Reconocimiento de patrones

Clase 4: Propiedades geométricas

Mini quizz

$$d(x) = w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} w_{ii} x_i^2$$

- Si $n = 3$, ¿Cuál es el tamaño de N?
- En general, ¿cuál es el tamaño de N dado $n \in \mathbb{N}$?

Notas

- $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ es el número de términos necesarios para representar una función de decisión cuadrática general

Notas

- $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ es el número de términos necesarios para representar una función de decisión cuadrática general

- $M(n,m) = \binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$ para el caso de orden m

Funciones de decisión polinomiales

- $f_i(x) = x_{i1}^{e_1} x_{i1}^{e_2} \dots x_{im}^{e_n}$
- Donde $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n$, $e_i, 1 \leq i \leq m$ es 0 o 1 y $i_1 \leq i_2 \leq \cdots i_m$.
- Teorema: Sea $d^m(x)$ la función de decisión polinomial general de orden m. Entonces

$$d^m(x) = \sum_{i_1=1}^{\mathrm{n}} \sum_{i_2=i_1}^{\mathrm{n}} \dots \sum_{m=i_{m-1}}^{\mathrm{n}} w_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} + d^{m-1}(x)$$

- Donde $d^0(x) = w_{n+1}$

Funciones de decisión polinomiales

- $f_i(x) = x_{i1}^{e_1} x_{i1}^{e_2} \dots x_{im}^{e_n}$
- Donde $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n$, $e_i, 1 \leq i \leq m$ es 0 o 1 y $i_1 \leq i_2 \leq \cdots i_m$.
- Teorema: Sea $d^m(x)$ la función de decisión polinomial general de orden m. Entonces

$$d^m(x) = \sum_{i_1=1}^{\mathrm{n}} \sum_{i_2=i_1}^{\mathrm{n}} \dots \sum_{m=i_{m-1}}^{\mathrm{n}} w_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} + d^{m-1}(x)$$

- Donde $d^0(x) = w_{n+1}$
- ¿Siempre es necesario aplicar todos los términos?

Algunas preguntas finales…

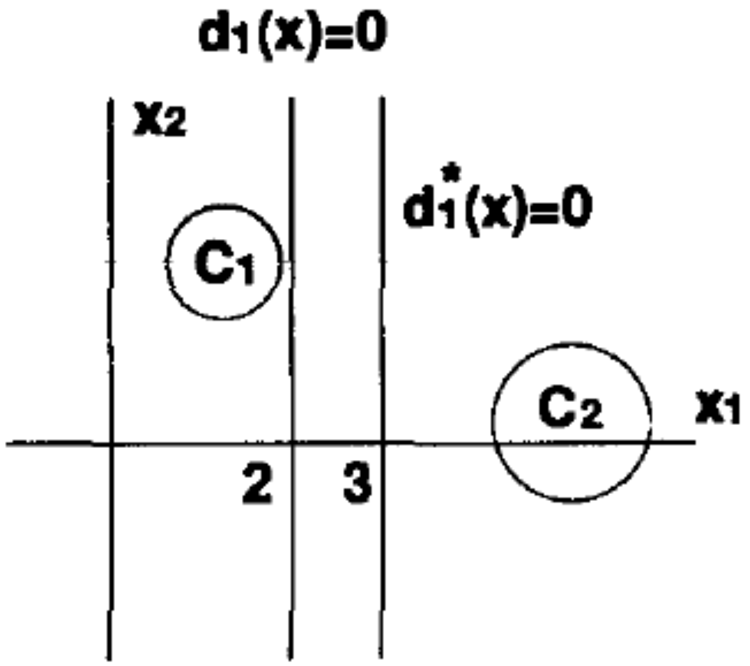
- ¿Qué es una función de decisión lineal?

Algunas preguntas finales…

- ¿Cuándo puede decirse que los patrones son geométricamente separables?

Tarea 1

- (25 puntos) Dos funciones de decisión lineales para C_1 y C_2 son $d_1(x) = 2 - x_1$ y $d_1^*(x) = 3 - x_1$, ¿cuál es mejor y por qué?
- (25 puntos) Sean $x, y \in C_1$ y sea $z = \frac{x+y}{2}$ pertenecen a C_2. ¿Son C_1 y C_2 linealmente separables?
- (25 puntos) Presente la función de decisión general para un polinomio de 4to orden para un espacio 2D
- (20 puntos) Calcule $M(n, m)$ para $1 \leq n, m \leq 5$
- (5 puntos) Demostrar la fórmula de $M(n, m)$



Para el día de hoy…

- Propiedades geométricas

Discusión geométrica

1

Las funciones de decisión lineal juegan un rol significativo en reconocimiento de patrones

2

Es esencial observar la interpretación geométrica de sus propiedades

Hiperplanos

- Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio original de patrones y consideremos un problema multiclase.
- Una función de decisión lineal está determinada por
$$d(x) = w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + w_{n+1} = 0$$
- Que define una frontera de decisión lineal
- $d(x) = w_0^T x + w_{n+1} = 0$
- Es la versión vectorial donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ y $w_0 = (w_1, \dots, w_n)^T$

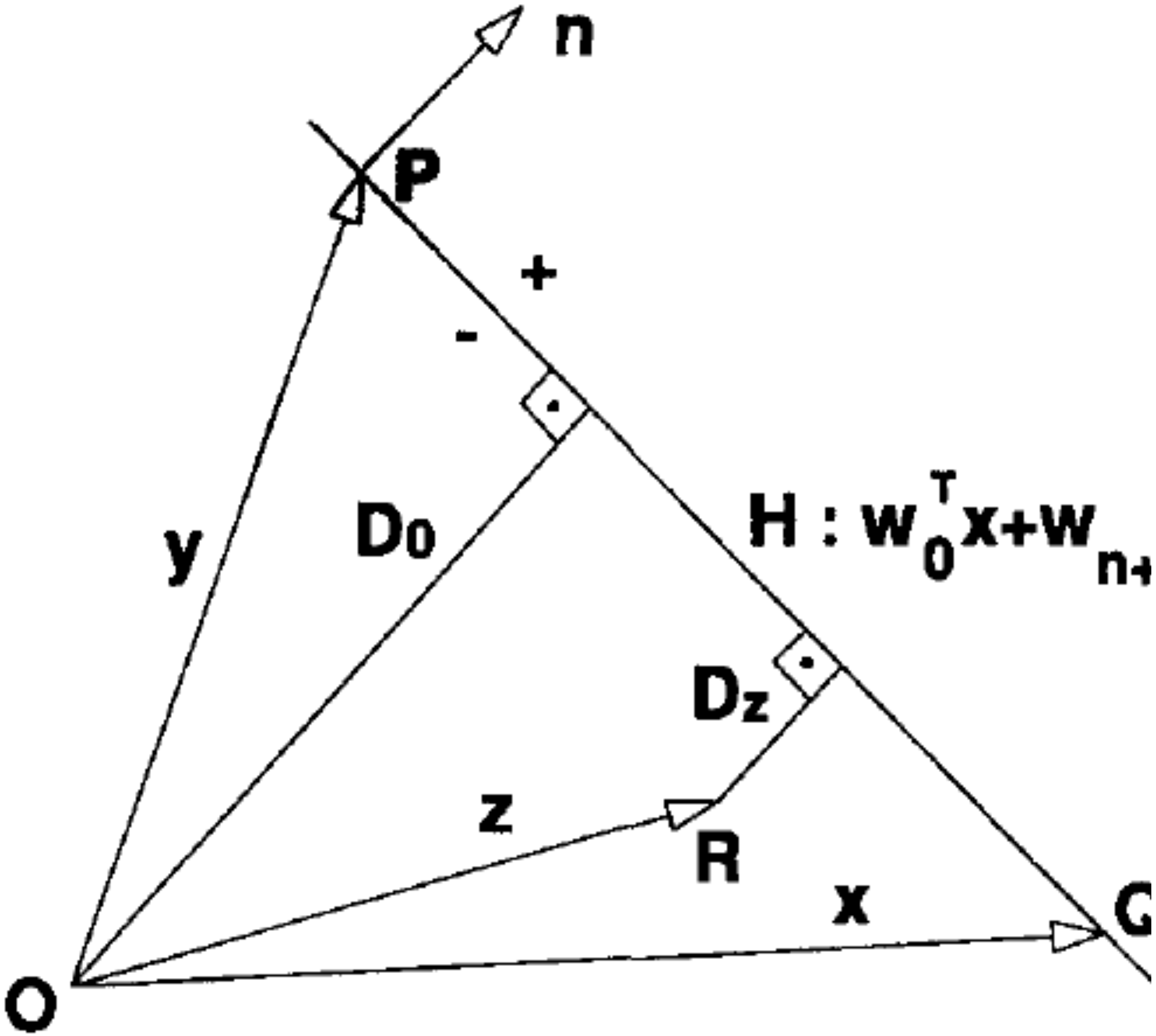
Propiedades básicas

- Consideremos el hiperplano H. Sea n el vector normal unitario en algún punto P de H, apuntando a su lado positivo
- Sean $y = OP$ y sea $x = OQ$ puntos arbitrarios en el hiperplano. Entonces, la ecuación del hiperplano puede ser reescrita como

$$n^T QP = n^T(x - y) = 0$$

- O como

$$n^T x = -n^T y$$



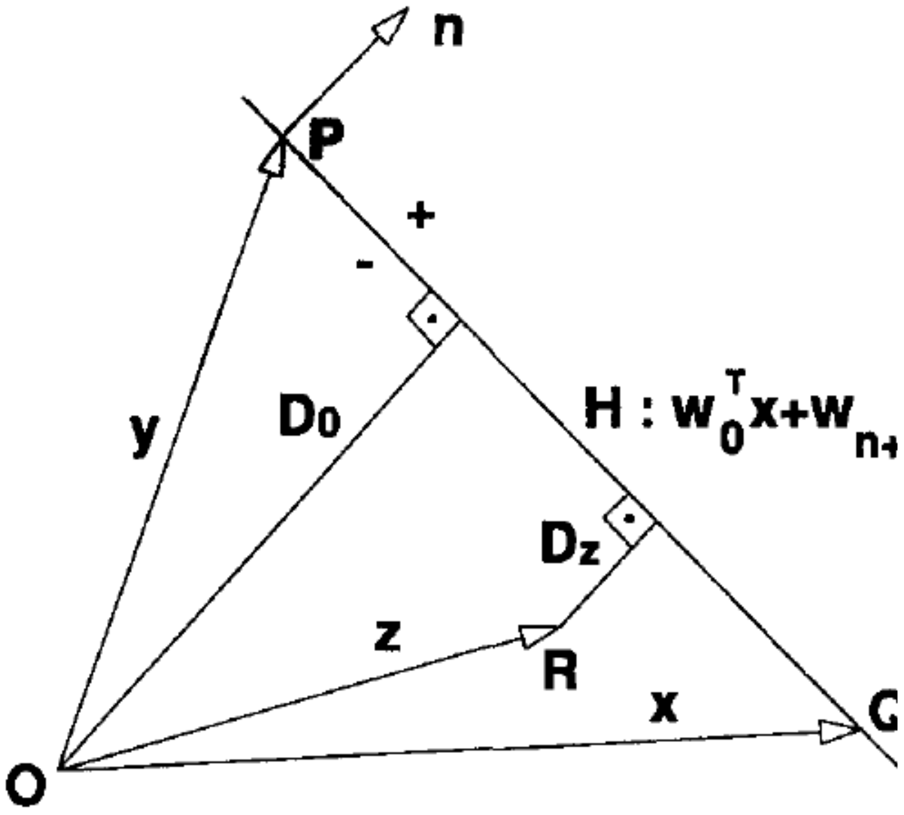
Un poco de manipulación

- Podemos comparar ambas ecuaciones
  - Normalizamos la ecuación previa por $||w_0|| = (w_1^2 + \cdots + w_n^2)^{\frac{1}{2}}$
  - Para obtener $\frac{w_0^T x}{||w_0||} = -\frac{w_{n+1}}{||w_0||}$
  - Dado que las ecuaciones representan el mismo hiperplano y dado que n y $\frac{w_0}{||w_0||}$ son vectores unitarios, entonces $n = \frac{w_0}{||w_0||}$ o $n = -\frac{w_0}{||w_0||}$
  - n fue elegido en el lado positivo del hiperplano por lo que
  - $w_0^T(y + n) + w_{n+1} > 0$
  - Y dado que $w^T y + w_0 = 0$ obtenemos $w^T n > 0$ por lo que

$$n = \frac{w_0}{||w_0||}$$

  - Y por consecuencia

$$n^T y = -\frac{w_{n+1}}{||w_0||}$$



Un poco de manipulación II

- La cantidad $|n^T y|$ mide la distancia normal D_0 entre el origen y el hiperplano H

$$D_0 = \frac{|w_{n+1}|}{||w_0||}$$

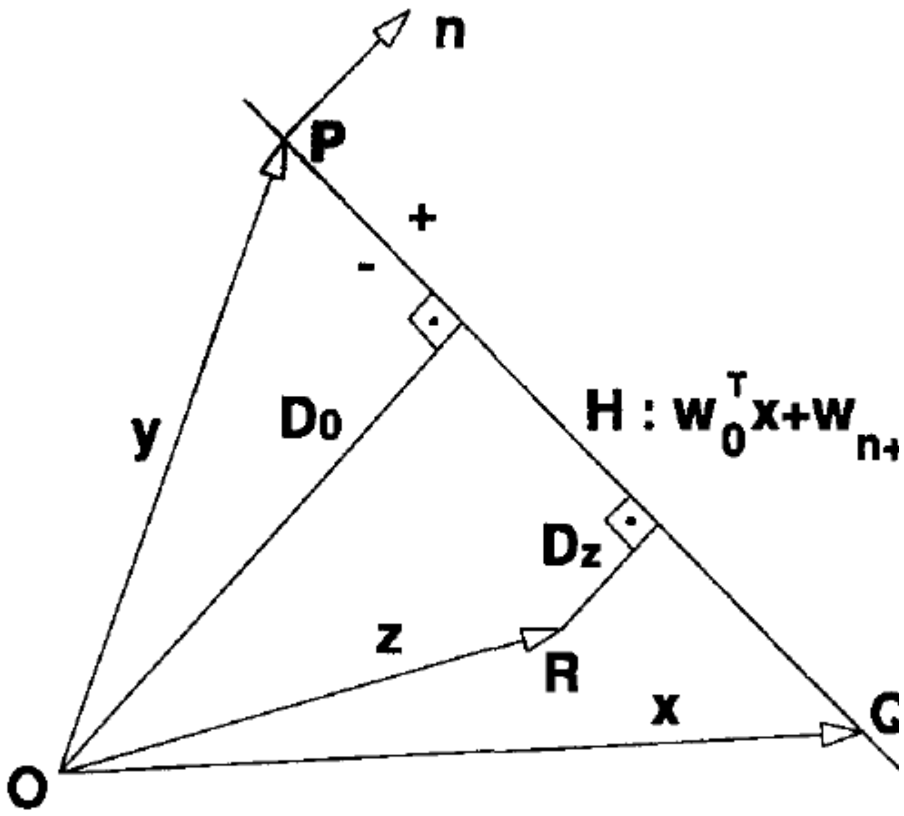
- La distancia entre un punto arbitrario R, asociado al vector z del hiperplano es

$$D_z = |n^T(y-z)| = |n^T(z-y)|$$

- Y a partir de las ecuaciones anteriores

$$D_z = \left|\frac{w_0^T}{||w_0||}(z-y)\right| = \left|\frac{(w_0^T z + w_{n+1})}{||w_0||}\right|$$

- El caso particular donde $w_{n+1} = 0$ el hiperplano pasa por el origen dado que $D_0 = 0$



Ejercicios

1. Considere la frontera $3x_1 + 4x_2 - 5 = 0$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular
   - $||w||$
   - n
   - La distancia al patrón ubicado en $(1,2)^T$ a la frontera de decisión
2. Consideremos un sistema de clasificación de dos clases utilizando como frontera de decisión el siguiente plano
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 7 = 0$$
Si queremos excluir aquellos patrones que están a menos de 0.01, ¿Qué deberíamos hacer con el patrón $(0.51, 0, 3)$?