X \le 4$; ე) $X>1$.

2. დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	–2	2	3
	0.2	0.3	0.5

იპოვეთ $Y=X^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.8. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია

X	0	1
	q_x	p_x

Y	0	1
	q_y	p_y

იპოვეთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები

ა) $Z=X+Y$, ბ)$U=X–Y$, გ) $V=X\cdot Y$.

3.9. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	1	2	4
	0.5	0.2	0.3

იპოვეთ Y=1/(3–X) შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.14. გამოთვალეთ X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის $[EX-\sqrt{DX}\ ,\ EX+\sqrt{DX}\ ]$ შუალედში მოხვედრის ალბათობა, თუ მისი განაწილების კანონია

X	–1	0	1	2
	0.3	0.1	0.4	0.2

3. 23. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია

X	0	4
	0.6	0.4

Y	-2	0	2	3
	0.1	0.3	0.3	0.3

იპოვეთ $Z=X-Y^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

3.24. დამოუკიდებელი X და Y შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონებია

X	1	2
	0.6	*0.4*

Y	-2	0	2	4
	0.1	*0.3*	*0.3*	*0.3*

იპოვეთ $Z= Y^2$ /X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

3.25. ვთქვათ, X ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა. გამოთვალეთ $P\{X=k\}$ ალბათობები, თუ ა) n=4, p=0.5, k=2, ბ) n=5, q=0.3, k=3, გ) n=6, q=0.4, k=2, დ) n=3, p=0.7, k=1.

3.26. იპოვეთ ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და უალბათესი რიცხვი, თუ ა) n=20, p=0.5, ბ) n=50, q=0.3, გ) n=100, q=0.4, დ) n=200, p=0.7.

3.27. ვთქვათ X ბინომური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდეა პარამეტრებით n=4, p=0.1. როგორი იქნება X-ის განაწილების კანონი?

3.28. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის ხუთჯერ აგდებისას ერთხელ მაინც მოვა საფასური.

3.29. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის ოთხჯერ აგდებისას ჯამში ერთხელ მაინც დაჯდება შვიდიანი.

3.40. ყუთში 3 წითელი, 2 შავი და 5 თეთრი ბურთია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ერთი ბურთის ოთხჯერ დაბრუნებით ამოღებისას ორჯერ ამოვა თეთრი ბურთი.

3.41. ალბათობა იმისა, რომ ოთხი გასროლისას მსროლელი ერთხელ მაინც მოახვედრებს სამიზნეს არის 0.9919. გამოთვალეთ მსროლელის მიერ ერთხელ გასროლისას სამიზნეს დაზიანების ალბათობა.

3.42. თითოეულ დამოუკიდებელ ცდაში ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობის განხორციელების ალბათობა 0.8-ს ტოლია. რამდენი დამოუკიდებელი ცდა უნდა ჩავატაროთ, რათა ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობის გნხორციელების რაოდენობის უალბათესი რიცხვი იყოს 33-ის ტოლი?

3.43. რას უდრის ჩვენთვის საინტერესო ხდომილობის გნხორციელების p ალბათობა 129 დამოუკიდე-ბელ ცდაში, თუ ცდათა ამ სერიაში ხდომილობის გნხორციელების უალბათესი რიცხვი 90-ის ტოლია

3.46 ურნაში 35 თეთრი და 5 შავი ბირთვია. ურნიდან შემთხვევით იღებენ 9 ბირთვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 2 შავი ბირთვი იქნება?

3.47. დასტიდან, რომელშიც 52 კარტია შემთხვევით იღებენ სამ კარტს. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის ზუსტად ერთი ტუზი იქნება.

3.48. დასტიდან, რომელშიც 52 კარტია შემთხვევით იღებენ სამ კარტს. როგორია იმის ალბათობა, რომ მათ შორის არცერთი ტუზი არ იქნება?

3.49. აუდიტორიაში იმყოფება 25 ბიჭი და 10 გოგო, შემთხვევით ირჩევენ 10 სტუდენტს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის 7 ბიჭია.

5.4. მოცემულია (X,Y) ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

$X \backslash Y$	-2	0
-1	0	1/15
0	1/5	4/15
2	1/3	2/15

იპოვეთ X და Y შემთხვევითი სიდიდეების ა) კოვარიაცია, ბ) კორელაციის კოეფიციენტი, გ) გამოვთვალოთ $Z=2X-Y+1$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

5.5. X შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

X	-1	0	1
	1/9	1/3	5/9

რისი ტოლია კოვარიაცია X და X^2+1 სიდიდეეს შორის?

5.10. ვთქვათ $T=-3X+2Y-Z$. იპოვეთ ET და DT, თუ: $EX=3$, $EY=-1$, $EZ=-3$, $DX=4$, $\rho\ [X,Y]=0{,}7$, $DY=9$, $\mathrm{cov}[X,Z]=-4$, $DZ=16$, $\mathrm{cov}[Z,Y]=0$.

საკითხი 5

ცხრილების გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ალბათობები:

2.6. X შემთხვევითი სიდიდე $N(3,4)$ კანონითაა განაწილებული. გამოთვალეთ შემდეგი ხდომილობის ალბათობები ა) $P(X\leq 1)$, ბ) $P(X>6)$.

2.7. X შემთხვევითი სიდიდე $N(5,16)$ კანონითაა განაწილებული. ვიპოვოთ ისეთი α და β რიცხვები, რომლებისათვისაც ა) $P\{X\leq\beta\}=0.7$, ბ) $P\{X>\alpha\}=0.4$, გ) $P\{\alpha<X\leq\beta\}=0.8$.

2.8. $X\sim N(0,1)$, $P\{X>\alpha\}=0.76$, $P\{X<\beta\}=0.64$. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას α და β რიცხვებს შორის?

2.9. $X\sim N(7,4)$. $P\{9<X<11\}=\alpha$. რას უდრის $P\{3<X<5\}$?

2.10. $N(8,7)$, განსაზღვრეთ b, რომლისთვისაც $P\{5<X<b\}=0.4$.

2.12. $X\sim N(5,5)$. იპოვეთ მათემატიკური ლოდინის მიმართ ისეთი სიმეტრიული (α,β) ინტერვალი, რომლისთვისაც $P\{\alpha<X<\beta\}=0.8$.

2.13. $X\sim N(8,6)$. იპოვეთ ისეთი ცალხმრივი მარჯვენა $(a,+\infty)$ ინტერვალი, რომელშიც X შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა 0.2-ის ტოლია.

2.14. $X\sim N(0,1)$, იპოვეთ $p=0.95$ დონის კვანტილის რიცხვითი მნიშვნელობა.

2.33. X ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა შესაბამისად ტოლია 10 და 2-ის. ვიპოვოთ: ა) $P\{12\leq X\leq 14\}$, ბ) $P=1/3$ დონის კვანტილი;

2.34. X ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და საშუალო კვადრატული გადახრა შესაბამისად ტოლია 20 და 5-ის. ვიპოვოთ: ა) $P\{15\leq X\leq 25\}$, ბ) $P=1/4$ დონის კვანტილი;

2.35. X ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი $\mu=10$, ხოლო $P\{10\leq X\leq 20\}=0.3$. ვიპოვოთ: $P\{0\leq X\leq 10\}$