ÁLGEBRA

ARISTÓFANES MADRIGAL UC

Presentación

La diferencia la marca uno mismo. El compromiso y la dedicación son dos cualidades que te permitirán desarrollar tu talento. Nada se logra sin dedicación. Y pocas cosas se alcanzan sin compromiso.

Por esas razones, estos libros de trabajo te permitirán avanzar y lograr consolidar tus conocimientos.

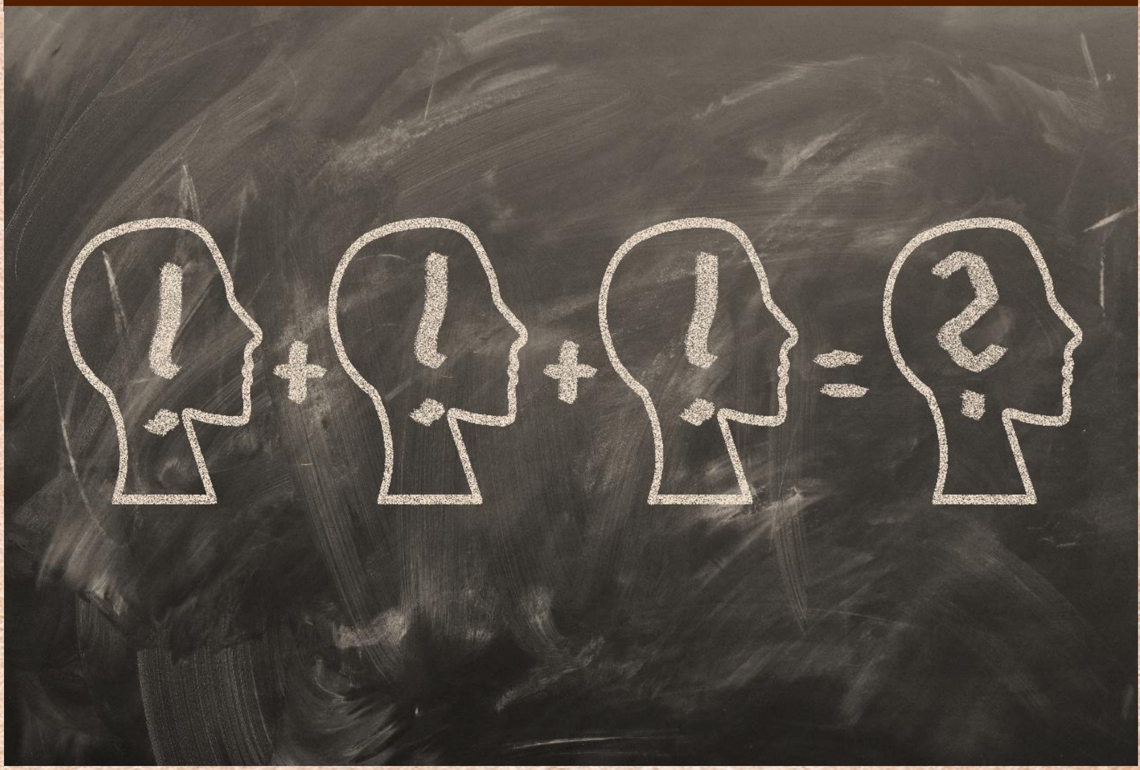
Dedícate tiempo de forma inteligente. Invierte en tus habilidades. Haz tus horarios, organiza tus metas y ten un compromiso verdadero con tu educación. Recuerda, lo que construyes hoy es tu futuro.

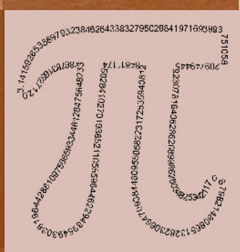
Te deseo mucho éxito.

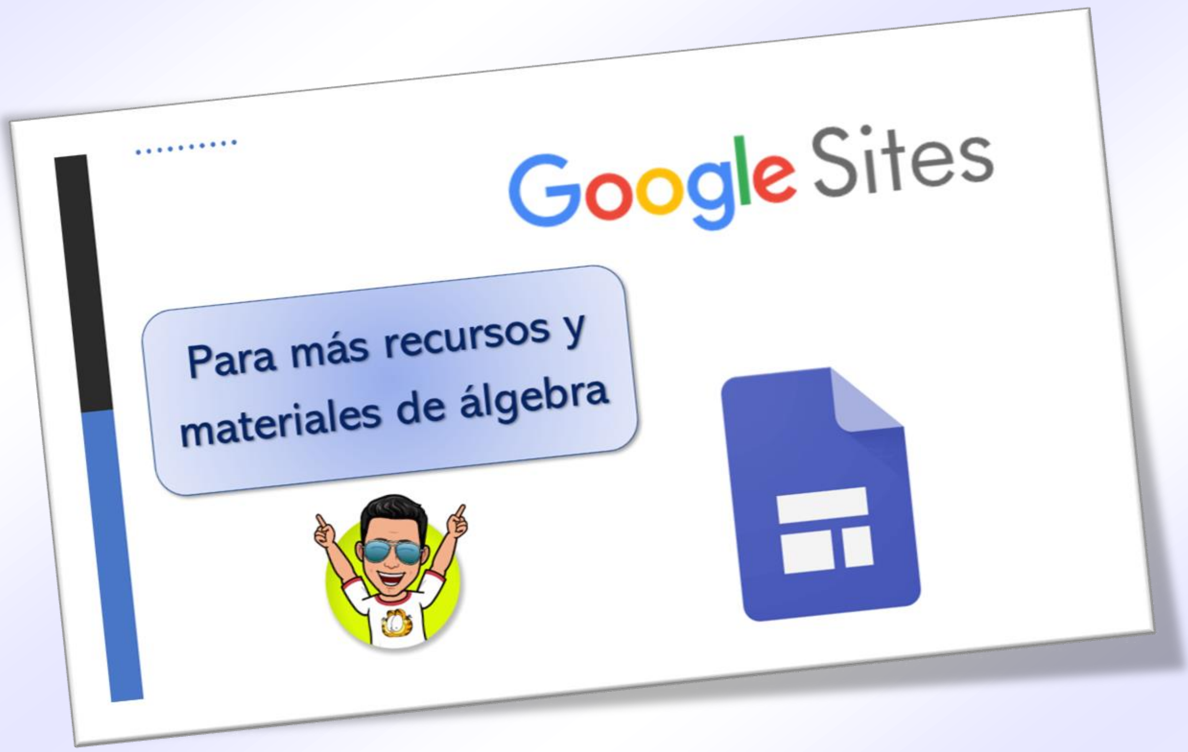
Arq. Nery Celia Rojo Aguilar

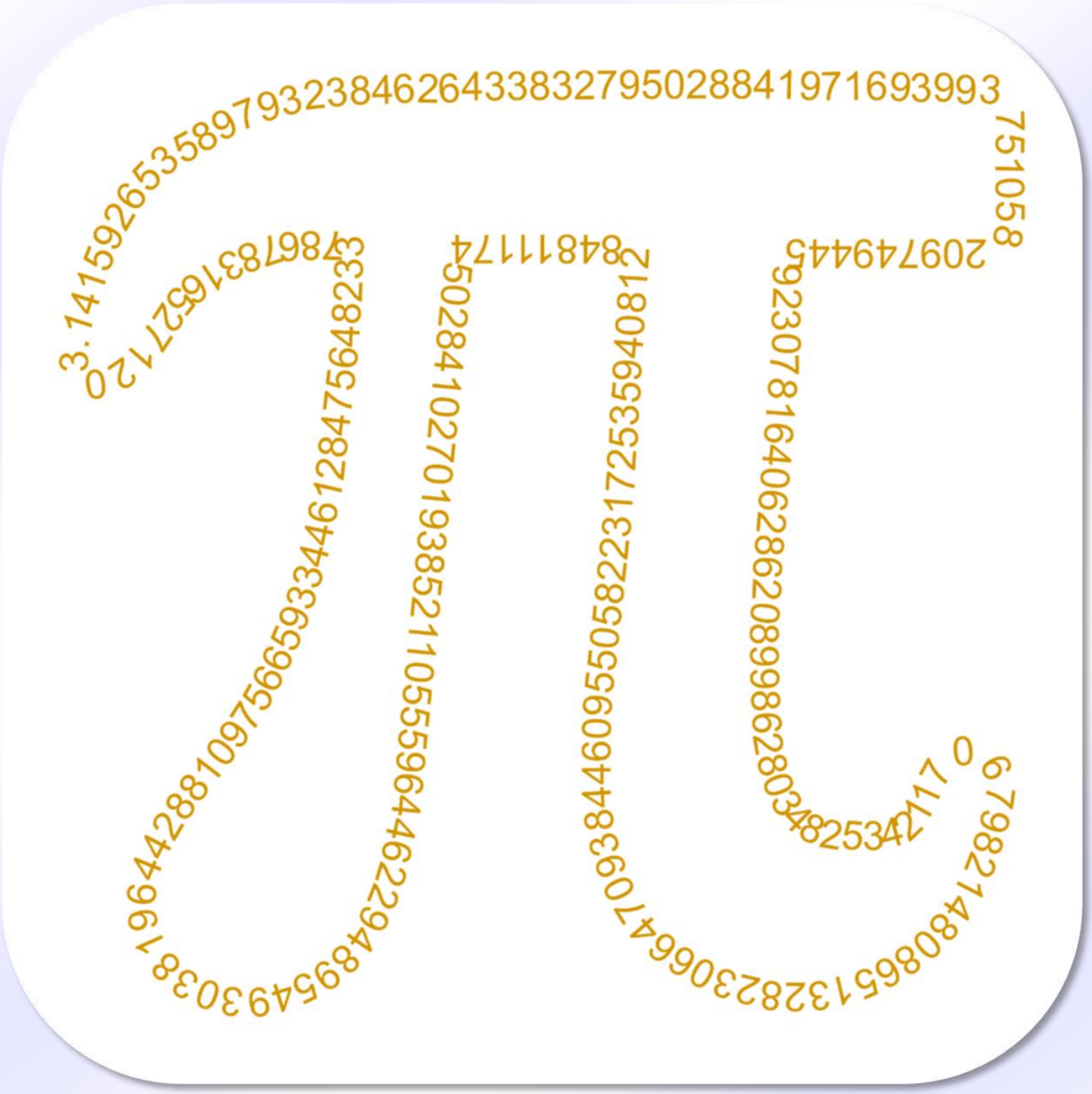
Directora General

ALGEBRA






Google Sites
Para más recursos y
materiales de álgebra



El 14 de marzo se celebra el Día Internacional del Número Pi. Con esta celebración la comunidad docente y científica rinde homenaje al número, a las matemáticas y a la ciencia en general.

PRESENTACIÓN

Cada día se genera más conocimiento en el mundo, pero por desgracia no es accesible para muchos, por lo que es necesario buscar nuevas formas para que todos lo tengan al alcance.

Bajo esta premisa se ha concebido este material, en donde se busca que tengas acceso de una manera fácil al conocimiento y te permita el logro de tus aprendizajes, para ser usados en la escuela y en la vida.

Por tal motivo, esta propuesta fusiona el material educativo por excelencia: "el libro" fusionado con los recursos multimedia que las nuevas tecnologías ofrecen, naciendo así el HIPERLIBRO.

Este concepto está pensado en tí, por lo que se presenta en formato de libro, pero de una forma dinámica, es decir, te permite acceso a otros recursos que estarán al alcance en tan solo un clic: como videos explicativos, audios, imágenes, simuladores, calculadoras entre otros, ofreciéndote la oportunidad de usar la red para seguir aprendiendo.

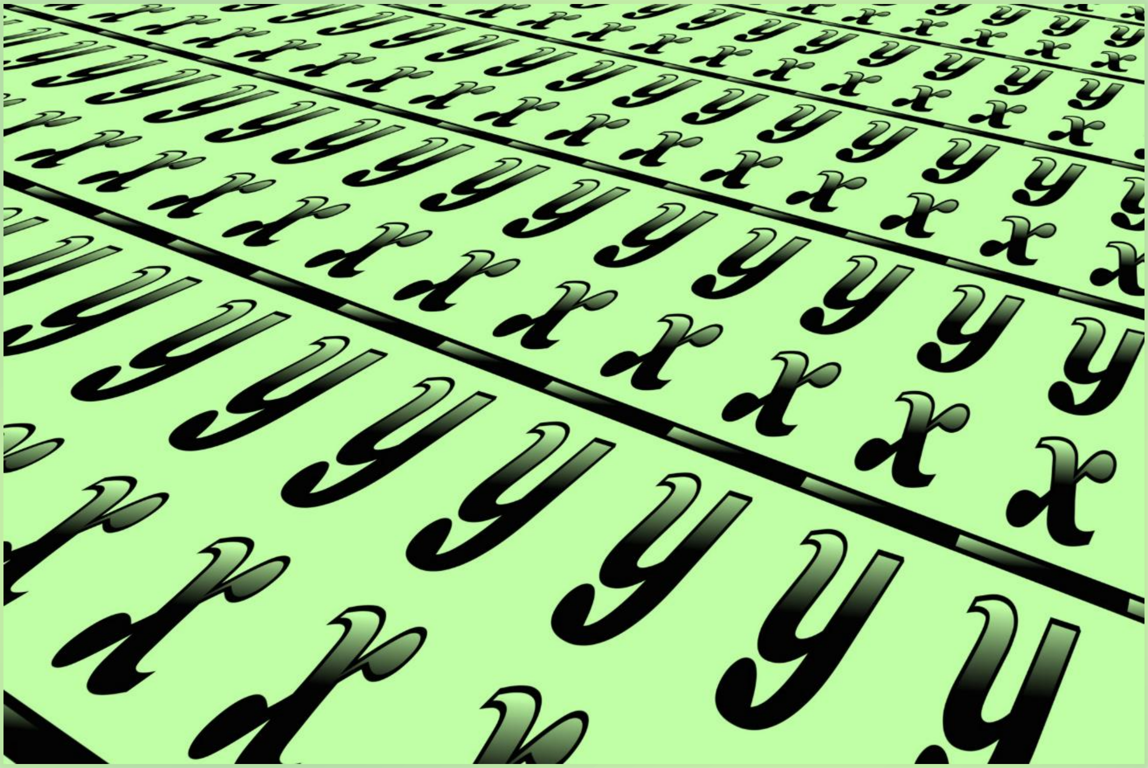
Te invito a que lo explores y que decidas el ritmo de tu aprendizaje, pero sobre todo que te sirva para adquirir más saberes, con la finalidad de que seas un mejor alumno y una mejor persona para el bien de tu escuela, el de tus familiares y tu comunidad.

Éxito.

Aristófanes Madrigal Uc

Contenido

I. RECONOCES EL LENGUAJE ALGEBRAICO



APRENDIZAJES ESPERADOS

- Transitan del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.
- Desarrollan un lenguaje algebraico, un sistema simbólico para la generalización y la representación.
- Reconoce la existencia de las variables y distinguen sus usos como número general, como incógnita y como relación funcional.
- Evalúa expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos.

Seguramente alguna vez has tenido la oportunidad de resolver un acertijo matemático, o quizás has visto algún "mago" en donde solicita a una persona que piense en un número y este lo adivina ante la sorpresa del público.

Aquí tienes un "acertijo matemático" para que lo resuelvas primero de manera individual y luego con un compañero.

I. Sigue las instrucciones y realiza los cálculos de manera mental o anotando tus operaciones

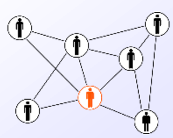
- Elige un número entero
- Multiplícalo por 3
- Súmale 6
- Divide ese resultado por 3
- Réstale el número que elegiste en un principio
- ¿Cuál fue el resultado?

II. Ahora elige otro número entero y realiza los mismos cálculos.

III. Comparte tus resultados con otro compañero y respondan lo siguiente:

¿Los resultados fueron iguales?

¿En caso de ser así, por qué creen que sucedió esto?



IV. En parejas traten de escribir matemáticamente la secuencia de operaciones para cualquier número entero.

Como se observó, se obtuvo el mismo resultado sin importar el número elegido; si quisiéramos comprobar si cumple para cada uno de los números enteros, como estos son infinitos NUNCA terminaríamos de probarlo. Sin embargo, existe una forma más práctica de hacerlo como se muestra en el siguiente vídeo.

Valorando lo que sabes

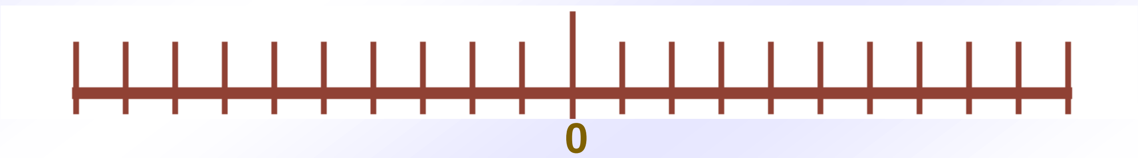
INSTRUCCIONES: Esta evaluación tiene como propósito que puedas medir los conocimientos que traes para los temas de este bloque. Lee cuidadosamente cada reactivo y responde según corresponda. Esta evaluación no tiene valor cuantitativo.

1. Realiza las siguientes operaciones

   a) $3 + (5)(6)$
   b) $2(1 - 4) \div 3$
   c) $\frac{(-3+5)^2}{2}$
   d) $4\sqrt{16 + 9}$
   e) $-(5)^2 + 2(3)^3$

2. Ubica en la recta numérica los siguientes números

a) -2 b)-5 c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 4 f) $-\frac{9}{3}$



3. Simplifica las siguientes operaciones, expresándolo como un solo número

   a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
   b) $2^2 \cdot 2^3$
   c) $\frac{5^4}{5^3}$
   d) $\frac{3^2 \cdot 2^3}{2^3}$

4. Sustituye los valores dados para calcular perímetros y áreas

   a) $P = 2a + 2b, \quad si\ a = 3\ y\ b = 4$
   b) $A = \frac{a \cdot b}{2}, \quad si\ a = 7\ y\ b = 5$
   c) $A = \frac{(B+b)h}{2}, \quad si\ B = 8,\ b = 3\ \ y\ \ h = 4$
   d) $P = 4l, \quad si\ l = 7$
   e) $A = l^2, \quad si\ l = 4$

Representando en notación algebraica

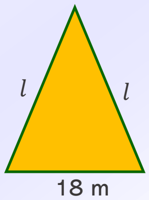
Durante el nivel básico usaste números y operadores matemáticos, tales como la suma, resta, división, potencia, entre otros, a esta rama de las matemáticas se le llama aritmética.

En las matemáticas también existe otra rama que aparte de los números hace uso de las letras, otorgándole principalmente dos usos, uno de ellos es para indicar un valor desconocido, también llamado **incógnita** como se muestra en el siguiente ejemplo.

Un terreno de perímetro 82 metros tiene la forma de un triángulo isósceles, si el lado que es diferente mide 18 metros. Calcula la medida de los otros lados iguales.

Solución:

El perímetro de un triángulo es la suma de sus tres lados, como los lados iguales son desconocidos podemos llamarle l a cada lado.



Así:

$l + l + 18 = 82$ (l es la incógnita)

Simplificando la expresión

$2l + 18 = 82$

¿Qué valor debe tomar l para que se cumpla la igualdad?

Para dar respuesta a esta pregunta es necesario resolver la ecuación lineal

$2l = 82 - 18$

$2l = 64$

$l = \frac{64}{2}$

$l = 32$

Por lo tanto, la medida de cada lado del terreno es de *32 metros*

También las letras se usan para **generalizar** una situación, comúnmente la letra recibe el nombre de **variable**, el caso más común de estas generalizaciones los podemos encontrar en las diversas fórmulas tanto de Geometría como de Física, es decir, se convierten en modelos matemáticos que pueden obtener diferentes valores de acuerdo con los otros valores dados.

Ejemplo:

Para calcular la distancia que recorrió un ciclista, es necesario conocer la velocidad y el tiempo, si el ciclista mantiene una velocidad constante durante un cierto tiempo entonces se puede usar el siguiente modelo (fórmula)

$$d = v * t$$

Donde d es la distancia, v la velocidad y t el tiempo.

Calcula la distancia recorrida que hizo el ciclista considerando que mantuvo una velocidad promedio de 30 kilómetros por hora.

a) En 1 hora
b) En 1.5 horas
c) En 2 horas

Si $d = v * t$ entonces la distancia recorrida es:

a) $d = (30)(1) = 30\ km$
b) $d = (30)(1.5) = 45\ km$
c) $d = (30)(2) = 60\ km$

Las situaciones anteriores contienen operaciones, números y letras que son área de estudio del algebra. Gracias al uso de letras, es posible resolver problemas matemáticos o plantear modelos que de otra manera no se podría realizar.

Para saber más

Uso de letras

Para practicar

Por promoción, los teléfonos celulares tienen un 15% de descuento y si pagas en efectivo se hace un 10% adicional sobre el precio ya rebajado. Por ejemplo, si un celular tiene un precio de $3000.00 pesos, entonces, si le hacemos el 15% de descuento y luego le aplicamos el 10% del precio ya rebajado, el costo final del celular se muestra en la siguiente tabla.

Costo del teléfono	$3000.00
Descuento del 15%	$450.00
Subtotal	$2550.00
Descuento del 10% pago efectivo	$255.00
Total a pagar con descuento	**$2295.00**

a) Estas interesado en un teléfono celular que cuesta $4 900.00 pesos, calcula el precio que tendrías que pagar si lo compras en efectivo.

Costo del teléfono	$4 900.00
Descuento del 15%	
Subtotal	

Descuento del 10% pago efectivo	
Total a pagar con descuento	

b) Supón que quieres comprar un teléfono y tienes ahorrado $6,000.00 ¿Cuál es el precio del teléfono más caro que puedes comprar, si pagas en efectivo?

Costo del teléfono	
Descuento del 15%	
Subtotal	
Descuento del 10% pago efectivo	
Total a pagar con descuento	$6 000.00

c) Propón un método general para calcular el importe con descuento que debe pagarse en efectivo por cualquier costo de teléfono celular

Veamos ahora la definición de Álgebra

Álgebra:
Parte de las matemáticas que trata de la cantidad en general, representándola por medio de letras u otros signos.

Antes de iniciar con el estudio del álgebra es necesario conocer los elementos que la conforman.

Notación algebraica

Los **números** son las cantidades conocidas y determinadas, cuando va junto a una letra se le nombra **coeficiente** y cuando están solas se les llama constantes.

Las **letras** llamadas **literales** se usan para representar cantidades conocidas y desconocidas y es la principal diferencia con la aritmética.
Las primeras letras del alfabeto: $a, b, c, d, \ldots$ se les asigna a cantidades conocidas y se les llama **constantes**.
Las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z se les asigna a cantidades desconocidas y se llaman **variables o incógnitas**.

Los signos usados en álgebra son de tres tipos:

Signos de operación:

Suma, resta, multiplicación, división, potencia, raíz.

Signos de agrupación

Los paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }. El orden de estos signos son de la siguiente forma { [( )] }

Signos de relación

Se emplean estos signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades.

Los principales son:

=, que se lee *igual a.* Así, a=b se lee: "a igual a b".

>, que se lee *mayor que*. Así, x > m se lee: "x mayor que m".

<, que se lee *menor que*. Así, c < b se lee: "c menor que b ".

A continuación, se presentan algunos ejemplos

a) $2x + 3 = 9$
b) $3(x - 5) + 7x^2$
c) $(4m - 9)(m + 3) < (2m - 7)^2$
d) $2 - \{-3[4y - 5(2 + 3y) - 8] - 4y\}$

Usos de las literales

En matemáticas se usa generalmente los símbolos literales para representar las variables. En los cursos de álgebra elemental, aparecen esencialmente tres usos de la variable: la incógnita específica, el número general y las variables en relación funcional.

A partir de ahora se usarán las letras para denotar un valor o un conjunto de valores por lo que será necesario que te familiarices con los conceptos algebraicos, así como su uso y operación en diferentes situaciones; la importancia de comprenderlos y dominar los procesos te ayudará a poder resolver situaciones contextuales.

Veamos el siguiente ejemplo:

a) ¿Cabe lo mismo en una caja de base cuadrada de 8 cm de lado, por 10cm de altura, que en otro con la mitad de la altura y el doble de la longitud de la base?

Sin hacer ningún cálculo ¿consideras que tendrán el mismo volumen las dos cajas?

Para resolver este ejercicio es necesario usar la fórmula de volumen de un prisma rectangular

$$Vólumen = \text{Área de la base x altura}$$

Si pasamos las palabras a símbolos matemáticos

$$V = A \times a$$

Donde:

V: Volumen   A: área de la base   a: altura

Como la base es cuadrada podemos sustituir la letra A por lo que vale el área de un cuadrado

$$A = l^2$$

Así la fórmula de volumen queda expresada como

$$V = l^2 \times a$$

Para el inciso a)

Caja 1: lado de la base 8 cm y altura 10 cm

$$V_1 = (8)^2 \times 10 = 64 \times 10 = 640 \text{ cm}^3$$

Caja 2: mitad de la altura de la caja 1, por lo que $a = 5$

doble de la longitud de la base de la caja 1, por lo que $l = 16$

$$V_2 = (16)^2 \times 5 = 256 \times 5 = 1280 \text{ cm}^3$$

Como se puede observar de los resultados, el volumen de la caja dos es el doble del volumen de la caja 1. ¿esperabas que sucedieras eso?

V_2 es el doble del V_1 volumen de la caja 2 es el doble del volumen de la caja1

b) La relación anterior debe aplicar para cualquier valor que tome la base y la altura, por lo que se puede demostrar de la siguiente manera:

Si la caja 1 tiene de volumen $V_1 = {l_1}^2 \times a_1$ y la caja 2 tiene de volumen $V_2 = {l_2}^2 \times a_2$

Además:

$l_2 = 2l_1$ el lado de la caja 2 es el doble del lado de la base de la caja 1

$a_2 = \frac{1}{2}a_1$ la altura de la caja 2 es la mitad de la altura de la caja 1

Así si el volumen de la caja 2 está dada por:

$$V_2 = {l_2}^2 \times a_2$$

Sustituyendo l_2 y a_2 se tiene:

$$V_2 = (2l_1)^2 \times \left(\frac{1}{2}a_1\right)$$

$V_2 = 4{l_1}^2 \times \frac{1}{2}a_1$ Multiplicando los coeficientes $4 \times \frac{1}{2} = 2$

$V_2 = 2{l_1}^2 \times a_1$ agrupando el 2

$V_2 = 2({l_1}^2 \times a_1)$ Como $({l_1}^2 \times a_1)$ es el volumen de la caja 1

Entonces se tiene que

$$V_2 = 2V_1$$

Como habrás notado ene l inciso b se hizo uso de variables para determinar que es posible que siempre el volumen de la caja 2 será el doble del volumen de la caja 1

Expresión algebraica

> **Expresión algebraica**
>
> Es la combinación de números reales, letras (literales) y signos de operación y/o agrupación.

Ejemplos de expresiones algebraicas

a) $-7xy^4z^2$

b) $2x + 3$

c) $3a - 2b + 8$

d) $\frac{1}{2}x^2y + 8xy - 6y^3 - 2$

e) $3m^3n^3 - m^2n^2 + 11mn$

f) $2(d + 3f) - \frac{5g}{4}$

Cada expresión algebraica consta de **uno o más términos**, puedes identificar un término, ya que está separado por un signo de + o un signo de −

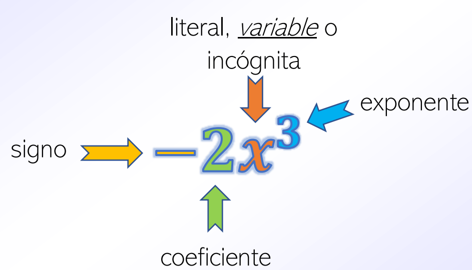
$\underbrace{3m^3n^3}_{1^{er}\text{ término}}\ \underbrace{- m^2n^2}_{2^{\circ}\text{ término}}\ \underbrace{+ 11mn}_{3^{er}\text{ término}}$ cada término está separado por un signo de + o −

$\underbrace{2x}_{1^{\circ}}\ \underbrace{+ 3}_{2^{\circ}}$

$\underbrace{-7wx^2y^4z^2}_{1^{\circ}}$ en este ejemplo, solo hay un solo término

$\underbrace{2r^4}_{1^{\circ}}\ \underbrace{- 5r^3}_{2^{\circ}}\ \underbrace{+ 7r^2}_{3^{\circ}}\ \underbrace{+ 9r}_{4^{\circ}}\ \underbrace{- 10}_{5^{\circ}}$

Cada término está formado por cuatro partes.



> Puede ser que algún término algebraico no tenga signo o coeficiente (número) esto no significa que no exista, sino que el signo es **positivo** y el coeficiente **vale 1** .

Ejemplos:

x

Signo:+
Coeficiente: 1
Literal o variable: x
Exponente:1

mp^4

Signo:+
Coeficiente: 1
Literal(es) o variable(s): m, p
Exponente:$1, 4$

Completa la tabla de acuerdo con lo que se te pide

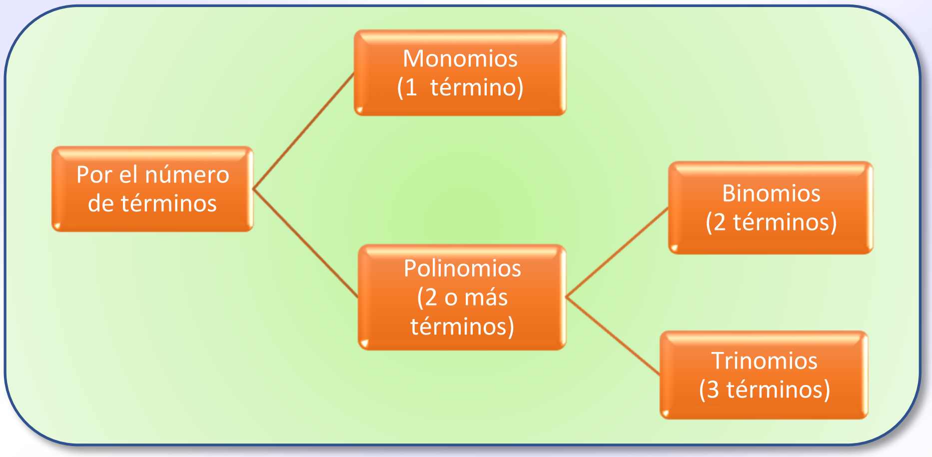
Término	signo	coeficiente	literal(es)	exponente(s)
$\boldsymbol{8xy^5}$	$+$	8	x, y	$1, 5$
$\boldsymbol{-4y^3}$				3
$\boldsymbol{bc^3}$		1		
$\boldsymbol{-7x}$	$-$			
$\boldsymbol{\frac{1}{3}m^6}$			m	
$\boldsymbol{-z^9}$				
$\boldsymbol{\sqrt{3}p^4qr^2}$				
$\boldsymbol{-3a^5b}$				

Para saber más

Las variables

Clasificación de las expresiones algebraicas según su número de términos

De acuerdo con el número de términos las expresiones algebraicas se clasifican en:



Expresión algebraica	Nombre
$\boldsymbol{a})\ \mathbf{2x-7y+3}$	Trinomio
b) $\mathbf{5mn^3p^2q}$	Monomio
c) $\mathbf{3-x^2}$	Binomio
d) $\mathbf{9z}$	Monomio
e) $\mathbf{2u-v+3x-8y+4}$	Polinomio

Completa la tabla

Expresión algebraica	Nombre
$\boldsymbol{a})\ \mathbf{2m-n}$	
b)	monomio
c) $\mathbf{5-3x-x^2}$	
d)	polinomio de 4 términos
e) $\mathbf{2u-v+3x-8y+4}$	
f)	binomio

Ejercicio resuelto

Escritura de los polinomios

Cuando se escribe un polinomio se debe de cumplir ciertas reglas.

Si el polinomio tiene una sola literal, se debe escribir de mayor exponente a menor exponente. En caso de faltar un término solo se “salta” al siguiente término	Para $3v^2-6v^3+8v^4-v+2$ Se debe escribir $8v^4-6v^3+3v^2-v+2$
	Para $3x^6-9x^3+5x^5-4+2x$ Se debe escribir $3x^6+5x^5-9x^3+2x-4$
Si el polinomio tiene dos o más literales: 1. Las literales deben ordenarse en el orden del alfabeto.	Para $9-2nm-5n^2m-6pm$ De acuerdo con el alfabeto se escribe primero m, luego n y p $-2mn-5mn^2-6mp+9$
2. Con base a la primera letra del alfabeto los exponentes se ordenan de mayor a menor.	Para $3rs^3+2r^2s^2-5r^4s^4+3r^3s$ Se debe escribir $-5r^4s^4+3r^3s+2r^2s^2+3rs^3$

Siguiendo las reglas para escribir un polinomio reescribe los siguientes polinomios

1) $2x^3 - x^4 + x^2 - 8 + 11x$
2) $-5c^3 - 3c^4 + 4c^5 - 13 + 6c$
3) $8 - 7h^3 - 2h^6 + 9h^2 - 14h^4$
4) $5a - 7a^4 + a^7 - 23a^2 + 3a^6$
5) $4m^2n^2 - 3m^3n + 6mn^3 + 2m^4 - n^4$
6) $p^3q^4 + p^2q^2 - 12p^4q - 2pq^5 + 5p^5$
7) $2x^4y^2 - 5yx^3 - \frac{1}{3}x^2y^2 - \frac{1}{3}y^4x - 8$
8) $3vw^3 - 2w^2 - 5w^2v^3 + 7v^2w$

Términos semejantes

Para que dos o más términos algebraicos sean semejantes se debe de cumplir los dos requisitos siguientes:

Las literales son iguales

Las literales correspondientes tienen el mismo exponente

Ejemplos:

Los siguientes parejas de términos son semejantes ya que cumplen con las dos condiciones anteriores.

$3mnp^4$ y $-4mnp^4$

$\frac{2}{3}x^2$ y $4x^2$

$-21ab^3c^4$ y $-4ab^3c^4$

xy y $-5xy$

$\frac{7}{10}v^3w$ y $-6v^3w$

Reducción de términos semejantes

Si los términos son semejantes entonces se puede reducir, es decir, es posible sumarlos o restarlos, para ello solo se suma o resta el coeficiente sin afectar las literales y exponentes. Este proceso también se llama simplificación.

Ejemplos:

Reduce las siguientes expresiones algebraicas

a) $3am$ y $5am$

$3am + 5am$ Solo se suma los coeficientes y se conservan las literales

Así:

$3 + 5 = 8$

Por lo tanto:

3am + 5am = $8am$ Observa que las literales permanecen igual

b) $3xy^4, 5xy^4$ y $-7xy^4$

Como los tres términos son semejantes se reducen solo tomando los coeficientes numéricos

$3 + 5 - 7$=1

Por lo tanto:

$3xy^4 + 5xy^4 - 7xy^4 = 1xy^4$ Cuando el coeficiente es 1 no se escribe

Así la respuesta será:

xy^4

Para el siguiente ejemplo no todos los términos son semejantes, por lo que solo se suman (o restan) los términos que si lo son y el término que no es semejante, se escribe igual.

c) $-pq^3, 7p^3q, -4pq^3$ y $10pq^3$

Se identifica que el término $7p^3q$ no es semejante a los otros, por lo que este no se sumará ni restará.

Sumando los otros términos

$-pq^3,\ -4pq^3$ y $10pq^3$

Sumando y restando los coeficientes

$-1 - 4 + 10 = 5$

Así se escribe el resultado y se coloca a un lado el término que no es semejante

$5pq^3 + 7p^3q$

En el siguiente ejemplo observarás que hay dos parejas de términos semejantes por lo que tendrás que realizar las operaciones por separado para reducirlos y luego escribir el resultado.

d) $3x - 2y - 4y + 7x$

Primero separamos por término semejante

$3x + 7x$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $-2y - 4y$

Ahora se suma o resta los coeficientes

$3x + 7x = 10x$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $-2y - 4y = -6y$

Finalmente se juntan los dos términos resultantes

$$10x - 6y$$

e) $3mn^2,\ 5m^2n,\ m^2n^2, -9mn^2, -4m^2n^2,\ 6mn^2$

Primero separamos por término semejante

$3mn^2, 5m^2n,\ \ m^2n^2, -9mn^2, -4m^2n^2, 6mn^2$

$3mn^2 - 9mn^2 + 6mn^2$ $\qquad\qquad$ $5m^2n$ $\qquad\qquad$ $m^2n^2 - 4m^2n^2$

Sumando o restando los términos semejantes en caso de ser posible

$3 - 9 + 6 = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1 - 4 = -3$

$0mn^2$ $\qquad\qquad$ $5m^2n$ $\qquad\qquad$ $-3m^2n^2$

Así la reducción de términos semejantes queda.

$$5m^2n - 3m^2n^2$$

Si al sumar o restar el resultado es 0 (cero), no se escribe ese término

Para saber más

Reducción de términos semejantes

Reducción de términos semejantes 2

Manos a la obra

Reduce las siguientes expresiones algebraicas

1) $5x - 9x$
2) $2ax^3 + 8ax^3$
3) $-3mn + 5mn - 8mn$
4) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x$
5) $5k^3 + 8k^3 - 5k^3 + k^3$
6) $2gf^2 - 6gf - 3gf^2 - 4gf$

7) $-3r + 5r^2 + r^2 - 6r - 2r$

8) $2ac^3 + a^3c - 3a^3c - 2ac^3 + 12ac^3$

9) $3uv + 2u - 6uv - 7v + 8v - 4u$

10) $\frac{3}{4}xy - 2x^2 + \frac{1}{2}xy - 5xy + 7x^2 - x^2$

11) $3np + 5mp - 2np - 4m + 5np - 3m$

12) $-2a^2b - 5ab^2 - ab^2 + 4a^2b^2 - 5ab^2 - 3a^2b + a^2b^2$

Evaluando expresiones algebraicas

Evaluar una expresión algebraica se obtiene al sustituir a las literales o letras con sus respectivos valores numéricos y luego se realizan las operaciones indicadas.

Ejemplos:
Determina el valor numérico de las siguientes expresiones.

a) $3xy^3$; si $x = 4,\ y = 2$

Sustituimos los respectivos valores en la expresión

$3xy^3 = 3(4)(2)^3$ Por jerarquía de operaciones primero elevamos al cubo el 2

$= 3(4)(8)$

$= 96$

b) $\frac{p}{3} - 4r^2 + 3q$; si $p = 6,\ q = 5,\ r = 1$

Sustituimos los respectivos valores en la expresión y se realizan los cálculos

$$\frac{p}{2} - 4r^2 + 3q = \frac{6}{2} - 4(1)^2 + 3(5)$$

$$3 - 4(1) + 15$$

$$= 3 - 4 + 15$$

$$= 14$$

c) $\frac{(a+b)h}{2}$; si $a = 8, b = 4,\ h = 4.5$

Sustituimos los respectivos valores en la expresión y se realizan los cálculos

$$\frac{(a+b)h}{2} = \frac{(8+4)(4.5)}{2}$$

$$= \frac{(12)(4.5)}{2}$$

$$= \frac{54}{2} = 27$$

d) $\frac{1}{3}xyz$; si $x = 2,\ y = 5,\ z = 9$

Sustituimos los respectivos valores en la expresión y se realizan los cálculos

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}xyz &= \frac{1}{3}(2)(5)(9)\\ &= \frac{1}{3}(90)\\ &= 30\end{aligned}$$

e) $vt + \frac{1}{2}gt^2$; si $v = 10,\ t = 5,\ g = 32$

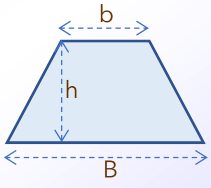
Sustituimos los respectivos valores en la expresión y se realizan los cálculos

$$\begin{aligned}vt + \frac{1}{2}gt^2 &= (10)(5) + \frac{1}{2}(32)(5)^2\\ &= 50 + \frac{1}{2}(32)(25)\\ &= 50 + \frac{1}{2}(800)\\ &= 50 + 400\\ &= 450\end{aligned}$$

La evaluación de expresiones es fundamental para determinar el valor numérico, es fundamental para el cálculo de perímetros y áreas de figuras geométricas y de volúmenes de cuerpos sólidos, además de usarse en otras ramas de las matemáticas como en Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica y en la Física en donde el uso de fórmulas es muy común.

Los ejemplos de los incisos c), d) y e) están relacionados con fórmulas que se usan en Geometría y en Física.

La expresión del ejemplo c) $\frac{(a+b)h}{2}$ es una expresión que se usa para calcular el área de un trapecio.



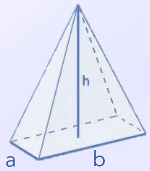
Área de un trapecio

B=Base mayor $\quad A = \frac{(B+b)h}{2}$

b= base menor

h= altura

La expresión del ejemplo d) $\frac{1}{3}xyz$ es una expresión algebraica que se usa para calcular el volumen de una pirámide de base rectangular.



Volumen de una pirámide

a=ancho de la base

b= largo de la base

h= altura $\quad \boldsymbol{V = \frac{1}{3}abh}$

La expresión del ejemplo e) $vt + \frac{1}{2}gt^2$ es la fórmula para calcular el desplazamiento vertical que puede alcanzar un proyectil durante un determinado tiempo cuando se lanza con cierta velocidad.

Desplazamiento vertical

v_{iy}=Velocidad inicial vertical

t= tiempo del recorrido $\quad \boldsymbol{y = v_{iy}t + \frac{1}{2}gt^2}$

g= aceleración gravitacional

Las expresiones algebraicas al igual que las expresiones numéricas, pueden ser utilizadas para representar situaciones reales.

Para saber más

Evaluando expresiones algebraicas

Manos a la obra

Evalúa las siguientes expresiones algebraicas

Si $b = 4, d = 1, x = 5, y = -3, z = \frac{1}{2}$

1. $b - 3d$
2. $3d + 2b + x$
3. $2x^2 - 10b + 3d$
4. $7d^3 - 4z(3 + 2b)$
5. $\frac{5y}{3} + \frac{b}{2} - 2z$
6. $2y + b^2 - 3x$
7. $(2z - 4d)^2$
8. $(b - d)(y - 4z)$
9. $3(x - y) - 2(2b + 3)$
10. $\frac{4d-3b}{2x+4y}$

Lenguaje algebraico

Para resolver problemas matemáticos, lo primero que debemos hacer es traducir el problema del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, por lo que se necesita que nos familiaricemos con los vocablos más usados.

En algebra, la expresión *un número, cualquier número* o *un número cualquiera* se representa con una letra, aunque puede ser cualquiera, se acostumbra a usar la x.

En la siguiente tabla se dan las palabras más comunes para los principales operadores

Palabra	Significado	Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
suma	Más o sumado a	La suma de dos números	$x+y$
aumentado		Un número aumentado en tres	$m+3$
excedido		Un número excedido en cinco	$p+8$
menos	Menos o restado a	Un número cualquiera menos dos	$x-2$
diferencia		La diferencia de dos números	$u-v$
disminuido		Un número disminuido en ocho	$c-8$
restado		Un número restado a otro número	$m-n$
producto	Multiplicado por	El producto de dos números	yz
cociente	Dividido por	El cociente de dos números	$\frac{s}{t}$
entre		Un número cualquiera entre once	$\frac{x}{11}$
Doble, triple, cuádruple,....	Multiplicar por 2, 3, 4…	El doble de un número El triple de un número El quíntuplo de un número	$2a$ $3d$ $5b$
Mitad, tercera parte,..	Dividir entre 2, 3, 4,…	La mitad de un número La tercera parte de un número La cuarta parte de un número	$\frac{x}{2}$ $\frac{m}{3}$ $\frac{p}{4}$
Cuadrado, cubo, cuarta potencia,…	Elevar a la segunda potencia, tercera potencia, cuarta potencia,…	El cuadrado de un número El cubo de un número La cuarta potencia de un número	y^2 r^3 u^4
Raíz cuadrada, raíz cúbica,…	La raíz cuadrada, la raíz cúbica	La raíz cuadrada de un número La raíz cúbica de un número	$\sqrt[2]{s}$ $\sqrt[3]{t}$
Semi	Dividir entre 2	La semisuma de dos números La semidiferencia de dos números	$\frac{m+n}{2}$ $\frac{m-n}{2}$

A continuación, se presentan algunos ejemplos combinando dos o más operadores y en algunos caso escribiéndolo de dos o tres formas distintas

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Un número par	$2k$
La cuarta parte de un número aumentado en diez	$\frac{x}{4}+10$
El cubo de la mitad de un número cualquiera	$\left(\frac{z}{2}\right)^3$
La mitad del cubo de un número cualquiera Un número al cubo dividido entre dos	$\frac{r^3}{2}$
El triple de un número cualquiera disminuido en tres La diferencia del triple de un número y tres	$3x-3$
El producto de tres números cualquiera	xyz
La mitad de un número aumentado en cuatro La suma de la mitad de un número y cuatro	$\frac{v}{2}+4$
El doble de la resta de dos números	$2(s-t)$
El cuadrado de un número mas el doble de dicho número La suma del cuadrado de un número y el doble del mismo número	x^2+2x
La raíz cuadrada de la diferencia de dos números	$\sqrt{x-y}$
La semisuma de dos números cualquiera elevado a la cuarta La mitad de la suma de dos números elevado a la cuarta La cuarta potencia de la semisuma de dos números cualquiera	$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$
La cuarta potencia de la suma de dos números dividido entre dos La mitad de la cuarta potencia de la suma de dos números	$\frac{(e+f)^4}{2}$
Las tres quintas partes de un número más la mitad del mismo número	$\frac{3}{5}p+\frac{1}{2}p$
La suma de dos números enteros consecutivos	$x+\ (x+1)$
La suma de los cuadrados de dos números cualquiera	c^2+d^2
El cuadrado de la suma de dos números cualquiera La suma de dos números elevado al cuadrado	$(m+n)^2$
El cubo del cociente de dos números El cociente de dos números elevado al cubo	$\left(\frac{p}{q}\right)^3$
El cubo de un número entre otro número	$\frac{y^3}{x}$
El cociente de la diferencia de dos números cualquiera y otro número	$\frac{g-h}{i}$

La siguiente actividad, aunque se realiza eligiendo un número, es una buena forma de practicar la conversión de lenguaje natural a lenguaje algebraico, generalizando el número mediante el uso de una literal (letra) como incógnita; además de que puedes sorprender a más de uno.

- Piensa en un número cualquiera x
- Súmale 3 $x+3$
- Duplica tu resultado $2(x+3)$
- Réstale 8 $2(x+3)-8$

- Obtén la mitad $\frac{2(x+3)-8}{2}$
- ¿Cuánto te da? Simplificando la expresión anterior

$$\frac{2(x+3)-8}{2}$$ Multiplique el 2 por los términos del paréntesis

$$\frac{2x+6-8}{2}$$ Reste los números del numerador

$$=\frac{2x-2}{2}$$ Separe en dos fracciones el numerador

$$=\frac{2x}{2}+\frac{-2}{2}$$ Divida cada fracción

$$=x-1$$

De acuerdo con lo obtenido, se puede observar que el resultado **SIEMPRE** será mayor en una unidad al número elegido, es decir, si el número escogido por el participante es 12, entonces su respuesta será 11. Por tanto, al decirte el participante el número que le dio, tú puedes "adivinar" su número.

Ahora tenemos un nuevo reto

- Piensa en un número a
- Multiplícalo por 5 $5a$
- Súmale 1 $5a+1$
- Duplica el resultado $2(5a+1)$
- Réstale 12 $2(5a+1)-12$
- Obtén la décima parte $\frac{2(5a+1)-12}{10}$
- Réstale tu número inicial $\frac{2(5a+1)-12}{10}-a$
- Tu resultado debe ser $\mathbf{-1}$

Simplificando la expresión anterior

$$\frac{2(5a+1)-12}{10}-a$$ Multiplique el binomio del paréntesis por 2

$$=\frac{10a+2-12}{10}-a$$ Reste los números del numerador

$$= \frac{10a - 10}{10} - a$$ Separe en dos fracciones el numerador

$$= \frac{10a}{10} - \frac{10}{10} - a$$ Divida cada fracción entre 10

$$= a - 1 - a$$ Reste términos semejantes

$$= -1$$

Se ha comprobado que sin importar el número elegido el resultado siempre será -1

Para saber más

PruébaT Lenguaje algebraico

Manos a la obra

I. Relaciona la expresión algebraica de la izquierda con la columna de la derecha escrito en lenguaje común escribiendo dentro del paréntesis la letra que corresponda.

a) $x^3 + 5x$	( ) El triple de un número aumentado en cinco
b) c^2d	( ) El doble del producto de dos números
c) $\sqrt{u} + \sqrt{v}$	( ) El cubo de un número más el quíntuplo del mismo número
d) $2pq$	( ) El cuadrado de un número por otro número
e) $\sqrt{a+b}$	( ) El doble de la diferencia de dos números cualquiera
f) $3x + 5$	( ) La suma de las raíces cuadradas de dos números
g) $2(m - n)$	( ) La raíz cuadrada de la suma de dos números
h) $2g - 2$	( ) El doble de un número disminuido en 2

II. Escribe en lenguaje común o en lenguaje algebraico para completar la tabla.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Diferencia del cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número	
	$x^3 - y^3$
La cuarta parte del producto de dos números	
	$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$
La raíz cúbica de la suma de dos números cualquiera	

Las dos terceras partes de un número, más el triple del mismo número	
	$2u + 3v$
La semisuma de tres números cualquiera	
	$\frac{n}{5} - 2n$
El cuadrado del cociente de dos números	
	$4(x + y)$
La quinta parte de un número disminuido en nueve	
	$\sqrt{r^2 + s^2}$
La raíz cúbica del producto de dos números cualquiera	
Un número más el doble de su consecutivo	
	$d^3 - 3e$
	$5z^2$
El cuadrado de la diferencia de dos números cualquiera entre otro número	
	$\frac{1}{2}f + 3f$
	$\frac{k}{k-1}$

III. Generaliza las siguientes indicaciones usando una literal y resuelve la expresión para comprobarlo.

1) Realiza:
   - Piensa en un número
   - Súmale 5
   - Duplica el resultado
   - A lo que quedo réstale 4
   - Al resultado sácale la mitad
   - Por último, réstale el número que pensaste
   - El resultado es 3

2) Realiza:

- Piensa un número
- Triplica el número
- Ahora súmale 14
- Al resultado súmale el número que pensaste
- A lo que quedó réstale 2
- Al resultado sácale la cuarta parte
- A lo que quedó réstale 3
- El resultado es el número que pensaste.

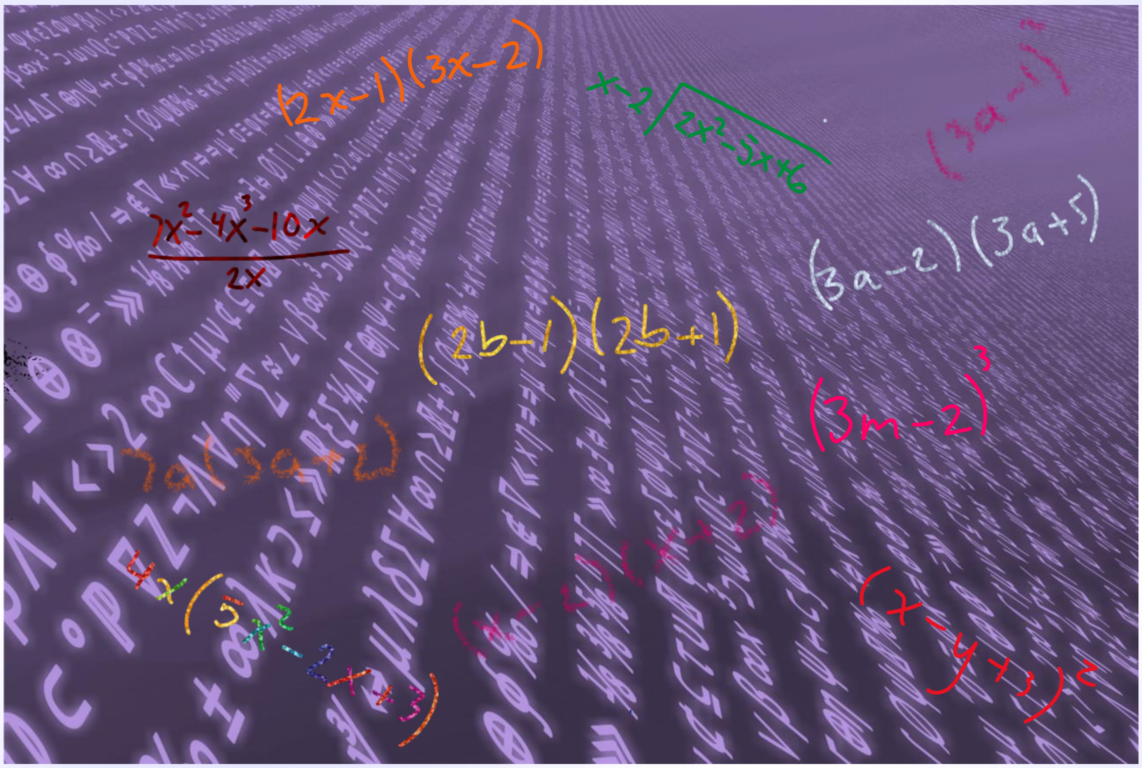
IV. En Chedraui durante cinco días han puesto en oferta las playeras de distintas marcas con la siguiente etiqueta. Si una playera tiene un precio de $220.00 pesos

a) ¿Cuál será el precio con el descuento?
b) Escribe una expresión algebraica que te permita calcular el precio de cualquier playera que tenga esta etiqueta.
c) Si pagaste por una playera $115.00 pesos. Calcula el precio de la playera sin descuento.

Evaluando tus aprendizajes

Realiza las siguientes autoevaluaciones

II. REALIZAS OPERACIONES ALGEBRAICAS



APRENDIZAJES ESPERADOS

- Transitan del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico.
- Expresan de forma coloquial y escrita fenómenos de su vida cotidiana con base en prácticas como: simplificar, sintetizar, expresar, verbalizar, relacionar magnitudes, generalizar patrones, representar mediante símbolos, comunicar ideas, entre otras.
- Interpretan y expresan algebraicamente propiedades de fenómenos de su entorno cotidiano.

Los polinomios y sus operaciones tienen aplicación en muchas áreas: en economía aparecen por ejemplo para modelizar los mercados, mostrando como los precios varían con el tiempo; o como subir o bajar el precio de un producto repercute en sus ventas; o también en el cálculo de impuestos.

En Ingeniería forestal, por ejemplo, necesitamos la geometría para calcular áreas, pero también los polinomios en problemas como calcular cuántos árboles necesitamos replantar después de haber talado una zona de un bosque.

Otros usos de los polinomios es el cálculo de la trayectoria de proyectiles (son trayectorias parabólicas), o en el cálculo de órbitas de satélites o cohetes ya que se pueden expresar de manera algebraica como polinomios de segundo grado en dos variables.

El uso de polinomios en el área de la salud es amplio, desde el cálculo de las dosis más adecuadas de un medicamento, o el peso de un paciente enfermo en función del tiempo. Por poner solo un ejemplo, si queremos modelizar el ritmo circadiano en pacientes con hipertensión, buscamos la curva que mejor se adapte a nuestros datos, en este caso un polinomio de grado cuatro, lo que nos permite optimizar las dosis del medicamento contra la hipertensión.

Fuente: Los múltiples usos prácticos de los polinomios de Matemáticas y sus fronteras http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2020/02

Valorando lo que sabes

Simplifica las siguientes expresiones algebraicas

a) $10m - 3m + 12m$

b) $2x + 3y - 4x - 5y$

c) $3x^2 - 5x + 8x^2 + 6x$

d) $3r^3s^2 - 4r^2s^3 + r^3s^2 - 4r^2s^3 - 8r^2$

e) $3x^2 - \frac{1}{3}x - 4 + 5x^2 - \frac{4}{3}x + 6$

f) $2a^2 - 5a^4 + a^2 - 8a^2 - a^4$

Operaciones algebraicas

Las operaciones básicas entre polinomios son la suma, diferencia(resta), producto (multiplicación) y cociente(división).

Suma y resta de polinomios

Existen unas reglas para sumar y restar polinomios estas son las mimas que aplican para la reducción de términos semejantes; por lo que, si se quiere sumar o restar dos polinomios, entonces se suman o restan solo los términos que son semejantes entre sí.

a) Sumar $4x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ con $7x^3 - 4x^2 - 2x - 10$

Un forma de resolverlo es ordenar un polinomio uno sobre otro, respetando los términos semejantes.

$$\begin{array}{rr} & 4x^3 - 2x^2 + 5x - 8 \\ + & \underline{7x^3 - 4x^2 - 2x - 10} \\ & 11x^3 - 6x^2 + 3x - 18 \end{array}$$

Solo se suman los coeficientes y se respeta el exponente de la literal

Aunque se puede realizar la operación como el ejemplo anterior, es más práctico hacerlo de forma horizontal, identificando los términos semejantes.

$(4x^3 - 2x^2 + 5x - 8) + (7x^3 - 4x^2 - 2x - 10)$ se recomienda marcar los términos semejantes

$= (\underline{4x^3}\ \underline{- 2x^2}\ \underline{+ 5x}\ \underline{- 8}) + (\underline{7x^3}\ \underline{- 4x^2}\ \underline{- 2x}\ \underline{- 10})$

Sumando o restando términos semejantes

$4x^3 + 7x^3 = 11x^3$ $\quad -2x^2 - 4x^2 = -6x^2$ $\quad 5x - 2x = 3x$ $\quad -8 - 10 = -18$

$= 11x^3 - 6x^2 + 3x - 18$

Tener ordenado los términos te permitirá realizar la operación de una forma más fácil y rápida.

b) Sumar $4m^3n - 2m^2n^2 + 5m - 8n + 7mn^3$ con $12mn^3 - 7m^2n^2 + 6m - 10n + 9m^3n$

Identificamos los términos semejantes

$(\underline{4m^3n}\ \underline{- 2m^2n^2}\ \underline{+ 5m}\ \underline{- 8n}\ \underline{+ 7mn^3}) + (\underline{12mn^3}\ \underline{- 7m^2n^2}\ \underline{+ 6m}\ \underline{- 10n}\ \underline{+ 9m^3n})$

Sumando o restando términos semejantes (simplificamos)

$4m^3n + 9m^3n = 13m^3n$ $\quad -2m^2n^2 - 7m^2n^2 = -9m^2n^2$

$5m + 6m = 11m$ $\quad -8n - 10n = -18n$ $\quad 7mn^3 + 12mn^3$

$= 13m^3n - 9m^2n^2 + 11m - 18n + 19mn^3$

Ordenando de mayor a menor exponente con respecto a m

$$= 13m^3n - 9m^2n^2 + 11m + 19mn^3 - 18n$$

c) ¿Cuál es el resultado de sumar $3k - 5k^3 + 7;\ k^2 + 8k - 7; 9k^2 - 6k^3 - 5k + 3$?

Identificamos los términos semejantes

$$(3k - 5k^3 + 7) + (k^2 + 8k - 7) + (9k^2 - 6k^3 - 5k + 3)$$

Sumando o restando términos semejantes (simplificamos)

$= 3k + 8k = 11k \qquad -5k^3 - 6k^3 = -11k^3 \qquad 7 - 7 + 3 = 3 \qquad k^2 + 9k^2 = 10k^2$

Ordenando de mayor a menor exponente

$$= -11k^3 + 10k^2 + 11k + 3$$

d) $\left(\frac{1}{4}x^2 - 3xy + \frac{2}{3}y^2 + 8\right) + \left(\frac{3}{4}x^2 - 2xy + \frac{1}{6}y^2 - 6\right)$

Identificando los términos semejantes

$$\left(\frac{1}{4}x^2 - 3xy + \frac{2}{3}y^2 + 8\right) + \left(\frac{3}{4}x^2 - 2xy + \frac{1}{6}y^2 - 6\right)$$

Sumando o restando términos semejantes

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{4}{4}x^2 = x^2$ Como se tiene el mismo denominador solo se suman los numeradores

$-3xy - 2xy = -5xy$

$$\frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{6}y^2 = \frac{12y^2 + 3y^2}{18} = \frac{15y^2}{18} = \frac{5}{6}y^2$$

$8 - 6 = 2$

Ordenando de mayor a menor exponente con respecto a x

$$x^2 - 5xy + \frac{5}{6}y^2 + 2$$

e) $(3x^3 + 2x^2 + 7x - 11) - (6x^3 - x^2 - 5x + 10)$

Primero le cambiamos de signo a todos los términos del segundo polinomio (si tiene signo + se escribe – y viceversa)

$3x^3 + 2x^2 + 7x - 11 - 6x^3 + x^2 + 5x - 10$

Identificamos los términos semejantes

$3x^3 + 2x^2 + 7x - 11 - 6x^3 + x^2 + 5x - 10$

Sumamos o restamos los términos semejantes

$$-3x^3 + 3x^2 + 12x - 21$$

f) $(2s^3t - 4s^2t^2 + 7s^4 - st^3 + 9t^4) - (-7st^3 + 7s^2t^2 - 12s^4 - 3st^3 + 5t^4)$

Le cambiamos de signo a todos los términos del segundo polinomio

$$2s^3t - 4s^2t^2 + 7s^4 - st^3 + 9t^4 + 7st^3 - 7s^2t^2 + 12s^4 + 3st^3 - 5t^4$$

Identificamos los términos semejantes

$$2s^3t - 4s^2t^2 + 7s^4 - st^3 + 9t^4 + 7st^3 - 7s^2t^2 + 12s^4 + 3s^3t - 5t^4$$

Sumamos o restamos los términos semejantes y ordenamos con base a la literal s

$$19s^4 + 5s^3t - 11s^2t^2 + 6st^3 + 4t^4$$

g) Restar $(3 - m^4n^2 - 5n^6 + 7m^2n)$ $\;de\;$ $(m^2n + 7 - 2m^4n^2)$

Se debe primero cambiar el orden de los polinomios para realizar la resta correctamente

$$(m^2n + 7 - 2m^4n^2) - (3 - m^4n^2 - 5n^6 + 7m^2n)$$

Le cambiamos de signo a todos los términos del segundo polinomio

$$m^2n + 7 - 2m^4n^2 - 3 + m^4n^2 + 5n^6 - 7m^2n$$

Identificamos los términos semejantes

$$m^2n + 7 - 2m^4n^2 - 3 + m^4n^2 + 5n^6 - 7m^2n$$

Sumamos o restamos los términos semejantes y ordenamos con base a la literal m

$$-m^4n^2 - 6m^2n + 5n^6 + 4$$

h) Restar $(\frac{1}{4}uv - 2u^3v^2 + 5uv^4 + \frac{2}{5}u^2v)$ $\;de\;$ $(\frac{1}{2}u^2v + 7uv - 2u^3v^2 + uv^2)$

Se debe primero cambiar el orden de los polinomios para realizar la resta correctamente

$$\left(\frac{1}{2}u^2v + 7uv - 2u^3v^2 + uv^2\right) - \left(\frac{1}{4}uv - 2u^3v^2 + 5uv^4 + \frac{2}{5}u^2v\right)$$

Le cambiamos de signo a todos los términos del segundo polinomio

$$\frac{1}{2}u^2v + 7uv - 2u^3v^2 + uv^2 - \frac{1}{4}uv + 2u^3v^2 - 5uv^4 - \frac{2}{5}u^2v$$

Identificamos los términos semejantes

$$\frac{1}{2}u^2v + 7uv - 2u^3v^2 + uv^2 - \frac{1}{4}uv + 2u^3v^2 - 5uv^4 - \frac{2}{5}u^2v$$

Sumamos o restamos los términos semejantes y ordenamos con base a la literal u

$$= -2u^3v^2 + 2u^3v^2 + \frac{1}{2}u^2v - \frac{2}{5}u^2v - 5uv^4 + uv^2 + 7uv - \frac{1}{4}uv$$

$$= \frac{1}{10}u^2v - 5uv^4 + uv^2 + \frac{27}{4}uv$$

i) $(2x^3 - 5x + x^4 - 7) - (3x^2 - 3x^3 + 5x^4 + 8) + (7x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x)$

Le cambiamos de signo al polinomio que tiene signo menos para que se pueda realizar como una suma, para este ejemplo es el segundo polinomio.

$$2x^3 - 5x + x^4 - 7 - 3x^2 + 3x^3 - 5x^4 - 8 + 7x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x$$

Identificamos los términos semejantes

$$2x^3 - 5x + x^4 - 7 - 3x^2 + 3x^3 - 5x^4 - 8 + 7x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x$$

Sumamos o restamos los términos semejantes (simplificamos)

$$2x^3 + 3x^3 - 6x^3 = -x^3 \qquad -5x + x = -4x \qquad x^4 - 5x^4 + 7x^4 = 3x^4$$

$$-7 - 8 = -15 \qquad -3x^2 - 2x^2 = -5x^2$$

Por último, ordenamos de mayor a menor exponente.

$$3x^4 - x^3 - 5x^2 - 4x - 15$$

Para saber más

Suma y resta de polinomios 1

Suma y resta de polinomios 2

Para practicar

I. Realiza las siguientes sumas o restas de polinomios.

1) $(8x^2 - 2x + 1) - (3x^2 + 5x - 8) =$

2) $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1) - (x^2 + 1 - 3x) =$

3) $(7x^4 - 5x^5 + 4x^2 - 7) + (x^3 - 3x^2 - 5 + x) - (-3x^4 + 5 - 8x + 2x^3) =$

4) $\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + 31x^2 + 12 + x\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}x^2 + 2x^3 + 3x\right) - \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + x^2\right) =$

5) $(-5z + 2y) - (2z - 5y - 7x - 1) + (-3z - 4y - 9x) - (-4y + 8x - 5) =$

6) $(xy^2 - 3x^2 - y^2 + x^2y) - (x^2y + 5x^2) + (3xy^2 - y^2 - 5x^2) =$

II. Dados los polinomios

$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5,$ $\quad Q(x) = -2x^2 + 2 + 3x^5$ $\quad R(x) = x^3 - x^5 + 3x^2,$

Calcula:

1) $P(x) + Q(x)$

2) $P(x) - Q(x)$

3) $P(x) + Q(x) + R(x)$

4) $P(x) - Q(x) - R(x)$

5) $R(x) + P(x) - Q(x)$

6) $P(x) - R(x) + Q(x)$

Multiplicación de polinomios

Para la multiplicación de polinomios es necesario que se aplique la ley de los exponentes para la multiplicación.

Si se tiene la misma base (literales), entonces los exponentes se suman

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Ejemplos:

a) $x \cdot x = x^{1+1} = x^2$

b) $a^4 \cdot a^5 = a^{4+5} = a^9$

c) $m^5n^2 \cdot m^4n^5 = (m^5m^4)(n^2n^5) = m^{5+4}n^{2+5} = m^9n^7$

d) $x^3yz^3 \cdot x^2y^3z^4 = x^{3+2}y^{1+3}z^{3+4} = x^5y^4z^7$

Monomios por monomios

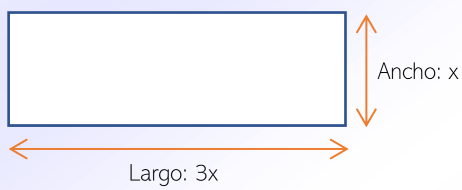
Para realizar productos de monomios primero se multiplican los coeficientes y después las bases.

Una hoja de papel rectangular debe cumplir que el largo de la base debe ser el triple de su ancho. Escribe una expresión que determine el área de la hoja.

Para representar a cualquier número positivo que sea el ancho usamos la letra x

Ancho: x

Largo de la base: $3x$ ya que es el triple del ancho base



De acuerdo con la fórmula del área de un rectángulo

Área=largo x ancho

Por lo que el área de esta hoja para cualquier número positivo será:

$$A = (3x)(x) = 3x^2$$

Calcula el área de la hoja de papel dadas las siguientes medidas de su ancho

Ancho	Área A=$3x^2$
3cm	$A = 3(3)^2 = 3(9) = 27$cm^2
5cm	$A = 3(5)^2 = 3(25) = 75$ cm^2

10cm	$A = 3(10)^2 = 3(100) = 300$ cm^2
15cm	$A = 3(15)^2 = 3(225) = 675$ cm^2

Realiza los siguientes productos con monomios

a) $(3d^3e^5)(5d^2e) =$

Se efectúa el producto de los coeficientes y se suman los exponentes de la misma literal, es decir, los exponentes de las "d" y los de la "e"

$(3)(5)d^{3+2}e^{5+1} = 15d^5e^6$ cuando la literal no tiene exponente se escribe 1

b) $(7xy^4z^6)(-4x^2yz) =$

Se efectúa el producto de los coeficientes y se suman los exponentes de la misma literal

$(7)(-4)x^{1+2}y^{4+1}z^{6+1} = -28x^3y^5z^7$

c) $\left(\frac{1}{4}p^5qr^5\right)(8q^3r^6) =$

Se efectúa el producto de los coeficientes y se suman los exponentes de la misma literal

$\left(\frac{1}{4}\right)(8)p^5q^{1+3}r^{5+6} = 2p^5q^4r^{11}$ la base p no se repite, por lo que se pasa con el mismo exponente

d) $(5m^5n^4p^6)(5m^3n^7p)(m^5p^2)$

Se efectúa el producto de los tres coeficientes y se suman los exponentes de la misma literal

$(5)(5)(1)m^{5+3+5}n^{4+7}p^{6+1+2} = 25m^{13}n^{11}p^9$

e) $(\frac{2}{3}s^5t^2r^2)(6s^3t^4r)(\frac{1}{5}t^5r^4)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{1}{5}\right)s^{5+3}t^{2+4+5}r^{2+1+4}$$

$$= \frac{12}{15}s^8t^{11}r^7$$

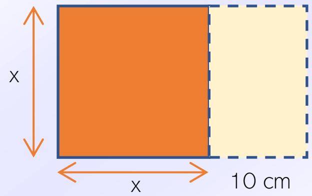
Simplificando la fracción

$$\frac{4}{5}s^8t^{11}r^7$$

Monomios por polinomios

Se multiplica cada término del polinomio por el monomio

Si un cuadrado de medida desconocida x, se incrementa un lado en 10 cm. ¿Cuál será la nueva área? ¿Qué figura se formará?



La nueva figura será un rectángulo

La base medirá: $x + 10$

La altura medirá: x

Usando la fórmula del área de un rectángulo

$$A = x(x + 10) = x^2 + 10x$$

Realiza los siguientes productos

a) $2x^3(4x^6 + 5x)$

Se multiplica el monomio por cada término del polinomio

$$2x^3(4x^6 + 5x) = 2x^3(4x^6) + 2x^3(5x)$$

Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de la misma base

$$= (2)(4)x^{3+6} + (2)(5)x^{3+1}$$

$$= 8x^9 + 10x^4$$

b) $-5x^3y(3x^3y^2 - 7xy^4)$

Se multiplica el monomio por cada término del polinomio

$$-5x^3y(3x^3y^2 - 7xy^4) = -5x^3y(3x^3y^2) - 5x^3y(-7xy^4)$$

Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de la misma base

$$(-5)(3)x^{3+3}y^{1+2} + (-5)(-7)x^{3+1}y^{2+4}$$

$$= -15x^6y^3 + 35x^4y^6$$

c) $\frac{1}{2}ab^3c^2\left(\frac{2}{5}a^3b - 4a^2b^2c^4 + \frac{3}{4}b^3c^5\right)$

Se multiplica el monomio por cada término del polinomio

$$\frac{1}{2}ab^3c^2\left(\frac{2}{5}a^3b - 4a^2b^2c^4 + \frac{3}{4}b^3c^5\right)$$

$$= \frac{1}{2}ab^3c^2\left(\frac{2}{5}a^3b\right) + \frac{1}{2}ab^3c^2(-4a^2b^2c^4) + \frac{1}{2}ab^3c^2\left(\frac{3}{4}b^3c^5\right)$$

Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de la misma base

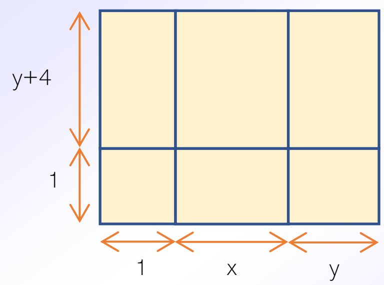
$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)a^{1+3}b^{3+1}c^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(-4)a^{1+2}b^{3+2}c^{2+4} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)ab^{3+3}c^{2+5}$$

$$=\frac{1}{5}a^4b^4c^2-2a^3b^5c^6+\frac{3}{8}ab^6c^7$$

Polinomios por polinomios

Se multiplica cada termino del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

Calcula el área de la siguiente figura



El área de un rectángulo está dada por:

Área (A)= ancho (a) x largo (l)

$$a=1+y+4=y+5$$

$$l=1+x+y$$

$$A=(y+5)(1+x+y)$$ Multiplicando los polinomios

$$A=y+xy+y^2+5+5x+5y$$

Para determinar el número de términos que se obtendrá al realizar el producto de dos polinomios se debe multiplicar el:

(número de términos del primer polinomio) x (número de términos del segundo polinomio)

Ejemplos: Determina el número de polinomios que se obtiene en cada producto

	Términos del 1er polinomio	Términos del 2° polinomio	Total del términos
$(2y-5)(3+2z-y)$	2	3	2x3=6
$(6m^3-8m^2n)\,(5n^2-9mn)$	2	2	2x2=4
$(6x^3-8x^2+9x-2)\,(5x^2-9x+1)$	4	3	4x3=12
$(5a+6b)\,(3a^3-8a^2b^2-9ab^3+b)$	2	4	2x4=8

Realiza los siguientes productos con polinomios

a) $(2x^4-3x^2)\,(x^2-6x)$

La cantidad de términos a obtener será de $(2)(2)=4$

Primero multiplicamos el primer término del primer polinomio por los dos términos del segundo polinomio

$(2x^4 - 3x^2)\,(x^2 - 6x) = 2x^6 - 12x^5$

Ahora multiplicamos el segundo término del primer polinomio por los dos términos del segundo polinomio

$(2x^4 - 3x^2)\,(x^2 - 6x) = -3x^4 + 18x^3$

Se tiene el siguiente resultado

$(2x^4 - 3x^2)\,(x^2 - 6x) = 2x^6 - 12x^5 - 3x^4 + 18x^3$ (se obtuvo 4 términos)

Antes de concluir tenemos que reducir, si es posible la expresión buscando términos semejantes.

En la expresión anterior no hay términos semejantes, por lo que el resultado de la multiplicación es:

$2x^6 - 12x^5 - 3x^4 + 18x^3$

b) $(2p^3 - 2p^2 + 5)\,(3p^2 - 6p)$

La cantidad de términos a obtener será de (3)(2) = 6

Primero multiplicamos el primer término del primer polinomio por los dos términos del segundo polinomio

$(2p^3 - 2p^2 + 5)\,(3p^2 - 6p) = 6p^5 - 12p^4$

Ahora multiplicamos el segundo término del primer polinomio por los dos términos del segundo polinomio

$(2p^3 - 2p^2 + 5)\,(3p^2 - 6p) = -6p^4 + 12p^3$

Multiplicamos el tercer término del primer polinomio por los dos términos del segundo polinomio

$(2p^3 - 2p^2 + 5)\,(3p^2 - 6p) = 15p^2 - 30p$

Se tiene el siguiente resultado

$(2p^3 - 2p^2 + 5)\,(3p^2 - 6p) = 6p^5 - 12p^4 - 6p^4 + 12p^3 + 15p^2 - 30p$

Sumamos términos semejantes $-12p^4 - 6p^4$ y se obtiene el resultado final

$6p^5 - 18p^4 + 12p^3 + 15p^2 - 30p$

c) $(2m^2n + 5mn - 3n^2)\,(4m^2n - 3mn - 5n^2)$

La cantidad de términos a obtener será de (3)(3) = 9

Primero multiplicamos el primer término del primer polinomio por los tres términos del segundo polinomio

$$(2m^2n + 5mn - 3n^2)\,(4m^2n - 3mn - 5n^2) = 8m^4n^2 - 6m^3n^2 - 10m^2n^3$$

Ahora multiplicamos el segundo término del primer polinomio por los tres términos del segundo polinomio

$$(2m^2n + 5mn - 3n^2)\,(4m^2n - 3mn - 5n^2) = 20m^3n^2 - 15m^2n^2 - 25mn^3$$

Multiplicamos el tercer término del primer polinomio por los tres términos del segundo polinomio

$$(2m^2n + 5mn - 3n^2)\,(4m^2n - 3mn - 5n^2) = -12m^2n^3 + 9mn^3 + 15n^4$$

Por lo que se tiene el siguiente resultado

$$8m^4n^2 - \underline{6m^3n^2} - \underline{10m^2n^3} + \underline{20m^3n^2} - 15m^2n^2 - \underline{25mn^3} - \underline{12m^2n^3} + \underline{9mn^3} + 15n^4$$

Sumando o restando términos semejantes se obtiene el resultado

$$8m^4n^2 + 14m^3n^2 - 22m^2n^3 - 15m^2n^2 - 16mn^3 + 15n^4$$

En los ejemplos anteriores solo se han tenido dos factores, a continuación, se muestra un ejemplo con 3 factores.
Una recomendación es multiplicar los dos primeros factores, simplificar (reducir) el resultado y multiplicar por el tercer factor.

d) $(5u^2 + 3v)\,(4v^2 - 2)(5uv + 2)$

Se toman los dos primeros factores

$$(5u^2 + 3v)\,(4v^2 - 2) = 5u^2v^2 - 10u^2 + 12v^3 - 6v$$

Como no es posible simplificar se toma igual y se multiplica por el tercer factor

$$(5u^2v^2 - 10u^2 + 12v^3 - 6v)(5uv + 2)$$

$$= 25u^3v^3 + 10u^2v^2 - 50u^3v - 20u^2 + 60uv^4 + 24v^3 - 30uv^2 - 12v$$

Como no existen términos semejantes no es posible reducir la expresión.

Para saber más

multiplicación de polinomios

PruébaT Multiplicación de polinomios

Problemas de aplicación de multiplicación de polinomios

a) Una empresa estima que la cantidad máxima de un artículo (en miles) que puede vender está dado por: $3x^2 - 2x + 10$ cuando el precio del artículo es de x pesos. Calcula el ingreso máximo que puede tener con la venta de este artículo.

Ingreso = (Precio)(Cantidad de artículos vendidos)

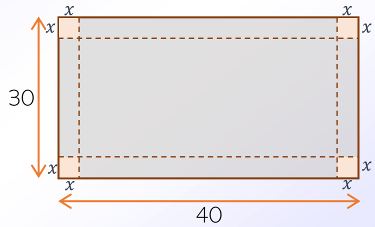
Como:

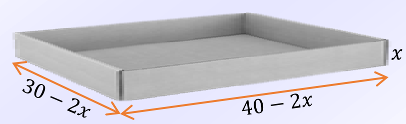
Ingreso=I precio $=x$ Cantidad de artículos vendidos= $3x^2 - 2x + 10$

$I = x(3x^2 - 2x + 10)$ Multiplicamos

$I = 3x^3 - 2x^2 + 10x$ Ingreso en miles por artículos vendidos

b) Tienes varias láminas de aluminio de 40 x 30 cm y quieres construir bandejas con distintas alturas (x) realizando cortes cuadrados en las esquinas y doblándolos como se muestra en la figura.





i) Calcula la superficie de la base de la bandeja para cualquier altura x

Para obtener la superficie o área, multiplicamos el largo por el ancho de la bandeja

Largo: $40 - 2x$

Ancho: $30 - 2x$

$(40 - 2x)(30 - 2x)$

$= 120 - 80x - 60x + 4x^2$ Simplificando términos semejantes

$= 120 - 140x + 4x^2$

ii) Calcula el Volumen de la bandeja expresado con la variable x

Para obtener el volumen de la bandeja multiplicamos (largo)(ancho) (alto)

Largo: $40 - 2x$

Ancho: $30 - 2x$

Alto: x

Volumen= $(40 - 2x)(30 - 2x)(x)$

Se multiplica primero los dos primeros factores

$= (40 - 2x)(30 - 2x) = 120 - 80x - 60x + 4x^2$

Simplificando la expresión

$$= 120 - 140x + 4x^2$$

Ahora se multiplica por el último factor que es x

$$(120 - 140x + 4x^2)(x)$$

$$= 120x - 140x^2 + 4x^3$$

Manos a la obra

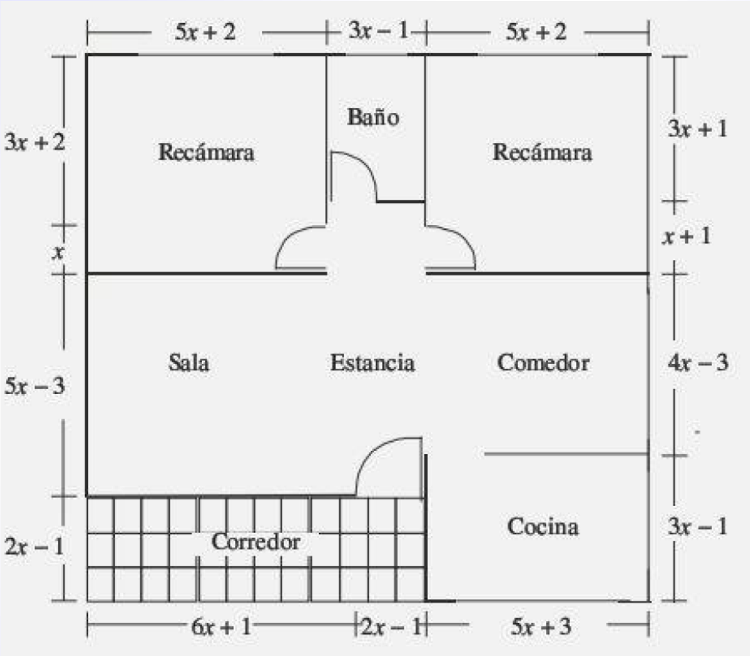
I. Realiza las siguientes multiplicaciones con polinomios

1. $(-5a^3c^2)(2a^4bc^8)$
2. $\left(-\frac{3}{5}mn\right)\left(-\frac{5}{3}m^2np\right)$
3. $\left(-\frac{6}{7}xyz\right)\left(\frac{4}{6}x^2yz^3\right)$
4. $(8ab)(-2a^3b)(3a^2bc)$
5. $(-6x^2y^7z)(-4x^5y^2)(-2xyz)$
6. $(3a^2 - 9ab)(5a^3b)$
7. $(7x^4 - 5x^2 - 3x)(xy)$
8. $(2a^3b^8 - 9x^3y^2z - 3x^6y - 7xz)$
9. $(-4xy^7z)(7x^2y^5z - 2x^4y - 5xz)$
10. $(9a^2c - 3a^5b - 2c)\ (-4ac^7)$
11. $\left(\frac{3}{4}a^5 - \frac{1}{6}b^3 - \frac{2}{3}ab\right)\left(\frac{1}{2}ab^2\right)$
12. $\left(\frac{6}{5}x^2y\right)\left(\frac{4}{5}x^4 - \frac{1}{2}y^2 + 3xy\right)$
13. $(8x - 3)(5x + 1)$
14. $(n^3 - 4)(n^3 + 6)$
15. $\left(\frac{2}{4}y - \frac{1}{6}x\right)\left(-\frac{3}{7}x - \frac{1}{3}y\right)$
16. $(m^2 - mn + n^3)(n - m)$
17. $(2a^2 - 5b^2 - ab)(7a - 3b)$
18. $\left(\frac{2}{3}a^3 - 4ab + \frac{4}{8}b^3\right)\left(\frac{3}{4}a + \frac{9}{5}b\right)$
19. $(6x - 2x^2 - 7)(5x^2 - x + 3)$
20. $(m + 2n - 9p)(n - 3p + m)$

II. Realiza los siguientes ejercicios de aplicación

1) Se desea diseñar una caja con base cuadrangular, de tal manera que la longitud de la base mida 5cm más que la altura de la caja.
   a) Realiza un dibujo de la caja
   b) Obtén un modelo matemático para el volumen de la caja.

2) Observa el siguiente plano de distribución de una casa, la cual se proyecta en un terreno rectangular.



Fuente: Algebra, Arturo Aguilar y otros. CONAMAT

Calcula

a) la superficie de la casa
b) la superficie del corredor
c) la superficie de las dos recámaras

3) Un móvil se mueve en línea recta una velocidad de $3t^2 - 4t + 1$ metros por segundo. Calcula la distancia que recorre en un tiempo de $2t + 3$ segundos. (distancia=velocidad x tiempo)

Divisiones con polinomios

Para dividir dos polinomios se debe de aplicar la ley de los exponentes para la división

Si se tiene la misma base (literales), entonces los exponentes se restan

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

a) $\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$

b) $\frac{e^7}{e^3} = e^{7-3} = e^4$

c) $\frac{c^4d^5}{cd^4} = c^{4-1}d^{5-4} = c^3d^1 = c^3d$ Como el exponente de la d es 1 no se escribe

d) $\frac{xy^4z^5}{xy^2z^2} = x^{1-1}y^{4-2}z^{5-2} = x^0y^2z^3 = y^2z^3$ Como el exponente de x es cero, no se escribe la x

e) $\frac{r^3s^7t^2}{r^2s^6} = r^{3-2}s^{7-2}t^2 = r^1s^5t^2 = rs^5t^2$

Polinomios entre monomios

Para dividir un polinomio entre monomio cada término del polinomio se divide entre el monomio.

a) Dividir $x^4 - 6x^3 + 8x^2$ entre x^2

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 8x^2}{x^2} =$$

Separamos cada término del dividendo

$$\frac{x^4}{x^2} - \frac{6x^3}{x^2} + \frac{8x^2}{x^2}$$

Dividimos cada monomio (los coeficientes se dividen si es posible y los exponentes se restan.

$= 1x^{4-2} - 6x^{3-2} + 8x^{2-2}$ Como la resta del exponente del último término es cero, no se escribe la x

$= x^2 - 6x + 8$

b) Dividir $5z^4 - 10z^3 + 30z^2 + 25z$ entre $-5z$

$$\frac{5z^4 - 10z^3 + 30z^2 + 25z}{-5z} =$$

Separamos cada término del dividendo

$$\frac{5z^4}{-5z} - \frac{10z^3}{-5z} + \frac{30z^2}{-5z} + \frac{25z}{-5z}$$

Dividimos cada monomio (los coeficientes se dividen si es posible y los exponentes se restan.

$= -1z^{4-1} + 2z^{3-1} - 6z^{2-1} - 5z^{1-1}$

$= -z^3 + 2z^2 - 6z - 5$

c) $\frac{8m^3n^3-5m^4n^2+12m^5n}{4m^3n}$

Separamos cada término del dividendo

$$\frac{8m^3n^3}{4m^3n}-\frac{5m^4n^2}{4m^3n}+\frac{12m^5n}{4m^3n}$$

Dividimos cada monomio (los coeficientes se dividen si es posible y los exponentes se restan.

$$= 2m^{3-3}n^{3-1}-\frac{5}{4}m^{4-3}n^{2-1}+3m^{5-3}n^{1-1}$$

$$= 2n^2-\frac{5}{4}mn+3m^2$$

d) $\frac{4a^{10}b^3c-18a^5bc^3-12a^3b}{6a^3b}$

Separamos cada término del dividendo

$$\frac{4a^{10}b^3c}{6a^3b}-\frac{18a^5bc^3}{6a^3b}-\frac{12a^3b}{6a^3b}$$

Dividimos cada monomio (los coeficientes se dividen si es posible y los exponentes se restan.

$$= \frac{4}{6}a^{10-3}b^{3-1}c-3a^{5-3}b^{1-1}c^3-2a^{3-3}b^{1-1}$$

$$= \frac{2}{3}a^7b^2c-3a^2-2$$

División de Polimonios entre polinomios

Antes de iniciar la división, se deberá ordenar el dividendo y el divisor y si faltase un término se escribe cero.
Por ejemplo, para el siguiente polinomio $3x^3-6x^4+8x^2-5x+4$ se debe de ordenar de mayor a menor exponente.

Así el polinomio anterior se debe de escribir

$$-6x^4+3x^3+8x^2-5x+4$$

En el siguiente polinomio faltan términos, por lo que se deben de escribir ceros en el lugar de los términos faltantes.

$$7k^6-2k^4+8k^2-10k-11$$

$$7k^6+0k^5-2k^4+0k^3+8k^2-10k-11$$

Veamos el algoritmo (procedimiento de la división de polinomios)

Aunque una división de polinomios se expresa como $\frac{P(x)}{Q(x)}$, para dividir el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$, necesitamos que el grado de $P(x)$ sea mayor o igual que el grado de $Q(x)$.

El polinomio $P(x)$ es el dividendo, $Q(x)$ es el divisor, $C(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el residuo.

Escribimos el dividiendo y el divisor como en una división de números:

$$\begin{array}{r|l} & \quad C(x) \\ \hline Q(x) & \quad P(x) \\ & \quad R(x) \end{array}$$

Para comprobar el resultado se debe cumplir la igualdad

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Ejemplos:

Realiza las siguientes divisiones de polinomios

a) $\frac{3x^3+13x^2-13x+2}{3x-2}$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x^2 + 5x - 1 \\ \hline 3x - 2 & 3x^3 + 13x^2 - 13x + 2 \\ & \underline{3x^3 - 2x^2} \\ & \quad 0 + 15x^2 - 13x \\ & \quad \underline{\quad\;\; 15x^2 - 10x} \\ & \qquad\qquad\quad -3x + 2 \\ & \qquad\qquad\quad \underline{-3x + 2} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

1. Se ordena dividendo y divisor de mayor a menor exponente

2. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor

$$\frac{3x^3}{3x} = x^2$$

3. El resultado multiplica a los dos términos del divisor $(3x - 2)$

4. Se restan los términos similares (debiéndose eliminar el primer término)

5. Se baja el siguiente término del dividendo.

6. Se repiten los pasos 2 al 5 hasta que ya no haya más términos.

Por lo tanto, el resultado de la división es $x^2 + 5x - 1$

b) $\frac{x^4+x+1}{x^2+1}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2 - 1 \\
\hline
x^2 + 0x + 1 & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 \\
 & \underline{x^4 + 0x^3 + 1x^2} \\
 & 0 + 0 - 1x^2 + x + 1 \\
 & \qquad \underline{-1x^2 + 0x - 1} \\
 & \qquad\qquad\qquad x + 2
\end{array}
$$

Se cambia de signo:
$-x^4 - 0x^3 - 1x^2$

Se cambia de signo:
$1x^2 - 0x + 1$

1. Se ordena dividendo y divisor de mayor a menor exponente en caso de que falte un término se escribe 0
2. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor
$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$
3. El resultado multiplica a los términos del divisor $(x^2 + 0x + 1)$
4. Se restan los términos similares (debiéndose eliminar el primer término)
5. Se bajan los dos siguientes términos del dividendo. Ya que el dividendo es un trinomio.
6. Se repiten los pasos 2 al 5 hasta que ya no haya más términos.

Por lo tanto, el resultado de la división es $x^2 - 1 + \frac{x+2}{x^2+1}$

c) $\frac{12x^2-5xy-2y^2}{4x+y}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x - 2y \\
\hline
4x + y & 12x^2 - 5xy - 2y^2 \\
 & \underline{12x^2 + 3xy} \\
 & \;\; 0 - 8xy - 2y^2 \\
 & \qquad \underline{-8xy - 2y^2} \\
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

1. Se ordena dividendo y divisor de mayor a menor exponente con base a la x.
2. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor
$$\frac{12x^2}{4x} = 3x$$
3. El resultado multiplica a los términos del divisor $(4x + y)$
4. Se restan los términos similares (debiéndose eliminar el primer término)
5. Se bajan los dos siguientes términos del dividendo. Ya que el dividendo es un trinomio.
6. Se repiten los pasos 2 al 5 hasta que ya no haya más términos.

Por lo tanto, el resultado de la división es $3x - 2y$

Para saber más

División de polinomios 1

PruébaT
División de polinomios 2

Para practicar

I. Realiza las siguientes divisiones con polinomios

1. $\frac{9a^6\,b^{10}}{3a^2b^3}$
2. $\frac{24b^2c^5}{-6c^3b^2}$
3. $\frac{-3x^6y^4}{38x^2y^2}$
4. $\frac{x^3y^5z}{5x^2y^4}$
5. $\frac{6x^4-12x^2}{5x^{\ 3}}$
6. $\frac{3x^2+9x^{-4}+7x^3}{3x^2}$
7. $\frac{35m^5n^2-9m^7n^3+2mn^4}{6mn^2}$
8. $\frac{27a^6b^4-39a^2b^6+a^3b^2}{2ab^4}$
9. $\frac{34x^5a^9-21x^7y^2-13x^3y}{5x^2y}$
10. $\frac{x^7-4x+9}{2+x}$
11. $\frac{x^2+10xy-8y^2}{x+5y}$
12. $\frac{m^4-15mn-26n^4}{m-3n}$
13. $\frac{n^2-4n^2+40}{n^4+6}$

Productos notables

Hay ciertos productos de polinomios que cumplen ciertas características de tal manera que se obtienen sin efectuar la multiplicación, a estos productos se les llama **productos notables.**

Estos productos reciben nombres propios:

Binomios conjugados

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Característica: Los 2 términos deben ser iguales, solo hay un cambio de signo en uno de ellos.

Antes de resolver el producto, es importante identificar si el producto es un binomio conjugado.

Identifica cuál de los siguientes productos son binomios conjugados y en caso de que no sea, explica porque no cumple.

a) $(3x-2)(3x+2)$
b) $(x^2+3y^2)(x^2-3y^2)$
c) $(2n^3+5p^4)(5p^4-2n^3)$
d) $(4s^2+5t)(4s^2-5t^2)$
e) $(\frac{1}{2}k^2+5)(-\frac{1}{2}k^2-5)$

Los productos a, b y c son binomios conjugados ya que sus términos son iguales y solo hay un cambio de signo

En el inciso a) $3x$ es el mismo en ambos factores, el primer factor tiene el término -2 y el segundo + 2. Por lo que hay un cambio de signo.

En el inciso b) x^2 es el mismo en ambos factores, el primer factor tiene el término $+3y^2$ y el segundo $-3y^2$. Por lo que hay un cambio de signo.

En el inciso c) $5p^4$ es el mismo en ambos factores, el primer factor tiene el término $2n^3$ y el segundo $-2n^3$. Por lo que hay un cambio de signo.

En el inciso d) $4s^2$ es el mismo en ambos factores, pero el segundo término no es el mismo ya que en el primer factor es $5t$ y en el segundo factor es $-5t^2$ por lo que no es un binomio conjugado.

En el inciso e) aunque los factores son iguales hay dos cambios de signo, en el primer factor se tiene $\frac{1}{2}k^2$ y en el segundo factor $-\frac{1}{2}k^2$ y $+5$ en el primer factor y -5 en el segundo factor, por lo tanto, no es un binomio conjugado.

Para obtener el resultado de un producto notable solo se eleva al cuadrado cada término y se escribe signo negativo al término que cambia de signo.

Para realizar los productos notables se debe de aplicar la ley de los exponentes para las potencias.

Si se tiene la misma base (literales), entonces los exponentes se multiplican

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

Ejemplos:

a) $(x^3)^4 = x^{3\cdot 4} = x^{12}$
b) $(c^8)^2 = x^{8\cdot 2} = x^{16}$
c) $(w)^4 = x^{1\cdot 4} = x^4$
d) $(x^2y)^5 = x^{2\cdot 5}y^{1\cdot 5} = x^{10}y^5$
e) $(ab^4d^2)^3 = a^{1\cdot 3}b^{4\cdot 3}c^{2\cdot 3} = a^3b^{12}d^6$

Ejemplo: Desarrolla los siguientes binomios conjugados.

a) $(3+x)(3-x)$

Ambos términos se elevan al cuadrado.

$(3)^2 = 9$

$(x)^2 = x^2$

Se escribe con signo negativo aquel término que cambia de signo que, para este ejemplo es la x^2.

Así: $(3+x)(3-x) = 9 - x^2$

b) $(2m-5n)(2m+5n)$

Ambos términos se elevan al cuadrado.

$(2m)^2 = 4m^2$

$(5n)^2 = 25n^2$

Se escribe con signo negativo aquel término que cambia de signo que, para este ejemplo es $25n^2$.

Así: $(2m-5n)(2m+5n) = 4m^2 - 25n^2$

c) $\left(3uv^4 - \frac{3}{4}\right)\left(3uv^4 + \frac{3}{4}\right)$

Ambos términos se elevan al cuadrado.

$(3uv^4)^2 = 9u^2v^8$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Se escribe con signo negativo aquel término que cambia de signo que, para este ejemplo es $\frac{9}{16}$

Así: $\left(3uv^4 - \frac{3}{4}\right)\left(3uv^4 + \frac{3}{4}\right) = 9u^2v^8 - \frac{9}{16}$

d) $(k^3-4l^2)(4l^2+k^3)$

Ambos términos se elevan al cuadrado.
$(k^3)^2 = 9k^6$

$(4l^2)^2 = 16l^4$

Se escribe con signo negativo aquel término que cambia de signo que, para este ejemplo es $16l^4$.

Así: $(k^3-4l^2)(4l^2+k^3) = 9k^6 - 16l^4$

e) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}\right)$

Ambos términos se elevan al cuadrado.

$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\left(\frac{2x}{3}\right)^2=\frac{4x^2}{9}$

Se escribe con signo negativo aquel término que cambia de signo que, para este ejemplo es $\frac{1}{4}$

Así: $\left(\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}\right)=\frac{4x^2}{9}-\frac{1}{4}$

Manos a la obra

I. Identifica que producto son binomios conjugados y en caso de no serlo justifícalo

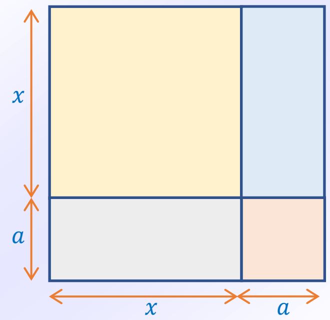
1) $(3x+z)(3x-z)$
2) $(5r^2-4s^2)(5r+4s^2)$
3) $\left(\frac{3}{5}m-\frac{2}{3}n\right)\left(-\frac{3}{5}m-\frac{2}{3}n\right)$
4) $(2p-7q^3r)(7q^3r+2p)$
5) $(a^2-4)(4-a^2)$

II. Desarrolla los siguientes productos

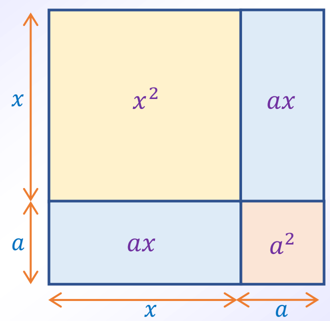
1) $(3+m)(3-n)$
2) $(2x-4)(2x+4)$
3) $(5f-4g^2)(5f+4g^2)$
4) $(3u^5+2)(3u^5-2)$
5) $\left(\frac{3}{7}x-y^3\right)\left(\frac{3}{7}x+y^3\right)$
6) $(a^2-4b)(4b+a^2)$
7) $(3u^5+2v^5)(3u^5-2v^5)$
8) $\left(\frac{2}{9}-\frac{2a}{5}\right)\left(-\frac{2}{9}-\frac{2a}{5}\right)$
9) $(p^4r-4s)(p^4r+4s)$
10) $(3m^4-4n^6)(-4n^6-3m^4)$

Binomios al cuadrado

Sea el cuadrado que se muestra en la figura siguiente



Las áreas de cada figura individual al multiplicar su largo por su ancho serán:



El área total, es la suma de todas las áreas individuales.

$$(x+a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Así:

$$\boldsymbol{(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$$

Al desarrollar un binomio al cuadrado se obtendrán siempre 3 términos

Primero: Se eleva al cuadrado el primer término

Segundo: El doble producto del primer término por el segundo

Tercero: Se eleva al cuadrado el segundo término

Ejemplos:

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado

a) $(m+5)^2$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cuadrado el primer término: $(m)^2 = m^2$

Segundo: El doble producto del primer término por el segundo: $2(m)(5) = 10m$

Tercero: Se eleva al cuadrado el segundo término: $(5)^2 = 25$

Así: $(m + 5)^2 = m^2 + 10m + 25$

b) $(3x + 2y)^2$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cuadrado el primer término: $(3x)^2 = 9x^2$

Segundo: El doble producto del primer término por el segundo: $2(3x)(2y) = 12xy$

Tercero: Se eleva al cuadrado el segundo término: $(2y)^2 = 4y^2$

Así: $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

c) $(5s - 3t)^2$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cuadrado el primer término: $(5s)^2 = 25s^2$

Segundo: El doble producto del primer término por el segundo: $2(5s)(-3t) = -30st$

Tercero: Se eleva al cuadrado el segundo término: $(-3t)^2 = 9t^2$

Así: $(5s - 3t)^2 = 25s^2 - 30st + 9t^2$

Aunque el segundo término es negativo al elevarse al cuadrado se convierte positivo

d) $(a^4 + 2bc)^2$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cuadrado el primer término: $(a^4)^2 = a^8$

Segundo: El doble producto del primer término por el segundo: $2(a^4)(2bc) = 4a^4bc$

Tercero: Se eleva al cuadrado el segundo término: $(2bc)^2 = 4b^2c^2$

Así: $(a^4 + 2bc)^2 = a^8 + 4a^4bc + 4b^2c^2$

e) $(5x^3 - 7y^2)^2$

Aplicando los pasos

Se eleva al cuadrado el primer término: $(5x^3)^2 = 25x^6$

El doble producto del primer término por el segundo: $2(5x^3)(-7y^2) = -70x^3y^2$

Se eleva al cuadrado el segundo término: $(7y^2)^2 = 49y^4$

Así: $(5x^3 - 7y^2)^2 = 25x^6 - 70x^3y^2 + 49y^4$

f) $(5x^3 - 7y^2)^2$

Aplicando los pasos

Se eleva al cuadrado el primer término: $(5x^3)^2 = 25x^6$

El doble producto del primer término por el segundo: $2(5x^3)(-7y^2) = -70x^3y^2$

Se eleva al cuadrado el segundo término: $(7y^2)^2 = 49y^4$

Así: $(5x^3 - 7y^2)^2 = 25x^6 - 70x^3y^2 + 49y^4$

g) $\left(\frac{2}{3}q^5 - \frac{3}{4}\right)^2$

Aplicando los pasos

Se eleva al cuadrado el primer término: $\left(\frac{2}{3}q^5\right)^2 = \frac{4}{9}q^{10}$

El doble producto del primer término por el segundo: $2\left(\frac{2}{3}q^5\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{12}{12}q^5 = -q^5$

Se eleva al cuadrado el segundo término: $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Así: $\left(\frac{2}{3}q^5 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{4}{9}q^{10} - q^5 + \frac{9}{16}$

Manos a la obra

Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado

1. $(2 + a)^2$
2. $(w - 4)^2$
3. $(x^3 - 3)^2$
4. $(4 + s^2)^2$
5. $(2m^3 + 7)^2$
6. $(3c^2 - 4d^5)^2$
7. $(-x^4 + 2y^2)^2$
8. $(3k^3l - 5)^2$
9. $(a^3b^3 - 6c^2)^2$
10. $(3x^2 - 2y^3z^4)^2$
11. $\left(\frac{1}{3} - 4p\right)^2$
12. $\left(5w^3 + \frac{3}{4}x\right)^2$
13. $\left(\frac{2}{5}m^2 - \frac{1}{3}n^2\right)^2$
14. $\left(-\frac{s}{4} + \frac{2}{5}\right)^2$

Binomios al cubo

Un binomio al cubo se puede representar geométricamente como el cubo que se muestra en la figura de lados $(a + b)$.

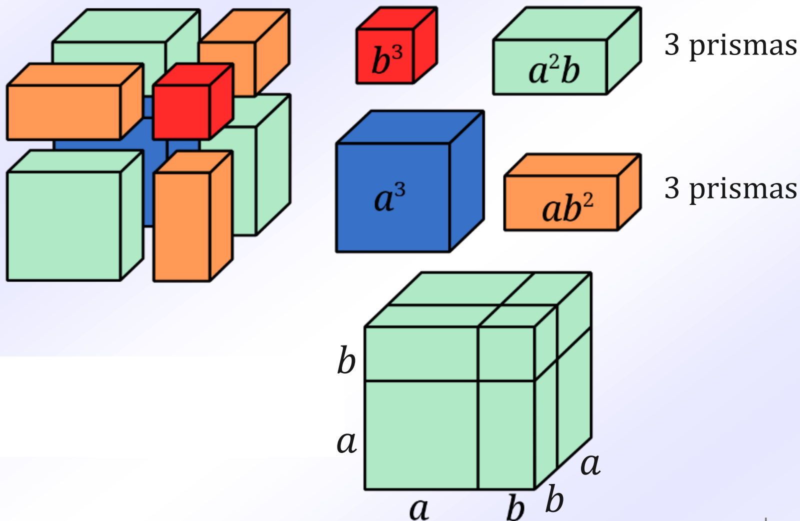


Imagen tomada de Wikipedia

Así, su volumen estará representado por la expresión $(a + b)^3$

$$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Al desarrollar un binomio al cubo se obtendrán siempre 4 términos

Primero: Se eleva al cubo el primer término

Segundo: El triple del cuadrado del primer término por el segundo

Tercero: El triple del primero por el cuadrado del segundo

Cuarto: Se eleva al cubo el segundo término

Desarrolla los siguientes binomios al cubo

a) $(a + 4)^3$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cubo el primer término: $(a)^3 = a^3$

Segundo: El triple del cuadrado del primer término por el segundo: $3(a)^2(4) = 12a^2$

Tercero: El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(a)(4)^2 = 48a$

Cuarto: Se eleva al cubo el segundo término $(4)^3 = 64$

Así: $(a + 4)^3 = a^3 + 12a^2 + 48a + 64$

b) $(3x-2)^3$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cubo el primer término: $(3x)^3 = 27x^3$

Segundo: El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(3x)^2(-2) = -54x^2$

Tercero: El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(3x)(-2)^2 = 36x$

Cuarto: Se eleva al cubo el segundo término $(-2)^3 = -8$

Así: $(3x-2)^3{=}27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

c) $(2m^4 - n^3)^3$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cubo el primer término: $(2m^4)^3 = 8m^{12}$

Segundo: El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(2m^4)^2(-n^3) = -12m^8n^3$

Tercero: El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(2m^4)(-n^3)^2 = 6m^4n^6$

Cuarto: Se eleva al cubo el segundo término $(-n^3)^3 = -n^9$

Así: $(2m^4 - n^3)^3 = 8m^{12} - 12m^8n^3 6m^4n^6 - n^9$

d) $(3p^2 + 2q^2)^3$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cubo el primer término: $(3p^2)^3 = 27p^6$

Segundo: El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3(3p^2)^2(2q^2) = 54p^4q^2$

Tercero: El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(3p^2)(2q^2)^2 = 36p^2q^4$

Cuarto: Se eleva al cubo el segundo término $(2p^2)^3 = 8p^6$

Así: $(3p^2 + 2q^2)^3 = 27p^6 + 54p^4q^2 + 36p^2q^4 + 8p^6$

e) $(-5a^4b - 2)^3$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cubo el primer término: $(-5a^4b)^3 = -125a^{12}b^3$

Segundo: El triple del cuadrado del primero por el segundo:$3(-5a^4b)^2(-2) = -150a^8b^2$

Tercero: El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3(-5a^4b)(-2)^2 = -60a^4b$

Cuarto: Se eleva al cubo el segundo término $(-2)^3 = -8$

Así: $(-5a^4b-2)^3=-125a^{12}b^3-150a^8b^2-60a^4b-8$

f) $\left(\frac{2}{3}s^3-\frac{1}{2}\right)^3$

Aplicando los pasos

Primero: Se eleva al cubo el primer término: $\left(\frac{2}{3}s^3\right)^3=\frac{8}{27}s^9$

Segundo: El triple del cuadrado del primero por el segundo: $3\left(\frac{2}{3}s^3\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}s^3$

Tercero: El triple del primero por el cuadrado del segundo: $3\left(\frac{2}{3}s^3\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}s^3$

Cuarto: Se eleva al cubo el segundo término $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

Así: $\left(\frac{2}{3}s^3-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{8}{27}s^9-\frac{2}{3}s^3+\frac{1}{2}s^3-\frac{1}{8}$

Para saber más

Teorema binomial

Manos a la obra

Desarrolla los siguientes binomios al cubo

1. $(2c-1)^3$
2. $(3d+6)^3$
3. $(4m^2+3)^3$
4. $(u-2v)^3$
5. $(3x-y^3)^3$
6. $(-2r^2-3s^2)^3$
7. $(p^4+2q^3)^3$
8. $(5uw^2-z^3)^3$
9. $(2x^3y^2+4)^3$
10. $\left(\frac{1}{2}m^3-2n\right)^3$
11. $\left(j^5-\frac{k}{4}\right)^3$
12. $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b^2\right)^3$

Binomios con término común (igual)

Estos binomios son de la forma $(x+a)(x+b)$ y siempre tienen solo un término igual, su desarrollo da como resultado un trinomio.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Antes de presentar el procedimiento, es necesario identificar si el producto de binomios es un binomio con término igual.

Identifica cuál de los siguientes productos es un binomio con término igual.

a) $(2x+1)(2x-3)$ Si es, ya que el término $2x$ se repite

b) $(m^3+2)(m^3+4)$ Si es, ya que el término m^3 se repite

c) $(5z^2+7y)(5z+y)$ No es, ya que los términos $5z^2$ y $5z$ son distintos

d) $(3ax-5b)(4ax-5b)$ Si es, ya que el término $-5b$ se repite

e) $(3f+2j)(4g+2j)$ Si es, ya que el término $2j$ se repite

Para resolver un binomio con término igual, se siguen los siguientes pasos.

Primero: El cuadrado del término igual

Segundo. Se suman los términos diferentes y se multiplica por el término igual

Tercero: El producto de los términos diferentes

Ejemplos:

a) $(r+2)(r+5)$

El cuadrado del término igual: $(r)^2 = r^2$

Se suman los términos diferentes y se multiplica por el término igual: $(2+5)(r) = 7r$

El producto de los términos diferentes: $(2)(5) = 10$

Así: $(r+2)(r+5) = r^2 + 7r + 10$

b) $(3x-4)(3x+2)$

El cuadrado del término igual: $(3x)^2 = 9x^2$

Se suman los términos diferentes y se multiplica por el término igual: $(-4+2)(3x) = -6x$

El producto de los términos diferentes: $(-4)(2) = -8$

Así: $(3x-4)(3x+2) = 9x^2 - 6x - 8$

c) $(5m+2y)(5m+7y)$

El cuadrado del término igual: $(5m)^2 = 25m^2$

Se suman los términos diferentes y se multiplica por el término igual: $(2y+7y)(5m)=45my$

El producto de los términos diferentes: $(2y)(7y)=14y^2$

Así: $(5m+2y)(5m+7y)=25m^2+45my-14y^2$

d) $(2x^3-4z^3)(2x^3+5z^3)$

El cuadrado del término igual: $(2x^3)^2=4x^6$

Se suman los términos diferentes y se multiplica por el término igual: $(-4z^3+5z^3)(2x^3)=2x^3z^3$

El producto de los términos diferentes: $(-4z^3)(5z^3)=-20z^6$

Así: $(2x^3-4z^3)(2x^3+5z^3)=4x^6+2x^3z^3-20z^6$

e) $(2x^3-4z^3)(2x^3+5z^3)$

El cuadrado del término igual: $(2x^3)^2=4x^6$

Se suman los términos diferentes y se multiplica por el término igual: $(-4z^3+5z^3)(2x^3)=2x^3z^3$

El producto de los términos diferentes: $(-4z^3)(5z^3)=-20z^6$

Así: $(2x^3-4z^3)(2x^3+5z^3)=4x^6+2x^3z^3-20z^6$

f) $\left(\frac{3}{4}a^2-4b^3\right)\left(\frac{1}{4}a^2-4b^3\right)$

El cuadrado del término igual: $(-4b^3)^2=16b^6$

Se suman los términos diferentes y se multiplica por el término igual: $\left(\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2\right)(-4b^3)=-4a^2b^3$

El producto de los términos diferentes: $\left(\frac{3}{4}a^2\right)\left(\frac{1}{4}a^2\right)=\frac{3}{16}a^4$

Así: $\left(\frac{3}{4}a^2-4b^3\right)\left(\frac{1}{4}a^2-4b^3\right)=16b^6-4a^2b^3+\frac{3}{16}a^4$

Manos a la obra

Desarrolla los siguientes binomios con términos iguales (comunes)

1. $(a+8)(a+6)$
2. $(k-10)(k-5)$
3. $(5n+3)(5n+4)$
4. $(2p-3)(2p+9)$
5. $(x^2-11)(x^2-2)$
6. $(2y^5-4)(2y^5+7)$
7. $(4m^3-4n)(4m^3+5n)$

8. $(2s^4 - 4z^3)(2s^4 + z^3)$
9. $(8x^3 - y^3)(2x^3 - y^3)$
10. $(-6c + 3d^6)(-6c - 7d^6)$
11. $\left(\frac{1}{2}t^2 - 4u^4\right)\left(\frac{1}{2}t^2 - 8u^4\right)$
12. $\left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{3}b^3\right)\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}b^3\right)$

Situaciones contextuales en lenguaje algebraico

Allen Ángel en su libro Álgebra Intermedia expresa que una de las razones principales para estudiar matemáticas es que las podemos utilizar para resolver problemas de la vida diaria. Para resolver de forma matemática la mayor parte de los problemas de aplicación de la vida real, necesitamos ser capaces de expresar el problema en símbolos matemáticos usando expresiones o ecuaciones, y cuando lo hacemos creamos un **modelo matemático** de la situación.

Los modelos matemáticos no solo son usados en matemáticas, sino en muchos campos del conocimiento, veamos algunas modelos matemáticos en varios campos de la ciencia.

BIOLOGÍA

Modelos de crecimiento exponencial: modelo de Malthus

$$x_k = 2^k x_0, \qquad k = 0,1,2 \ldots$$

Donde

x_0 es el número de individuos de la población de bacterias al inicio del experimento.

k es el periodo de división

x_k es el número de bacterias de nuestro experimento después de cada periodo de división k

QUÍMICA

Índice de conectividad de Randić

El índice de conectividad de un gráfico es la suma de las contribuciones de los enlaces donde y son los grados de los vértices que forman el enlace $i \sim j$

$$\chi_R = \sum_{\substack{all \\ sides}}^{N} \left(\delta_i \delta_j\right)^{-1/2}$$

AGRONOMÍA

La nutrición óptima de las plantas

Una manera para hacer el cálculo de la dosis a usar es haciendo un balance de masa que iguala la demanda con la oferta y resulta en la fórmula siguiente

$$Dosis\ (kg\ ha^{-1}) = (D - Ns) * Ef^{-1}$$

ASTRONOMÍA

Poder resolutivo del telescopio

En ocasiones es necesario conocer la captación de detalles, lo que nos lleva a conocer cuál debería ser la Distancia focal equivalente (DFeq) y con el dato proceder con Oculares, Reductores, etc.

$$DF_{eq} = \frac{(P \times 206.265)}{PR}$$

ECONOMÍA

Elasticidad Ingreso de la demanda

Muestra el cambio porcentual de la cantidad demandada dividido entre el cambio porcentual del Ingreso, se representa con EI, la gráfica que resulta de esta relación se le denomina curva de Engel.

$$EI = \frac{\frac{Qx_1 - Qx_2}{Qx_1}}{\frac{I_1 - I_2}{I_1}}$$

MEDICINA

Índice de masa corporal (IMC)

El IMC es un indicador confiable de la gordura y se usa para identificar las categorías de peso que pueden llevar a problemas de salud.

$$IMC = \frac{P}{a^2}$$

Sin embargo, también se puede expresar en varias situaciones cotidianas cuando se desea generalizar una situación numérica o cuando se quiere calcular el valor de una variable que si se hiciera usando la aritmética sería más complicado.

A continuación, se presentan algunas situaciones que se deben expresar usando el lenguaje algebraico.

a) Determina una expresión algebraica del salario que recibe un empleado por trabajar cierta cantidad de horas, si el precio por hora es de $90.00

s: salario
h: horas trabajadas

Expresando matemáticamente:

$$S = 90h$$

b) El plan de renta de celular Max sin Límite cobra $229.00 al mes y $0.000244 por KB adicional de datos. Determine un modelo para esta situación.

P: precio de la renta mensual
x: KiloBytes adicionales de datos consumidos al mes

Así se puede expresar matemáticamente como:

$$P = 229 + 0.000244x$$

c) Una tienda departamental aplica un descuento del 25% en todas las sudaderas y chamarras. ¿Cuál es la expresión que permite calcular el precio con el descuento de cualquier prenda?

P: precio de la chamarra con descuento
x: precio original de la chamarra

$$P = x - 0.25x$$

$$P = 0.75x$$

d) Las uñas de las manos crecen en promedio 3.5mm al mes.
i) Escribe un modelo algebraico que indique el crecimiento de tus uñas en x meses.
ii) ¿Cuánto habrá crecido en un año?

i. C: crecimiento de las uñas
x: número de meses

$$C = 3.5x$$

ii. 1 año tiene 12 meses, por lo que $x = 12$

$$C = 3.5(12)$$

$$C = 42\ mm$$

e) Si bien andar en bicicleta y correr son una excelente manera de bajar de peso, hay diferencias entre ambas actividades. El doctor Edward Coyle, de la Universidad de Texas, en Austin, EE. UU. creó junto a su equipo de colaboradores una tabla para

comparar el gasto calórico, la velocidad adquirida y la distancia recorrida.

Con esta nueva herramienta para calcular el gasto calórico, se sabe que un ciclista que pedalea a 15 millas por hora (24.1 km/h) en un trayecto de 20 millas (32.1 km) consume 620 calorías. Para hacer el mismo gasto, un corredor debería recorrer 5.6 millas (9 km). Esta conversión sirve para un adulto de 155 libras (unos 70 kg).

Considerando a un adulto de 70 kg y que pedalea a 15 millas por hora.

i. Construye una tabla que relacione el trayecto en bicicleta en millas y el consumo de calorías durante las primeras 20 millas.
ii. Construye una tabla que relacione el trayecto corriendo en millas y el consumo de calorías durante las primeras 5.5 millas.
iii. Escribe un modelo matemático para saber cuántas calorías quemas por millas al realizar cada actividad.

Tanto para el inciso a y b se trata de una situación de proporcionalidad directa, así se puede encontrar la constante de proporcionalidad dividiendo el consumo de calorías cuando se recorre ciertas millas.

Convertimos de lenguaje común a lenguaje algebraico

$$\text{Contante de proporcionalidad } (k) = \frac{Consumo\ de\ calorías\ (c)}{millas\ recorridas\ (m)}$$

$$k = \frac{c}{m}$$

i. Usemos la relación anterior para calcular la constante de proporcionalidad para el recorrido en bicicleta.

Si se sabe que para el recorrido de 20 millas en bicicleta el gasto de calorías es de 620

$$m = 20$$
$$c = 620$$

Sustituyendo en la constante de proporcionalidad se tiene:

$$k = \frac{620}{20} = 31\text{cal/mi}$$

Es decir, se gasta 31 calorías por cada milla recorrida, de esta manera podemos completar la tabla a) multiplicando la constante de proporcionalidad por las millas recorridas

En bicicleta

Millas recorridas (m)	Consumo de calorías (c)
2	$(31)(2) = 62$
4	$(31)(4) = 128$

6	$(31)(6) = 186$
10	$(31)(10) = 310$
14	$(31)(14) = 434$
16	$(31)(16) = 496$
20	**620**

ii. Ahora calculemos la constante de proporcionalidad para la carrera.

Si se sabe que para el recorrido de 5.6 millas corriendo, el gasto de calorías es de 620

$$m = 5.6$$
$$c = 620$$

Sustituyendo en la constante de proporcionalidad se tiene:

$$k = \frac{620}{5.6} = 110.71 \text{ cal/mi}$$

Es decir, se gasta 110.71 calorías por cada milla recorrida, de esta manera podemos completar la tabla b) multiplicando la constante de proporcionalidad por las millas recorridas.

Corriendo

Millas recorridas (m)	Consumo de calorías (c)
1	$(110.71)(1) = 110.71$
2	$(110.71)(2) = 221.42$
4	$(110.71)(4) = 442.84$
5	$(110.71)(5) = 553.55$
5.6	**620**

iii) El modelo matemático que determina el consumo de calorías para cada actividad.

Como $k = \frac{c}{m}$ se despeja c

Así el consumo de calorías está dado por la expresión

$$c = k \cdot m$$

Para el recorrido en bicicleta, se tiene que $k = 31$

Sustituyendo la k por 31, obtenemos

$c = 31m$ donde m es el número de millas recorridas

Para el recorrido de la carrera, se tiene que $k = 110.71$

Sustituyendo la k por 110.71, obtenemos

$c = 110.71m$ donde m es el número de millas recorridas

Para saber más

Interpretar expresiones algebraicas

Problemas verbales

Manos a la obra

Expresa en lenguaje algebraico las siguientes situaciones

1) Una panadería todos los días fabrica el doble donas glaseadas (g) que de donas con chocolate (c) Escribe la relación entre la cantidad de ambos tipos de donas.

2) Una persona pesa una sexta parte menos en la Luna que en la Tierra. Expresa la relación entre el peso en la Luna y en la Tierra.

3) Una empresa de ventas paga semanalmente $1200 pesos, pero por cada venta (x) realizada da un bono de $180 pesos.

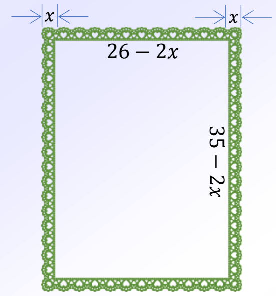
   a) Determina la expresión para el pago semanal de un agente de ventas.
   b) Si un agente realiza 5 ventas en una semana ¿Cuál será su pago semanal?

4) En una planta automotriz un nuevo equipo automático pinta 3 autos en una hora. Determina la expresión algebraica del número de carros pintados en determinado número de horas.
   ¿En cuánto tiempo el nuevo equipo pintará 50 autos?

5) La empresa Electric Energy cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa de $5 por mes más $0.10 por cada kilowatt-hora. Exprese el costo mensual "C" en función de la energía "E" consumida.
   Si la persona paga $2 000, calcula la cantidad de kilowatt-hora.

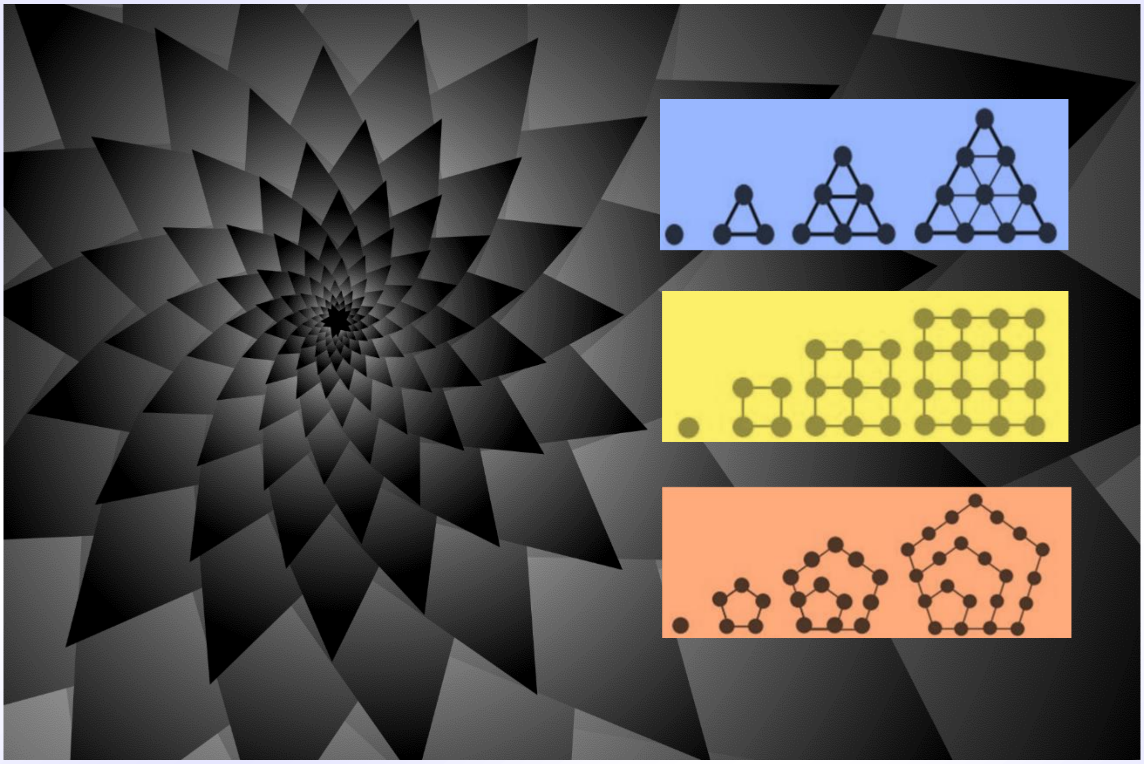
6) Una fábrica de totopos sabe que tiene $7,000 de costos fijos mensuales y $8 de costos variables por unidades producidas. Determine el modelo matemático de los costos totales.
   Se sabe que para el próximo mes se va a tener una venta asegurada de 2000 bolsas de totopos.
   Calcule el costo total del mes.

7) A un pliego de papel de 35 x 26 cm se le pone un margen como se muestra en la figura. Determina el área disponible para usar.
Si el margen es de 2cm ¿Cuál es el área disponible?



Evaluando tus aprendizajes

III. DIFERENCIAS SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS



APRENDIZAJES ESPERADOS

- Reconocen patrones de comportamiento entre magnitudes.
- Formula de manera coloquial escrita (retórica), numérica y gráficamente patrones de comportamiento
- Expresa, mediante símbolos, fenómenos de su vida cotidiana.

Analiza la siguiente situación:

Una maratonista tiene una competencia en dos meses (61 días), por lo que empieza una rutina de entrenamiento para una competencia, por lo que iniciará corriendo 10 000 metros (10 km) y cada día que pase correrá 500 m más, ¿Qué distancia recorrerá a los 5, 10, 20, 40 y 50 días?

Llegará a correr durante su entrenamiento los 50 Kilometros (50 000 m) antes del día de la competencia?

La situación anterior se puede representar matemáticamente mediante la siguiente expresión

Distancia Total = 10 000 + 500 (número de días)

Si la convertimos a una función, en donde Distancia Total será D y el número de días está dado por x.

$$D = 10\,000 + 500x$$

Se evalúa la función resultante en los valores solicitados, que son 5, 10, 20, 30, 40 y 50, escribiendo los resultados en la siguiente tabla.

x (días)	$D = 5000 + 200x$
5	$D = 10\,000 + 500(5) = 10000 + 2\,500 = \mathbf{12\,500\ m}$
10	$D = 10\,000 + 500(10) = 10\,000 + 5\,000 = \mathbf{15\,000\ m}$
20	$D = 10\,000 + 500(20) = 10\,000 + 10\,000 = \mathbf{20\,000\ m}$
40	$D = 10\,000 + 500(40) = 10\,000 + 20\,000 = \mathbf{30\,000\ m}$
50	$D = 10\,000 + 500(50) = 10\,000 + 25\,000 = \mathbf{35\,000\ m}$

La situación anterior es una sucesión, porque que existe un patrón constante de crecimiento, es decir, cada día se suma 500m a la distancia anterior. De esta manera podemos determinar la distancia que recorrerá en 60 días que es un día antes de la competencia.

$$D = 10\,000 + 500(60) = 10000 + 30\,000 = \mathbf{40\,000\ m}$$

Por lo tanto, con ese plan de entrenamiento no completará los 50,000 m (50 Km) durante el plazo establecido.

Valorando lo que sabes

1) Dadas las siguientes descomposiciones:

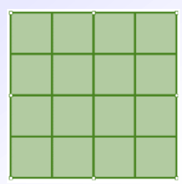
$$9 = 4 \cdot 2 + 1$$

$$16 = 5 \cdot 3 + 1$$

Hallar las descomposiciones de 4, 25 y 36 para generar un patrón numérico

Elemento numérico	Descomposición
4	
9	$4 \cdot 2 + 1$
16	$5 \cdot 3 + 1$
25	
36	

2) Usando el patrón anterior dibuja el resto de las figuras

Elemento numérico	4	9	16	25
Representación figural				

Fuente: http://matematicas.cosdac.sems.gob.mx/matematicas/2017/10/27/momento-2-significados-situados-para-el-simbolo/

3) Observa las siguientes figuras en cada caso

Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
			

Fuente: http://matematicas.cosdac.sems.gob.mx/matematicas/2017/10/08/otro-contexto-del-cambio/

a) Explica, cómo cambia la cantidad de rombos de un caso a otro
b) Dibuja el caso 6
c) ¿Cómo explicarías a alguna persona que no puede ver la secuencia cómo calcular la cantidad total de rombos para cualquier caso? Escribe tu explicación.

SUCESIONES

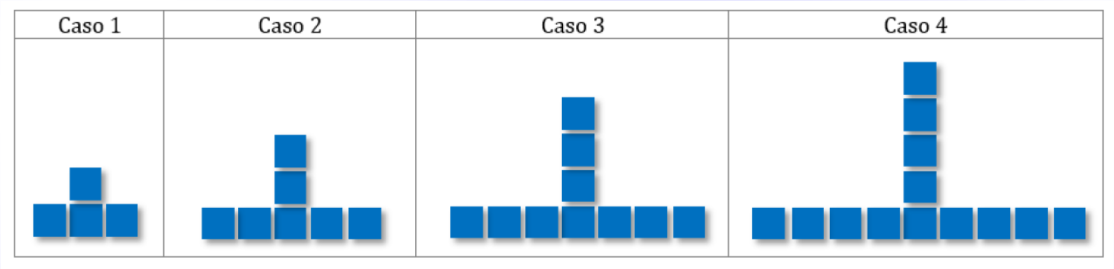
Las sucesiones son un grupo de elementos que siguen un orden o una secuencia. Los elementos de una sucesión pueden ser objetos, números, figuras e incluso sonidos.

Observa los siguientes vídeos de la plataforma educativa PruébaT en donde muestra como las sucesiones están en varios aspectos de nuestra vida.

Secuencias con figuras geométricas

I. Para las siguientes secuencias de figuras. Realiza lo que se te pide.

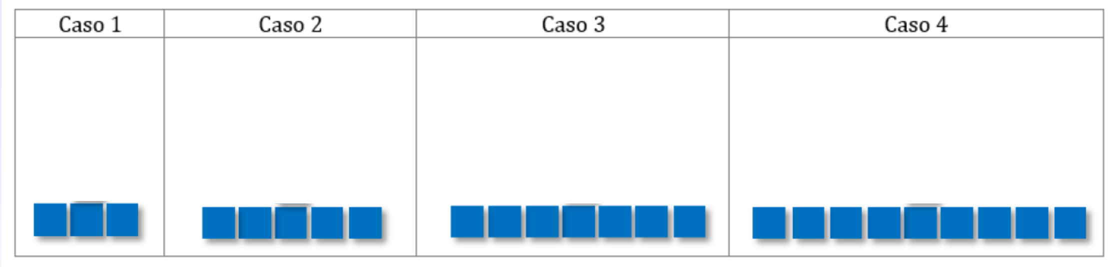
a) ¿Cómo aumenta la cantidad de cuadros en cada caso?



4 7 10 13

Va aumentando de 3 en 3

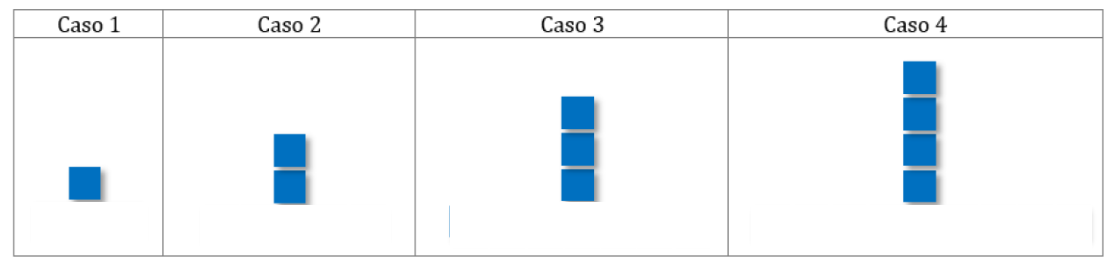
b) ¿Cómo aumenta la cantidad de cuadros horizontales en cada caso?



3 5 7 9

Va aumentando de 2 en 2

c) ¿Cómo aumenta la cantidad de cuadros verticales en cada caso?



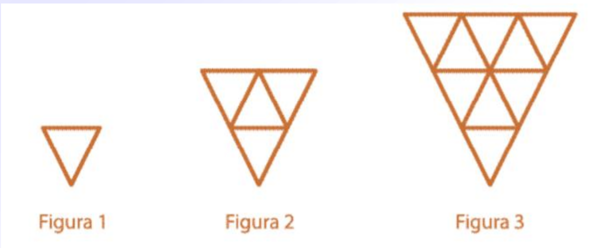
1 2 3 4

Va aumentando de 2 en 2

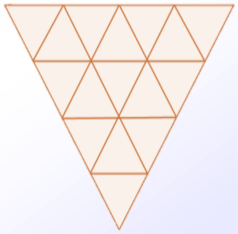
d) ¿Cómo explicarías a una persona que no puede ver las figuras como calcular la cantidad total de cuadros?
Si solo se desea saber la cantidad de cuadros entonces se puede decir que para cada caso le vaya aumentando 3 cuadros, iniciando con 4 cuadros.
Así, la secuencia sería 4, 7,10,13,16,…

Si se quisiera saber cuántos cuadrados habrán en el caso 11, se tendría que seguir la secuencia hasta llegar a la posición 11 y de esta manera saber la cantidad de cuadrados, esto resulta algo sencillo; pero que pasaría, si me piden la cantidad de cuadrados para el caso 123, tendría que realizar la secuencia hasta llegar al caso solicitado por lo que sería más complicado por lo que se puede realizar un modelo algebraico que permita calcular el número de cuadrados para cualquier caso.

II. Para las siguiente secuencia de figuras realiza lo que se te pide



a) Dibuja la figura 4 y escribe la cantidad de triángulos que tiene



16 triángulos

b) ¿Explica que condición se cumple para el aumento de los triángulos?

La condición es el cuadrado de la posición o número de figura, observa la siguiente tabla.

No. de figura	No. de triángulos
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Si se representa el número de la figura por la letra f, entonces, el número total de triángulos estará dado por f^2

Expresando algebraicamente

Total de triángulos= f^2

Comprobemos

Para $f = 4$ para la figura 4

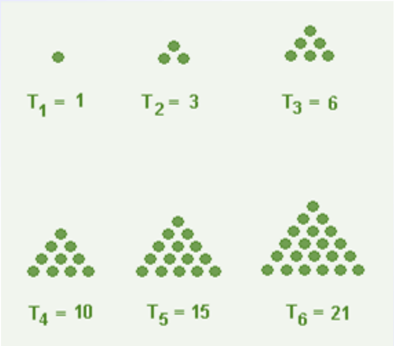
Total de triángulos = $(4)^2$=16

Para $f = 8$ para la figura 8

Total de triángulos = $(8)^2$=64

De esta manera podemos calcular el total de cuadrados para cualquier posición (número de figura) ya que hemos encontrado un "modelo matemático" para esta situación.

III. Observa las siguiente secuencia de figuras y responde lo que se te pide



a) ¿Cómo va aumentando el número de círculos?

En la siguiente tabla se puede observar el aumento de círculos entre cada triangulo.

No. de triángulo	Círculos que se adicionaron	Total de círculos
1	0	**1**
2	1	**3**
3	3	**6**
4	6	**10**
5	10	**15**
6	15	**21**

El total de círculos de la siguiente figura triangular se obtiene sumando el número de triángulo (posición) con el total de círculos de la figura anterior

Por ejemplo, para obtener el número de círculos del sexto triángulo (T_6)

Sumamos la posición del triángulo: 6, con el total de círculos del triángulo anterior (T_5) : 15, así el total de triángulos para la figura 6 será: $6 + 15 = 21$

b) ¿Cuántos círculos tendrá el séptimo triángulo T_7?

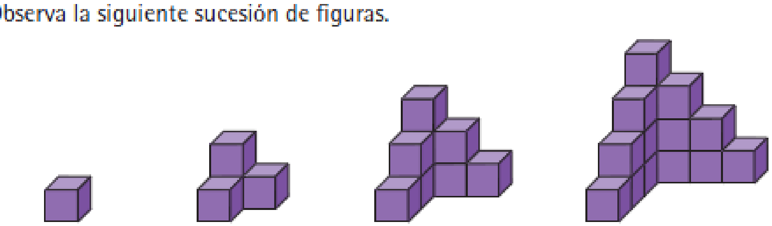
Siguiendo el procedimiento anterior:

Suma de la posición del triángulo: 7, con el total de círculos del triángulo anterior (T_6): 21, así el total de triángulos para la figura 7 será: $7 + 21 = 28$

Este procedimiento no es práctico para conocer la cantidad de círculos de figuras mayores, ya que se tiene que conocer la cantidad de círculos de la figura anterior para calcular el de la figura siguiente.

Para practicar

1. Observa la siguiente sucesión de figuras.



a) Dibuja la figura 5 de la sucesión anterior.

b) ¿Cuántos cubos tendrá la figura 10 de la sucesión? ______________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite conocer el número de cubos de cualquier figura que esté en la sucesión? ______________________________________

2. Observa la siguiente sucesión de figuras.

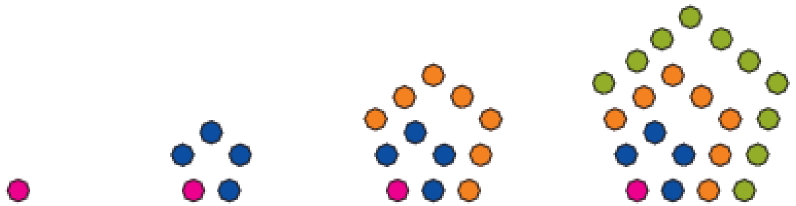


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuántos puntos se le agregaron a la figura 2 para formar la figura 3? ________

b) ¿Cuántos puntos se le agregaron a la figura 3 para formar la figura 4? ________

c) ¿Cuántos puntos se le agregarán a la figura 4 para formar la figura 5? ________

Fuente: http://matematikamir.blogspot.com/2011/02/22-sucesiones-numericas-cuadraticas.html

3. Observa la siguiente sucesión de figuras.

1ª Figura 2ª Figura 3ª Figura 4ª Figura

a) Dibuja la figura 5

b) ¿Cuántos círculos tendrá la figura 7?

c) ¿Cómo le explicarías a una persona que no puede ver las figuras, como calcular la cantidad total de círculos?

Sucesiones numéricas

En matemáticas, una **sucesión** es un conjunto de números ordenados. Cada número ocupa una posición y recibe el nombre de término.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\ a_n$$

Una sucesión es **finita** cuando tiene primer y último término. Una sucesión es **infinita** si tiene primer término, pero no tiene último término.

El término que ocupa la posición n se denota por a_n y se denomina **término general** o **término** n **–ésimo**.

Las sucesiones se definen a menudo estableciendo una expresión matemática para calcular el n-ésimo término.

Un ejemplo de sucesión es el conjunto de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

A cada elemento de la sucesión se le llama término

Esta sucesión se puede representar por medio de una expresión matemática de forma general como:

$$a_n = 2n \qquad \text{donde } n = 1,2,3,4 \ldots$$

Esta expresión se le conoce como el n-ésimo término y nos permite calcular cualquier número en la posición n.

n es la posición que ocupa el número.

Valor	2	4	6	8	10	12
n (posición)	1era	2a	3a	4a	5a	6a

Tabulando la siguiente sucesión para los primeros cinco valores de n

n	$a_n = 2n$
1	$2(1) = 2$
2	$2(2) = 4$
3	$2(3) = 6$
4	$2(4) = 8$
5	$2(5) = 10$

Se observa de la tabla que si se cumple la sucesión.

Si queremos calcular el número que está en la posición 15, es decir n=15, entonces sustituimos en el n-ésimo término

Así:

$$a_n = 2n$$

$$a_{15} = 2(15)$$

$$a_{15} = 30$$

Para la sucesión 1, 4, 9, 16, 25,... determina el término general (n-ésimo) y calcula los numeros en la octava y decimotercera posición.

Esta sucesión tiene por forma general

$$a_n = n^2$$

Para n=8 se tiene $a_8 = 8^2 = 64$

Para n=13 se tiene $a_{13} = 13^2 = 169$

Sucesiones y series aritméticas

Los términos de algunas sucesiones se pueden determinar siguiendo un criterio denominado regla de formación, que relaciona cada término con el lugar que ocupa. Las dos reglas básicas son: *Sumar o restar por una misma cantidad y multiplicar o dividir por una misma cantidad*.

Aquellas sucesiones que se obtienen sumando o restando por una misma cantidad se llaman **sucesiones aritméticas.**

Para la sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots$ es una sucesión aritmética, si se toman dos términos consecutivos de cualquiera de esta y la diferencia entre ambos siempre es una constante, denominada diferencia.

$$d = a_i - a_{i-1}$$

OJO: Todas las sucesiones aritméticas serán crecientes si $d > 0$ o decrecientes si $d < 0$ para todo valor de n.

Ejemplos:
Determina si las siguientes sucesiones son aritméticas y si es escribe el siguiente término.

a) $3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19 \ldots$

La diferencia para caso es:

$7 - 3 = 4$ $\quad 11 - 7 = 4$ $\quad 15 - 11 = 4$ $\quad 19 - 15 = 4$

Por lo que $d = 4$, esto indica que la sucesión es aritmética.

Es decir, para obtener el siguiente término se le suma 4 al término anterior y es 23

b) $20,\ 18,\ 16,\ 14,\ 12 \ldots$

La diferencia para caso es:

$18 - 20 = -2$ $\quad 16 - 18 = -2$ $\quad 14 - 16 = -2$ $\quad 12 - 14 = -2$

Por lo que $d = -2$, esto indica que la sucesión es aritmética.

Es decir, para obtener el siguiente término se le resta 2 al término anterior y es 10

c) $\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2} \ldots$

La diferencia para caso es:

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ $\quad 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

Por lo que $d = \frac{1}{2}$, esto indica que la sucesión es aritmética.

Es decir, para obtener el siguiente término se le suma $\frac{1}{2}$ al término anterior y es 3

d) $21, \ 15, \ 9, \ 3, \ -4 \ldots$

La diferencia para caso es:

$21 - 15 = 6$ $\quad 15 - 9 = 6$ $\quad 9 - 3 = 6$ $\quad 3 - (-4) = 7$

Por lo que, **no se cumple** la sucesión aritmética ya que no en todas las diferencias el resultado es 6.

Para cualquier sucesión aritmética, el término general viene dado por la expresión:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$$

donde:

$a_1 = primer\ término$

$n = posición\ del\ término\ buscado$

$d = diferencia$

$a_n = el\ valor\ del\ término\ buscado$

A la suma de una sucesión se le llama **serie.**

La serie de los primeros n términos está dado por:

$$\boxed{S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}}$$

Ejemplos:

Para las siguientes sucesiones aritméticas. Halla el valor del vigésimo término y su suma.

a) $3, 6, 9, 12, \ldots$

$a_1 = 3$ $\quad d = 9 - 6 = 3$ $\quad n = 20$

Calculando a_{20}

Sustituyendo en: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$a_{20} = 3 + (20 - 1)(3)$$

$$a_{20} = 3 + (19)(3)$$

$$a_{20} = 3 + 57$$

$$a_{20} = 60$$

Calculando S_n

Sustituyendo en: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$$S_{20} = \frac{20(3 + 60)}{2}$$

$$S_{20} = \frac{20(63)}{2}$$

$$S_{20} = \frac{1260}{2}$$

$$S_{20} = 630$$

b) $-12, -8, -4, 0, \ldots$

$a_1 = -12$ $\qquad$ $d = -4 - (-8) = 4$ $\qquad$ $n = 20$

Calculando a_{20}

Sustituyendo en: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$a_{20} = -12 + (20 - 1)(4)$$

$$a_{20} = -12 + (19)(4)$$

$$a_{20} = -12 + 76$$

$$a_{20} = 64$$

Calculando S_n

Sustituyendo en: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

$$S_{20} = \frac{20(-12 + 64)}{2}$$

$$S_{20} = \frac{20(52)}{2}$$

$$S_{20} = \frac{1040}{2}$$

$$S_{20} = 520$$

c) $60, 58, 56, 54, \ldots$

$a_1 = 60$ $\qquad$ $d = 54 - 56 = -2$ $\qquad$ $n = 20$

Calculando a_{20}

Sustituyendo en: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$a_{20} = 60 + (20 - 1)(-2)$$

$$a_{20} = 60 + (19)(-2)$$

$$a_{20} = 60 - 38$$

$$a_{20} = 22$$

Calculando S_n

Sustituyendo en: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

$$S_{20} = \frac{20(60+22)}{2}$$
$$S_{20} = \frac{20(82)}{2}$$
$$S_{20} = \frac{1640}{2}$$
$$S_{20} = 820$$

La fórmula para calcular la serie $1+2+3+4+5+\cdots$ se puede obtener de:

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

Como $a_1 = 1$ y $a_n = n$ la expresión anterior se puede simplificar como:

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2}$$

Si en vez de empezar en 1 e ir de 1 en 1, queremos calcular la suma de los n-primeros múltiplos de un número (por ejemplo, la suma de los 7 primeros múltiplos de 4.

$$4+8+12+16+20+24+28$$

se aplica la expresión anterior, pero anexando una nueva variable, dando como resultado la fórmula.

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \cdot p$$

Donde:

n= total de números
p= el múltiplo, es decir, de cuanto en cuanto se va a contar
S= suma de todos los números

Ejemplos de aplicación

1. Una pila de troncos tiene 24 troncos en la base 23 en la segunda capa, 22 en la tercera. etc, la capa superior tiene 10 troncos. Encuentra la cantidad total de troncos en la pila.

$a_1 = 24$ $\quad d = 23 - 24 = -1$ $\quad a_n = 10$

Para encontrar n se sustituye en:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$10 = 24 + (n - 1)(-1)$ Despejando n

$10 - 24 = -n + 1$

$-14 - 1 = -n$

$-15 = -n$ Multiplicando por (-1) ambos lados

$n = 15$

Usando la siguiente función

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Sustituyendo los valores

$$S_{15} = \frac{15(24 + 10)}{2}$$

$$S_{15} = \frac{15(34)}{2}$$

$$S_{15} = 255$$

El total de troncos apilados es de 255

2. Jorge al ingresar a prepa ahorró \$1500 pesos y cada mes ahorra \$300 pesos. ¿Cuánto dinero tendrá al finalizar la prepa al cabo de tres años?

Se tienen los siguientes datos

$a_1 = 1500 \qquad n = 36\ meses \qquad d = 300$

Sustituyendo en:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_{36} = 1500 + (36 - 1)(300)$$

$$a_{36} = 1500 + 10500$$

$$a_{36} = 12{,}000$$

Por lo que al terminar la prepa tendrá ahorrado \$12,000 pesos

3. Una compañía va a distribuir \$46,000 en bonos entre sus 10 mejores vendedores. El último premiado en la lista recibirá \$1000 y la diferencia de dinero entre los vendedores sucesivamente clasificados debe ser constante. Encuentra el bono para cada vendedor.

Se tienen los siguientes datos $n = 10 \qquad S_{10} = 46{,}000 \qquad a_{10} = 1000$

Sustituyendo en S_n para obtener a_1

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$46000 = \frac{10(a_1 + 1{,}000)}{2}$$

$$46000(2) = 10a_1 + 10{,}000$$

$$92{,}000 - 10{,}000 = 10a_1$$

$$a_1 = \frac{82000}{10}$$

$$a_1 = \$8{,}200$$

Calculando el valor de d con la formula

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Sustituyendo

$$1000 = 8200 + (10 - 1) \cdot d$$

$$1000 - 8200 = 9d$$

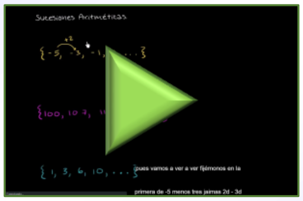
$$d = \frac{-7200}{9} = -800$$

Por lo que ya podemos saber cuánto tendrá de bono cada vendedor. Ordenando del último al primero

Para el siguiente valor se suma $800 pesos

$$\$1000,\ \$1800,\ \$2600,\ \$3400,\ \$4200,\ \$5000,\ \$5800,\ \$6600,\ \$7400,\ \$8200$$

Para saber más



Manos a la obra

I. Determina si las siguientes sucesiones son aritméticas y en caso de serlo calcula el valor del doceavo término.

1. 6, 8, 10, 12, 14…
2. 10, 5, 0, -5, -10…
3. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$
4. 1, 3, 6, 10, 15, …
5. -8, -5, -2, 1, 4, …

II. Calcula la suma de los primeros 20 términos para las siguientes sucesiones aritméticas.

1. 1, 4, 7, 10, 13,…
2. 20, 18, 16, 14, 12,…
3. -6, -4.5, -3, -1.5,…
4. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots$

III. Resuelve los siguientes problemas de aplicación

1. Las primeras 10 filas en cierta sección de un estadio tienen 28, 30, 32, 34 asientos, etc, ¿Cuántos asientos hay en las primeras 12 filas?
2. Un concursante obtendrá 5 premios en efectivo por un total de $5000 y habrá una diferencia de $100 entre premios sucesivos. Encuentra el valor del primer premio.
3. Un ciclista avanza cuesta abajo a razón de 4 pies el primer segundo. En cada segundo sucesivo, avanza 6 pies más que en el segundo anterior. Si el deportista llega a la parte inferior del cerro en 10 segundos. Encuentra la distancia total recorrida.

Evaluando tus aprendizajes

Sucesiones y series geométricas

Se cuenta que cuando Sessa, el inventor del ajedrez, presentó el juego a Sheran, príncipe de la India, este se quedó tan fascinado por lo ingenioso y complejo que era el juego que para gratificar a Sessa le dijo que le pidiera cualquier cosa que deseara. Sessa lo pensó despacio y al día siguiente fue de nuevo a ver al príncipe y le dijo:
- Soberano, mande que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda casilla, cuatro por la tercera, ocho `por la cuarta, y así sucesivamente.

Al príncipe le encantó esta curiosa petición que, pensó, no le saldría muy cara, y lo mandó cumplir, pero entonces se llevó una gran sorpresa........ ¿Pudo cumplir la promesa? ¿Cuántos granos de arroz debía entregar en total?

Extraído de: https://www.matematicasonline.es/progresiones/ejercicio_6_geometricas_problema_ajedrez.htm

Para dar respuesta a la cantidad de granos de trigo que debió entregar el príncipe podemos hacer uso de las progresiones geométricas. Ver respuesta aquí

Ingresa al siguiente hipervínculo del sitio Prometeo de la UNAM, donde se muestra un ejemplo interactivo de una sucesión geométrica.

Una **sucesión o progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término, a excepción del primero, se obtiene multiplicando el anterior por un mismo número, *r*, que se denomina **razón de la progresión.** Su término general viene dado por la expresión:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Y la serie de los *n* primeros términos se obtiene mediante la siguiente relación:

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}}$$

Para determinar si una sucesión es geométrica se debe verificar que el término siguiente al dividir entre el anterior debe obtenerse el mismo número.

$$r = \frac{a_k}{a_{k-1}}$$

Ejemplos:

Indica si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y en caso de serlo escribe el siguiente término.

a) 81, 27, 9, 3, 1,...

La razón para cada caso es:

$\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$

Por lo que $r = \frac{1}{3}$, esto indica que la sucesión es geométrica y el término siguiente es $\frac{1}{3}$

b) 5, 25, 125, 625

La razón para cada caso es:

$\frac{25}{5} = 5$ $\quad$ $\frac{125}{25} = 5$ $\quad$ $\frac{625}{125} = 5$

Por lo que $r = 5$, por lo que la sucesión es geométrica y el término siguiente es 3125.

c) 162, -54, 18, -6

La razón para cada caso es:

$\frac{-54}{162} = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{18}{-54} = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$

Por lo que $r = -\frac{1}{3}$, por lo que la sucesión es geométrica y el término siguiente es 2.

d) $3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ -\frac{3}{6},\ \frac{3}{16}$

La razón para cada caso es:

$\frac{-3/2}{3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{3/4}{-3/2} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{-3/6}{3/4} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$

Por lo que no es una sucesión geométrica ya que las razones no son iguales

Ejemplos:

Para las siguientes sucesiones geométricas. Halla el valor del décimo término y su suma.

a) $1, 4, 16, 64, \ldots$

$a_1 = 1$ $\qquad$ $r = \frac{4}{1} = 4$ $\qquad$ $n = 10$

Calculando a_{10}

Sustituyendo en:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

$$a_{10} = 1 \cdot (4)^{10-1}$$

$$a_{10} = 1 \cdot (4)^{9}$$

$$a_{10} = 262{,}144$$

Calculando S_n

Sustituyendo en:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}}$$

$$S_n = (1) \cdot \frac{1-4^{10}}{1-4}$$

$$S_n = (1) \cdot \frac{-1048575}{-3}$$

$$S_n = 349{,}525$$

b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 8, \ldots$

$a_1 = \frac{1}{4}$ $\qquad r = \frac{1/2}{1/4} = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad n = 10$

Calculando a_{10}

Sustituyendo en:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

$$a_{10} = \frac{1}{4}(2)^{10-1}$$

$$a_{10} = \frac{1}{4}(2)^9$$

$$a_{10} = \frac{1}{4}(512)$$

$$a_{10} = 128$$

Calculando S_n

Sustituyendo en:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{-1023}{-1}$$

$$S_n = 255.75$$

c) $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3} \ldots$

$a_1 = 27$ $\qquad r = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ $\qquad n = 10$

Calculando a_{10}

Sustituyendo en:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

$$a_{10} = 27\left(\frac{1}{3}\right)^{10-1}$$

$$a_{10} = 27\left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$a_{10} = 27\left(\frac{1}{19683}\right)$$

$$a_{10} = \frac{1}{729}$$

Calculando S_n

Sustituyendo en:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}}$$

$$S_n = (27) \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_n = (27) \cdot \frac{1-\frac{1}{59049}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = (27) \cdot \frac{\frac{59048}{59049}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = (27) \cdot \frac{177144}{118098}$$

$$S_n = \frac{29524}{729} \approx 40.5$$

Resuelve los siguientes ejercicios de aplicación

1. Una bomba de vacío elimina la mitad del aire de un recipiente con cada ciclo. Después de 10 ciclos ¿Qué porcentaje de la cantidad original de aire permanece en el recipiente?

Se tienen los siguientes datos $a_1 = 100\%$ $r = \frac{1}{2}$ $n = 10$

Se sustituye en:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

$$a_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$

$$a_{10} = 100 \cdot \frac{1}{512}$$

$a_{10} = \frac{25}{128} = 0.1953\%$ de aire original permanece

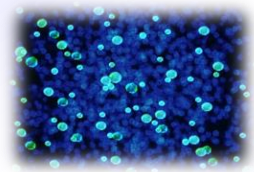
2. Cierto cultivo tiene 10 000 bacterias al inicio si aumenta 20% cada hora. ¿Qué cantidad de bacterias habrá en el cultivo después de un día?
   Se tienen los siguientes datos $a_1 = 10\ 000$ $r = 1.20$ $n = 24\ hrs$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

$$a_{10} = 10\,000 \cdot (1.20)^{24-1}$$

$$a_{10} = 10\,000\,(66.2473)$$

$$a_{10} = 662{,}473 \text{ bacterias}$$



3. El lunes Jaime cuenta un secreto a 5 amigos. Al día siguiente, estos 5 amigos cuentan el secreto a otros 5 amigos. Al día siguiente, las nuevas personas que saben el secreto también lo cuentan a otras 5 personas. Y, así, sucesivamente. Suponiendo que cada persona sólo ha contado el secreto a otras 5, ¿cuántas personas saben el secreto el domingo?

Construimos una sucesión: el término a_n es el número de personas que descubren el secreto en el día número n.

El primer día sólo Jaime conoce el secreto: $a_1 = 1$

El segundo día, Jaime cuenta el secreto a 5 amigos: $a_2 = 5$

El tercer día, cada uno de los 5 amigos cuenta el secreto a otros 5, así que el número de personas que se enteran es: $a_3 = 5 \cdot 5 = 25$

Y así, sucesivamente.

Se trata de una progresión geométrica con razón r=5

El número de personas que saben el secreto el domingo (día 7) es S_7.

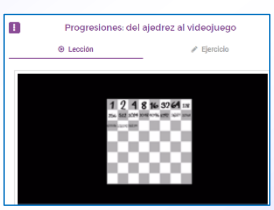
$$S_7 = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

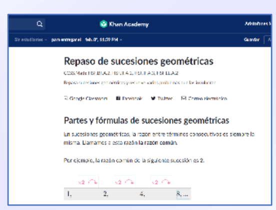
$$S_7 = (1)\frac{5^7 - 1}{5 - 1}$$

$$S_7 = (1)\frac{78124}{4} = 19531$$

Por lo tanto, después de 7 días 19531 personas conocerán el secreto

Para saber más





Manos a la obra

I. Indica si las siguientes progresiones son geométricas:

1) 12, 9, 6, 3, ...

2) 2, 6, 18, 54, …

3) 300, -30, 3, -0.3, …

4) 1, 4, 9, 16, …

5) $\frac{5}{3}, \frac{5}{12}, \frac{5}{48}, \frac{5}{144} \ldots$

6) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

II. Halla el octavo término y la suma de los primeros ocho términos

1) 8, 4, 2,1,…

2) 162, -54, 18, -6,…

3) 6, -12, 24, -48,…

4) 3, $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

III. Resuelve los siguientes problemas de aplicación.

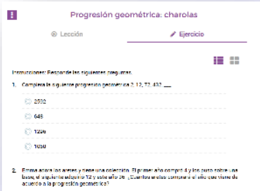
1. La depreciación anual de determinada máquina es el 25% de su valor al comienzo del año. Si el costo original de la máquina es de $200, 000 ¿Cuál es su valor después de 6 años?

2. Un hombre guarda $1 peso el primer día, $2 pesos el segundo día, $4pesos el tercer día y así sucesivamente.
   Si continúa duplicando la cantidad guardada todos los días ¿cuánto deberá guardar al décimo quinto día?

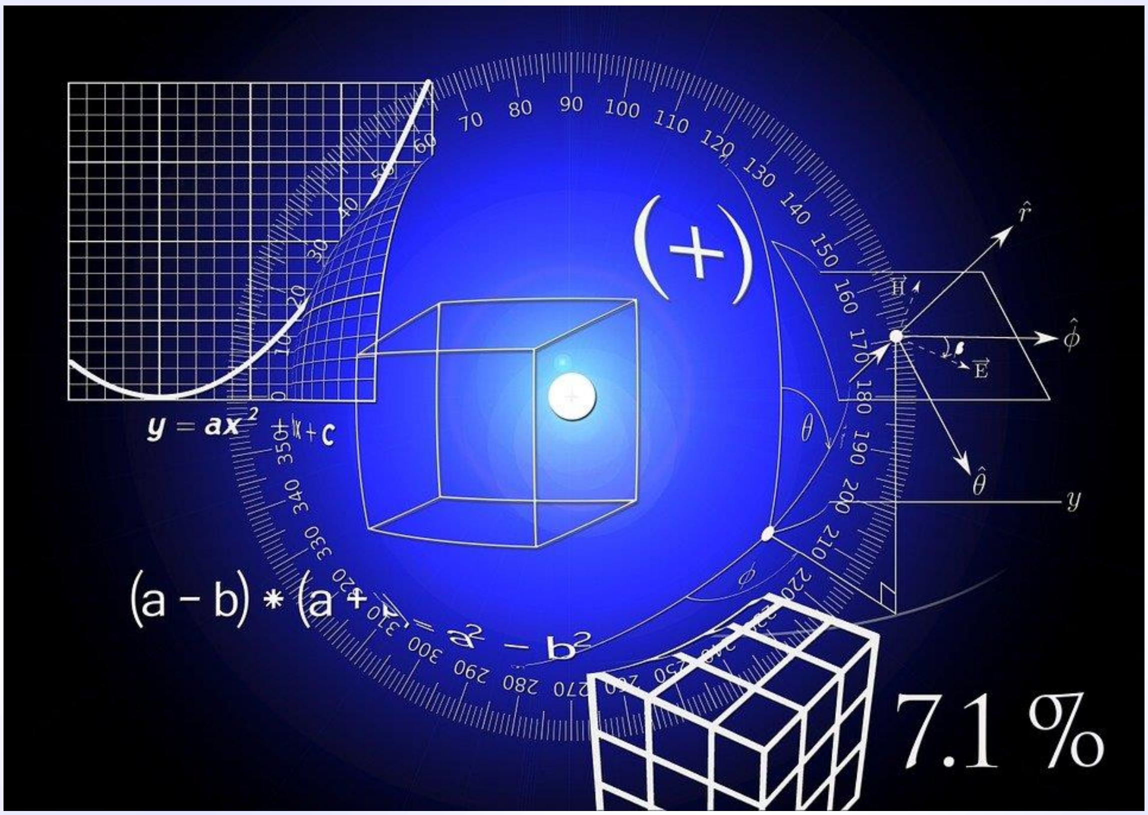
3. Un alumno de preparatoria tiene como propósito de año nuevo ahorrar todos los días a partir del primero de enero. Solo que lo hará de la siguiente manera. El primer día ahorrará un peso, el segundo dos, el tercero cuatro pesos, es decir cada día ahorrará el doble de lo que ahorro el día anterior.

   ¿Será posible que pueda cumplir su propósito? Justifica tu respuesta

Evaluando tus aprendizajes



IV. REPRESENTAS FENOMENOS LINEALES Y NO LINEALES



APRENDIZAJES ESPERADOS

- Reconoce fenómenos con comportamiento lineal o no lineal.
- Diferencia los cocientes
- Representa gráficamente, fenómenos de variación constante en dominios discretos.

Como se vio en el bloque anterior, las sucesiones aritméticas aumentan o disminuyen sumándole o restándole un valor constante, si se representa en un plano cartesiano se obtendría una serie de puntos alineados, si se unen esos puntos el resultado será una línea recta.

Veamos el siguiente ejemplo.

Una nueva empresa de televisión por cable ofrece un paquete básico de $200 pesos mensuales por 50 canales y además ofrece canales premium por tan solo $40 pesos mensuales cada uno.

a) Determina el costo si se contratan 3, 5 y 8 canales premium
b) Elabora una tabla donde se muestre el costo a pagar por contratar canales Premium.

a) Lo anterior se puede expresar como $a_n = 200 + 40n$ donde a_n es el costo total y n es el número de canales premium.

Para 3 canales $a_3 = 200 + 40(3) = 320$

Para 5 canales $a_5 = 200 + 40(5) = 400$

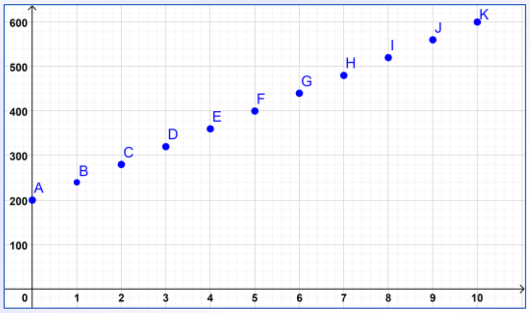
Para 10 canales $a_{10} = 200 + 40(8) = 520$

b) Realizando la tabla

Num. Canales Premium	Costo
1	$240
2	$280
3	$320
4	$360
5	$400
6	$440
7	$480
8	$520
9	$560
10	$600

Para graficar en un plano cartesiano, el número de canales será x y el costo a pagar y.

Graficando la función para los primeros 10 canales Premium



En la gráfica se puede observar que se tiene un comportamiento ascendente, de manera uniforme, si unimos los puntos se tendría una RECTA, por lo que decimos que presenta un comportamiento lineal.

Valorando lo que sabes

Dadas las siguientes tablas, identifica aquellas que presentan un comportamiento lineal, dando una explicación.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81

b)

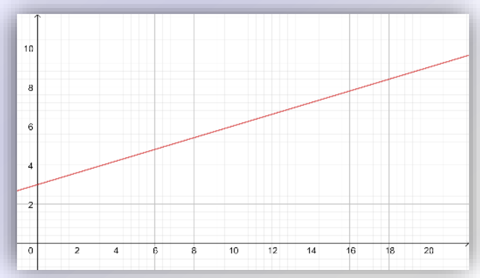
x	0	1	3	4	7	8	10	12	15
y	5	8	14	17	26	29	35	41	50

c)

x	2	5	6	8	11	12	14	18	23
y	7	10	11	13	16	17	19	23	28

Lo lineal y lo no lineal

Toda expresión lineal se puede representar por medio de la gráfica de una recta.



¿Cómo determinar si una expresión es lineal o no lo es?

Para *expresiones algebraicas* el grado del exponente debe ser 1, en caso contrario, la expresión será no lineal.

Ejemplos de expresiones lineales

a) $6l$
b) $2 + 3x$
c) $\frac{1}{4}m - 8$
d) $4 - r$

El exponente de cada expresión es 1

Ejemplos de expresiones no lineales

a) $3l^2$
b) $x^2 - 3x + 5$
c) $m^3 - 1$
d) $2r - 4r^4$

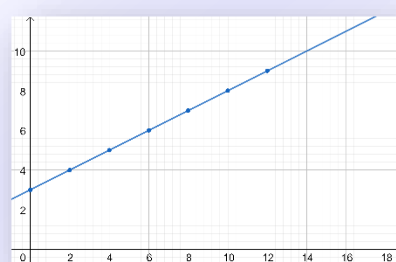
El exponente de cada expresión NO ES 1

Para el caso de *tablas* se puede determinar si se trata de una expresión lineal de dos maneras; una es graficando los puntos de la tabla y en la gráfica se observará si presenta un comportamiento lineal; la otra forma es determinando la constante de proporcionalidad, este tema se verá en el siguiente bloque.

Ejemplos:

a)

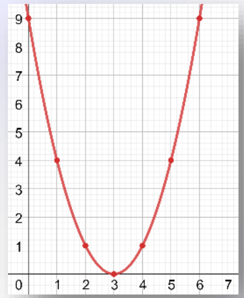
x	0	2	4	6	8	10	12
y	3	4	5	6	7	8	9



Por lo que SI es lineal

b)

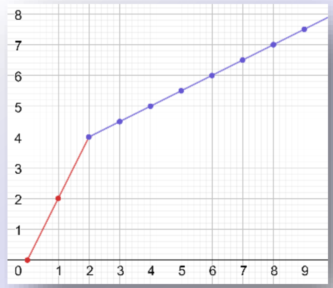
x	0	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0	1	4	9



Por lo que NO es lineal

c)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	2	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7



Por lo que NO es lineal

Para saber más

Fenómenos lineales

Gráficas de fenómenos lineales

Manos a la obra

I. Determina que expresiones algebraicas son lineales

1) $2c + \frac{1}{2}$
2) $3 - 5n$
3) $4x^2$
4) $2a - 7$
5) $r^3 + 2r - 9$
6) $z - 6z^2$
7) $2x^4 + 8x^3$
8) $\frac{f}{4} + 6$
9) $\frac{2}{3}v^4 + 11$
10) $3 - 0.8m$

II. Dadas las siguientes tablas, traza la gráfica e indica si es lineal

a)

x	0	1	3	4	6
y	1	2	10	17	37

b)

x	1	3	4	6	7	9
y	0	2	3	5	6	8

c)

x	0	1	3	4	7	9	12	16
y	0	1	1.7	2	2.6	3	3.5	4

d)

x	1	2	3	4	6	8	9
y	3	2	1	3	5	7	8

Existen varias situaciones en nuestra vida que se pueden representar linealmente y es posible generalizarlo creando modelos algebraicos llamados modelos lineales.

Ejemplos:

Al dueño de un terreno rectangular de 100 x 50m se le va a adicionar un tramo más que le otorgó el gobierno municipal (ver figura), pero aún no le definen cuantos metros más le van a ceder. Determina la expresión del perímetro total, tomando como incógnita lo que le van a ceder

Solución

Perímetro: $P = 100 + 50 + 100 + x + 50 + x$

Reduciendo términos semejantes

$$P = 2x + 300$$

Determina una expresión para cercar los lados del nuevo tramo de terreno excepto el que colinda con su terreno.

Cerca: $C = x + 50 + x$

Reduciendo términos semejantes

$$C = 2x + 50$$

Si al dueño le informan que le pueden donar 20m o 30m. Calcula la cantidad mínima y máxima de la longitud de la cerca.

$$C = 2x + 50$$

Para $x = 20$ $\quad C = 2(20) + 50 = 90$

Por lo que la longitud mínima de la cerca será de 90m

Para $x = 30$ $\quad C = 2(30) + 50 = 110$

Por lo que la longitud máxima de la cerca será de 110m

En la ciudad de México para este año el banderazo de salida es de $13.10 pesos, $1.30 pesos por cada 45 segundos.

a) Escribe una expresión algebraica para la tarifa de cobro para cualquier tiempo

b) ¿Cuánto pagaría un usuario si el recorrido tardó 18 minutos?

El cobro inicial es de$13.10 más $1.30 por cada 45 segundos de viaje

Convirtiendo los segundos a minutos $\frac{45}{60} = 0.75$ minutos

$$P = 13.10 + 1.30\left(\frac{t}{0.75}\right)$$

Para un viaje de 18 minutos el pago del pasaje será

$$P = 13.10 + 1.30\left(\frac{18}{0.75}\right)$$

$$P = 13.10 + 31.2$$

$$P = \$\,44.3 \text{ pesos}$$

Manos a la obra

1. Una especie de planta durante los primeros 30 días crece aproximadamente 1cm cada cuarto día.

a) ¿Cuánto habrá crecido el 20 días?

b) ¿Cuánto crecerá durante los primeros 30 días?

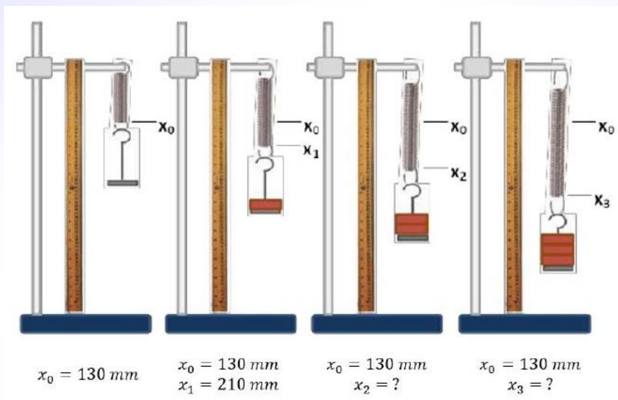
c) Expresa este crecimiento en lenguaje matemático del crecimiento de la planta por día.

2. Una fábrica de ventanas debe obtener un modelo matemático para programarlo en su fresadora con la siguiente especificación:

la altura de la ventana debe ser el doble que el ancho.

a) Determina el modelo que permite calcular el marco de la ventana.
c) Cuanto material se necesitará para una ventana que tenga un ancho de 0.8 metros.

3. Observa la siguiente figura de un portapesas. Cuando el portapesas no tiene peso, el indicador marca sobre la regla 130 mm; después de colocarse 40 gramos, el indicador marca 210 mm.



a) ¿Cuál será la marca del indicador si se colocan 80 gramos en el portapesas?
b) ¿Cuántos gramos se tienen que poner en el portapesas para que el indicador marque 300 milímetros?

4. El parque de diversiones cobra la entrada en $100.00 por persona para disfrutar de las instalaciones, dándote derecho a una tarifa especial de $35.00 por juego mecánico. En caso de que no desees pagar la entrada el precio por juego mecánico es de $60.00 pesos. Escribe el modelo algebraico que representa cada caso para cualquier número de juegos (j)

5. Se apilan troncos de tal manera que el siguiente nivel siempre tendrá un tronco menos que el nivel anterior.
   a) Realice una gráfica para cada nivel si la base tiene 10 troncos y determine si es una representación lineal.
   b) ¿Cuántos troncos habrá?

6. Miguel un chico de 12 años se encontró con $20 pesos en la calle, él pensó que podría hacer rendir ese dinero, por lo que decidió vender jícama con chile y limón por lo que hizo dos bolsas de jícama con ese dinero. El vendió las dos bolsas de jícama ese día, a $20 pesos cada bolsa. Por lo que decidió reinvertir todo el dinero, teniendo para el segundo día 4 bolsas de jícamas, vendiendo todas las bolsas a $20 pesos cada bolsa. Miguel decide reinvertir nuevamente todo el dinero, por lo que para el tercer día hizo 8 bolsas de jícama y lo vendió todas las bolsas al mismo precio de los días anteriores.

Si consideramos que Miguel todos los días vende todas las bolsas de jícama que hace y que todo el dinero lo reinvierte para hacer nuevas bolsas de jícama, además suponemos que el costo de los insumos no cambia.

I. Determine la cantidad de bolsas de jícama que venderá en
   a) 8 días
   b) 15 días
   c) 30 días

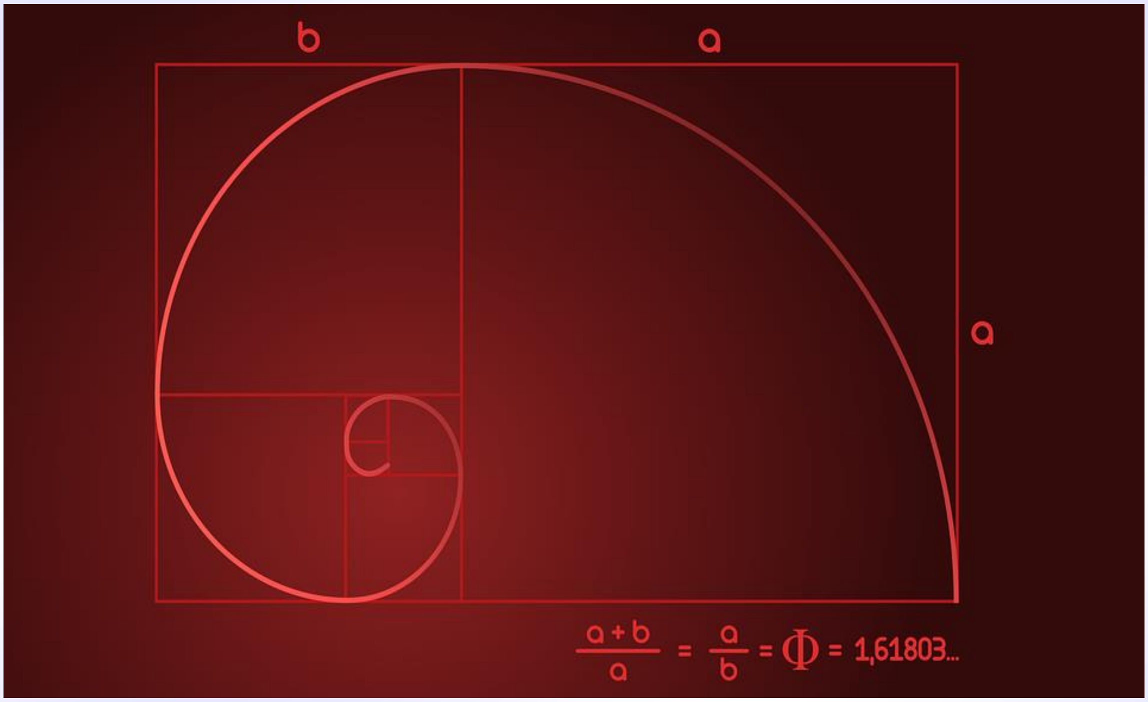
II. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de
   a) 15 días?
   b) 30 días?

III. Realiza dos tablas para los primeros 8 días donde se muestre:
   a) El *número de días* y el *número de bolsas vendidas*
   b) El número de bolsas vendidas y el *costo de venta*

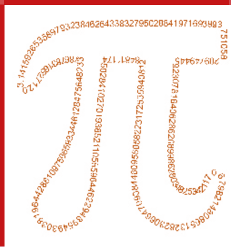
Evaluando tus aprendizajes

Da clic sobre cada cuadro y realiza el ejercicio

V. EXPRESAS FENOMENOS DE PROPORCIONALIDAD



APRENDIZAJES ESPERADOS



- Expresa, de forma coloquial y escrita, fenómenos de proporcionalidad directa de su vida cotidiana con base en prácticas como: comparar, equivaler, medir, construir unidades de medida, entre otras.
- Caracteriza una relación proporcional directa.
- Resignifica en contexto al algoritmo de la regla de tres simple.
- Expresa, de manera simbólica, fenómenos de naturaleza proporcional en el marco de su vida cotidiana.

Durante la primaria aprendimos que, para repartir un pastel, se pueden cortar en rebanadas y cada uno obtendríamos una "fracción" de ese pastel. Así, si éramos 10 niños, el pastel se dividía en 10 rebanadas tocándonos una rebanada de ese delicioso pastel. Por lo que se puede exprear como:

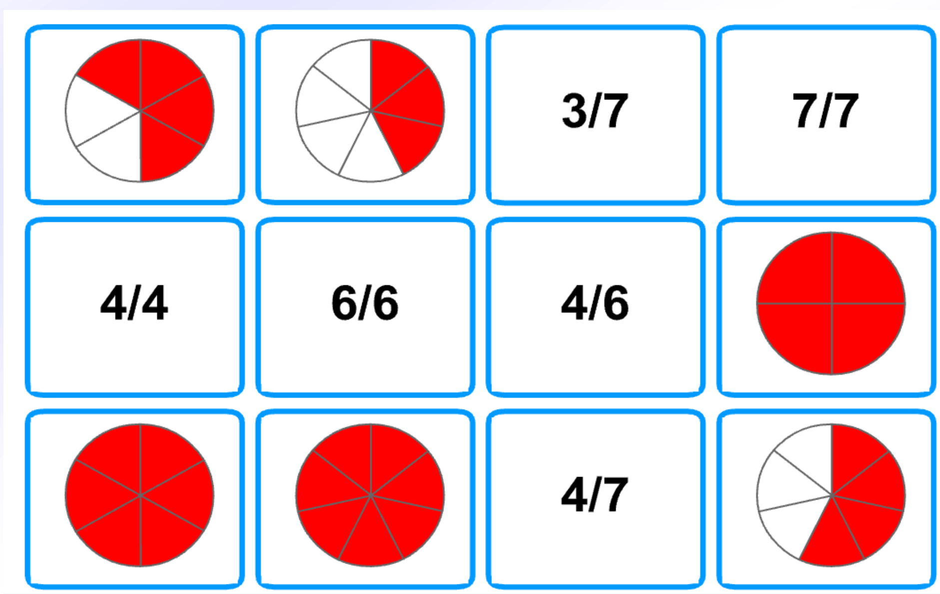
$\frac{1}{10}$ Un décimo

Pero si alguno de mis compañeros no quisiera y me diera su rebanada, entonces, obtendría 2 pedazos de 10, por lo que puedo expresarlo como:

$\frac{2}{10}$ Dos décimos

Valorando lo que sabes

1. Relaciona el gráfico con su fracción correspondiente.



2. Determina si las siguientes fracciones son equivalentes y explica como lo determinaste

   $a)$ $\frac{1}{4}$ y $\frac{4}{16}$

   b) $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$

   c) $\frac{9}{21}$ y $\frac{3}{7}$

   d) $\frac{7}{12}$ y $\frac{3}{5}$

3. El precio de 5 lápices es $30 pesos. ¿Cuál será el precio de 3 lápices?

4. El total de estudiantes de una escuela primaria es de 260 alumnos, si el 52% son niñas. Calcula la cantidad de niños que hay

Esta relación entre estas dos cantidades se puede expresar mediante una **razón**, mejor conocida por todos nosotros como **fracción**, aunque la fracción se limita a dividir un así, si quiero expresar que me dieron una rebanada de pastel de los 10 pedazos disponibles, entonces lo expreso como:

$$\frac{1}{10}$$

Pero si alguno de mis compañeros no quisiera y me diera su rebanada, entonces, obtendría 2 pedazos de 10, por lo que puedo expresarlo como:

$$\frac{2}{10}$$

Debido a que al dividir numerador y denominador entre 2, se obtiene un número entero, es posible simplificar la fracción.

$$\frac{2 \div 2}{10 \div 2} = \frac{1}{5}$$

Razones

Una **razón** indica en forma de división la relación entre dos cantidades. Se puede expresar generalmente como:

$$\frac{a}{b}$$

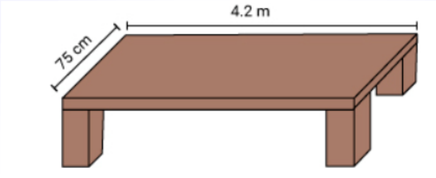
Otra manera de expresar una razón es usando dos puntos $a{:}b$ se lee: a es a b .

A continuación, se dan algunos ejemplos de la vida cotidiana donde se usa la razón

- Un informe de la ONU muestra que dos de cada tres personas carecen de acceso a la justicia.
- Todas las pantallas planas tienen una relación entre su largo y su ancho de 16:9
- En una bolsa de frutas por cada 5 manzanas hay 3 peras.
- La escala de un mapa es de 1:100 000

Veamos los siguientes ejemplos de aplicación

1. Calcula la razón entre el ancho y el largo de la mesa en centímetros de la siguiente figura



Ancho de la mesa: 75 cm

Largo de la mesa: 4.2 m = 420 cm

Así la razón entre el ancho y el largo será:

$$\frac{75\ cm}{420\ cm} = \frac{15}{84} \text{ o } 15:84$$

2. La matrícula de estudiantes en una escuela es de 350, si el número de niños es de 150. ¿Cuál es la razón del total de niños al total de niñas?

Total de niños: 150

Total de niñas: 350 – 150 = 200

Así la razón entre el total de niños y el total de niñas será:

$$\frac{150}{200} = \frac{3}{4} \text{ o } 3:4$$

Es decir que, por cada 3 niños hay 4 niñas

3. En un estacionamiento hay 62 carros y 18 camionetas ¿Cuál es la razón entre el número de carros y camionetas?

Total de carros: 62

Total de camionetas: 18

Así la razón entre el total de carros y camionetas será:

$$\frac{62}{18} = \frac{31}{9} \text{ o } 31:9$$

Es decir que, por cada 31 carros hay 9 camionetas

4. En un curso, la razón entre la cantidad de hombres y de mujeres es 2 : 1. Si hay 18 hombres. ¿Cuántas mujeres hay en el curso?

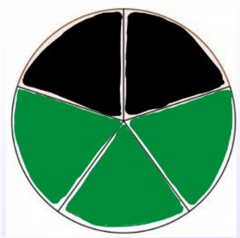
La razón 2 : 1, indica que por cada 2 hombres en el curso solo hay 1 mujer, por lo que para determinar la cantidad de mujeres se divide

$$\frac{18}{2} = 9$$

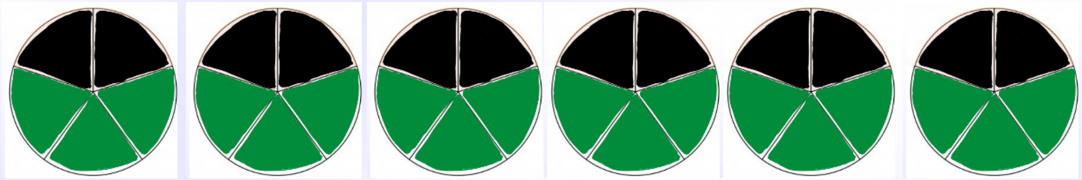
Por lo que hay 9 mujeres en el curso

5. En una canasta hay 30 esferas verdes y negras. La razón entre el número de esferas vedes y las esferas negras es de 3 : 2. Calcula la cantidad de esferas de cada color.

Por cada 3 esferas verdes hay 2 esferas negras, si se representa en de la siguiente manera:



Se puede observar que en total suman 5. Por lo que para llegar a 30 se necesitan 6.



Contando la cantidad de verdes se tiene 18 y la cantidad de negros 12

Así el total de esferas verdes son 18 y de esferas negras 12

El procedimiento anterior es de manera gráfica, pero se puede hacer de forma aritmética de la siguiente manera

$$\text{Esferas verdes}= \frac{(razón\ de\ esferas\ verdes)(total\ de\ esferas)}{suma\ de\ las\ razones}$$

$$\text{Esferas verdes} = \frac{(3)(30)}{3+2} = \frac{90}{5} = 18 \text{ esferas verdes}$$

$$\text{Esferas negras} = \frac{(razón\ de\ esferas\ negras)(total\ de\ esferas)}{suma\ de\ las\ razones}$$

$$\text{Esferas negras} = \frac{(2)(30)}{3+2} = \frac{60}{5} = 12 \text{ esferas negras}$$

6. Un electricista al contratar a su nuevo ayudante le ha dicho que por cada trabajo que cobren se repartirán siempre en la razón 5 : 2.
   En el primer trabajo el electricista cobro 900 pesos. ¿Cuánto le corresponde a su ayudante?

   Usando la "fórmula" anterior se tiene:

$$\text{Cobro del ayudante}= \frac{(razón\ del\ ayudante)(cobro\ realizado)}{suma\ de\ las\ razones}$$

$$\text{Cobro del ayudante}= \frac{(2)(900)}{5+2} = \frac{1800}{7} = 257.14\ pesos$$

Para saber más

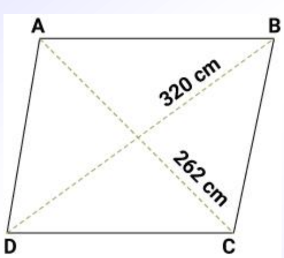
PruébaT Las razones 1 (video)

PruébaT Las razones 2 (video)

Manos a la obra

1. María tiene en su pecera 60 peces, de los cuales 20 son machos. ¿Cuál es la razón de peces macho a peces hembra en su pecera?

2. ¿Cuál es la razón de la diagonal $\overline{AC}$ a la diagonal $\overline{BD}$?



3. En una urna se tienen 432 fichas de colores, de las cuales 126 son azules y el resto verdes. ¿Cuál es la razón de fichas azules a verde?

4. Alex y Mariela guardaron $6,500 en una cuenta de ahorro en el banco. Si el ahorro de Mariela es de $1,500, ¿cuál es la razón del ahorro de Mariela al ahorro de Alex?

5. Un terreno rectangular tiene perímetro 1600 metros. Si tiene 200 metros de ancho. Calcula la razón entre largo y ancho.

6. Dos trabajadores, A y B, reciben como pago por un trabajo $7 500. Si A trabajó 2 días y B trabajó 3 días, ¿cuánto le corresponde a cada uno, respectivamente?

7. El perímetro de una cancha de fútbol mide 432 metros. Si la razón entre el ancho y el largo es 5 : 7, ¿cuánto mide cada lado de la cancha?

8. En la farmacia «Tu Salud» la razón entre el medicamento para la tos de adultos y niños que venden en un mes es de 2 : 5. Si vendieron 1 330 medicamentos para la tos de adulto ¿cuántas medicamentos para la tos de niño vendieron?

9. El mapa indica que la escala en centímetros con que está hecho es 1: 100 000. Por lo tanto, ¿cuántos kilómetros de largo tiene en la realidad un río que en el mapa mide 12 cm?

10. Las edades de dos hermanos son entre sí como 2 : 3 y ambas edades suman 25 años, ¿cuál es la edad de cada uno?

Evaluando tus aprendizajes

Razones 1 — PruébaT

Razones 2

Razones 3

Proporciones

En nuestra vida cotidiana existen muchas situaciones en donde se tiene que usar las proporciones.

Veamos el siguiente ejemplo, para realizar un litro de refresco natural se tienen que añadir 4 cucharadas de azúcar, pero si ahora necesitamos hacer 4 litros, seguramente a través de un cálculo sencillo encontraras que se necesitan 16 cucharadas de azúcar.

Otro ejemplo, para preparar dos jarras de refresco de naranja (naranjada) se necesitan 3 vasos de jugo de naranja y 5 vasos de agua. ¿Cuántos vasos de jugo se necesitarán si se quieren preparar 5 jarras?

Hay más de una manera de dar la respuesta. Veamos la siguiente forma

Si 3 vasos de jugo son para 2 jarras,

entonces para 5 jarras se necesitan ¿? vasos

Por lo tanto, para 5 jarras se necesitan 7 vasos y medio de jugo de naranja

Este procedimiento fue realizado de manera esquemática, pero es posible realizarlo matemáticamente a través de las razones.

Si 3 vasos de jugo son para 2 jarras, entonces se necesitan x vasos para 5 jarras

$$\begin{array}{ccc} \text{Vasos} & & \text{Jarras} \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ x & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

La razón de vasos a jarras es $3 : 2$ o $\frac{3}{2} = 1.5$ vasos de jugo por cada jarra

Así, para saber cuántos vasos de jugo se necesitan para 5 jarras, se multiplica el valor de la razón por la cantidad de jarras

$$1.5(5) = 7.5$$

Es decir, se necesitan 7 vasos y medio de jugo.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Sean a, b, c y d cuatro cantidades. La igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se denomina proporción. Se lee: a es a b como c es a d.

Nota: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$

Resolvamos el ejemplo anterior usando las proporciones

Para preparar dos jarras de refresco de naranja (naranjada) se necesitan 3 vasos de jugo de naranja y 5 vasos de agua. ¿Cuántos vasos de jugo se necesitarán si se quieren preparar 5 jarras?

$$\begin{array}{ccc} \text{Vasos} & & \text{Jarras} \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ x & \longrightarrow & 5 \end{array}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$$

$$(3)(5) = (2)(x)$$

$$15 = 2x$$

$$x = \frac{15}{2}$$

$$x = 7.5$$

Como se observa, se obtiene el mismo resultado, a este tipo de proporciones se les conoce como **proporcionalidad directa**.

Proporcionalidad directa

La proporcionalidad directa es un caso particular de variaciones lineales. Podemos usar el factor constante de proporcionalidad para expresar las relaciones entre las magnitudes.

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si el cociente (división) entre los valores respectivos de cada una de las variables es constante.

Uno de los usos que tiene la proporcionalidad directa es para la conversión entre unidades físicas, seguramente en algún momento has tenido que convertir de metros a centímetros, de horas a minutos o de metros a kilómetros, este tipo de conversiones y otros cumplen con el principio de proporcionalidad directa. Más adelante se verá un caso de esta situación.

Veamos el siguiente caso. Decides ir a comprar tacos al pastor con un amigo. En el menú aparece el precio del taco de pastor $15 pesos.

Si tu pides 4 tacos y tu amigo 6 tacos ¿Cuánto pagara cada uno?

Si un taco vale $ 15, entonces 4 tacos valdrán 4 veces $ 15 pesos, matemáticamente sería 4 * 15 = 60 y tu amigo pagará 6*15=90

De esta manera se puede aplicar el mismo razonamiento y operación similar para cualquier cantidad de tacos. En esta situación **al aumentar el número de tacos también aumenta el precio a pagar.**

Algunas taquerías realizan una tabla similar a esta para saber cuánto cobrar de acuerdo con el número de tacos.

Tacos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Precio	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

De la tabla anterior se puede observar que cumple con una **progresión aritmética**, para este tipo de situaciones se cumplirá la **proporcionalidad directa**, ya que se cumple la igualdad de las razones.

$$\frac{15}{1}=\frac{30}{2}=\frac{45}{3}=\frac{60}{4}=\frac{75}{5}=\frac{90}{6}=\frac{105}{7}=\frac{120}{8}=\frac{135}{9}=\frac{150}{10}=\frac{165}{11}=\frac{180}{12}=\frac{195}{13}=\frac{210}{14}=\frac{225}{15}=15$$

La relación entre las cantidades se denomina constante de proporcionalidad y se denota generalmente con la letra k.

Para el ejemplo anterior k=15

Con esta constante se puede obtener un modelo matemático para obtener el precio de tacos al pastor.

$$\boldsymbol{P = 15t}$$

Donde:

P: precio

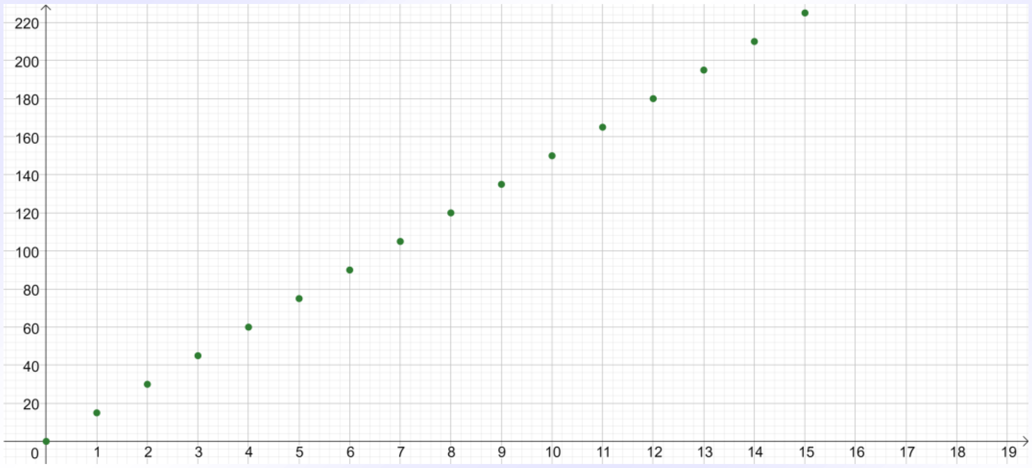
t: tacos

Para conocer el precio de 35 tacos entonces se tiene

$$P = 15(35)$$

$$P = 525 \text{ pesos}$$

Al graficar situaciones con proporcionalidad directa se obtendrá siempre una **RECTA**



Compara la tabla anterior con la gráfica, el $eje\ x$ representa la cantidad de tacos y el $eje\ y$ el precio a pagar.

El modelo matemático que representa a una proporción directa es:

$$\boxed{y = kx}$$

Donde k es la constante de proporcionalidad

Para preparar una comida con pescado se deben cumplir la siguiente relación entre el número de porciones y la cantidad de pescado a utilizar. La receta marca que para tres porciones se necesita $\frac{1}{4}$ kg de pescado. Completemos la siguiente tabla

Cantidad de porciones	3	2	4	6	8	1	10
Cantidad de pescado necesario (en kg)	$\frac{1}{4}$						

Se tiene una situación de proporcionalidad directa.

Porciones Pescado

3 ———— $\frac{1}{4}$

2 ———— x

Resolviendo

Porciones		Pescado	
3	———	$\frac{1}{4}$	se puede expresar como $3:\frac{1}{4}=2:x$
2	———	x	o también como $\frac{3}{1/4}=\frac{2}{x}$

$\frac{3}{1/4}=\frac{2}{x}$ Para resolver se multiplica cruzado (regla de 3)

$3x=2\left(\frac{1}{4}\right)$

$3x=\frac{1}{2}$ Despejando x

$x=\frac{1}{2(3)}=\frac{1}{6}$ Para dos porciones se requerirá $\frac{1}{6}$ kg de pescado

Es posible encontrar un modelo matemático que permita calcular la cantidad de pescado necesario con relación al número de porciones, por lo que es necesario hallar el valor de la constante de proporcionalidad.

Dividimos $\frac{1}{4}$ por 3, por lo que se tiene $\frac{1/4}{3}=\frac{1}{12}$ este será la constante de proporcionalidad, así $k=\frac{1}{12}$

Por lo que el modelo matemático será:

$$p=\frac{1}{12}c$$

Donde:

p: pescado en kg
c: cantidad de porciones

$$p=\frac{1}{12}c$$

Para 4 porciones

$$p=\frac{1}{12}(4)=\frac{1}{3}\text{kg}$$

Para 6 porciones

$$p=\frac{1}{12}(6)=\frac{1}{2}\text{kg}$$

Para 8 porciones

$$p=\frac{1}{12}(8)=\frac{2}{3}\text{kg}$$

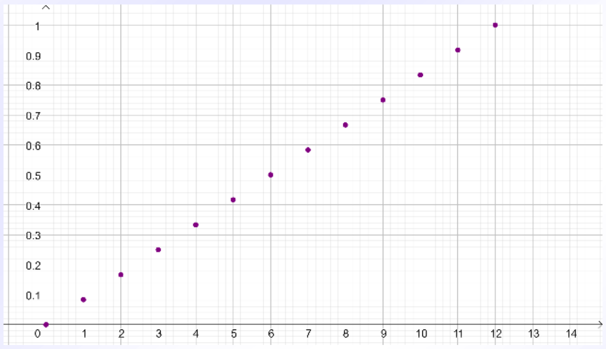
Para 1 porción

$$p=\frac{1}{12}(1)=\frac{1}{12}\text{kg}$$

Para 10 porciones

$$p = \frac{1}{12}(10) = \frac{5}{6}\text{kg}$$

Graficando



Se puede observar que sigue una gráfica lineal y se puede ampliar para tantas porciones como se requiera.

Uno de los usos más comunes de la proporcionalidad directa es calcular un valor faltante con base a los otros datos dados.

Realizaremos los siguientes ejercicios

Si 12 bolas de acero iguales tienen un peso de 7.2 kilogramos, ¿cuánto pesarán 30 bolas iguales a las anteriores?

Bolas		peso
12	————	7.2
30	————	x

Multiplicando cruzado (regla de 3)

Bolas	peso
12	7.2
30	x

$12x = 30(7.2)$

$12x = 216$ Despejando x

$x = \frac{216}{12} = 18$

30 bolas de acero pesaran 18 kg

El tipo de cambio del dólar es de 20.5 pesos, si cambió 1000 pesos ¿Cuántos dólares recibiré?

Dólar		Peso
1	$\longrightarrow$	20.5
x	$\longrightarrow$	1000

Multiplicando cruzado

$$20.5x = 1(1000)$$

$$20.5x = 1000$$ Despejando x

$$x = \frac{1000}{20.5} = 48.78 \text{ dls}$$

Tres fotografías valen 60 pesos, cinco fotografías cuestan 90 pesos. Razona si el número de fotografías es directamente proporcional a su precio.

Para que sea proporcional se debe cumplir la igualdad de razones

Así

3 : 60 debe ser igual a 5 : 90

$\frac{3}{60} = 0.05$ y $\frac{5}{90} = 0.0\overline{5}$ por lo tanto no son directamente proporcionales

Para saber más

PruébaT Proporcionalidad directa (video)

PruébaT Constante de proporcionalidad directa

Manos a la obra

1) Marco gana $25 por cada 2 horas de trabajo. Si trabaja por 12 horas, ¿cuánto ganará?

2) Marta ha cobrado por repartir propaganda durante cinco días $1260. ¿Cuántos días deberá trabajar para cobrar $3402?

3) En un plano de una ciudad, una calle de 350 metros de longitud mide 2.8 cm. ¿Cuánto medirá sobre ese mismo plano otra calle de 200 metros?

4) En una panadería, con 80 kilos de harina hacen 120 kilos de pan. ¿Cuántos kilos de harina serían necesarios para hacer 100 kilos de pan?

5) En una fábrica automovilística, una máquina pone, en total, 15 000 tornillos en las 8 horas de jornada laboral, funcionando de forma ininterrumpida. ¿Cuántos tornillos pondrá en 3 horas?

6) Un coche ha tardado 42 minutos en recorrer 70 km. Suponiendo que va a la misma velocidad,
a) ¿Cuánto tardará en recorrer 150 km?
b) ¿Cuántos kilómetros recorrerá en dos horas y tres minutos?

7) Un automóvil ha tardado en hacer el recorrido Campeche-Mérida en dos horas y cuarto a una velocidad media de 100 km/h. ¿Cuánto tardará un autobús a una media de 90 km/h?

8) Diego tenía que resolver 20 problemas de matemáticas.

a) Si resolvió bien el 30% de los problemas, ¿cuántos hizo correctamente?

b) ¿Cuántos tendría que haber resuelto correctamente para que el porcentaje de problemas bien hecho hubiera sido del 85%?

9) Si en cierta tienda tenían rebajas del 20% y me rebajaron un abrigo 150 pesos, ¿qué precio tenía el abrigo? ¿Cuánto me cobraron?

10) Con las últimas lluvias el agua embalsada de un pantano ha aumentado el 27%. Si el agua embalsada es de 431.8 hl, ¿cuánta agua tenía antes de las lluvias?

11) He conseguido que me rebajaran la nevera un 18%, con lo que me ha costado 620 pesos. ¿Cuánto valía antes de la rebaja?

12) Los padres de Marina y Pablo han repartido entre ellos $3000 en dos partes directamente proporcionales a sus años. Si Marina tiene 14 años y Pablo 6, ¿cuánto le ha correspondido a cada uno de ellos?

13) Se ha encargado a un orfebre el diseño y la fabricación de un trofeo que ha de pesar 5 kg y ha de estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?

14) Para alimentar a 30 perros se necesitan 45 kg. de comida. Si llegan 12 perros más, ¿Cuánta comida necesitamos?

15) Algunos médicos para conocer el número de latidos del corazón por minuto solo miden el número de latidos por ciertos segundos. Si mide 25 latidos durante 20 segundos de un paciente ¿Cuál será el número de latidos por minuto?

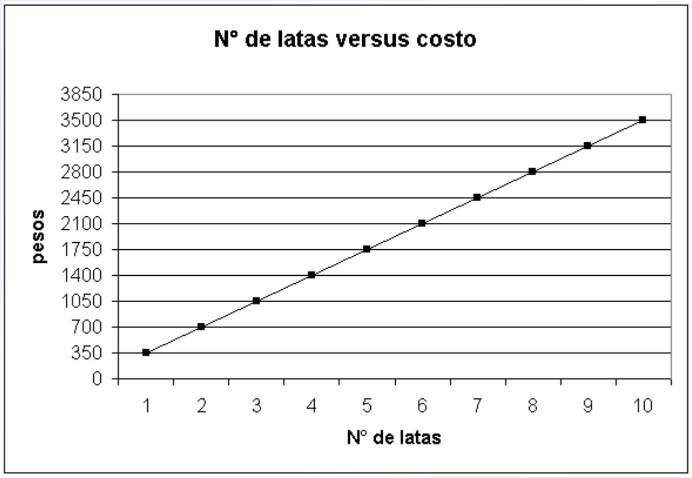
16) Supón que existe la proporcionalidad directa, completa la tabla y halla el valor de la constante de proporcionalidad

Tiempo (hrs)		3	4	6		10
Distancia (km)	21		42		94.5	

17. Un camión avanza por una carretera a 50 km/h. Completa la siguiente tabla que relaciona la distancia recorrida con el tiempo invertido:

TIEMPO (horas)	1	2	3	5	1/2	1/4
DISTANCIA (kilómetros)	50					

18) A continuación se presenta una gráfica del número da latas y su costo



Determina el valor de la constante de proporcionalidad

19) En los bancos, supermercados, etc. se junta gran cantidad de monedas. Como se pierde mucho tiempo contándolas, en general, se pesan bolsas de monedas. Supongamos que se tienen los siguientes datos.

Peso de la bolsa (gr)	Valor monetario ($)
550	1 100
850	1 700
1250	2 500
1300	2 600
1850	3 700
2000	4 000
2250	4 500

¿Existe proporcionalidad directa entre el peso de las bolsas y valor monetario de ellas?

Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto entre los valores respectivos de cada una de las variables es constante.

Las proporcionalidades inversas se caracterizan en que un valor aumenta y el otro disminuye.

Veamos el siguiente ejemplo

En una fábrica se debe tener una producción diaria de 2 toneladas, está producción se realiza con 4 máquinas. Si se debe cumplir con la producción diaria de 2 toneladas ¿Qué cantidad debe producir cada máquina para las siguientes condiciones?

Para esta situación se tiene una proporcionalidad inversa ya que si disminuyen la cantidad de maquinas cada una tendrá que aumentar su capacidad de producción.

Máquinas funcionando	4	3	2	1
Toneladas producidas por máquina	0.5	0.67	1	2

Si se multiplica las maquinas funcionando por las toneladas producidas por máquina se obtendrá un valor constante.

$$(4)(0.5) = (3)(0.67) = (2)(1) = (1)(2) = 2$$

De esta manera comprobamos que se trata de una **proporcionalidad inversa**.

La relación entre las cantidades se denomina constante de proporcionalidad y se denota generalmente con la letra k.

Para el ejemplo anterior k=2

Con esta constante se puede obtener un modelo matemático para obtener la cantidad de producción por cada máquina.

$$\boldsymbol{P = \frac{k}{m}}$$

Donde:

P: producción por máquina en toneladas
m: máquinas funcionando

Así: Si funcionan 4 máquinas se tendrá una producción por máquina de :

$$P = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ toneladas}$$

Si funcionan 3 máquinas se tendrá una producción por máquina de:

$$P = \frac{2}{3} = 0.67 \text{ toneladas}$$

Si funcionan 2 máquinas se tendrá una producción por máquina de:

$$P = \frac{2}{2} = 1 \text{ tonelada}$$

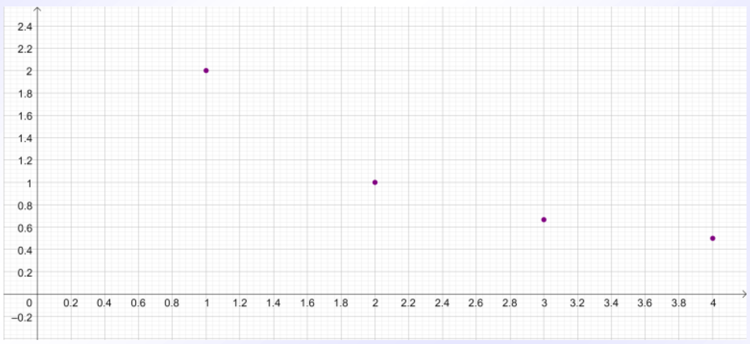
Si funciona 1 máquina se tendrá una producción por máquina de:

$$P = \frac{2}{1} = 2 \text{ toneladas}$$

Podemos verificar los resultados en la tabla anterior.

Es importante

Al graficar situaciones de proporcionalidad inversa se obtendrá siempre una curva



El modelo matemático que representa una situación de proporcionalidad inversa está dada por:

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

Al iniciar un campamento con 4 amigos, había víveres para 20 días. Conforme pasaron los días fueron llegando más amigos, pero la cantidad de víveres no cambió. Completa la siguiente tabla para saber cuántos días les durarán los víveres de acuerdo con la cantidad de amigos que se reúnan. Considera que a todos se les otorga la misma cantidad de víveres.

Número de amigos	4	5	7	8	10
Días para los que alcanzan los víveres	20				

Primero hay que identificar si se trata de una proporcionalidad inversa, para ello se debe cumplir que si disminuye un valor aumenta el otro o viceversa.

Para este caso a mayor número de amigos los días que alcanzaran los víveres será menor. Por consiguiente, se trata de un caso de proporcionalidad inversa

Obtenemos el valor de la contante de proporcionalidad inversa

Multiplicamos el número de amigos por los días.

Así:

$$k = (4)(20) = 80$$

Para obtener los días que alcanzaran los víveres dividimos la constante de proporcionalidad por los números de amigos

Para 5 amigos se tiene $\frac{80}{5} = 16$ días

Para 7 amigos se tiene $\frac{80}{7} = 11.4$ días

Para 8 amigos se tiene $\frac{80}{8} = 10$ días

Para 10 amigos se tiene $\frac{80}{10} = 8$ días

Completando la tabla con los valores obtenidos

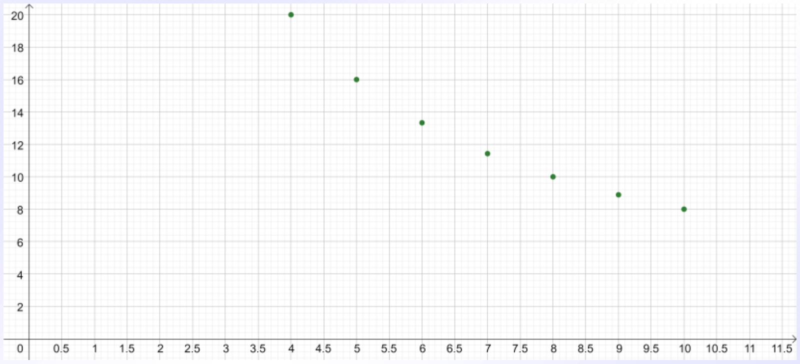
Número de amigos	4	5	7	8	10
Días para los que alcanzan los víveres	20	16	11.4	10	8

Obteniendo el modelo matemático para esta situación.

$$\text{Días} = \frac{\text{k}}{\text{número de amigos}}$$ con k = 80

$$D = \frac{80}{a}$$ donde D: días y a: número de amigos

Trazando la gráfica



Como se puede observar en la gráfica representa una curva.

Dos compañeros de clase resuelven una tarea compleja en 18 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en resolver la misma tarea tres compañeros trabajando al mismo ritmo?

Primero identificamos si se trata de proporcionalidad inversa

A mayor número de compañeros el tiempo de resolución disminuye, por lo que sí es proporcionalidad inversa.

Compañeros		Horas	
2	$\longrightarrow$	18	Se multiplica lineal
3	$\longrightarrow$	x	

$(2)(18) = 3x$

$36 = 3x$ Despejando x

$x = \frac{36}{3} = 12$

Por lo que se necesitan 12 hrs si trabajan tres compañeros

Un grupo de alumnos para su viaje de fin de cursos contrata un autobús a precio fijo. Inicialmente iban al viaje 28 alumnos siendo el precio por persona de 100 pesos. Si finalmente hacen el viaje 20 alumnos. ¿Cuánto tiene que pagar cada uno?

Identificamos si se trata de un caso de proporcionalidad inversa; al disminuir el número de alumnos aumenta el costo por persona por lo que si es proporción inversa.

Alumnos		costo	
28	$\longrightarrow$	100	Se multiplica lineal
20	$\longrightarrow$	x	

$(28)(100) = 20x$

$2800 = 20x$ Despejando x

$x = \frac{2800}{20} = 140$ pagará cada alumno 140 pesos

Dos llaves vierten agua de forma constante llenando un depósito en 3 horas, si usamos 5 llaves para llenar ese depósito. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo?

Es un caso de proporcionalidad inversa

Num. llaves		tiempo	
2	$\longrightarrow$	3	Se multiplica lineal
5	$\longrightarrow$	x	

$(2)(3) = 5x$

$6 = 5x$ Despejando x

$x = \frac{6}{5} = 1.2$ se necesitarán 1.2 hrs para llenar el depósito

Para saber más

Proporcionalidad inversa(video)

Regla de tres inversa para que sirve (video)

Manos a la obra

1. Un coche a velocidad de 90 km/h, tarda 30 minutos de ir de una población A a otra B.
Si fuera más deprisa ¿tardaría más o menos en el mismo recorrido?
¿Y si fuera más despacio?

2. A y B son dos variables inversamente proporcionales. Completa la siguiente tabla.

A	9		4	6	
B	4	3			
Constante					36

Traza la gráfica

3. Sabiendo que cuatro tractores aran un campo en 6 horas, completa la siguiente tabla con los tiempos que se tardaría si hubiese otro número de tractores:

Nº DE TRACTORES	4	2	1	3	6	8
TIEMPO (horas)	6					

4. Un profesor compra un paquete de 120 dulces para premiar la resolución de problemas de ingenio matemático. Reparte los caramelos entre los alumnos que lo resuelven bien. Completa la tabla y construye el gráfico

Cantidad de alumnos	2	3	5	8	10	15
Número de caramelos						

5. Tres caballos consumen una carga de heno en 10 días ¿Cuántos días les durará una carga de heno a 6 caballos?

6. En un taller de confección de trajes de noche, si se trabajan 8 horas diarias, tardan 4 días en servir un pedido. ¿Cuánto tardará en servir el pedido si se trabajan 10 horas diarias?

7. Miguel, caminando a 3 km/h, tarda 30 minutos en ir de su casa al colegio. ¿Cuánto tardará si camina a 4 km/h?

8. Con el aceite que contiene un depósito se llenan mil botellas de dos litros. ¿Cuántas garrafas de cinco litros podrían llenarse con ese mismo depósito?

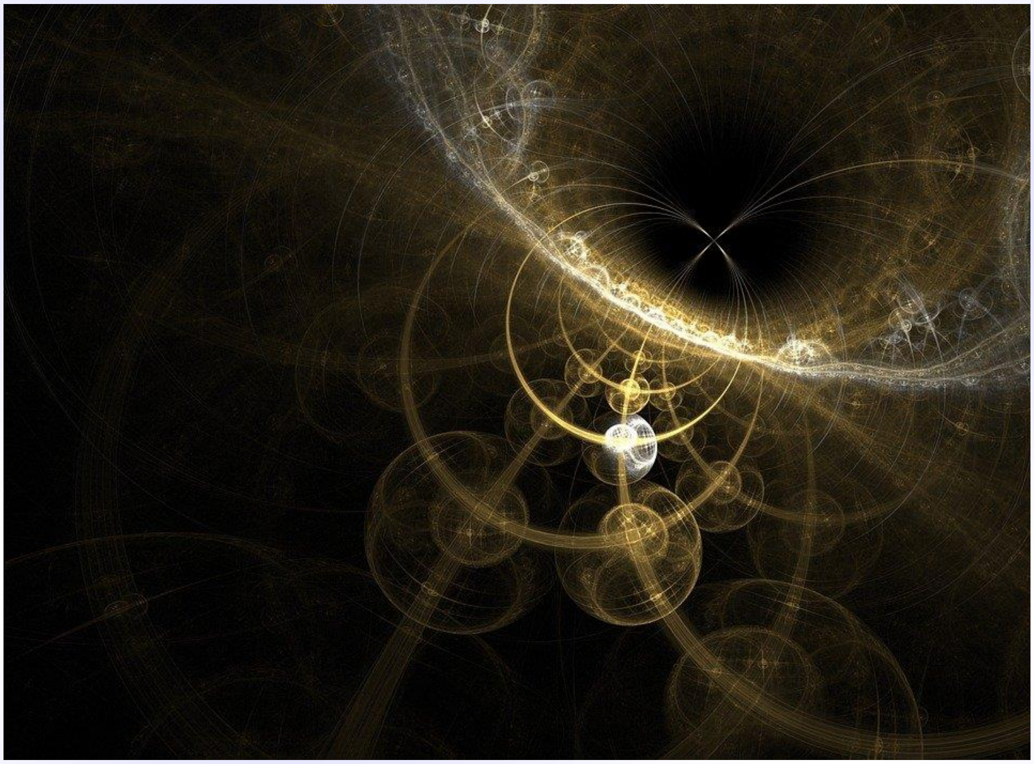
9. Un granjero calcula que en su almacén tiene alimento para dar de comer a sus 18 vacas durante 15 días.

¿Cuánto tiempo le durará el alimento si vende 5 vacas?

10. Un pintor necesita 8 cubetas de 4 litros para pintar una barda, si se usan cubetas de 20 litros ¿Cuántas cubetas se necesitarán?

Evaluando tus aprendizajes

VI. FACTORIZAS POLINOMIOS



APRENDIZAJES ESPERADOS

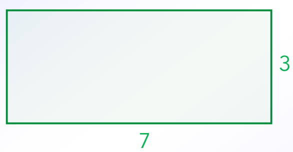
- Opera y factorizan polinomios de grado pequeño

Factorización

La factorización es un procedimiento por el cual se deshace la multiplicación, su importancia es grande ya que permite simplificar fracciones algebraicas, resolver ciertas clases de ecuaciones y en general, dentro del proceso de solución de problemas de diferentes temas de la matemática, ayuda sistemáticamente a encontrar la solución buscada.

La factorización se puede observar en las áreas de cualquier figura geométrica ya que estas son productos de sus lados.

Observa los siguientes ejemplos

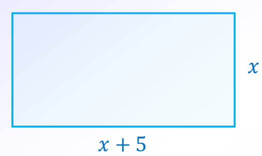


$A = 21 = (7)(3)$

El 21 se descompone en sus factores 7 y 3

Una hoja de papel rectangular cumple con la siguiente condición: El lado mayor es 5cm mayor que el lado menor.

Expresa el área del papel



Sea x el lado menor del rectángulo

Entonces $x + 5$ será su lado mayor

$A = (x)(x + 5)$

Esta es una expresión expresada en factores, por lo que decimos que está factorizada

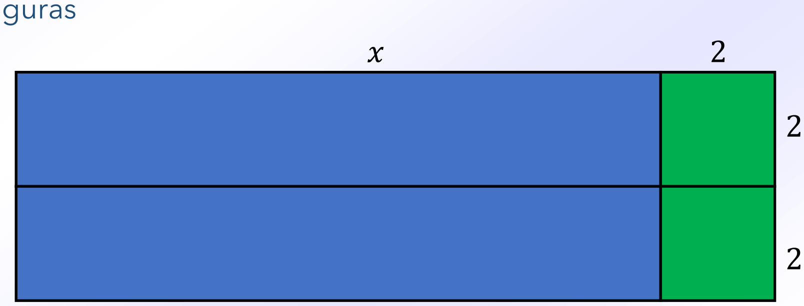
$A = x^2 + 5x$

En estos dos ejemplos la factorización se puede dar con números y con variables.

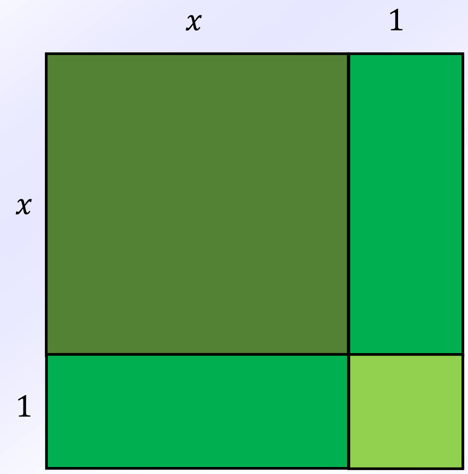
Valorando lo que sabes

Factoriza (expresa en forma de factores) las siguientes expresiones de acuerdo con el área total de las figuras

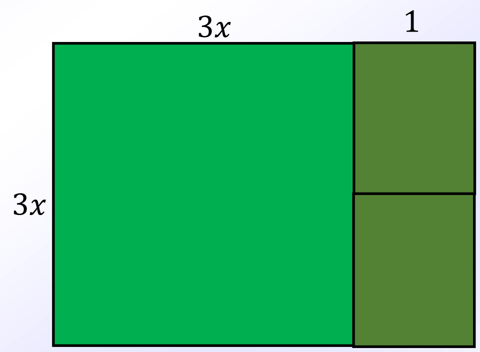
a) $4x + 4$



b) $x^2 + 2x + 1$



c) $9x^2 + 3x$



La factorización o descomposición factorial es el proceso de presentar una expresión matemática o un número en forma de multiplicación.

La factorización se trata por primera vez en aritmética, con el tema de mínimo común múltiplo, ya que consiste en descomponer un número en producto de sus números primos.

Veamos dos ejemplos.

Factoriza el número 36

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \cdot 3^2$

Como el 2 y el 3 se repiten dos veces se puede expresar con la potencia de cuadrado

Factoriza el número 40

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \cdot 5$$

En este ejemplo como el 2 se repite tres veces se puede expresar como el cubo del 2, es decir 2^3

Ahora veamos como factorizar un polinomio, el objetivo de la factorización es llevar un polinomio complicado y expresarlo como el producto de sus factores polinomiales simples.

Métodos de factorización

Para factorizar una expresión algebraica, existen diferentes métodos, los cuales se mencionan a continuación.

Factor Común

Este método consiste en obtener un factor común de cada uno de los términos que conforman la expresión algebraica.

El **factor común** está conformado por el máximo común divisor de los coeficientes numéricos y las variables de menor potencia que aparecen en todos los términos de la expresión.

Procedimiento

Encontramos el factor que es común en todos los términos del polinomio, el factor común puede ser número, letra o ambos (en los coeficientes o números se toma el **mayor divisor** de todos los términos, y en la variables se toma la que se repite en todos los términos y tiene la **menor potencia.**

Ejemplos:

1. Factoriza:

$$12xy^3 + 8x^2y^2 - 32x^3y$$

Paso 1. Obtener el máximo común divisor (M.C.D.) de los coeficientes numéricos (si los hay)

12	8	32	2
6	4	16	2
3	2	8	MCD=2· 2 =4

Paso 2. Determinar la(s) variable(s) en común, de menor potencia, que conforma la expresión.

$$xy$$

Paso 3. Determinar el factor común uniendo lo obtenido en los pasos 1 y 2.

$$4xy \quad \text{(factor común)}$$

Paso 4. Dividir cada término de la expresión entre el factor común.

$$\frac{12xy^3}{4xy} = 3y^2$$

$$\frac{8x^2y^2}{4xy} = 2xy$$

$$\frac{-32x^3y}{4xy} = -8x^2y$$

Paso 5. Dar la respuesta escribiendo el factor común y los términos que se obtuvieron de la división.

$$4xy(3y^2 + 2xy - 8x^2y)$$

2. Factoriza:

$$20m^3n^4p^5 - 30m^6n^2p^3 + 40m^5n^2p^5 - 50m^3n^4p^2$$

Paso 1. Obtener el máximo común divisor (M.C.D.) de los coeficientes numéricos (si los hay)

20	30	40	50	2
10	15	20	25	5
2	3	4	5	MCD=10

Paso 2. Determinar la(s) variable(s) en común, de menor potencia, que conforma la expresión (si lo hay)

$$m^3n^2p^2$$

Paso 3. Determinar el factor común uniendo lo obtenido en los pasos 1 y 2.

$$\boldsymbol{10m^3n^2p^2} \qquad \text{(factor común)}$$

Paso 4. Dividir cada término de la expresión entre el factor común.

$$\frac{20m^3n^4p^5}{10m^3n^2p^2} = 2n^2p^3$$

$$\frac{-30m^6n^2p^3}{10m^3n^2p^2} = -3m^3p$$

$$\frac{40m^5n^2p^5}{10m^3n^2p^2} = 4m^2p^3$$

$$\frac{-50m^3n^4p^2}{10m^3n^2p^2} = -5n^2$$

Paso 5. Dar la respuesta escribiendo el factor común y los términos que se obtuvieron de la división.

$$\boldsymbol{10m^3n^2p^2(2n^2p^3 - 3m^3p + 4m^2p^3 - 5n^2)}$$

3. Factoriza:

$$\boldsymbol{-23a^4b^2c + 18a^5bc^5}$$

Paso 1. Obtener el máximo común divisor (M.C.D.) de los coeficientes numéricos (si los hay)

23	18	
		MCD=No existe un número que divida a ambos números, por lo tanto, no hay MCD

Paso 2. Determinar la(s) variable(s) en común, de menor potencia, que conforma la expresión (si lo hay)

$$a^4bc$$

Paso 3. Determinar el factor común uniendo lo obtenido en los pasos 1 y 2.

$$\boldsymbol{a^4bc} \qquad \text{(factor común)}$$

Paso 4. Dividir cada término de la expresión entre el factor común.

$$\frac{-23a^4b^2c}{a^4bc} = -23b$$

$$\frac{18a^5bc^5}{a^4bc} = 18ac^4$$

Paso 5. Dar la respuesta escribiendo el factor común y los términos que se obtuvieron de la división.

$$\boldsymbol{a^4bc\,(-23b + 18ac^4)}$$

4. Factoriza:

$$\boldsymbol{18xy^3z + 12x^2y^2z^4 + 6x^3y^2}$$

Paso 1. Obtener el máximo común divisor (M.C.D.) de los coeficientes numéricos (si los hay)

18	12	6	2
9	6	3	3
3	2	1	MCD=6

Paso 2. Determinar la(s) variable(s) en común, de menor potencia, que conforma la expresión.

xy^2 la z no está en todos los términos

Paso 3. Determinar el factor común uniendo lo obtenido en los pasos 1 y 2.

$\boldsymbol{6xy^2}$ (factor común)

Paso 4. Dividir cada término de la expresión entre el factor común.

$$\frac{18xy^3z}{6xy^2} = 3yz$$

$$\frac{12x^2y^2z^4}{6xy^2} = 2xz^4$$

$$\frac{6x^3y^2}{6xy^2} = x^2$$

Paso 5. Dar la respuesta escribiendo el factor común y los términos que se obtuvieron de la división.

$$\boldsymbol{6xy^2\,(3yz + 2xz^4 + x^2)}$$

Como se muestra en los ejemplos anteriores, cuando se factoricen polinomios de 2 o más términos el factor común será un monomio.

Para saber más

Factor común 1

Factor común 2

Manos a la obra

Factoriza por factor común

1) $3x + 12$	11) $am^2 - an^2 + a^2mn$
2) $mx + m$	12) $2a^2b + 4ab^2 - 10a^3b^3$
3) $8m^2 + 12m$	13) $m^2n^2 + mn^2 - 2m^2n$
4) $3am^3 + 6a^3m$	14) $14acd - 7cd + 21c^2d^2$
5) $a^2 + ab$	15) $3a^3 - 6a^2 + 9a$
6) $t^3 - 8t^2 + t$	16) $8q^4t + 2q^3t^2 - 6q^2t^4$
7) $15abc^2 + 45a^2bc$	17) $5x^2y^2 - 15xy + 20xyz$
8) $15abx - 9b^2x$	18) $17m^3n^3 - 51m^2n^2 + 85mn$
9) $9a^3 - 6a^2$	19) $12m^3n^3 - 18m^2n^2 - 24m^4n^4$
10) $16x^3 - 4x^2$	20) $x^4 + x^3 - x^2 + x$

Por agrupación

Antes de iniciar el procedimiento para factorizar por el método de agrupación veamos los siguientes ejemplos por factor común

a) $3x(x+3) + 2(x+3)$

$3x(x+3) + 2(x+3)$ El factor común es $(x+3)$ ya que se repite en los dos términos

Realizando el procedimiento para factor común, dividimos cada termino entre el factor común

$$\frac{3x(x+3)}{(x+3)} = \mathbf{3x}$$

$$\frac{2(x+3)}{(x+3)} = \mathbf{2}$$

Así la factorización sería:

$$(x+3)(3x+2)$$

b) Factoriza $3x(x+3)+2(x+3)$

$3x(x+3)+2(x+3)$ El factor común es $(x+3)$ ya que se repite en los dos términos

Realizando el procedimiento para factor común, dividimos cada termino entre el factor común

$$\frac{3x(x+3)}{(x+3)} = \mathbf{3x}$$

$$\frac{2(x+3)}{(x+3)} = \mathbf{2}$$

Así la factorización sería:

$$(x+3)(3x+2)$$

c) Factoriza $x(x-2)-4(x-2)$

$x(x-2)-4(x-2)$ El factor común es $(x-2)$ ya que se repite en los dos términos

Realizando el procedimiento para factor común, dividimos cada termino entre el factor común

$$\frac{x(x-2)}{(x-2)} = \boldsymbol{x}$$

$$\frac{-4(x-2)}{(x-2)} = \mathbf{-4}$$

Así la factorización sería:

$$(x-2)(x-4)$$

A continuación, se presentan algunos ejemplos usando el método de agrupación

a) Factoriza $2x^2+8x+3x+12$

Primero, se observa que no hay factor común para todos los términos en $2x^2+8x+3x+12$

Sin embargo, si agrupamos los primeros dos términos y los últimos dos términos, cada grupo tiene su propio MCD:

$$\underbrace{2x^2+8x}_{\text{Primera agrupación}} \quad \underbrace{+\,3x+12}_{\text{Segunda agrupación}}$$

En particular, hay un MCD de $2x$ en la primera agrupación y un MCD de 3 en la segunda agrupación. Podemos factorizarlos para obtener la siguiente expresión:

$$2x(x+4)+3(x+4)$$

Esto revela otro factor común, como se vio en los dos ejemplos anteriores

$$2x(x+4)+3(x+4)$$

El factor común es $(x+4)$ ya que se repite en los dos términos

Realizando el procedimiento para factor común, dividimos cada termino entre el factor común

$$\frac{2x(x+4)}{(x+4)}=\mathbf{2x}$$

$$\frac{3(x+4)}{(x+4)}=\mathbf{3}$$

Por lo que:

$$2x^2+8x+3x+12=(x+4)(2x+3)$$

b) Factoriza $2x^3+10x^2+3x+15$

Primero, se observa que no hay factor común para todos los términos en $2x^3+10x^2+3x+15$

Sin embargo, si agrupamos los primeros dos términos y los últimos dos términos, cada grupo tiene su propio MCD:

$$\underbrace{2x^3+10x^2}_{\text{Primera agrupación}}\quad\underbrace{+\,3x+15}_{\text{Segunda agrupación}}$$

$(2x^3+10x^2)+(3x+15)$ Agrupas términos

$2x^2(x+5)+3(x+5)$ Obtienes el factor común de cada agrupación

Se observa que se obtiene un binomio común $(x+5)$

Realizando el procedimiento para factor común, dividimos cada termino entre el factor común

$$\frac{2x^2(x+5)}{(x+5)}=\mathbf{2x^2}$$

$$\frac{3(x+5)}{(x+5)}=\mathbf{3}$$

Por lo que:

$$2x^3 + 10x^2 + 3x + 15 = (x + 5)(2x^2 + 3)$$

c) Factoriza $3c^2 - 7d^2s + 3cs - 7cd^2$

En esta ocasión para poder obtener factor común se agrupa el primer término con el tercero y el segundo término con el cuarto término

$$\underbrace{3c^2 + 3cs}_{\text{Primera agrupación}} \qquad \underbrace{-\,7d^2s - 7cd^2}_{\text{Segunda agrupación}}$$

Obteniendo el factor común de cada agrupación

$$3c^2 + 3cs = 3c(c + s) \qquad -7d^2s - 7cd^2 = -7d^2(s + c)$$

El binomio que se obtenga después de factorizar debe ser igual

$$3c(c + s) \; - \; 7d^2(s + c)$$

Se puede observar que los binomios $(c + s)$ es igual a $(s + c)$ por lo que si es factor común.

Dividimos cada termino agrupado entre el factor común

$$\frac{3c(c+s)}{(c+s)} = \mathbf{3c} \qquad \frac{-7d^2(s+c)}{(c+s)} = \mathbf{-7d^2}$$

Por lo que

$$3c^2 - 7d^2s + 3cs - 7cd^2 = (c + s)(3c - 7d^2)$$

d) Factoriza $a^3 + a + a^2 + 1 + x^2 + a^2x^2$

En esta ocasión no es necesario ordenar ya que así se pueden agrupar de dos en dos para factorizar los binomios.

$$\underbrace{(a^3 + a)}_{\text{Primera agrupación}} + \underbrace{(a^2 + 1)}_{\text{Segunda agrupación}} + \underbrace{(x^2 + a^2x^2)}_{\text{Tercera agrupación}}$$

Obteniendo el factor común de cada agrupación

$$a^3 + a = a(a^2 + 1) \qquad a^2 + 1 = 1(a^2 + 1) \qquad x^2(1 + a^2)$$

El binomio que se obtenga después de factorizar debe ser igual

$$a(a^2 + 1) + 1(a^2 + 1) + x^2(1 + a^2)$$

Obteniendo el factor común $(a^2 + 1)$

Así factorizando nuevamente, se tiene:

$$(a^2 + 1)(a + 1 + x^2)$$

e) Factoriza $xm + yn + xn + ym + x + y$

Ordenamos y agrupamos

$$(xm + ym) + (xn + yn) + (x + y)$$

Factorizamos cada agrupación

$$m(x + y) + n(x + y) + 1(x + y)$$

El factor común es el binomio $x + y$

Así:

$$(x + y)(m + n + 1)$$

Para saber más

PruébaT | Factorización por agrupación

Manos a la obra

Factoriza los siguientes polinomios por agrupación

1. $c^2 + cd + cy + dy$
2. $x^2 - a^2 + x - a^2x$
3. $6ab + 3a + 1 + 2b$
4. $xy - 2my - 2xn + 4mn$
5. $3c - b^2 + 2b^2y - 6cy$
6. $1 + b + 3ab + 3a$
7. $3xa - 4ya - 3x + 4y$
8. $4bn^3 - 12bmn - n^2 + 3m$
9. $m + m^2 - mn^2 - n^2$
10. $2x^2 - 2xy + 2ax + x - y + a$
11. $6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b$
12. $15am - 10bm - 5cm + 3an^2 - 2bn^2 - cn^2$

Evaluando tus aprendizajes

Realiza el siguiente ejercicio

Diferencia de cuadrados

Se llama diferencia de cuadrados a un binomio de la forma $a^2 - b^2$ en donde a y b son números reales. Las siguientes expresiones son ejemplos de diferencias de cuadrados.

a) $4x^2 - 36$

b) $81\,m^2 - 100\,n^4$

c) $25a^4b^6 - 49c^8$

Cuando se realiza el producto notable conocido como binomio conjugado se obtiene una diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Factorizar una diferencia de cuadrados se obtendrá un binomio conjugado

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Antes de factorizar se debe de identificar si el binomio es una diferencia de cuadrados. Para ello debes de observar dos criterios

Primero: la(s) variable(s) debe estar elevado a una potencia par

Segundo: un término debe ser positivo y el otro negativo

$4x^2 - y^2$	Si es una diferencia de cuadrados
$4m^3 - 16n^2$	No es, ya que la potencia de la m es impar
$\frac{9}{16}r^6 - 36t^2$	Si es una diferencia de cuadrados
$49x^4 + y^6$	No es, ya que los dos términos son positivos
$-10a^4 + 81$	Si es una diferencia de cuadrados

Para factorizar una diferencia de cuadrados solo se extrae la raíz cuadrada de cada término y se escribe dos binomios iguales solo que se debe poner signo menos a uno de los términos del binomio que en la diferencia de cuadrado es negativo.

a) $4x^2 - y^2$

$$\begin{array}{ccc} 4x^2 & - & y^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{4x^2} & & \sqrt{y^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2x & & y \end{array}$$

Se saca la raíz cuadrada de cada término

Se escribe dos veces el binomio, solo que el término y será en un binomio positivo y en el otro binomio negativo

$$4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$$

b) $9m^4 - 64$

$$\begin{array}{ccc} 9m^4 & - & 64 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{9m^4} & & \sqrt{64} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3m^2 & & 8 \end{array}$$

Se saca la raíz cuadrada de cada término

Se escribe dos veces el binomio, solo que el término 8 será en un binomio positivo y en el otro binomio negativo

$$9m^4 - 64 = (3m^2 + 8)(3m^2 - 8)$$

c) $100r^2s^6 - 5t^2$

$$\begin{array}{ccc} 100r^2s^6 & - & 5t^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{100r^2s^6} & & \sqrt{5t^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 10r^2s^3 & & \sqrt{5}t \end{array}$$

Se saca la raíz cuadrada de cada término

Se escribe dos veces el binomio, solo que el término $\sqrt{5}t$ será en un binomio positivo y en el otro binomio negativo

$$100r^2s^6 - 5t^2 = \left(10r^2s^3 + \sqrt{5}t\right)\left(10r^2s^3 - \sqrt{5}t\right)$$

d) $\frac{9}{64}x^2 - 36$

$$\begin{array}{ccc} \frac{9}{64}x^2 & - & 36 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{\frac{9}{64}x^2} & & \sqrt{36} \\ & & \\ \frac{3}{8}x & & 6 \end{array}$$

Se saca la raíz cuadrada de cada término

Se escribe dos veces el binomio, solo que el término 6 será en un binomio positivo y en el otro binomio negativo

$$\frac{9}{64}x^2 - 36 = \left(\frac{3}{8}x + 6\right)\left(\frac{3}{8}x - 6\right)$$

e) $-49y^8 + 16$

$-49y^8 + 16$

Se saca la raíz cuadrada de cada término

$\sqrt{49y^8}$ $\quad \sqrt{16}$

$7y^4$ $\quad 4$

Se escribe dos veces el binomio, solo que el término $7y^4$ será en un binomio positivo y en el otro binomio negativo.

$$-49y^8 + 16 = (7y^4 + 4)(-7y^4 + 4)$$

Para saber más

PruébaT — Factorización por diferencia de cuadrados 1

PruébaT — Factorización por diferencia de cuadrados 2

Manos a la obra

Factoriza por medio de diferencia de cuadrados

1) $25y^6 - 9$
2) $9z^2-1$
3) $121h^2 - 144k^2$
4) $\frac{1}{256}x^2 - \frac{1}{25}y^{12}$
5) $100 - x^2y^6$
6) $4x^2 - 81y^4$
7) $25x^2y^4 - 121$
8) $100m^2n^4 - 169y^6$
9) $a^2 - 25c^4$
10) $49x^2 - 64t^2$
11) $\frac{1}{25}x^4 - \frac{9}{16}y^4$
12) $169m^2 - 196n^2$
13) $9p^2 - 40q^2$
14) $-81 + 25s^6r^2$
15) $-16 + 36m^2$

Evaluando tus aprendizajes

Diferencia y suma de cubos

Se llama diferencia de cubos a un binomio de la forma $a^3 - b^3$ en donde a y b son números reales.

Las siguientes expresiones son ejemplos de diferencias de cubos:

1) $27 - x^3$

2) $m^6 - n^9$

3) $r^{12} - 64$

Se llama suma de cubos a un binomio de la forma $a^3 + b^3$ en donde a y b son números reales.

La factorización de una diferencia de cubos $a^3 - b^3$ es el producto de un binomio y un trinomio

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

El binomio es la diferencia de las raíces cúbicas de cada término de la diferencia de cubos y el trinomio es muy semejante a un trinomio cuadrado perfecto, pero el segundo término no es multiplicado por dos.

Para factorizar una diferencia de cubos se realizan los siguientes pasos

i. Se extrae la raíz cúbica de cada término de la diferencia

$$a^3 \quad - \quad b^3$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \sqrt[3]{a^3} & \sqrt[3]{b^3} \\ \downarrow & \downarrow \\ a & b \end{array}$$

$$(a \;-\; b)$$

ii. El segundo factor es el trinomio y se puede usar el siguiente algoritmo tomando como referencia el primer factor

$(a \quad - \quad b)$

a^2 – Elevamos el primer término al cuadrado

$+ab$ – Multiplicamos ambos términos y se escribe con signo positivo

b^2 – Elevamos el segundo término al cuadrado

$(a^2 + ab + b^2)$

iii. Juntamos los dos factores $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Factoriza las siguientes diferencias de cubos

a) $27 - x^3$

$27 - x^3$ Se extrae la raíz cúbica de cada término del binomio

$\sqrt[3]{27} \quad \sqrt[3]{x^3}$

$3 \quad x$

$(3 - x)$

Se toma el binomio$(3-x)$ para obtener el otro factor (trinomio)

$(3 \quad - \quad x)$

$(3)^2$ – Elevamos el primer término al cuadrado

$+(3)(x)$ – Multiplicamos ambos términos y se escribe con signo positivo

x^2 – Elevamos el segundo término al cuadrado

$(3-x) \rightarrow (3)^2 + (3)(x) + x^2 = 9 + 3x + x^2$

Así:

$27 - x^3 = (3-x)(9+3x+x^2)$

b) $64r^3 - 27s^3$

$64r^3 \; - \; 27s^3$ Se extrae la raíz cúbica de cada término del binomio

$\sqrt[3]{64r^3} \quad \sqrt[3]{27s^3}$

$4r \quad 3s$

$(4r - 3s)$

Se toma el binomio $(4r-3s)$ para obtener el otro factor (trinomio)

$(4r \quad - \quad 3s)$

$(4r)^2$ – Elevamos el primer término al cuadrado

$+(4r)(3s)$ – Multiplicamos ambos términos y se escribe con signo positivo

$(3s)^2$ – Elevamos el segundo término al cuadrado

$$(4r-3s) \rightarrow (4r)^2+(4r)(3s)+(3s)^2=16r^2+12rs+9r^2$$

Así:

$$64r^3 - 27s^3=(4r-3s)(16r^2+12rs+9r^2)$$

c) $125x^6-8y^9$

$125x^6 \quad - \quad 8y^9$ Se extrae la raíz cúbica de cada término del binomio

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\sqrt[3]{125x^6} \quad \sqrt[3]{8y^9}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$5x^2 \qquad 2y^3$

$(5x^2 - 2y^3)$

Se toma el binomio $(5x^2-2y^3)$ para obtener el otro factor (trinomio)

$(5x^2 \quad - \quad 2y^3)$

$(5x)^2$ – Elevamos el primer término al cuadrado

$+(5x^2)(2y^3)$ – Multiplicamos ambos términos y se escribe con signo positivo

$(2y^3)^2$ – Elevamos el segundo término al cuadrado

$$(5x^2-2y^3) \rightarrow (5x^2)^2+(5x^2)(2y^3)+(2y^3)^2=25x^4+10x^2y^3+4y^6$$

Así:

$$125x^6 - 8y^9=(5x^2-2y^3)(25x^4+10x^2y^3+4y^6)$$

Resolveremos otros ejemplos de una manera más simplificada, pero en caso de duda puedes realizar el algoritmo mostrado anteriormente.

d) $m^3n^6-216r^3$

Se obtiene la raíz cúbica de cada término

$mn-6r$

Se obtiene el trinomio

$m^2n^2+6mnr+36r^2$

Por lo que la factorización de $m^3n^6-216r^3$ es

$(mn-6r)(m^2n^2+6mnr+36r^2)$

e) $\frac{1}{64}u^{12} - 27v^3$

Se obtiene la raíz cúbica de cada término

$\frac{1}{4}u^4 - 3v$

Se obtiene el trinomio

$\frac{1}{16}u^8 + \frac{3}{4}u^4v + 9v^2$

Por lo que la factorización de $\frac{1}{64}u^{12} - 27v^3$ es

$(\frac{1}{4}u^4 - 3v)(\frac{1}{16}u^8 + \frac{3}{4}u^4v + 9v^2)$

f) $10x^6 - 125y^3$

Se obtiene la raíz cúbica de cada término

$\sqrt[3]{10}x^2 - 5y$

Se obtiene el trinomio

$(\sqrt[3]{10})^2x^4 + 5\sqrt[3]{10}x^2y + 25y^2$

Por lo que la factorización de $10x^6 - 125y^3$ es

$(\sqrt[3]{10}x^2 - 5y)(\sqrt[3]{10})^2x^4 + 5\sqrt[3]{10}x^2y + 25y^2)$

La factorización de una suma de cubos $a^3 + b^3$ es el producto de un binomio y un trinomio

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Como se observa la forma de factorizar es la misma que en la diferencia de signos solo se debe tener cuidado en los signos que cambian.

Para una mejor comprensión se factoriza una diferencia de cubos, seguido de una suma de cubos.

$8x^3 - 64 = (2x - 4)(4x^2 + 8x + 16)$

$8x^3 + 64 = (2x + 4)(4x^2 - 8x + 16)$

Como se observa en el ejemplo anterior solo cambian dos signos

Factoriza

a) $27m^3 + n^6$

$(3m + n^2)(9m^2 - 3mn^2 + n^4)$

b) $125a^9 + 8b^{12}$

$(5a^3 + 2b^4)(25a^6 - 10a^3b^4 + b^8)$

Para saber más

Diferencia de cubos

Suma de cubos

Manos a la obra

Factoriza los siguientes polinomios por medio de la suma y diferencia de cubos

a) $216 - x^6$	f) $a^6 + 4b^3$
b) $m^3 - 8n^9$	g) $\frac{8}{27} - y^3z^6$
c) $64r^6 + 27s^6$	h) $64u^9 + 125v^3w^6$
d) $k^3l^3 + 125j^3$	i) $8x^6 + 7y^6$
e) $\frac{1}{8}x^{15} - \frac{27}{64}$	j) $4t^3 - \frac{1}{64}p^9$

Evaluando tus aprendizajes

Factoriza los siguientes polinomios usando la diferencia y suma de cubos

Trinomios

Por lo general se muestran varias técnicas de factorización dependiendo del trinomio que se tenga, por lo menos se enseñan tres tipos de factorización.

- Trinomio cuadrado perfecto
- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
- Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

A continuación, se presenta solo una forma de factorizar un trinomio sin importar que tipo se tenga.
Este método es conocido como el método de tijeras o de ensayo y error.

1. Factoriza $x^2 + 7x + 12$

$x^2 + 7x + 12$ Se observa que los términos estén ordenados de mayor a menor grado

$x^2 + 7x + 12$ Se buscan dos valores que multipliquen al primer y al último término, es decir, dos valores que den x^2 y dos números que multiplicados den 12

$\downarrow \qquad \downarrow$

Se multiplica cruzado

$x \quad +4$

$x \quad +3$

$(x)(3) = 3x$

$(x)(4) = 4x$

Se suman los resultados obtenidos

$3x + 4x = 7x$

El resultado de la suma (o resta) debe ser igual (hasta en signo) que el segundo término del trinomio. Para el trinomio $x^2 + 7x + 12$ el segundo término es $7x$ por lo que si cumple.

Por último, se eligen los valores que están dentro de cada elipse

$$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 7x + 12$$

Nota: cuando el coeficiente de x^2 sea 1 entonces siempre se multiplicará $(x)(x)$

Para este ejemplo se escogió como números el 4 y el 3 pero puede haber más parejas de números que den 12, como el 6 y 2 o 12 y 1.

Veremos qué pasaría si se escoge el 6 y 2

$x^2 + 7x + 12$ Se buscan dos valores que multipliquen al primer y al último término, es decir, dos valores que den x^2 y dos números que multiplicados den 12

$\downarrow \qquad \downarrow$

Se multiplica cruzado

$x \quad +6$

$x \quad +2$

$(x)(2) = 2x$

$(x)(6) = 6x$

Se suman los resultados obtenidos

$2x + 6x = 8x$

Como el resultado de la suma debe ser igual (hasta en signo) que el segundo término del trinomio no se cumple esta condición, ya que la suma es $8x$ y el segundo término del trinomio es $7x$. Por lo que se tendría que escoger otra pareja de números, por esta razón a este método también se le conoce como método de ensayo y error.

2. Factoriza $x^2 - 5x + 6$

Primero verificamos que esté ordenado de mayor a menor grado

$x^2 - 5x - 6$ Si está ordenado de mayor a menor exponente

$x^2 - 5x - 6$ Se buscan dos valores den x^2 y dos números que multiplicados den -6

6 y -1; 3 y -2 son parejas que dan -6. Tomamos 6 y -1

$\downarrow \qquad \downarrow$

Se multiplica cruzado

$x \quad +6$

$x \quad -1$

$(x)(-1) = -1x$

$(x)(6) = 6x$

Se restan los resultados obtenidos

$-1x + 6x = 5x$

Como el resultado de la resta es $5x$ es igual al segundo término, pero el signo es diferente $-5x$, cambiando el signo de los números obtenemos el resultado correcto.

$x \quad -6$

$x \quad +1$

$(x)\,(1) \;=\; 1x$

$(x)(-6) = -6x$

Se restan los resultados obtenidos

$1x - 6x = -5x$

Por lo que se eligen los valores que están dentro de cada elipse

$$(x-6)(x+1) = x^2 - 5x + 6$$

3. Factoriza $3x^2 + 7x + 4$

Primero verificamos que esté ordenado de mayor a menor grado

$3x^2 + 7x + 4$ Si está ordenado de mayor a menor exponente

$3x^2 + 7x + 4$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

Se buscan dos valores que den $3x^2$ la única opción es $3x$ y x y dos números que multiplicados den 4

4 y 1; 2 y 2; son parejas que dan 4. Tomamos 4 y 1

Se multiplica cruzado

$3x \quad +4$

$x \quad +1$

$(3x)(1) = 3x$

$(x)(4) \;=\; 4x$

Se suman los resultados obtenidos

$3x + 4x = 7x$

Como el resultado de la suma es $7x$ es igual al segundo término del trinomio $7x$, entonces esos son los valores de los factores.

Por lo que se eligen los valores que están dentro de cada elipse

$$(3x+4)(x+1) = 3x^2 + 7x + 4$$

4. Factoriza $9x^2 - 24x + 16$

Primero verificamos que esté ordenado de mayor a menor grado

$9x^2 - 24x + 16$ Si está ordenado de mayor a menor exponente

$9x^2 - 24x + 16$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

Se buscan dos valores que den $9x^2$; las opciones son $9x$ y x o $3x$ y $3x$ dos números que multiplicados den 16, las opciones son 8 y 2; 4 y 4; 16 y 1. Tomamos $3x$ y x y de números 8 y 2

Se multiplica cruzado

$3x \quad -8$

$3x \quad -2$

$(3x)(-2) = -6x$

$(3x)(-8) = -24x$

Se suman los resultados obtenidos

$-6x - 24x = -30x$

Como el resultado de la suma es $-30x$ es diferente al segundo término $-24x$ del trinomio, por lo que se escoge otro par de números.

Ahora tomamos $3x$ y x y de números 4 y 4

$3x \quad -4$

$3x \quad -4$

$(3x)(-4) = -12x$

$(3x)(-4) = -12x$

Se suman los resultados obtenidos

$-12x - 12x = -24x$

Como el resultado de la suma es $24x$ es igual al segundo término del trinomio $-24x$, por lo que estos son los valores de los factores.

Por lo que se eligen los valores que están dentro de cada elipse

$$(3x-4)(3x-4)=(3x-4)^2=9x^2-24x+16$$

5. Factoriza $6x^2-x-15$

Primero verificamos que esté ordenado de mayor a menor grado

$6x^2-x-15$ Si está ordenado de mayor a menor exponente

$6x^2-x-15$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$3x \qquad -5$

$2x \qquad +3$

Se buscan dos valores que den $6x^2$; las opciones son $3x$ y $2x$ o $6x$ y $1x$ dos números que multiplicados den -15, las opciones son 8 y 2; 4 y 4; 16 y 1. Tomamos $3x$ y $2x$ y de números -5 y 3

Se multiplica cruzado

$(3x)(3) = 9x$

$(2x)(-5) = -10x$

Se restan los resultados obtenidos

$9x-10x=-x$

Como el resultado de la suma es $-x$ es igual al segundo término del trinomio $-x$, por lo que estos son los valores de los factores.

Por lo que se eligen los valores que están dentro de cada elipse

$$(3x-5)(2x+3)=6x^2-x-15$$

Para saber más

Otros métodos para factorizar polinomios

Trinomio de la forma x^2+bx+c

PruébaT Trinomio cuadrado perfecto

Manos a la obra

Factoriza los siguientes trinomios

a) $6x^2+32x+10$

b) $x^2+8x+12$

c) $x^2+15x+14$

d) $10x^2-41x+21$

e) $x^2-7x+12$

f) $x^2+10x+25$

g) $3x^2+5x+2$

h) $16x^2-8x+1$

i) $13x-4x^2-3$

j) x^2-2x-3

k) $4x^2+36x+36$

l) $-x^2-9x-20$

m) $x^2+8x+12$

n) $5x^2-33x-14$

o) $11x-x^2-22$

p) $4x^2+20x+25$

Evaluando tus aprendizajes

Algoritmo de la factorización

A parte de las factorizaciones individuales se pueden dar combinaciones entre dos o más tipos de factorización; por lo que puede llegar a confundirnos sobre que tipo de factorización usar.

En seguida se presenta un esquema de los pasos a seguir para identificar un polinomio y así factorizarlo de manera exitosa.

	Número de términos	Comentarios
1°	Valorar si tiene factor común	Pueden ser **binomios, trinomios o de mayor número de términos.**
2°	Si es binomio	Diferencia de cuadrados Si los exponentes son pares Diferencia o suma de cubos Si los exponentes son múltiplos de 3
3°	Si es trinomio	Usar el método de tijeras aplica para cualquier trinomio.
4°	Si es un polinomio de 4 términos o 6 términos	Aplicar el método de agrupación

Cuando se aplique alguna forma de factorización hay que valorar si se puede seguir factorizando.

Ejemplos

1. Factoriza

$2x^2 - 8$

El primer paso es analizar si tiene factor común, en este binomio SI hay.

Obtenemos el factor común

De 2 y 8 el Máximo común divisor es 2

Como la x no se está presente en el segundo término no es factor común

Así:

$2(x^2 - 4)$

El binomio $x^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados

Se obtiene la raíz cuadrada de cada término

Factorizando: $(x + 2)(x - 2)$

Por lo que la factorización de $2x^2 - 8$ será:

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x + 2)(x - 2)$$

2. Factoriza

$64x^6 - 1$

El primer paso es analizar si tiene factor común, en este binomio NO hay.

En este caso se puede realizar primero una diferencia de cuadrados o una diferencia de cubos, ya que cumple con las dos condiciones

Aplicando primero diferencia de cuadrados

$$64x^6 - 1 = (8x^3 + 1)(8x^3 - 1)$$

Los factores son una suma de cubos y una diferencia de cubos

Factorizando:

$$8x^3 + 1 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

Por lo que la factorización de $64x^6 - 1$ será:

$$64x^6 - 1 = (8x^3 + 1)(8x^3 - 1) = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

Ordenando

$$64x^6 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)(4x^2 - 2x + 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

3. Factoriza

$x^3 - 2x^2 + x$

El primer paso es analizar si tiene factor común, en este trinomio SI hay.

Obtenemos el factor común

No hay Máximo común divisor para los números

Como la x está presente en cada término, este es el factor común

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1)$$

Antes de concluir tenemos que analizar si el trinomio se puede factorizar

$x^2 - 2x + 1$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x \qquad -1$

$x \qquad -1$

Se buscan dos valores que den x^2 y dos números que multiplicados den 1 la única opción es 1 y 1.

Se multiplica cruzado

$(x)(-1) = -1x$

$(x)(-1) = -1x$

Se restan los resultados obtenidos

$-1x - 1x = -2x$

Como el resultado de la suma es $-2x$ es igual al segundo término del trinomio $-2x$, entonces esos son los valores de los factores.

Por lo que se eligen los valores que están dentro de cada elipse

$$(x-1)(x-1)=(x-1)^2$$

Por lo que la factorización de x^3-2x^2+x será:

$$x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$$

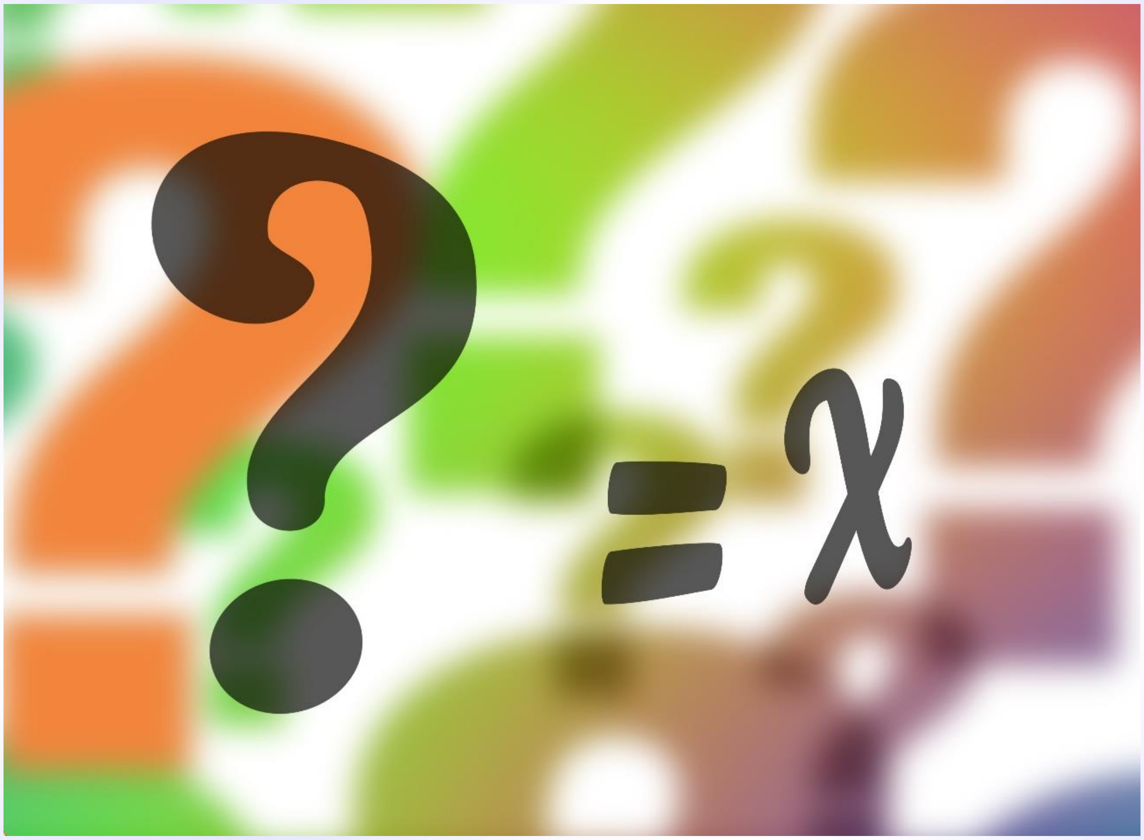
Manos a la obra

Factoriza lo más posible los siguientes polinomios

1. $2x^2-2x-4$
2. $4a^3-4a$
3. m^3-m^2-m+1
4. $6ax^2-ax-2a$
5. s^4-1
6. $n^5-n^3p^2+n^2p^3-p^5$
7. x^8-y^8
8. $2x^4+16x$
9. $5a^4-10a^2+5$
10. $42y-x^2y+xy$

Evaluando tus aprendizajes

VII. RESUELVES ECUACIONES LINEALES



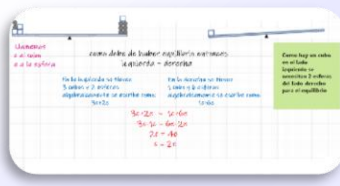
Aprendizajes esperados

- **Significa, gráfica y algebraicamente, las soluciones de una ecuación**
- **Interpreta la solución de un sistema de ecuaciones lineales**

Las ecuaciones sirven para resolver diferentes problemas no solo matemáticos, sino también químicos, físicos, económicos y de cualquier otro ámbito.

Veamos una situación que permite el uso de ecuaciones para darle solución. La balanza de la izquierda está en equilibrio. ¿Cuántas esferas hay que poner del lado derecho en la balanza a la derecha para equilibrarla?

Da clic en la imagen para ampliar la resolución y respuesta



Valorando lo que sabes

Realiza los siguientes ejercicios

a) $4x + 3 = 3 - 6$

b) $5(x - 3) = 3(2x + 1)$

c) $\frac{x}{4} - \frac{2x}{3} = 8$

d) $\frac{2x-5}{3} = \frac{3x+4}{2}$

e) $(x + 3)^2 = 2x + 6$

f) $(x + 5)(x - 5) = 0$

Visualiza la respuesta dando clic en cada ejercicio

Ecuaciones

Una ecuación se define como una igualdad entre dos expresiones en la cual puede haber una o más incógnitas (variables) que deben ser resueltas.

De acuerdo con el grado del exponente las ecuaciones pueden clasificarse como:

Nombre de la ecuación	Mayor exponente (Grado)	Ejemplos
Lineal o de primer grado	uno	$2x + 3 = 0$
Cuadrática o de segundo grado	dos	$3x^2 + 6x = 9$
Cúbica o de tercer grado	tres	$x^3 - x^2 + 6x = 0$
cuártica	cuatro	$x^4 - 3x^2 + 6x = 8$

Resolver una ecuación consiste en hallar los valores de la variable (por lo general "x") que hacen cierta la igualdad. El grado de la ecuación determina el número de soluciones o raíces que una ecuación puede tener, así:

Ecuación	Número de raíces o soluciones
Lineal	1
Cuadrática	2
Cúbica	3
Cuártica	4

Ecuaciones lineales

La ecuación lineal se trata de un tipo de ecuación que solamente involucrará sumas y restas de una variable a la primera potencia.

A continuación, se dan ejemplos de ecuaciones lineales con una incógnita.

$$2x = 8$$

$$3x - 5 = 7$$

$$2x - 5 = 4(3 - 2x)$$

$$\frac{x-3}{4} = \frac{5(3-2x)}{2}$$

$$\frac{m}{3} - 6 = 5\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

Resolver una ecuación es encontrar el valor o valores que satisfacen a la ecuación. Es decir, son la soluciones que hacen que la igualdad se cumpla.

En el caso de una ecuación con una sola incógnita solo se necesita de una ecuación para resolverla.

Resolución de ecuaciones lineales

Obtener la solución o raíz de una ecuación lineal consiste en encontrar un número que al sustituirlo por la variable se cumpla la igualdad, para lograrlo se tienen que realizar operaciones básicas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) con la finalidad de dejar la variable (incógnita) con coeficiente numérico 1 y sin ningún otro termino que la acompañe.

En las ecuaciones se acostumbra a usar el nombre de incógnita en vez del de variable y generalmente se usan las tres últimas letras x, y, z

Veamos los siguientes ejemplos ilustrativos.

a) $\boldsymbol{x + 3 = 6}$ para dejar sola la x se resta 3 en ambos miembros para conservar la igualdad

$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 6 - 3$

$\boldsymbol{x = 3}$ por lo tanto, la solución o raíz es 3

b) $\boldsymbol{2x - 5 = 10}$ primero se suma 5 en ambos miembros de la ecuación

$2x - \cancel{5} + \cancel{5} = 10 + 5$ Se suman o restan los números

$2x = 15$ ahora el coeficiente de la x debe ser uno por lo que se divide ambos miembros por 2 para conservar la igualdad

$$\frac{2x}{2} = \frac{15}{2}$$

$\boldsymbol{x = 15/2}$

No resulta muy práctico realizar este procedimiento cuando se tienen ecuaciones con más términos o con fracciones, por tal motivo se puede resolver una ecuación lineal bajo los siguientes criterios

> Si un término numérico está sumando al término con incógnita, entonces se resta y si está restando entonces se suma.
>
> Si el coeficiente de x es un número entero diferente de 1 este pasa dividiendo al otro miembro de la ecuación.

Ejemplos: Resuelve las siguientes ecuaciones lineales

a) $\boldsymbol{9(x - 3) = 18}$

$9(x - 3) = 18$ Se multiplica el 5 por los dos términos dentro del paréntesis

$9x - 27 = 18$ El -27 se mueve a la derecha

$9x = 18 + 27$ Se suman los números

$9x = 45$ El $\mathbf{9}$ pasa a dividir al $\mathbf{45}$ para dejar sola a la $\boldsymbol{x}$

$x = \frac{45}{9}$

$\boldsymbol{x = 5}$

b) $\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{6} = \mathbf{5}(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})$

$2x - 6 = 5(x + 2)$ Se multiplica el 5 por los dos términos dentro del paréntesis

$2x - 6 = 5x + 10$ El $-\mathbf{6}$ se mueve a la derecha y el $\mathbf{5}\boldsymbol{x}$ se pasa a la izq. En ambos casos se cambia de signo

$2x - 5x = 10 + 6$ Se suman o restan los terminos semejantes

$-3x = 16$ El $-\mathbf{3}$ pasa a dividir al $\mathbf{16}$ para dejar sola a la $\boldsymbol{x}$

Así: $x = \frac{16}{-3} = -\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}$

c) $\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{x}-\mathbf{4})}{\mathbf{3}}$

$\frac{x+3}{2} = \frac{2(x-4)}{3}$ El $\mathbf{2}$ multiplica solo al $\mathbf{2}$ del numerador de la derecha, en cambio el $\mathbf{3}$ multiplica a los dos términos del numerador de la izquierda

$3(x + 3) = 4(x - 4)$

$3x + 9 = 4x - 16$ Se pasa los términos con $\boldsymbol{x}$ a la izq. y los términos con número se pasa a la derecha. En ambos casos se cambia de signo

$3x - 4x = -16 - 9$

$-1x = -25$ El $-\mathbf{1}$ de la $\boldsymbol{x}$ pasa a dividir al $-\mathbf{25}$

$x = \frac{-25}{-1} = \frac{25}{1} = 25$

$\boldsymbol{x = 25}$

d) $\mathbf{3}(\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{5}) = \frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}{\mathbf{4}}$

$3(2x - 5) = \frac{x+2}{4}$ El 4 multiplica al 3 del miembro izquierdo

$12(2x - 5) = x + 2$ El 12 multiplica los términos dentro del paréntesis

$24x - 60 = x + 2$ Los términos con variable van a la izq y los números a la derecha (recuerda que se cambia el signo)

$24x - x = 2 + 60$

$23x = 62$ El 23 pasa a dividir al 62

$$\boldsymbol{x = \frac{62}{23}}$$

e) $\boldsymbol{(4x - 3)^2 = (8x + 5)(2x - 7)}$

$(4x - 3)^2 = (8x + 5)(2x - 7)$ Se desarrolla el binomio al cuadrado del miembro de la izquierda y se multiplican los binomios de la derecha

$16x^2 - 24x + 9 = 16x^2 - 56x + 10x - 35$ Todos los términos con $\boldsymbol{x}$ se pasan a la izq y los términos numéricos se van a la derecha

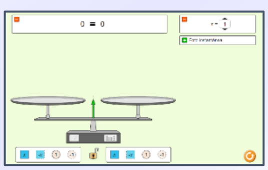
$\cancel{16x^2} - 24x - \cancel{16x^2} + 56x - 10x = -35 - 9$ Se suman y restan términos semejantes

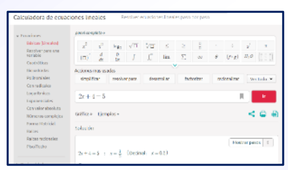
$22x = -44$

$$x = \frac{-44}{22}$$

$$\boldsymbol{x = -2}$$

Para saber más





Manos a la obra

Resuelve las siguientes ecuaciones lineales y simplifica la solución

1) $5x - 3 = 2(3x - 4)$
2) $5(2x + 4) - 3(x - 6) = 10$
3) $5(x + 2) - 2x = 11 - 2(3x + 6)$
4) $\frac{2x-9}{3} = \frac{5-x}{-2}$

Visualiza la respuesta dando clic en cada

5) $\frac{x+1}{5} - \frac{2x-5}{4} = \frac{7x}{10}$

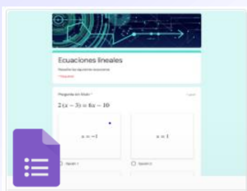
6) $\frac{2(9x-7)}{5} = 3(2x+3)$

7) $3(x+1)^2 = (x-2)(3x-4)$

8) $(4x-7)(x+12) = (5-2x)^2$

Evaluando tus aprendizajes

Realiza las siguientes autoevaluaciones



Problemas de aplicacion de ecuaciones lineales

Una gran variedad de problemas puede ser resueltos de forma directa con ecuaciones, son fundamentales en la vida diaria pues nos permite determinar un valor especifico a partir de ellas, o despejar una incógnita, se usan en una gran cantidad de áreas como finanzas, matemáticas, contabilidad, etc.

Algunas sugerencias generales que te pueden servir para construir la ecuación a partir de un problema son:

1. Estudiar y digerir el problema hasta que quede entendida la situación planteada.
2. Hacer una separación entre las cantidades: aquellas conocidas y aquellas desconocidas.
3. Elegir una letra para representar la incógnita (típicamente es x, pero puede ser cualquier letra).
4. Identificar la igualdad. Esto es, notar qué cantidades han de ser comparadas con qué otras para identificar cuáles van de qué lado de la igualdad.
5. Formulación de la ecuación. A partir de lo obtenido en el paso anterior, y de una apropiada identificación de las operaciones que sufren las cantidades, la ecuación puede ser construida.
6. Resolución de la ecuación. Es decir, obtención del valor de la incógnita que satisface la ecuación.

Metodología tomada de:
http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Licenciatura/TallerMate_UAM_CUAJIMALPA//scorm_player/1190/content/index.html#

Ejemplos:

Juan tiene ahorrados 126 pesos, mientras que Alicia tiene 89 pesos. Juan ahorra mensualmente 5 pesos y Alicia ahorra 19 pesos cada mes. ¿Cuándo tendrá Juan 5 pesos más ahorrado que Alicia?

1. Al inicio Juan tiene 126 pesos, pero cada mes esa cantidad aumenta 5 pesos. Alicia empieza con 89 pesos y aumenta esca cantidad en 19 pesos cada mes. Buscamos cuando la cantidad de Juan supere a la cantidad de Alicia por 5 pesos.

2. Conocemos cuanto tiene cada uno para empezar y cuanto aumenta su cantidad por cada mes que pasa. Pero no conocemos cuanto tiene en cada momento y nos conviene encontrar una expresión para eso.

3. Denotamos x a la variable que corresponde al mes, dado que buscamos encontrar en que mes Juan tiene 5 pesos más que Alicia

4. Para el caso de Juan, el primer mes tiene 1266, el primer mes tendrá $J = 126 + (5)(1)$, para el segundo mes tendrá $J = 126 + (5)(2)$, y así sucesivamente por lo que Juan tendrá $J = 126 + 5x$, que será J el dinero que tendrá Juan al cabo de x meses.

De manera similar se obtiene la ecuación de Alicia, $A = 89 + 19x$, con A la cantidad de dinero que tendrá al cabo de x meses

5. Buscamos el tiempo (mes o x) en lo que lleva acumulado Juan J es 5 pesos más de lo que lleva acumulado Alicia esto es:

$$J - 5 = A \quad \text{Sustituyendo}$$

$$126 + 5x - 5 = 89 + 19x \quad \text{esta es la ecuación buscada}$$

6. Resolviendo la ecuación obtenida

$$126 + 5x - 5 = 89 + 19x$$

$$5x - 19x = 89 - 126 + 5$$

$$-14x = -32$$

$$x = \frac{-32}{-14}$$

$$x = 2.28 \text{ meses}$$

A continuación, se presentan una serie de problemas clasificados de acuerdo con su tipo.

Problemas sobre números

1. La suma de dos números es 116 y el mayor excede al menor en ocho. Encuentra el número mayor.

Datos:

número mayor: $x + 8$ Número menor: x

Planteamiento:

$x + (x + 8) = 116$

$2x + 8 = 116$

$2x = 116 - 8$

$2x = 108$

$x = \frac{108}{2}$

$x = 59$

Por consiguiente, el número mayor es $59 + 8 = 67$

2. La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 60. Determina los números.

Datos:

Mayor: x Medio: $x - 31$ Menor: $x - 60$

Planteamiento:

$x + (x - 30) + (x - 60) = 200$ la suma de los tres números es de 200

$3x = 200 + 31 + 60$

$3x = 291$

$x = \frac{291}{3} = 97$

Por tanto, los números buscados son: Mayor= 97 Medio= 66 Menor= 37

3- En un número de dos dígitos, el dígito de las decenas es 3 unidades menor que el de las unidades. Si el número excede en 6 al cuádruplo de la suma de sus dígitos, halla el número.

Datos:
Dígito de las unidades: x

Dígito de las decenas: $x - 3$

Número: $10(x - 3) + x$

Planteamiento:

$10(x - 3) + x = 4(x + x - 3) + 6$

$10x - 30 + x = 4x + 4x - 12 + 6$

$10x + x - 4x - 4x = -12 + 6 + 30$

$3x = 24$

$x = 8$

El dígito de las unidades es 8 y el de las decenas es 5, por tanto, el número es 58.

Problemas sobre edades

4. La edad de Valeria excede en 4 años a la de Aris y el doble de la edad de Valeria más 3 años equivale al triple de la de Aris. Determina ambas edades.

Datos: Edad de Valeria= x Edad de Aris= $x - 4$

Planteamiento:

2(Edad de Valeria)+3 años= 3(Edad de Aris)

$$2x + 3 = 3(x - 4)$$

Se resuelve la ecuación:

$$2x + 3 = 3x - 12$$

$$2x - 3x = -12 - 3$$

$$-x = -15$$

$$x = 15$$

Por tanto, Valeria tiene 15 años y Aris tiene 11.

5. La edad de Neftalí es el doble de la edad de Verania y dentro de 6 años será de $\frac{5}{3}$. ¿Cuáles son sus edades?

Datos:	Edades actuales:	Dentro de 6 años
Neftalí	$2x$	$2x + 6$
Verania	x	$\frac{5}{3}(x + 6)$

$$2x + 6 = \frac{5}{3}(x + 6)$$

Resolvamos la ecuación:

$$3(2x + 6) = 5(x + 6)$$

$$6x + 18 = 5x + 30$$

$$6x - 5x = 30 - 18$$

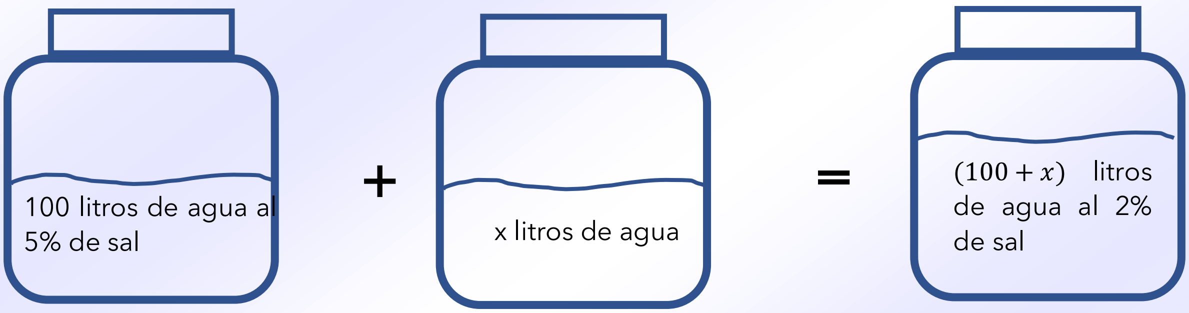
$$x = 12$$

Finalmente, la edad de Verania es 12 años y la de Neftalí es 24.

Problemas sobre las mezclas

6. Un tanque contiene 100 litros de agua al 5% de sal. ¿Cuánta agua deberá agregarse para tener agua al 2% de sal?

Datos



Planteamiento:

Éste se obtiene con la cantidad de sal de cada recipiente:

$$5\% \text{ de } 100 = 2\% \text{ de } (100+x)$$

Resolvamos la ecuación:

$$\frac{5}{100}(100) = \frac{2}{100}(100+x) \quad \rightarrow \quad 5(100) = 2(100+x)$$

$$500 = 200 + 2x$$

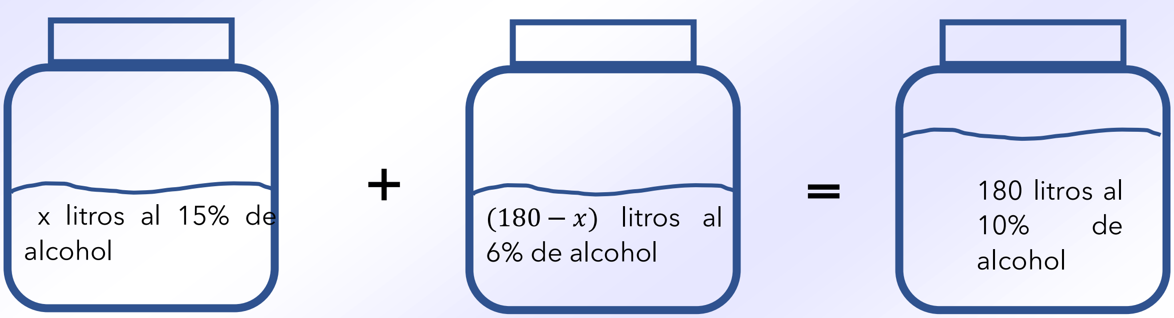
$$500 - 200 = 2x$$

$$300 = 2x$$

$$150 = x$$

Esto significa que se deberá agregar 150 litros de agua para obtener agua al 2% de sal.

7. ¿Cuántos litros de una solución al 15% de alcohol se deben agregar a otra al 6% para obtener 180 litros de una nueva solución al 10% del alcohol?



Planteamiento:

Éste se obtiene con la cantidad de alcohol de cada recipiente:

$$15\% \text{ de } x + 6\% \text{ de } (180 - x) = 10\% \text{ de } 180$$

Planteamos la ecuación y la resolvemos:

$$\frac{15}{100} + \frac{6}{100}(180 - x) = \frac{10}{100}(180) \quad \rightarrow \quad 15x + 6(180 - x) = 10(180)$$

$$15x + 1\,080 - 6x = 1\,800$$

$$9x = 720$$

$$x = 80$$

Se deben combinar 80 litros al 15% de alcohol con 100 litros al 6% para obtener 180 litros al 10% de alcohol.

Problemas sobre monedas

8. Daniela tiene \$110 en monedas de \$10 y \$5, el número de monedas de \$10 excede en 8 a las de \$5, ¿cuántas monedas de \$10 y de \$5 tiene Daniela?

Datos:

Número de monedas de \$10: x

Número de monedas de \$5: $x - 8$

Planteamiento:

La suma de los productos del número de monedas por la denominación de la moneda nos da el total:

(denominación) (monedas de \$10) + (denominación) (monedas de \$5) = total

$$10x + 5(x - 8) = 110$$

Resolución:

$$10x + 5(x - 8) = 110$$

$$10x + 5x - 40 = 110$$

$$10x + 5x = 110 + 40$$

$$15x = 150$$

$$x = 10$$

Daniela tiene 10 monedas de \$10 y 2 monedas de \$5.

9. Andrea retira del banco \$5 000, en billetes de \$500, \$200 y \$100. Si el número de billetes de \$200 excede en 3 a los de \$100, y el número de billetes de \$100 es el doble de los de \$500, ¿cuántos billetes de cada denominación recibió Andrea?

Datos:

Billetes de \$200 = x Billetes de \$100= $x-3$ Billetes de \$500= $\frac{x-3}{2}$

Planteamiento:

$$200x + 100(x-3) + 500\left(\frac{x-3}{2}\right) = 5\,000$$

Se resuelve la ecuación

$$200x + 100(x-3) + 250(x-3) = 5\,000$$

$$200x + 100x - 300 + 250x - 750 = 5\,000$$

$$200x + 100x + 250x = 5\,000 + 300 + 750$$

$$550x = 6\,050$$

$$x = 11$$

Andrea recibió 11 billetes de \$200, 8 de \$100 y 4 de \$500.

Problemas sobre costos

10. Sofía pagó \$84 por una pasta dental, un jabón y un champú. Si el costo de la pasta excede en \$15 al del jabón y en \$6 al del champú, determina el costo de cada uno de los artículos.

Datos:

Costo de la pasta para dientes: x

Costo del jabón: $x - 15$

Costo del champú: $x - 6$

Se planeta la ecuación y se resuelve:

$$x + (x-15) + (x-6) = 84$$

$$3x - 21 = 84$$

$$3x = 84 + 21$$

$$3x = 105$$

$$x = \frac{105}{3}$$

$$x = 35$$

Por tanto, los costos de los artículos son: pasta dental \$35, jabón \$20, champú \$29.

11. Cierta escuela pidió el presupuesto para la fotografía de graduación de un grupo de 30 alumnos. Al momento de realizar el trato con el estudio fotográfico se avisa que serán 10 alumnos más, si el estudio respeta el precio total y disminuye en $30 el costo de la fotografía por persona. ¿cuál hubiese sido el costo de la fotografía por alumno para el grupo de 30 alumnos?

Datos:

El costo total para un grupo de 30 alumnos es: $30x$

El costo total para un grupo de 40 alumnos es: $40(x-30)$

Debido al que el costo total es el mismo, entonces:

$$30x = 40(x-30)$$

Se resuelve la ecuación:

$$30x = 40x - 1200$$

$$30x - 40x = -1200$$

$$-10x = -1200$$

$$x = \frac{-1200}{-10}$$

$$x = 120$$

Por tanto, el costo de la fotografía para un grupo de 30 alumnos es de $120 por cada uno.

Para saber más

PruébaT Problemas sobre edades

PruébaT Problemas varios

Manos a la obra

1. La suma de tres números enteros consecutivos es 312. Encuentra dichos números.

2. La suma de tres números enteros pares consecutivos es de 276. Determina los números.

3. Un número excede en seis a otro y el doble del mayor equivale al triple del menor. Encuentra los números.

4. Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Determina los números.

5. La edad de Adrián es la tercera parte de la edad de Rachel y la edad de Genny es el doble de la edad de Adrián. Si la suma de sus edades es de 72 años, determina la edad de Genny.

6. Carlos tiene 18 años y Verónica 42, ¿en cuántos años la edad de Verónica será el doble de la de Carlos en ese entonces?

7. La edad de Juan es el triple de la de Amalia y dentro de 10 años será el doble. Determina las edades actuales de Juan y Amalia.

8. Roberto tiene 70 años y Álvaro 28. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Roberto era el triple de la de Álvaro?

9. A 120 litros de agua azucarada al 3%, ¿cuánta agua se debe evaporar para aumentar su concentración a 5%?

10. Si se tienen 120 litros de una solución que contiene azúcar al 5%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para obtener una solución al 2%?

11. Un radiador contiene 1.5 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si 30% de la mezcla es anticongelante, ¿cuántos litros de anticongelante puro se deben añadir para que en la nueva mezcla represente 50%?

12. En una empresa que fábrica material médico se utiliza alcohol etílico al 10% para limpiar las áreas de producción. Si al almacén llega un contenedor de 20 litros con alcohol etílico al 15%, ¿qué cantidad de agua se debe agregar para poder obtener el alcohol al 10%?

13. Carlos ahorró $3 270 en monedas de $10, $5 y $2. Si el número de monedas de $10 excede en 20 a las de $5 y en 15 a las de $2, ¿cuántas monedas de $5 pesos tienen Carlos?

14. Octavio tiene $9 300 en billetes de $1 000, $500 y $200. Si el número de billetes de $500 excede en 2 a los de $1 000 y en 3 a los de $200, ¿cuántos billetes de cada denominación tiene Octavio?

15. Paulina tiene 400 monedas de 50¢ y $1. Si en total dispone de $350, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?

16. Se desea tener $2 600 en billetes de $200, $100 y $50, de tal manera que el número de billetes de mayor denominación sea uno más que los de mediana denominación y dos más que los de menor denominación, ¿cuántos billetes de cada denominación se tendrá?

17. Domingo pagó por un traje, una camisa y unos zapatos, $2 700. Si la camisa cuesta la sexta parte del traje y los zapatos cuestan el doble de la camisa, ¿cuál es el precio de los zapatos?

18. Alejandra pagó por su reinscripción, colegiatura y un examen extraordinario, $6 400. Si el examen cuesta las dos quintas partes de inscripción y las dos novenas partes de la colegiatura, ¿cuánto paga de colegiatura?

19. Jaziel ganó el martes el doble de lo que ganó el lunes; el miércoles, el doble de lo que ganó el martes; el jueves, el doble de lo que ganó el miércoles; el viernes, \$30 menos que el jueves y el sábado \$10 más que el viernes. Si en los seis días Jazmín ganó \$1 500, ¿cuánto ganó el miércoles

20. Una computadora y un escritorio costaron \$15 100, si por el escritorio se pagó la sexta parte de la computadora más \$400, determina el precio de cada uno.

Evaluando tus aprendizajes

Realiza las siguientes autoevaluaciones

Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Las ecuaciones vistas anteriormente tenían una sola incógnita por lo que se requería una sola ecuación para resolverla.

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas (variables) como $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes reales tales que A y B no son cero, se necesitan de dos ecuaciones para obtener su solución.

A un par de dos ecuaciones con dos variables, se le conoce como sistema de ecuaciones lineales y se representa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cada ecuación representa una recta en el plano cartesiano y se pueden presentar tres casos.

Caso I

Las rectas se intersecan en un punto. Las rectas solo coinciden en un punto, por tanto, se dice que el sistema tiene ***una única solución***.

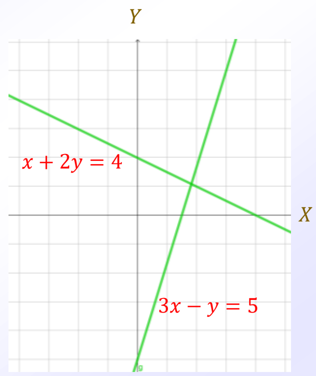
Grafica y determina la solución el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Solución

Se grafica cada una de las ecuaciones a partir de encontrar las intersecciones con los ejes XY.

$x + 2y = 4$		$3x - y = 5$	
$Sea\ x = 0$	$Sea\ y = 0$	$Sea\ x = 0$	$Sea\ y = 0$
$x + 2y = 4$	$x + 2y = 4$	$3x - y = 5$	$3x - y = 5$
$(0) + 2y = 4$	$x + 2(0) = 4$	$3(0) - y = 5$	$3x - (0) = 5$
$y = \frac{4}{2} = 2$	$x = 4$	$y = -5$	$x = \frac{5}{3}$
La intersección con el eje y es: $(0,2)$	La intersección con el eje x es:$(4,0)$	La intersección con el eje y es: $(0,-5)$	La intersección con el eje x es:$\left(\frac{5}{3},0\right)$



La solución es el punto donde se intersecan las rectas, en este caso $(2,1)$

Caso II

Las rectas son coincidentes. Dos ecuaciones representan rectas coincidentes si al multiplicar una de ellas por un número real k, se obtiene la otra.

En un sistema de rectas coincidentes ***el conjunto solución es infinito***, es decir, el conjunto solución son todos los puntos de las rectas.

Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

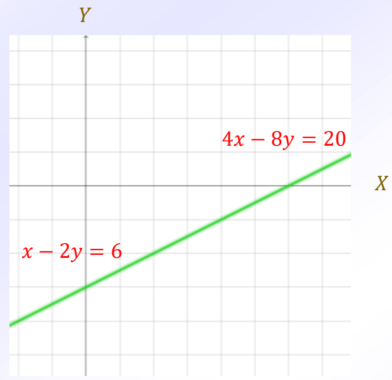
$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 4x - 8y = 24 \end{cases}$$

Solución

Se grafica cada recta.

$x - 2y = 6$		$4x - 8y = 24$	
$Sea\ x = 0$	$Sea\ y = 0$	$Sea\ x = 0$	$Sea\ y = 0$
$x - 2y = 6$	$x - 2y = 6$	$4x - 8y = 24$	$4x - 8y = 24$
$(0) - 2y = 6$	$x - 2(0) = 6$	$4(0) - 8y = 24$	$4x - 8(0) = 24$
$y = \frac{6}{-2} = -3$	$x = 6$	$y = \frac{24}{-8} = -3$	$x = \frac{24}{4} = 6$
El punto es: $(0,-3)$	El punto es: $(6,0)$	El punto es: $(0,-3)$	El punto es: $(6,0)$

Se observa que las intersecciones de las rectas con los ejes son los mismos puntos.



Las rectas coinciden en todos sus puntos, por tanto, el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones. Si multiplicamos la ecuación $x - 2y = 6$, por 4, se obtiene la otra ecuación.

Caso III

Las rectas son paralelas. En este caso, las rectas no tienen ningún punto en común, por tanto, *el sistema no tiene solución*.

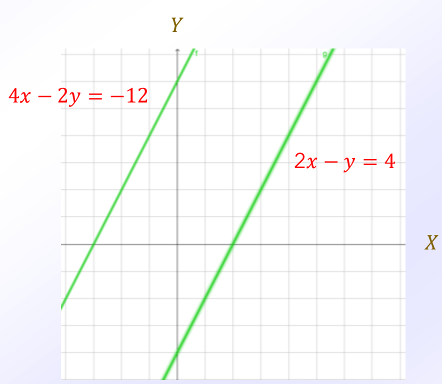
Grafica y determina el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = -12 \end{cases}$$

Se grafica cada recta.

$2x - y = 4$		$4x - 2y = -12$	
$Sea\ x = 0$	$Sea\ y = 0$	$Sea\ x = 0$	$Sea\ y = 0$
$2x - y = 4$	$2x - y = 4$	$4x - 2y = -12$	$4x - 2y = -12$
$2(0) - y = 4$	$2x - (0) = 4$	$4(0) - 2y = -12$	$4x - 2(0) = -12$
$y = -4$	$x = \frac{4}{2} = 2$	$y = \frac{-12}{-2}$	$x = \frac{-12}{4}$
	$x = 2$	$y = 6$	$x = -3$
El punto es: $(0, -4)$	El punto es: $(2,0)$	El punto es: $(0,4)$	El punto es: $(-2,0)$

Se localizan los puntos de intersección y se grafican las rectas.



Al graficar las rectas se observa que son paralelas, es decir, no hay punto común, por consiguiente, no hay solución, entonces se dice que el conjunto *solución es vacío*.

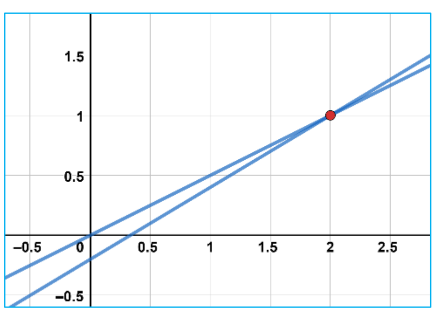
El método usado para encontrar las soluciones de los tres casos anteriores se conoce como **el Método Gráfico**, y consiste en graficar cada ecuación en un mismo plano cartesiano para observar si existe solución o no.

Ejemplo:
Determina por el método Gráfico el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 & \text{ec 1} \\ 2x - 4y = 0 & \text{ec 2} \end{cases}$$

ec= ecuación

Para obtener la gráfica de cada ecuación se busca las intersecciones con los ejes coordenados X y Y para tener dos puntos.

$3x - 5y = 1$	$2x - 4y = 0$
$Sea\ x = 0$ $3x - 5y = 1$ $3(0) - 5y = 1$ $-5y = 1$ $y = -\frac{1}{5}$ El punto es: $\left(0, -\frac{1}{5}\right)$ $Sea\ y = 0$ $3x - 5y = 1$ $3x - 5(0) = 1$ $3x = 1$ $x = \frac{1}{3}$ El punto es: $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  	$Sea\ x = 0$ $2x - 4y = 0$ $2(0) - 4y = 0$ $y = \frac{0}{-4}$ $y = 0$ El punto es: $(0,0)$ $Sea\ y = 0$ $2x - 4y = 0$ $2x - 4(0) = 0$ $x = \frac{0}{2}$ $x = 0$ El punto es: $(0,0)$ Como se obtiene el mismo punto se toma otro valor de x Sea $x = 2$ $2x - 4y = 0$ $2(2) - 4y = 0$ $4 - 4y = 0$ $-4y = -4$ $y = \frac{-4}{-4} = 1$ El punto es: $(2, 1)$

Para saber más

PruébaT
Sistema de ecuaciones
Método Gráfico

Manos a la obra

Determina la solución si es que existe de los siguientes sistemas lineales usando el método gráfico:

1. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 15x + 9y = 9 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 10x + 5y = 25 \end{cases}$

Métodos analíticos para sistemas de ecuaciones 2 x 2

El principal inconveniente del Método Gráfico es que si la solución no es un número entero entonces el conjunto solución se da de manera aproximada; existen métodos analíticos que tienen la ventaja de obtener un resultado exacto y sin necesidad de trazar la gráfica, lo que podría complicar su realización si no contamos con una hoja cuadriculada o regla.

Entre los principales métodos analíticos se encuentran los siguientes:

- Eliminación (suma y resta)
- Sustitución
- Igualación
- Determinantes

Reducción (suma y resta)

Este método consiste en multiplicar las ecuaciones dadas por algún número, de tal forma que al sumar las ecuaciones equivalentes que resultan, una de las variables se elimina para obtener una ecuación con una incógnita, y al resolverla se determina su valor, para posteriormente sustituirla en alguna de las ecuaciones originales y así obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplos:

1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de suma y resta

$$\begin{cases} 2x + 6y = 7 & \text{ec 1} \\ 3x - 4y = -6 & \text{ec 2} \end{cases}$$

1° Se elige una variable a eliminar, en este ejemplo se toma y;

2° Los coeficientes de y de cada ecuación deberán ser iguales y de distinto signo.

$(1)\ 2x + 6y = 7$ se multiplica por 1

$(3)\ 3x - 2y = 5$ se multiplica por 3

$$2x + 6y = 7$$
$$9x - 6y = 15$$

3° Se suma o resta cada término eliminándose la variable elegida en el paso 1

$$\begin{array}{l} 2x + \cancel{6y} = 7 \\ \underline{9x - \cancel{6y} = 15} \\ 11x \quad\ \ = 22 \end{array}$$

Se elimina la y

4° Se resuelve la ecuación obtenida que deberá tener solo una incógnita

$$11x = 22$$
$$x = \frac{22}{11} = 2$$

5° Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones originales

Sustituyendo $x = 2$ en la ec.1

$2x + 6y = 7$

$2(2) + 6y = 7$ Resolviendo para y

$4 + 6y = 7$

$6y = 7 - 4$

$6y = 3$

$y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

La solución del sistema es: $x = 2,\ \ y = \frac{1}{2}$ en el plano cartesiano las rectas se cruzan o intersectan en el punto $(2, \frac{1}{2})$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación

$$\begin{cases} 5x - 3y = -7 & \text{ec 1} \\ 3x + 5y = -11 & \text{ec 2} \end{cases}$$

1° Se elige una variable a eliminar, en este ejemplo se toma x;

2° Los coeficientes de x de cada ecuación deberán ser iguales y de distinto signo.

$(-3)\ \ 5x - 3y = -7$ se multiplica por -3

$(5)\ 3x + 5y = -11$ se multiplica por 5

$-15x + 9y = -21$

$15x + 25y = -55$

3° Se suma o resta cada término eliminándose la variable elegida en el paso 1

$-15\cancel{x} + 9y = 21$ Se elimina la x

$\underline{15\cancel{x} + 25y = -55}$

$34y = -34$

4° Se resuelve la ecuación obtenida que deberá tener solo una incógnita

$34y = -34$

$y = \frac{-34}{34} = -1$

5° Se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones originales

Sustituyendo $y = -1$ en la ec. 2

$3x + 5(-1) = -11$

$3x - 5 = -11$ Resolviendo para x

$3x = -11 + 5$

$3x = -6$

$x = \frac{-6}{3} = -2$

La solución del sistema es: $x = -2,\ y = -1$ en el plano cartesiano las rectas se intersectan en el punto $(-2, -1)$

3. Encuentra el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases}$$

La primera ecuación se multiplica por -3 y la segunda por 1 y se suman las ecuaciones equivalentes.

$(-x + 2y = 4)(-3)$ → $3x - 6y = -12$

$(-3x + 6y = 5)(1)$ → $\underline{-3x + 6y = \ \ 5}$

$0x + 0y = -7$

Como se eliminan las dos incógnitas, la ecuación resultante es $0x + 0y = -7$, por consiguiente, NO EXISTE solución.

Manos a la obra

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuación por el método de eliminación:

1. $\begin{cases} 12x - 18y = 13 \\ -12x + 30y = -19 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6u + 4v = 5 \\ 9u - 8v = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x - 4y = -6 \\ 15x - 12y = 21 \end{cases}$

Sustitución

Este método consiste en despejar una de las variables de cualquier de las dos ecuaciones y sustituir dicho despeje en la ecuación restante, así resulta una ecuación de primer grado, la cual se resuelve para obtener el valor de una de las variables. Este primer valor se sustituye en el despeje para determinar el valor de la variable que falta.

Ejemplos:

1. Determina los valores de x y y usando el método de sustitución

$$\begin{cases} 3x - 4y = -11 & \text{ec 1} \\ 5x + 3y = 1 & \text{ec 2} \end{cases}$$

Solución

1° Se despeja una variable de cualquier ecuación.

En este ejemplo se despeja x de la primera ecuación.

$$3x - 4y = 11$$

$$3x = 4y - 11$$

$$x = \frac{4y - 11}{3}$$

2° Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación (la que no se despejo) y se resuelve la ecuación resultante.

Sustituimos la x de la segunda ecuación por $\frac{4y-11}{3}$ y se resuelve la ecuación

$$5x + 3y = 1$$

$$5\left(\frac{4y-11}{3}\right) + 3y = 1$$ multiplicamos por 3 para quitar la fracción

$$5(4y - 11) + 9y = 3$$

$$20y - 55 + 9y = 3$$

$$20y + 9y = 3 + 55$$

$$29y = 58$$

$$y = \frac{58}{29}$$

$$y = 2$$

3° El valor obtenido se sustituye en la ecuación despejada en el paso 1

Se sustituye el valor de $y = 2$ en el despeje $x = \frac{4y-11}{3}$ y se resuelve

$$x = \frac{4(2) - 11}{3}$$

$$x = \frac{8 - 11}{3}$$

$$x = \frac{-3}{3} = -1$$

La solución del sistema es: $x = -1,\ y = 2$

2. Determina el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} -x + y = -7 & \text{ec 1} \\ 5x + 3y = 3 & \text{ec 2} \end{cases}$$

1° Se despeja una variable de cualquier ecuación.

En este ejemplo se despeja y de la primera ecuación.

$$-x + y = -7$$

$$y = x - 7$$

2° Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación (la que no se despejo) y se resuelve la ecuación resultante.

Sustituimos la y de la segunda ecuación por $x - 7$ y se resuelve la ecuación

$$5x + 3y = 3$$

$$5x + 3(x - 7) = 3$$
$$5x + 3x - 21 = 3$$
$$8x - 21 = 3$$
$$8x = 24$$
$$x = \frac{24}{8} = 3$$

3° El valor obtenido se sustituye en la ecuación despejada en el paso 1

Se sustituye $x = 3$, en el despeje $y = x - 7$ y se resuelve

$$y = 3 - 7$$
$$y = -4$$

La solución del sistema es: $x = 3,\ y = -4$ en el plano cartesiano las rectas se intersectan en el punto $(3, -4)$

3. Obtén el conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x - y = -6 \\ 6x + 3y = 18 \end{cases}$$

Solución

1° Se despeja una variable de cualquier ecuación.

En este ejemplo se despeja y de la segunda ecuación.

$$6x + 3y = 18$$
$$3y = 18 - 6x$$
$$y = \frac{18 - 6x}{3} = \frac{18}{3} - \frac{6x}{3}$$
$$y = 6 - 2x$$

2° Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación (la que no se despejo) y se resuelve la ecuación resultante.

Sustituimos la y de la primera ecuación por $6 - 2x$ y se resuelve la ecuación

$$-2x - y = -6$$
$$-2x - (6 - 2x) = -6$$
$$-2x - 6 + 2x = -6$$
$$-2x - 2x = -6 + 6$$
$$0x = 0$$

La ecuación $0x = 0$ indica que las rectas son coincidentes y tienen como conjunto solución todos los números reales, esto significa que el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.

Manos a la obra

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuación por el método de sustitución:

1. $\begin{cases} 2r - 5s = 14 \\ 5r + 2s = -23 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 7y - 12x = 17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3m - 4n = 32 \\ 5m + n = 38 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 12u - 16v = 24 \\ 3u - 4v = 6 \end{cases}$

Igualación

En este método se elige una variable, la cual se despeja de ambas ecuaciones, los despejes se igualan y se resuelve la ecuación de primer grado que resulta. Por último, el valor que se obtiene se sustituye en cualquiera de los despejes para hallar el otro valor.

Determina el punto de intersección de las rectas usando el método de igualación

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 6y = -45 \end{cases}$$

Solución

Se despeja $\boldsymbol{x}$ de ambas ecuaciones.

$2x - 3y = 9$	$5x + 6y = -45$
$2x = 3y + 9$	$5x = -6y - 45$
$x = \dfrac{3y + 9}{2}$	$x = \dfrac{-6y - 45}{5}$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación de primer grado.

$$\frac{3y + 9}{2} = \frac{-6y - 45}{5}$$

$$5(3y+9)=2(-6y-45)$$

$$15y+45=-12y-90$$

$$15y+12y=-90-45$$

$$27y=-135$$

$$y=\frac{-135}{27}=-5$$

Sustituyendo $y\ =-5$ en cualquiera de las ecuaciones despejadas se tiene:

$$x=\frac{3y+9}{2}$$

$$x=\frac{3(-5)+9}{2}=$$

$$\frac{-15+9}{2}$$

$$x=\frac{-6}{2}=$$

$$x=-3$$

Por consiguiente el punto de intersección es $(-3,-5)$.

Manos a la obra

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación:

1. $\begin{cases} x-2y=11 \\ x+5y=-17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -2x+3y=18 \\ -5y+x=-23 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3m-5n=1 \\ 9m+15n=9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x-24y=36 \\ -3x+12y=-18 \end{cases}$

Para saber más

PruébaT Método de Igualación

PruébaT Método de Sustitucion

PruébaT Método de suma o resta

Evaluando tus aprendizajes

Da clic sobre cada cuadro y realiza el ejercicio

Los sistemas de ecuaciones que se acaban de presentar estaban ordenados de la forma $Ax + By + C = 0$. Pero se pueden presentar casos en el cual se debe de hacer operaciones previas para dejarlo de la forma anterior y de esta manera resolver el sistema de ecuaciones

Los siguientes sistemas son ejemplos en donde se debe primero que pasar cada ecuación a la forma $Ax + By + C = 0$

1. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 19 = 3(y - x) \\ 2(x - 5y) = 5(y - 5) - 8y \end{cases}$$

Se realizan las operaciones indicadas en cada ecuación y se simplifican.

$$\begin{aligned} 2x + 19 &= 3(y - x) \\ 2x + 19 &= 3y - 3x \\ 2x + 3x - 3y &= -19 \\ 5x - 3y &= -19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x - 5y) &= 5(y - 5) - 8y \\ 2x - 10y &= 5y - 25 - 8y \\ 2x - 10y - 5y + 8y &= -25 \\ 2x - 7y &= -25 \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x - 3y = -19 \\ 2x - 7y = -25 \end{cases}$$

Se resuelve por algun método visto, en esta caso se usará eliminación.

$$(5x-3y=-19)\ (-2)$$

$$(2x-7y=-25)\ (5)$$

$$\begin{array}{r} -10x+6y=38 \\ \underline{10x-35y=-125} \\ -29y=-87 \end{array}$$

$$y=\frac{-87}{-29}$$

$$y=3$$

Sustituyendo $y=3$ en la primera ecuación

$$5x-3y=-19$$

$$5x-3(3)=-19$$

$$5x-9=-19$$

$$5x=-19+9$$

$$5x=-10$$

$$x=\frac{-10}{5}$$

$$x=-2$$

Entonces la solución del sistema es: $x=-2$ y $y=3$

2. Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4} \\ \frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Para eliminar las fracciones se multiplica por el mínimo común múltiplo de los denominadores de cada ecuación.

$$\left(\frac{x}{10}-\frac{y}{5}=\frac{1}{4}\right)(20)$$

$$\frac{20x}{10}-\frac{20y}{5}=\frac{20}{4}$$

$$2x-4y=5$$

$$\left(\frac{2x}{3}+2y=\frac{5}{2}\right)(6)$$

$$\frac{12x}{3}+12y=\frac{30}{2}$$

$$4x+12y=15$$

Se obtiene las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-4y=5 \\ 4x+12y=15 \end{cases}$$

Y se elige algún método de solución, en este caso el de igualación.

$$2x - 4y = 5 \qquad\qquad 4x + 12y = 15$$

$$2x = 5 + 4y \qquad\qquad 4x = 15 - 12y$$

$$x = \frac{5 + 4y}{2} \qquad\qquad x = \frac{15 - 12y}{4}$$

Se igualan los despejes y se resuelve la ecuación resultante

$$\frac{5 + 4y}{2} = \frac{15 - 12y}{4}$$

$$(4)(5 + 4y) = (2)(15 - 12y)$$

$$20 + 16y = 30 - 24y$$

$$16y + 24y = 30 - 20$$

$$40y = 10$$

$$y = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Se sustituye $y = \frac{1}{4}$ en cualquier despeje:

$$x = \frac{5 + 4y}{2}$$

$$x = \frac{5 + 4\left(\frac{1}{4}\right)}{2}$$

$$x = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Por consiguiente, la solución del sistema es: $x = 3$ y $y = \frac{1}{4}$

Manos a la obra

Determina la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x = y - 3 \\ 2y = 5 + x \end{cases}$

2. $\begin{cases} -7m = 2(3n + 13) \\ 7n = 2(m - 5) \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{12} = -\frac{2}{3} \\ 2x = 3y - 22 \end{cases}$

Problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales son una herramienta importante que nos sirven para resolver diversos problemas, desde los que se presentan en nuestra vida diaria hasta problemas que se presentan en ingeniería, física, matemáticas, economía, administración y otras ciencias.

Ejemplos

1. En una tienda departamental ponen en oferta camisas y pantalones que están fuera de temporada. El primer día se vendieron cinco pantalones y siete camisas, para totalizar $1,060.00, el segundo día de ventas se invirtieron las cantidades y se ganaron $1,100.00 ¿Cuál fue el precio de un pantalón y de una camisa?

Se plantea con dos variables los precios de los artículos:

x: precio de un pantalón

y: precio de una camisa

Con los datos del problema se plantean las ecuaciones simultáneas:

Resolviendo por el método de eliminación.
Se multiplica el número de objetos por el precio de cada uno de ellos y la suma será la cantidad de las ventas.

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1060 & \text{ec1} \\ 7x + 5y = 1100 & \text{ec2} \end{cases}$$

Esta ecuación se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores, en este caso por el de reducción:

$$-35x - 49y = -7420$$

$$\underline{35x + 25y = \ \ 5500}$$
$$-24y = -1920$$

$$y = \frac{-1920}{-24} = 80$$

Se sustituye $y = 80$ en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de x,

$$5x + 7y = 1060$$

$$5x + 7(80) = 1060$$

$$5x + 560 = 1060$$

$$x = \frac{1060 - 560}{5}$$

$$x = 100$$

Por tanto, el precio de un pantalón es de $100.00 y el de una camisa es de $80.00

2. Al revisar sus facturas de pago, el contador se percata de que la empresa de mensajería y paquetería Express, le cobró \$1,920.00 por un envío que en total pesaba 29 kilogramos, entonces pide a su secretaria aclarar cuánto le cobraron por paquete. La compañía aclaró que los paquetes que envió a Monterrey cobró a \$92.00 por kilogramo y por los que mandó a Pachuca \$30.00 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos enviaron a cada ciudad?

Se plantea con dos variables los datos que se deben encontrar:

x: cantidad de kilogramos que se mandaron a Monterrey

y: cantidad de kilogramos que se enviaron a Pachuca

En total se mandaron 29 kilogramos, entonces:

$$x + y = 29,$$

Si por cada kilogramo que se envió a Monterrey y Pachuca se cobró \$92.00 y \$30.00, respectivamente, se tiene:

$$92x + 30y = 1924$$

Entonces, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 29 & \text{ec1} \\ 92x + 30y = 1924 & \text{ec2} \end{cases}$$

Resolviendo por el método de sustitución, se despeja x de la ecuación 1

$$x + y = 29$$
$$x = 29 - y$$

Sustituyendo $x = 29 - y$ en la ecuación 2

$$92x + 30y = 1924$$
$$92(29 - y) + 30y = 1924 \qquad \text{Resolviendo la ecuación}$$
$$2668 - 92y + 30y = 1924$$
$$-62y = 1924 - 2668$$
$$-62y = -744$$
$$y = \frac{-744}{-62} = 12$$

Al sustituir $y = 12$ en la primera ecuación,

$$x + y = 29$$
$$x + 12 = 29$$
$$x = 29 - 12$$
$$x = 17$$

Por tanto, se mandaron 17 kilos a Monterrey y a 12 a Pachuca.

Para saber más

PruébaT Aplicación 1 sistemas de ecuaciones

PruébaT Aplicación 2 sistemas de ecuaciones

Manos a la obra

1. El doble de la suma de dos números es 32 y su diferencia es 0. ¿Qué números son?
2. Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?
3. Amada tiene el triple de edad que su hijo Juan. Dentro de 15 años, la edad de Amada será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Juan tiene su madre?
4. Jorge y Felipe hacen paletas de chocolate para vender. La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta $5.00 y para una paleta chica $3.00. Si disponen de $570.00 y quieren hacer 150 paletas, ¿cuántas paletas de cada tamaño podrán hacer?
5. Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.
6. En un examen tipo test, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y no se admiten respuestas en blanco (hay que contestar todas).
7. Don José y don Mateo fueron a comprar semillas para sembrar. Don José compró cuatro sacos de maíz y tres sacos de frijol, y don Mateo compró tres sacos de maíz y dos de frijol. La carga de don José fue de 480 kilogramos y la de don Mateo de 340 kilogramos. ¿Cuánto pesaban cada saco de maíz y cada saco de frijol?
8. La nota de un alumno es 8.05 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.
9. En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan 23 mil dólares. Los precios de las entradas son 50 dólares las normales y 300 dólares las vip. Calcular el número de entradas vendidas de cada tipo si el aforo del establecimiento es de 160 personas.

Evaluando tus aprendizajes

Métodos para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables

Para resolver un sistema de este tipo, se pueden utilizar los mismos métodos empleados para resolver los sistemas de dos variables, aunque se recomienda emplear el de **Eliminación y de Cramer.**

En seguida se presentan dos ejemplos usando el método de Eliminación

Se procede en la misma forma que en los sistemas de ecuaciones y se elimina una de las variables. Posteriormente, se toma cualquiera de las ecuaciones que se eligieron y en la que no se utilizó se elimina la misma variable, de tal manera que se obtienen dos ecuaciones con dos variables: al hallar la solución del sistema se determina el valor de las dos variables, después se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales, para obtener la tercera variable.

1. Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = -19 \\ 3x - 4y + z = -2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Aplicando el método de eliminación

$$2x - 3y - 5z = -19 - - - - - - - - - - -(1)$$

$$3x - 4y + z = -2 - - - - - - - - - - - - - (2)$$

$$x + y + z = 6 - - - - - - - - - - - - - - - (3)$$

Se toman dos ecuaciones, por ejemplo la ecuación (1) y (2) y se elimina x, obteniendo la ec. (A)

$$\begin{matrix} (2x - 3y - 5z = -19)(-3) \\ (3x - 4y + z = -2)(2) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} -\cancel{6x} + 9y + 15z = 57 \\ \underline{\cancel{6x} - 8y + 2z = -4} \end{matrix}$$

$$y + 17z = 53 - - - -(A)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (3), se elimina nuevamente la x y se obtiene la ecuación (B)

$$\begin{matrix} (2x - 3y - 5z = -19)(1) \\ (x + y + z = 6)(-2) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \cancel{2x} - 3y - 5z = -19 \\ \underline{-\cancel{2x} - 2y - 2z = -12} \end{matrix}$$

$$-5y - 7z = -31 - - - (B)$$

Con las ecuaciones (A) y(B) el sistema resultante es:

$$\begin{cases} y + 17z = 53 \\ -5y - 7z = -31 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema que resulta ecuaciones de las ecuaciones (A) y(B).

$$y + 17z = 53 \quad (5)$$

$$-5y - 7z = -31 \quad (1)$$

$$\cancel{5}y + 85z = 265$$

$$\underline{-\cancel{5}y - 7z = -31}$$

$$78z = 234$$

$$z = \frac{234}{78}$$

$$z = 3$$

Sustituyendo $z = 3$ en la ecuación (A)

$$y + 17(3) = 53$$

$$y + 51 = 53$$

$$y = 53 - 51$$

$$y = 2$$

Los valores $z = 3, y = 2$, se sustituyen en cualquiera de las tres ecuaciones originales.

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2 + 3 = 6$$

$$x + 5 = 6$$

$$x = 6 - 5$$

$$x = 1$$

Así la solución del sistema es $x = 1, y = 2, z = 3$

2. Resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + 2z = 6 \\ 3y - 5z = -17 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$x \qquad + 2z = 6 ------------ (1)$$

$$3y - 5z = -17 ----------- (2)$$

$$2x + 3y \qquad = -1 \quad ----------- (3)$$

Se toman las ecuaciones (2) y (3) y se elimina a y.

$$(3y - 5z = -17) \; (-1)$$

$$(2x + 3y \;\; = -1) \; (1)$$

$$-\cancel{3y} + 5z \;\; = \;\; 17$$

$$\underline{2x + \cancel{3y} \qquad\quad = -1}$$

$$2x \qquad + 5z \;\; = 16 -------- (A)$$

Se toman las ecuaciones (1) y (A) se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 6 \\ 2x + 5z = 16 \end{cases}$$

Se elimina x

$$(x + 2z = 6) \qquad (-2)$$

$$(2x + 5z = 16) \qquad (1)$$

$$-\cancel{2x} - 4z = -12$$

$$\underline{\cancel{2x} + 5z \;=\; 16}$$

$$z \;\; = \;\; 4$$

El valor de $z = 4$ se sustituye en cualquiera
de las ecuaciones (1) o (A)

$$x + 2z = 6$$

$$x + 2(4) = 6$$

$$x + 8 = 6$$

$$x = 6 - 8$$

$$x = -2$$

Para hallar el valor de y, se sustituye $z = 4$, en la ecuación (2)

$$3y - 5z = -17$$

$$3y - 5(4) = -17$$

$$3y - 20 = -17$$

$$3y = -17 + 20$$

$$3y = 3$$

$$y = \frac{3}{3}$$

$$y = 1$$

Por tanto, la solución del siguiente sistema es:

$$x = -2$$

$$y = 1$$

$$z = 4$$

Manos a la obra

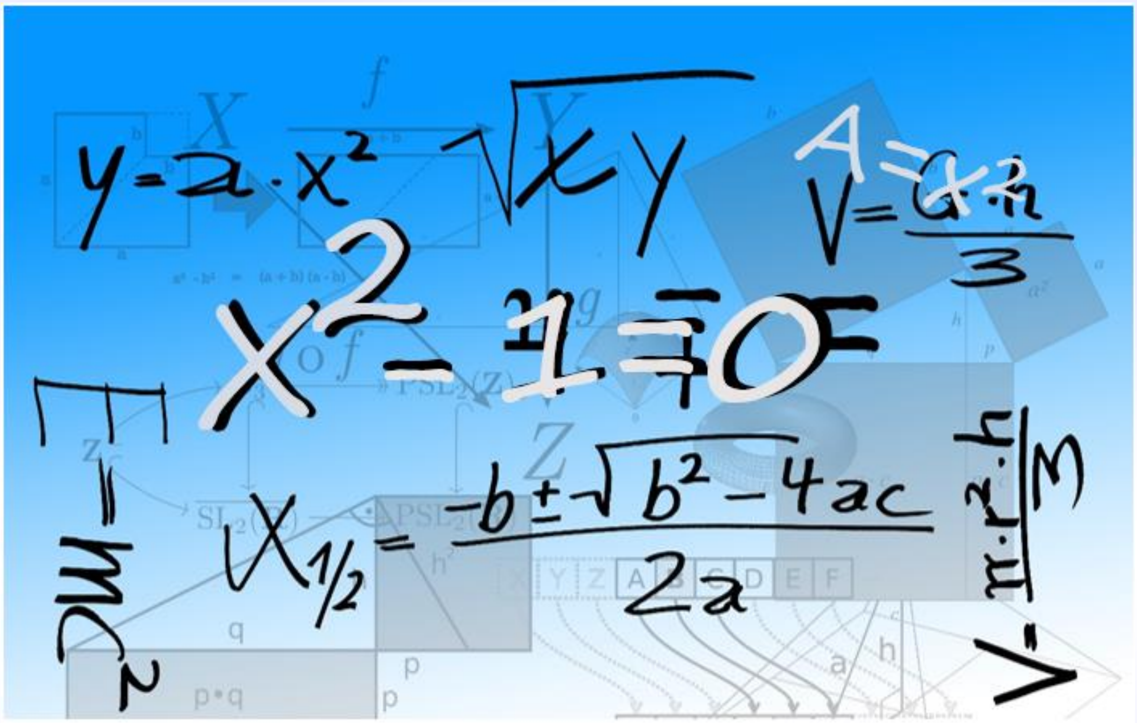
Resuelve por el método de eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones

1. $$\begin{cases} -x + 3y - z = 4 \\ 3x + 4y = 5 \\ 2x - 6y + 2z = 3 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \\ x - 8y + 5z = -6 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 4x + y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

VIII. RESUELVES ECUACIONES CUADRÁTICAS

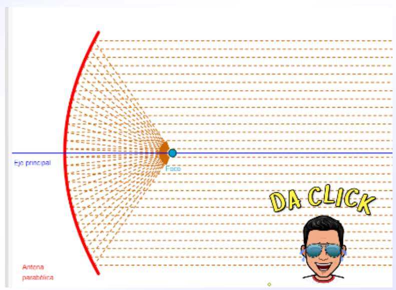


Aprendizajes esperados

- **Simboliza y generalizan fenómenos lineales y fenómenos cuadráticos mediante el empleo de variables**
- **Significa, gráfica y algebraicamente, las soluciones de una ecuación.**

Las ecuaciones cuadráticas al igual que las ecuaciones lineales tienen una variedad de aplicaciones en la física, la ingeniería y el diseño. Dos características de la ecuación cuadrática que la hacen adecuada para aplicarse en el mundo real, es el movimiento parabólico de un objeto (proyectil) y la otra es la propiedad óptica que poseen por lo que se usan en el diseño y construcción de antenas parabólicas, espejos y focos parabólicos.

Observa la siguiente animación donde se muestra esta propiedad.



Valorando lo que sabes

1. Escribe dos ejemplos de tu contexto donde uses las ecuaciones cuadráticas

2. Determina los valores de x para que la ecuación sea cero (deben ser dos soluciones)

   a) $x^2 - 4 = 0$

   b) $1 - x^2 = 0$

   c) $x^2 = 3x$

   d) $2x + x^2 = 0$

3. Factoriza las siguientes expresiones cuadráticas

   a) $x^2 - 2x$

   b) $x^2 + 6x + 9$

   c) $4x^2 - 1$

   d) $3x^2 + 7x - 10$

   e) $9 - x^2$

Ecuaciones de segundo grado

La ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \epsilon R$ y $a \neq 0$, es una ecuación de segundo grado; al término independiente y se clasifican de la siguiente forma:

Ecuaciones de segundo grado

- Completas: $ax^2 + bc + c = 0$
- Incompletas:
  - Mixtas: $ax^2 + bx = 0$, con $c = 0$
  - Puras: $ax^2 + c = 0$, con $b = 0$

Tomado del libro: Algebra CONAMAT

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Cuando se resuelve una ecuación cuadrática, generalmente se obtienen dos raíces o soluciones en el conjunto de los números reales, pero también se puede obtener soluciones en el campo de los números imaginarios o complejos. Además, en algunos casos se puede tener una única solución repetida.

Existen generalmente tres métodos para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita:

- Factorización
- Fórmula cuadrática General
- Completar el Trinomio Cuadrado Perfecto

En este libro se resolverán ecuaciones cuadráticas usando la factorización (visto en el bloque V) y usando la Formula Cuadrática General esta última se puede aplicar para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Método de factorización

Este método usa las factorizaciones estudiadas anteriormente, pero no todas las ecuaciones cuadráticas son factorizables por lo que se debe usar con cuidado.

Se puede identificar qué tipo de factorización usar de acuerdo con si es una ecuación de segundo grado completa o incompleta.

Si la ecuación cuadrática es completa entonces se usa el método de tijeras

Si la ecuación es incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$ entonces se usa el método de factor común.

Si la ecuación es incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$ se usa el método de diferencia de cuadrados siempre y cuando uno de los términos sea negativo.

Ejemplos.

Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de factorización

1. Resuelve la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$

Como es un trinomio completo se factoriza por el método de tijeras

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\begin{array}{lcl} x & & 5 = 5x \\ x & & 1 = \underline{1x} \\ & & \phantom{1 = {}} 6x \end{array}$$

Por lo que:

$$(x+5)(x+1) = 0$$

Cada factor se iguala a cero

$$x + 5 = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$$

Se resuelve cada ecuación

$x = -5$ $\qquad$ $x = -1$ $\qquad$ Soluciones de la ecuación

2. Resuelve la ecuación $x^2 - 5x - 6 = 0$

Factorizado por el método de tijeras ya que es un trinomio completo

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{lcl} x & & -6 = -6x \\ x & & 1 = \quad 1x \end{array}$$

Por lo que

$$(x-6)(x+1) = 0$$

Cada factor se iguala a cero

$$x - 6 = 0 \qquad\qquad x + 1 = 0$$

Se resuelve cada ecuación

$x = 6$ $\qquad$ $x = -1$ $\qquad$ Soluciones de la ecuación

3. Resuelve la ecuación $2x^2 + 7x + 3 = 0$

Factorizado por el método de tijeras

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{ccl} 2x & & 1 = 1x \\ x & & 3 = \underline{6x} \\ & & \quad\ \ 7x \end{array}$$

Por lo que

$$(2x + 1)(x + 3) = 0$$

Cada factor se iguala a cero

$2x + 1 = 0$ $\qquad$ $x + 3 = 0$

Se resuelve cada ecuación

$2x = -1$ $\qquad$ $x = -3$

$x = \frac{-1}{2}$ $\qquad$ $x = -3$ $\quad$ Soluciones de la ecuación

4. Resuelve la ecuación $x^2 - 7x = 0$

Factorizando por el método de factor común ya que es incompleto y no tiene término c

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x(x - 7) = 0$$

Cada factor se iguala a cero.

$x = 0$ $\qquad$ $x - 7 = 0$

Resolviendo cada ecuación

$x = 0$ $\qquad$ $x = 7$ $\quad$ Son las soluciones de la ecuación

5. Resuelve la ecuación $x^2 - 25 = 0$

Factorizando por diferencia de cuadrados ya que no tiene el término bx

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x + 5)(x - 5) = 0$$

Cada factor se iguala a cero

$x + 5 = 0$ $\qquad$ $x - 5 = 0$

Se resuelve cada ecuación

$x = -5$ $\qquad$ $x = 5$ $\quad$ Son las soluciones de la ecuación

6. Resuelve $(w + 2)(2w - 1) = (w - 2)(w + 5) + 15$

En este caso primero se simplifica para dejar la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicando los binomios

$$2w^2 - w + 4w - 2 = w^2 + 3w - 10 + 15$$

Ordenando

$$2w^2 - w^2 - w + 4w - 3w - 2 + 10 + 15 = 0$$

Reduciendo términos semejantes

$$w^2 - 7 = 0$$

Como no tiene el término bx se factoriza por diferencia de cuadrados

$$(w + \sqrt{7})(w - \sqrt{7}) = 0$$

Igualando a cero cada factor

$w + \sqrt{7} = 0$ $\qquad$ $w - \sqrt{7} = 0$

Resolviendo cada ecuación

$w = -\sqrt{7}$ $\qquad$ $w = \sqrt{7}$ Son las soluciones de la ecuación

Método de la fórmula cuadrática general

La **fórmula cuadrática general** permite resolver cualquier ecuación sin importar si su raíz es real o compleja.
Si la ecuación está dada de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se puede obtener la fórmula cuadrática general completando el trinomio cuadrado perfecto

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}}}{2a}$$

Discriminante de una ecuación

El discriminante es la parte de la fórmula cuadrática general dentro del símbolo de raíz cuadrada: $\mathbf{b^2 - 4ac}$. El discriminante nos indica si hay dos soluciones, una solución o ninguna solución real, este último indicaría que la solución es imaginaria o compleja.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}}}{2a}$$

De acuerdo con el valor que se obtenga indicará el tipo de solución.

Si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$	2 soluciones reales
Si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$	1 solución real repetida
Si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$	0 solución real (es imaginario o complejo)

Ejemplos:

Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas usando el discriminante determina el número de soluciones y di si es real o no

a) $\mathbf{2x^2 - 3x + 5 = 0}$

Se identifica el valor de a, b y c, que son los coeficientes de x^2, x y el término lineal correspondientemente.

$a = 2 \qquad b = -3 \qquad c = 5$

Se sustituyen los valores en la fórmula del discriminante: $\mathbf{b^2 - 4ac}$

$(-3)^2 - 4(2)(5)$

Se realizan las operaciones y se observa el resultado

$9 - 40 = \mathbf{-31}$

Como el resultado es menor que cero, ya que es negativo significa que las raíces son complejas

b) $\mathbf{3x(x - 1) = 2x + 6}$

Se realizan las operaciones necesarias para obtener la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$3x(x - 1) = 2x + 6$

$3x^2 - 3x = 2x + 6$ Todos los términos se pasan a la izquierda para igualar a cero

$3x^2 - 3x - 2x - 6 = 0$

$3x^2 - 5x - 6 = 0$

Se identifica el valor de a, b y c, que son los coeficientes de x^2, x y el término independiente correspondientemente.

$a = 3 \qquad b = -5 \qquad c = -6$

Se sustituyen los valores en la fórmula del discriminante: $\mathbf{b^2 - 4ac}$

$(-5)^2 - 4(3)(-6)$

Se realizan las operaciones y se observa el resultado

$25 + 72 = 97$

Como el resultado es positivo significa que las raíces son reales

c) $\mathbf{x^2 - 3(x - 2) = 5 - x}$

Se realizan las operaciones necesarias para obtener la ecuación cuadrática de la forma

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 - 3(x - 2) = 5 - x$

$x^2 - 3x + 6 = 5 - x$ Todos los términos se pasan a la izquierda para igualar a cero

$x^2 - 3x + x + 6 - 5 = 0$ Se reducen términos semejantes

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Se identifica el valor de a, b y c

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 1$

Se sustituyen los valores en la fórmula del discriminante: $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$

$(-2)^2 - 4(1)(1)$

Se realizan las operaciones y se observa el resultado

$4 - 4 = 0$

Como el resultado es **cero** significa que existe una única raíz repetida real

Ahora resolveremos ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática general

Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\boldsymbol{3x^2 + 4x = 1}$

Se ordenan los términos para que la ecuación quede igualada a cero

$3x^2 + 4x - 1 = 0$

Se identifica el valor de a, b y c

$a = 3 \qquad b = 4 \qquad c = -1$

Se sustituye en la fórmula cuadrática general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

Se realizan las operaciones siguiendo la jerarquía de operaciones

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

Se obtienen las dos soluciones

$x_1 = \frac{-4+2}{6} = \frac{-2}{6} \qquad x_2 = \frac{-4-2}{6} = \frac{-6}{6}$

$x_1 = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = -1$

b) $\boldsymbol{(x+7)(2x-1)=4x-11}$

Se realizan las operaciones necesarias para obtener la ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$

$(x+7)(2x-1)=4x-11$

$2x^2-x+14x-7=4x-11$ Los términos de la derecha lo movemos a la izquierda

$2x^2-13x-7-4x+11=0$ Sumamos y restamos términos semejantes y se ordena

$2x^2-17x+4=0$

Se identifica el valor de a, b y c

$a=2$ $b=-17$ $c=4$

Se sustituye en la fórmula cuadrática general $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4(2)(4)}}{2(4)}$$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{257}}{8}$$

Se obtienen las dos soluciones

$x_1=\frac{17+\sqrt{257}}{8}$ $x_2=\frac{17-\sqrt{257}}{8}$

c) $\boldsymbol{(x+1)^2-2x=10}$

$(x+1)^2-2x=10$ Desarrollamos el binomio al cuadrado

$x^2+2x+1-2x=10$ Pasamos el 10 a la izquierda

$x^2+\cancel{2x}+1-\cancel{2x}-10=0$ Sumamos y restamos términos semejantes

$x^2-9=0$ Factorizamos (diferencia de cuadrados)

$(x+3)(x-3)=0$ Igualamos a cero cada factor

$x+3=0$ $x-3=0$ Despejamos

$\boldsymbol{x_1=-3}$ $\boldsymbol{x_2=3}$

[Usando la fórmula cuadrática general]

En este ejemplo fue más fácil usar la factorización para resolver la ecuación, pero da el mismo resultado si usas la fórmula cuadrática general

d) $\mathbf{5x(2-x) = 10(x-3)}$

Se realizan las operaciones necesarias para obtener la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$5x(2-x) = 10(x-3)$	Se multiplica cada binomio por el primer factor
$10x - 5x^2 = 10x - 30$	Los términos de la derecha se mueven a la izquierda
$10x - 5x^2 - 10x + 30 = 0$	Se restan términos semejantes
$-5x^2 + 30 = 0$	Se despeja la x
$-5x^2 = -30$	
$x^2 = \frac{-30}{-5}$	
$x^2 = 6$	Se obtiene la raíz cuadrada

Se obtienen las dos soluciones

$x_1 = \sqrt{6}$ $\qquad$ $x_2 = -\sqrt{6}$

e) $\mathbf{x^2 + 2x = 2(x-2)}$

Se realizan las operaciones necesarias para obtener la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

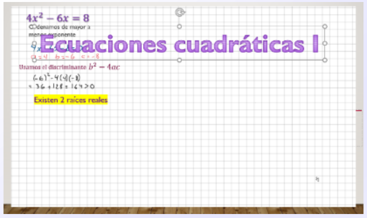
$x^2 + 2x = 2(x-2)$	Se multiplica el 2 por el binomio
$x^2 + 2x = 2x - 4$	Los dos términos de la derecha se mueven a la izquierda
$x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} + 4 = 0$	Se restan términos semejantes
$x^2 + 4 = 0$	Se despeja x
$x^2 = -4$	Se obtiene la raíz cuadrada de cada miembro
$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-4}$	La raíz cuadrada negativa da un número imaginario
$x = \pm\sqrt{4}i$	
$x = \pm 2i$	

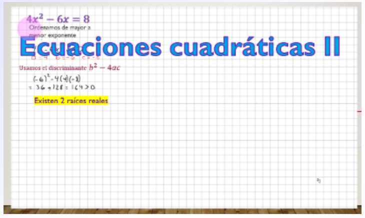
Así: $x_1 = 2i$

$x_2 = -2i$

Las soluciones no son reales, es otro conjunto de números llamados imaginarios y se reconocen por la letra i

Para saber más





Manos a la obra

1. Usando el discriminante determina el número de raíces y si pertenece a los números reales o no

1) $4x^2 - 6 = 8$
2) $x^2 + 25 = 0$
3) $4 + 3x - 2x^2 = 0$
4) $x^2 - 8 = 2(x + 3)$
5) $x(2x + 3) = 3(5x - 6)$

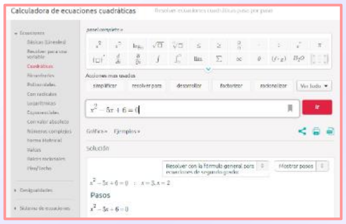
Visualiza la respuesta dando clic en cada

2. Resuelva por factorización las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 11x + 24 = 0$
b) $x^2 - 2x - 15 = 0$
c) $x^2 - 17x + 52 = 0$
d) $x^2 - x - 56 = 0$
e) $2x^2 - 32x = 0$
f) $4x = x^2$
g) $x(x - 5) = 6$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por fórmula cuadrática general

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$
b. $5x^2 - 7x = 8$
c. $2x(x - 6) = 3x + 8$
d. $4x - 7 = 2x(2 + 3x)$
e. $3(x - 1) = (x - 2)^2$
f. $(2x - 1)^2 - 4 = 0$
g. $(x - 2)(2x - 3) = 2(x - 3)$
h. $\frac{3x}{2} + \frac{2x-3}{4} = x^2$
i. $4 + \frac{x-x^2}{5} = 2x + 1$
j. $5(x + 1)(3x - 4) = -24$



Da click en la imagen y copia cada ecuación en la calculadora para que mires el procedimiento y las soluciones.

Evaluando tus aprendizajes

Problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas

Resuelve los siguientes ejercicios de ecuaciones cuadráticas

1. La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180, ¿cuáles son los números?

Primer número: x

Segundo número: $18 - x$

La ecuación obtenida es:

$x^2 + (18 - x)^2 = 180$

$x^2 + 324 - 36x + x^2 - 180 = 0$

$2x^2 - 36x + 144 = 0$ dividir entre 2

$x^2 - 18x + 72 = 0$ se resuelve la ecuación

$(x - 12)(x - 6) = 0$ se factoriza

$x - 12 = 0 \;\; o \;\; x - 6 = 0$

cada factor se iguala con cero

$x = 12 \; o \; x = 6$

Finalmente, tenemos que los números son 12 y 6.

2. En t segundos la altura h, en metros sobre el nivel del suelo, de un proyectil está dada por la ecuación $h = 80t - 5t^2$, ¿cuánto tardará el proyectil en llegar a 320m sobre el nivel del suelo?

Con la ecuación $h = 80t - 5t^2$, se obtiene la altura proyectil en cualquier instante.

Para determinar el tiempo que tarda el proyectil en tener una altura de 320m, este valor se evalúa en la ecuación dada, es decir:

$$h = 80t - 5t^2$$

$$320 = 80t - 5t^2$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve para t

$320 = 80t - 5t^2$	se iguala con cero
$5t^2 - 80t + 320 = 0$	se divide entre 5
$t^2 - 16t + 64 = 0$	
$(t-8)^2 = 0$	se factoriza
$t - 8 = 0$	se extrae raíz en ambos miembros
$t = 8$	se obtiene el valor de t

Por tanto, el proyectil tardará 8 segundos en estar a 320m sobre el nivel del suelo.

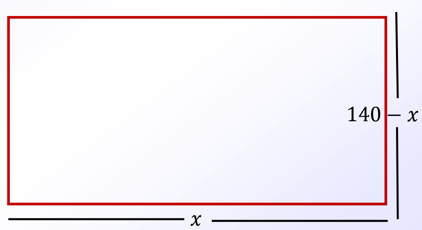
3. Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280m y su área es de 4 000 m^2.

2 (base)+2 (altura)=perímetro

$2x + 2$ (altura)= 280

$x +$ (altura)= 140

altura= $140 - x$



base × altura = Área

$(x)(140 - x) = 4000$

$140x - x^2 = 4000$

$x^2 - 140x + 4000 = 0$

$(x - 100)(x - 40) = 0$

$x - 100 = 0 \qquad x - 40 = 0$

$x = 100$ $\qquad$ $x = 40$

Para identificar qué valor de x es la medida de los lados se sustituye en la altura

$$Altura = 140 - x$$

Para $x = 40$ $\qquad$ Para $x = 40$

$Altura = 140 - 40 = 100$ $\qquad$ $Altura = 140 - 100 = 40$

Por lo tanto, las dimensiones son 100 y 40

4. Un comerciante compró determinado número de pelotas con \$720 y vendió algunas, excepto 18, ganó \$6 en cada una. Sabía que con el dinero de la venta podría haber comprado 3 pelotas más que antes, calcula el precio de cada pelota.

Precio de compra de cada pelota: x

Número de pelotas: $\frac{720}{x}$

Precio de venta de cada pelota: $x + 6$

Total de la venta: $\left(\frac{720}{x} - 18\right)(x+6)$

Número de pelotas compradas con el total de la venta: $\frac{720}{x} + 3$

Costo de la compra de 3 pelotas más: $x\left(\frac{720}{x} + 3\right)$

Ecuación:

$$\left(\frac{720}{x} - 18\right)(x+6) = x\left(\frac{720}{x} + 3\right)$$

$$\left(\frac{720 - 18x}{x}\right)(x+6) = x\left(\frac{720 + 3x}{x}\right)$$

$$\frac{(720 - 18x)(x+6)}{x} = \left(\frac{720 + 3x}{x}\right)$$

$$720x + 4\,320 - 18x^2 - 108x = 720x + 3x^2$$

$$21x^2 + 108x - 4\,320 = 0$$ dividimos por 3

$$7x^2 + 36x - 1\,440 = 0$$

Se aplica la fórmula general,

$$x = \frac{-(36) \pm \sqrt{(36)^2 - 4(7)(-1\,440)}}{2(7)} = \frac{-36 \pm \sqrt{41\,616}}{14} = \frac{-36 \pm 204}{14}$$

Entonces, las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-36 - 204}{14} = -\frac{240}{14} = -\frac{120}{7} \;\; o \;\; x_2 = \frac{-36 + 204}{14} = \frac{168}{14} = 12$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = -\frac{120}{7} \;\; o \;\; x_2 = 12$$

pero el precio de un artículo no puede ser negativo, por tanto, el precio de cada pelota es \$12.

Ejemplos tomados del libro: Algebra CONAMAT

Manos a la obra

1. El doble del cuadrado de un número es igual al cuadrado del sucesor del número más 14. ¿Cuál es el número?
2. La diferencia entre dos catetos de un triángulo rectángulo es 7cm. ¿Cuál es el perímetro del triángulo rectángulo si la hipotenusa mide 6 cm menos que la suma de los catetos?
3. La suma de dos números es 30 y su producto 221. ¿Cuáles son los números?
4. Un jardín rectangular mide 6m por 4m. S8i se le rodea por una franja pavimentada de ancho uniforme cuya área es equivalente a la del jardín, ¿Cuál es el ancho de la franja pavimentada?
5. Encuentra 3 números consecutivos impares, cuya suma de sus cuadrados sea 83.
6. Un agricultor tiene necesidad de cercar 25 000m^2 de su parcela; dicha propiedad es rectangular y colinada con un río, por lo que no necesita cercar ese lado. ¿Qué dimensiones tiene el terreno si el propietario dispone de 450m de cerca?
7. Se desea construir un recipiente, sin tapa, de fondo cuadrado y lados rectangulares, con una altura de 6m, si el material para el fondo cuesta \$800 por metro cuadrado y el de los lados \$1 200, ¿cuál es el volumen que se puede obtener con \$128 000?
8. Determina las dimensiones de un rectángulo cuya altura es un tercio de su base y su área es de 972cm^2.
9. Damián tiene 4 años más que Alex y el cuadrado de la edad de Damián, aumentando en el cuadrado de la edad de Alex, equivalen a 80 años. Encuentra las edades de Damián y Alex.
10. Un productor de conservas en almíbar desea envasar su producto en una lata cilíndrica, cuya altura es de 8 centímetros y su volumen de 128 $\pi\, cm^3$. Encuentra el radio de la lata.

Gráfica de ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas.

Las ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas se pueden graficar en el plano cartesiano, cuando la ecuación solo una de sus variables está elevado al cuadrado, entonces se tiene como gráfica una parábola. Estas ecuaciones tienen diversas aplicaciones y se verán más a detalle en el tercer semestre.

Toda parábola tiene un punto donde la curva cambia, a este punto se le conoce como vértice y en el caso de parábolas verticales recibe el nombre de máximo o mínimo.

La ecuación cuadrática de una parábola vertical está dada por:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Dada la ecuación de la parábola vertical se puede hallar las coordenadas de su vértice con la fórmula

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

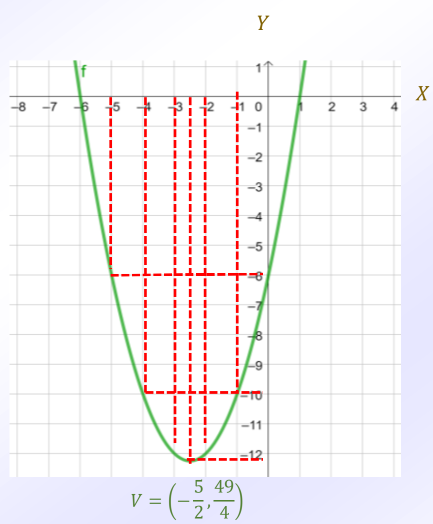
En los siguientes ejemplos se muestra como trazar las gráficas de las ecuaciones cuadráticas y como calcular las coordenadas de sus vértices.

1. Grafica $y = x^2 + 5x - 6$ e indica las raíces(soluciones)

   Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, los cuales se sustituyen en la función.

Tabla de valores

x	y
-6	0
-5	-6
-4	-10
-3	-12
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{49}{4}$
-2	-12
-1	-10
0	-6
1	0



La parábola corta el eje de las X en los valores $x = -6$ y $x = 1$

Por tanto, las raíces son: $x = -6$ y $x = 1$

2. Determina las coordenadas del vértice, las raíces y traza la gráfica de la paráb ola:

$y = -x^2 + 2x - 4$

Se identifican los valores de a, b y c y se sustituyen en la fórmula,

$$a = -1, \qquad b = 2, \qquad c = -4$$

Se observa que el valor de a es menor que cero, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y su vértice representa un punto máximo.

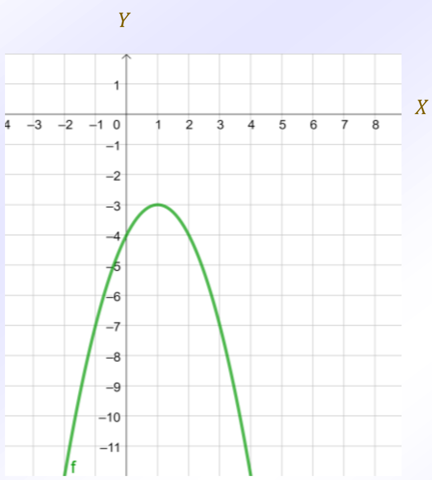
Las coordenadas del vértice son:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = V\left(-\frac{(2)}{2(-1)}, \frac{4(-1)(-4) - (2)^2}{4(-1)}\right) = V(1, -3)$$

Se realiza una tabla con un número suficiente de valores para x, que se sustituyen en la función.

Tabla de valores

x	y
-2	-12
-1	-7
0	-4
1	-3
2	-4
3	-7
4	-12



La parábola no interseca (corta) al eje X. Por lo tanto no tiene raíces reales.

Manos a la obra

Traza la gráfica y encuentra las coordenadas del vértice y determina las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $y = 2x^2 - 8x + 6$
2. $y = x^2 - x - 20$
3. $y = x^2 - 4x + 13$
4. $y = -9 - x^2$