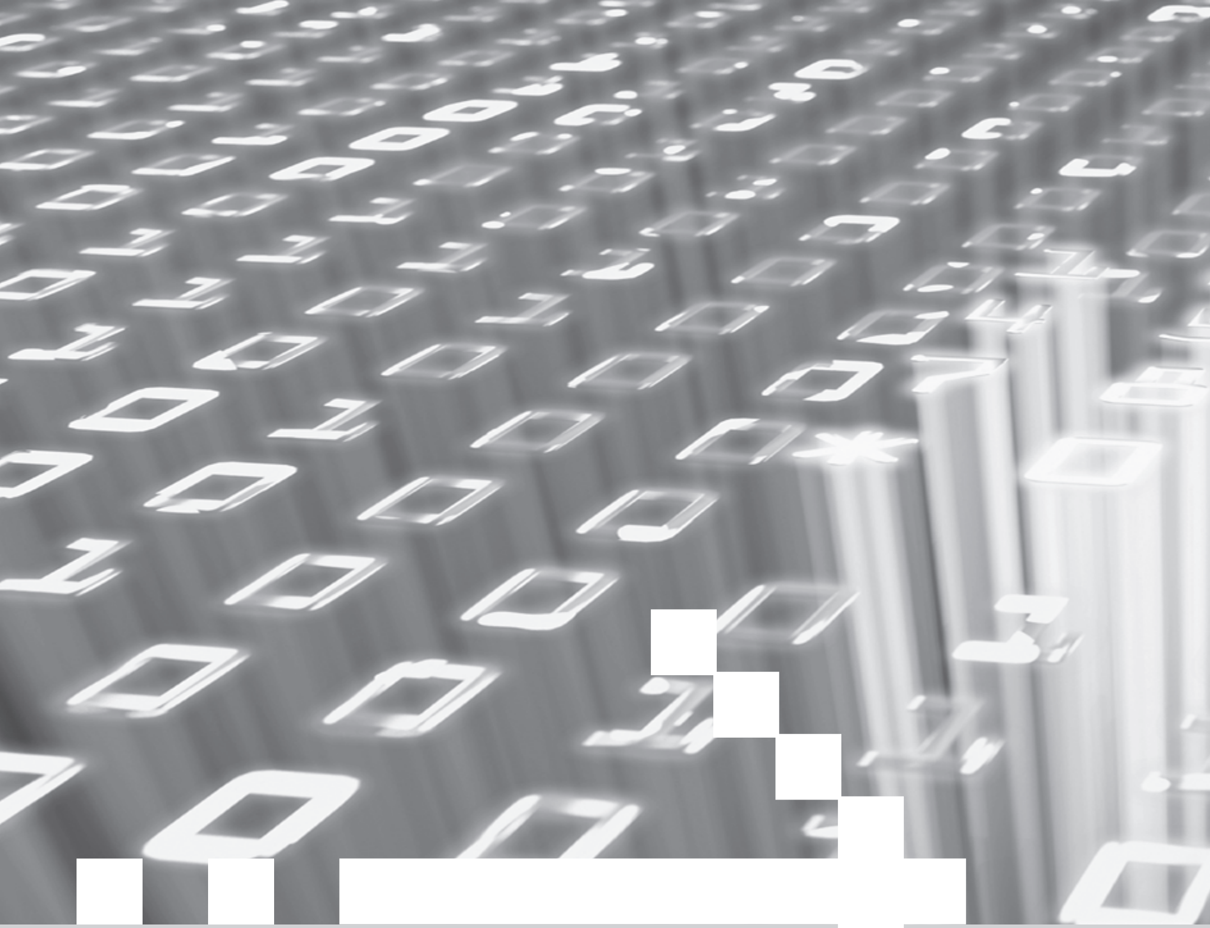

capítulo 1

introdução e conceitos básicos

Este capítulo faz uma apresentação da matemática discreta, de seus conceitos básicos e de seus usos aplicados aos cursos de informática e computação. Também define quais serão os tópicos abordados e apresenta exemplos de uso da matemática discreta por meio de exercícios resolvidos e de exercícios complementares para o aluno.

1.1 ⇢ introdução à matemática discreta

Praticamente qualquer estudo em computação e informática, teórico ou aplicado, exige como pré-requisito conhecimentos de diversos tópicos de Matemática.

A importância da matemática é explicitada nas Diretrizes Curriculares do MEC para cursos de Computação e Informática (Brasil, 2008), como segue (a matéria matemática é integrante da área de formação básica):

> *A formação básica tem por objetivo introduzir as matérias necessárias ao desenvolvimento tecnológico da computação. O principal ingrediente desta área é a ciência da computação, que caracteriza o egresso como pertencente à área de computação. A maioria das matérias tecnológicas são aplicações da ciência da computação. São matérias de formação básica dos cursos da área de computação: a ciência da computação, a* ***matemática****, a física e eletricidade e a pedagogia.*

Especificamente em relação à matéria matemática, o texto destaca que:

> *A matemática, para a área de computação, deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos, etc). Os modelos formais permitem definir suas propriedades e dimensionar suas instâncias, dadas suas condições de contorno.*

E, em relação à *matemática discreta*:

> *Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertencem ao domínio do discreto, a* ***matemática discreta*** *(ou também chamada álgebra abstrata) é fortemente empregada.*

Este livro complementa o seguinte livro desta mesma série:

> *Matemática discreta para computação e informática.*

Os dois livros exploram, com abordagens complementares, uma seleção de tópicos de matemática discreta que são essenciais para o estudo de computação e informática, tanto na área de formação básica como na área de formação tecnológica.

Deve-se observar que não é objetivo dessas duas publicações cobrir todos os tópicos de matemática discreta. Assim, alguns temas como *análise combinatória* e *probabilidade discreta* não são desenvolvidos. Adicionalmente, apenas alguns tópicos de *teoria dos grafos* são introduzidos.

Uma questão importante para o entendimento do que segue é a origem do termo matemática discreta. Intuitivamente falando, qualquer sistema computador possui limitações finitas em todos os seus principais aspectos como, por exemplo, tamanho da memória, número de instruções que pode executar, número de símbolos diferentes que pode tratar, etc. Assim, o estudo dos *conjuntos finitos* é fundamental.

O fato de um sistema computador possuir limitações finitas não implica necessariamente uma limitação ou pré-fixação de tamanhos máximos. Por exemplo, no que se refere à capacidade de armazenamento, um computador pode possuir unidades auxiliares como discos removíveis, fitas, etc. Portanto, para um correto entendimento de diversos aspectos computacionais, frequentemente não é possível pré-fixar limites, o que implica tratar tais questões em um contexto infinito ("tão grande quanto se queira").

Entretanto, qualquer conjunto de recursos computacionais, finito ou infinito, é *contável* ou *discreto* (em oposição ao termo *contínuo*), no sentido em que seus elementos (recursos) podem ser *enumerados* ou sequenciados (segundo algum critério) de tal forma que não existe um elemento entre quaisquer dois elementos consecutivos da enumeração. Por exemplo, o conjunto dos números naturais é obviamente contável. Um importante contraexemplo é o conjunto dos números reais, o qual é *não-contável* ou *não-discreto*. Isso significa que existem conjuntos infinitos contáveis e conjuntos infinitos não-contáveis.

Assim, a *matemática discreta* possui como ênfase os estudos matemáticos baseados em conjuntos contáveis, finitos ou infinitos, em oposição à *matemática do continuum*, que trata dos estudos matemáticos baseados em conjuntos não-contáveis. Um importante exemplo de *matemática do continuum* para computação e informática é o *cálculo diferencial e integral*.

Este livro apresenta muito mais do que simples respostas de exercícios, pois discute definições e suas interpretações, detalha as etapas de raciocínio bem como desenvolvimentos frequentemente omitidos, explica as razões da escolha de determinado caminho, discute a lógica e os passos lógicos envolvidos, interpreta teoremas e suas provas sob diversos aspectos, apresenta opções alternativas, erros mais comuns, etc., sempre usando uma linguagem precisa, formal, mas acessível e de fácil compreensão. Embora em grande parte autocontido, complementa mas não substitui o livro *Matemática discreta para computação e informática* e, portanto, deve ser usado em conjunto com ele. Assim, o objetivo deste livro é:

Aprender matemática discreta por meio de exercícios

com o intuito de:

Capacitar o leitor para a aplicação sistematizada e formalizada de conceitos e resultados relativos a matemática discreta com ênfase na computação e informática.

1.2 exercícios resolvidos

exercício 1.1 Para cada conjunto abaixo:

- descreva de forma alternativa (usando outra forma de notação);
- diga se é finito ou infinito.

Um conjunto é dito finito se pode ser denotado por extensão, ou seja, listando exaustivamente todos os seus elementos, e infinito, caso contrário.

Um conjunto pode ser definido por compreensão por meio de suas propriedades, ou por extensão, isto é, exibindo todos seus elementos.

a Todos os números inteiros maiores que 10;

solução: $\{x \in \mathbf{Z} \mid x > 10\}$. *O conjunto é infinito.*

b {1, 3, 5, 7, 9, 11,...};

solução: *{y | y = 2x + 1 e x ∈ **N**}. O conjunto é infinito.*

c Todos os países do mundo;

solução: *{x | x é um país do mundo}. O conjunto é finito.*

d A linguagem de programação Pascal;

Uma linguagem de programação é (formalmente) definida em termos do conjunto de seus programas.

A questão da finitude desse conjunto é uma discussão interessante, pois é possível pensar assim: se acrescentarmos uma instrução, por exemplo `x:= 1`, ao corpo de um programa Pascal, gera-se um novo programa. A instrução pode ser incluída qualquer número de vezes e então serão infinitos programas, ainda que obedecendo a exigência de que um programa só pode ter um número finito de comandos.

solução: *{x | x é um programa Pascal}. O conjunto (de programas) é infinito.*

---

exercício 1.2 Para A = {1}; B = {1, 2} e C = {{1}, 1}, marque as afirmações corretas:

solução: *Para cada item, a afirmação correta é marcada com o símbolo ✔ e, na coluna da direita, eventualmente é apresentada uma rápida justificativa da resposta.*

a	$A \subset B$	[✔]	$2 \in B$ e $2 \notin A$
b	$A \subseteq B$	[✔]	$A \subset B$
c	$A \in B$	[ ]	todos os elementos de B são números e A é um conjunto
d	$A = B$	[ ]	$B \not\subseteq A$
e	$A \subset C$	[✔]	$\{1\} \in C$ e $\{1\} \notin A$
f	$A \subseteq C$	[✔]	$A \subset C$

g	$A \in C$	[✔]	$A = \{1\}$ e $\{1\} \in C$
h	$A = C$	[ ]	$C \not\subseteq A$
i	$1 \in A$	[✔]	
j	$1 \in C$	[✔]	
k	$\{1\} \in A$	[ ]	o único elemento de A é o número 1 e não o conjunto $\{1\}$
l	$\{1\} \in C$	[✔]	
m	$\varnothing \notin C$	[✔]	
n	$\varnothing \subseteq C$	[✔]	o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto (**exercício 1.5**)

---

exercício 1.3 Sejam $a = \{x \mid 2x = 6\}$ e $b = 3$. Justifique ou refute a seguinte afirmação:

$$a = b$$

Aqui se põe a diferença entre um conjunto unitário e seu único elemento. No desenvolvimento da solução, observe que $a = \{b\}$.

solução: *$a = \{x \mid 2x = 6\} = \{3\}$. Portanto, $a = \{3\}$ o que é diferente de $b = 3$.*

---

exercício 1.4 Quais são todos os subconjuntos dos seguintes conjuntos?

a $A = \{a, b, c\}$

solução: *Todos os subconjunto de A:*

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

b $B = \{a, \{b, c\}, D\}$ dado que $D = \{1, 2\}$

Observe que $B = \{a, \{b, c\}, \{1, 2\}\}$. Ou seja, B possui 3 elementos. Em particular:

> *$1 \notin B$ e $2 \notin B$. Logo $\{1, 2\}$ não é subconjunto de B; por outro lado, $\{1, 2\} \in B$. Logo o conjunto unitário $\{\{1, 2\}\}$ é subconjunto de B.*

solução: *Todos os subconjuntos de B:*

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{\{b, c\}\}$, $\{\{1, 2\}\}$, $\{a, \{b, c\}\}$, $\{a, \{1, 2\}\}$, $\{\{b, c\}, \{1, 2\}\}$, $\{a, \{b, c\}, \{1, 2\}\}$

exercício 1.5 O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto (inclusive nele próprio)? Justifique a sua resposta.

A definição de continência estabelece que $A \subseteq B$ se e somente se todo elemento de A também é elemento de B.

solução: *$\varnothing \subseteq B$ satisfaz a definição de continência para qualquer conjunto B, pois é verdade que todo elemento de $\varnothing$ (que não existe) é elemento de qualquer conjunto B.*

Esse tipo de prova se chama prova por vacuidade. *Neste capítulo e ao longo do livro veremos outros exemplos desse tipo de prova, sempre envolvendo o conjunto vazio.*

exercício 1.6 Todo conjunto possui um subconjunto próprio? Justifique a sua resposta.

solução: *Não. $\varnothing \subseteq A$ para qualquer conjunto A, inclusive quando $A = \varnothing$ (**exercício 1.5**), isto é $\varnothing \subseteq \varnothing$. Entretanto, vazio não tem subconjunto próprio pois $\varnothing \not\subset \varnothing$.*

exercício 1.7 Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 3, 7, 8\}$, $D = \{3, 4\}$, $E = \{1, 3\}$, $F = \{1\}$ e X um conjunto desconhecido. Para cada item abaixo, determine quais dos conjuntos A, B, C, D, E ou F podem ser iguais a X.

Esse exercício se refere à definição de continência e a questão é determinar que valores o conjunto X pode assumir entre A, B, C, D, E e F; satisfazendo cada uma das condições.

a $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$

Observe que $D \subseteq A$ e $D \subseteq B$

solução: *$X = D$*

b $X \not\subseteq B$ e $X \subseteq C$

X pode ser C, E ou F, pois:

$C \not\subseteq B$ e $C \subseteq C$
$E \not\subseteq B$ e $E \subseteq C$
$F \not\subseteq B$ e $F \subseteq C$

solução: *$X = C$, $X = E$ ou $X = F$*

c $X \not\subseteq A$ e $X \not\subseteq C$

X pode ser B, pois:

$B \not\subseteq A$ e $B \not\subseteq C$

Já C não satisfaz, pois $C \subseteq C$ (apesar de $C \not\subseteq A$)

solução: *$X = B$*

d $X \subseteq B$ e $X \not\subseteq C$

X pode ser B ou D, pois:

$B \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$
$D \subseteq B$ e $D \not\subseteq C$

solução: *$X = B$ ou $X = D$*

---

exercício 1.8 Sejam A um subconjunto de B e B um subconjunto de C. Suponha que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$, $f \notin C$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

a $a \in C$

Considerando que:

dado $A \subseteq B$, é fato que, para todo x, se $x \in A$ então $x \in B$; e
dado $B \subseteq C$, é fato que, para todo x, se $x \in B$ então $x \in C$;

então é fato que, para todo x, se $x \in A$ então $x \in C$. Em particular, dado $a \in A$, então $a \in C$.

solução: *A afirmação é verdadeira.*

b $b \in A$

Não necessariamente $b \in A$. Contraexemplo: $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{a, b, c\}$.

solução: *A afirmação é falsa.*

c $c \notin A$

Não necessariamente $c \notin A$. Contraexemplo: $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{a, b, c\}$.

solução: *A afirmação é falsa.*

d $d \in B$

Não necessariamente $d \in B$. Contraexemplo: $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{a, b, c, d\}$.

solução: *A afirmação é falsa.*

e $e \notin A$

Considerando que $A \subseteq B$, é fato que, para todo x, se $x \in A$ então $x \in B$. Em particular, como $e \notin B$, obrigatoriamente $e \notin A$.

solução: *A afirmação é* verdadeira.

f $f \notin A$

Considerando que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, é fato que, para todo x, se $x \in A$ então $x \in B$ e $x \in C$. Em particular, como $f \notin C$, obrigatoriamente $f \notin A$.

solução: *A afirmação é verdadeira.*

---

exercício 1.9 Marque os conjuntos que são alfabetos:

solução: *Para cada item, a afirmação correta é marcada com o símbolo ✔.*

a	Conjunto dos números naturais	[ ]
b	Conjunto dos números primos	[ ]
c	Conjunto das letras do alfabeto brasileiro	[✔]
d	Conjunto dos algarismos arábicos	[✔]
e	Conjunto dos algarismos romanos	[✔]
f	Conjunto {a, b, c, d}	[✔]
g	Conjunto das vogais	[✔]
h	Conjunto das letras gregas	[✔]

---

exercício 1.10 Sejam $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ e Dígitos = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} alfabetos. Então:

a Para cada um dos alfabetos abaixo, descreva o correspondente conjunto de todas as palavras:

a.1) Σ

solução: $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, c, \ldots, z, aa, ab, ac, \ldots, az, ba, bb, bc, \ldots bz, aaa, \ldots\}$

a.2) Dígitos

solução: *Dígitos** $= \{\varepsilon, 0, 1, 2, \ldots, 9, 00, 01, 02, \ldots, 09, \ldots, 90, 91, 92, \ldots, 99, 000, \ldots\}$

b Discuta as seguintes afirmações:

b.1) Português é uma linguagem sobre Σ, ou seja, é um subconjunto de Σ^*.

Dica: Quais os símbolos usados para compor um texto em português?

solução: *A afirmação é falsa. De fato, um texto em português contém, em geral, uma série de símbolos especiais como pontuação, aspas, parênteses, espaço (branco separador), etc.*

b.2) **N** é uma linguagem sobre Dígitos, ou seja, é um subconjunto de Dígitos*.

solução: *Esse item possui duas respostas, dependendo se a abordagem é sobre a* sintaxe *("forma") ou sobre a* semântica *("significado"):*

- *sintaticamente, a afirmação é verdadeira pois qualquer número natural pode ser escrito usando os símbolos do alfabeto Dígitos;*
- *semanticamente é falsa, pois existem infinitas formas de representar os números naturais como, por exemplo, usando qualquer alfabeto binário como o {0, 1}. Nesse caso, a interpretação dessas diferentes formas é sempre a mesma e essa interpretação é que define conjunto dos número naturais.*

Questões sobre sintaxe e semântica são apenas superficialmente abordadas neste livro e são usualmente detalhadas em disciplinas como linguagens formais e semântica formal*, respectivamente.*

b.3) **N** = Dígitos*

solução: *A afirmação é falsa, tanto sintática como semanticamente (ver item anterior sobre uma breve discussão de questões sintáticas e semânticas). De fato, a palavra vazia ε não representa um número natural.*

---

exercício 1.11 Em que condições o conjunto de todas os palíndromos sobre um alfabeto constitui uma linguagem *finita*?

Para um alfabeto unitário, qualquer palavra (de qualquer comprimento) é um palíndromo, pois é constituída por uma sequência finita de um mesmo símbolo justaposto. Nesse caso, o conjunto dos palíndromos é infinito. Obviamente, para alfabetos binários ou maiores, um raciocínio análogo é válido. Entretanto, se o alfabeto for vazio, a única cadeia de caracteres possível é a palavra vazia ε, a qual é um palíndromo.

solução: *Quando o alfabeto for vazio.*

1.3 exercícios complementares

exercício 1.12 Para cada item a seguir, verifique se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique:

a $\varnothing \subseteq \varnothing$

b $\varnothing \in \varnothing$

c $0 \in \varnothing$

d $\varnothing \in 0$

e $\varnothing \in \{0\}$

f $\varnothing \subseteq \{0\}$

exercício 1.13 O conjunto vazio é finito? Justifique.

exercício 1.14 Justifique ou apresente um contraexemplo para a seguinte afirmação:

Todo conjunto possui pelo menos um subconjunto próprio finito.

exercício 1.15 Sejam $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ e $B = \{2, 3\}$. Então $A = B$? Justifique.

exercício 1.16 Seja $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 64 = 0\}$. Denote o conjunto A por extensão.

exercício 1.17 Sobre alfabetos e conjuntos de todas as palavras:

a Exemplifique um alfabeto Σ tal que Σ^* é finito.

b Em que situação um conjunto de palavras sobre um alfabeto é um alfabeto?

c Dado um alfabeto, em que condições o conjunto de todas palavras sobre este alfabeto (onde cada palavra é vista como um símbolo) é um alfabeto? Justifique a sua resposta.

exercício 1.18 Para o alfabeto {a, b} apresente por extensão a linguagem formada por todas as palavras contendo exatamente 4 caracteres e que formam um palíndromo.

exercício 1.19 Para o alfabeto $\Sigma = \{ab, bd, ac, cc, d\}$, mostre que abdbd $\in \Sigma^*$ e ccaaac $\notin \Sigma^*$.

exercício 1.20 Desenvolva um programa em Pascal (ou outra linguagem de seu conhecimento) tal que, dada uma palavra de entrada, verifique se trata-se de um palíndromo.

exercício 1.21 Para que o leitor se convença plenamente da importância da matemática discreta para a computação e informática, realize duas pesquisas na internet, a saber:

a uma sobre currículos de cursos de computação e informática no mundo, e sua relação com a matemática discreta. Observe que algumas vezes a matemática discreta é denominada de álgebra;

b outra sobre a importância da matemática discreta para a computação e informática e o detalhamento do porquê do termo "discreta".