Problemas lineares
Menor Caminho

Fundamentos em Pesquisa Operacional

Marcelo Antonio Marotta

Departamento de Ciência da Computação
Universidade de Brasília

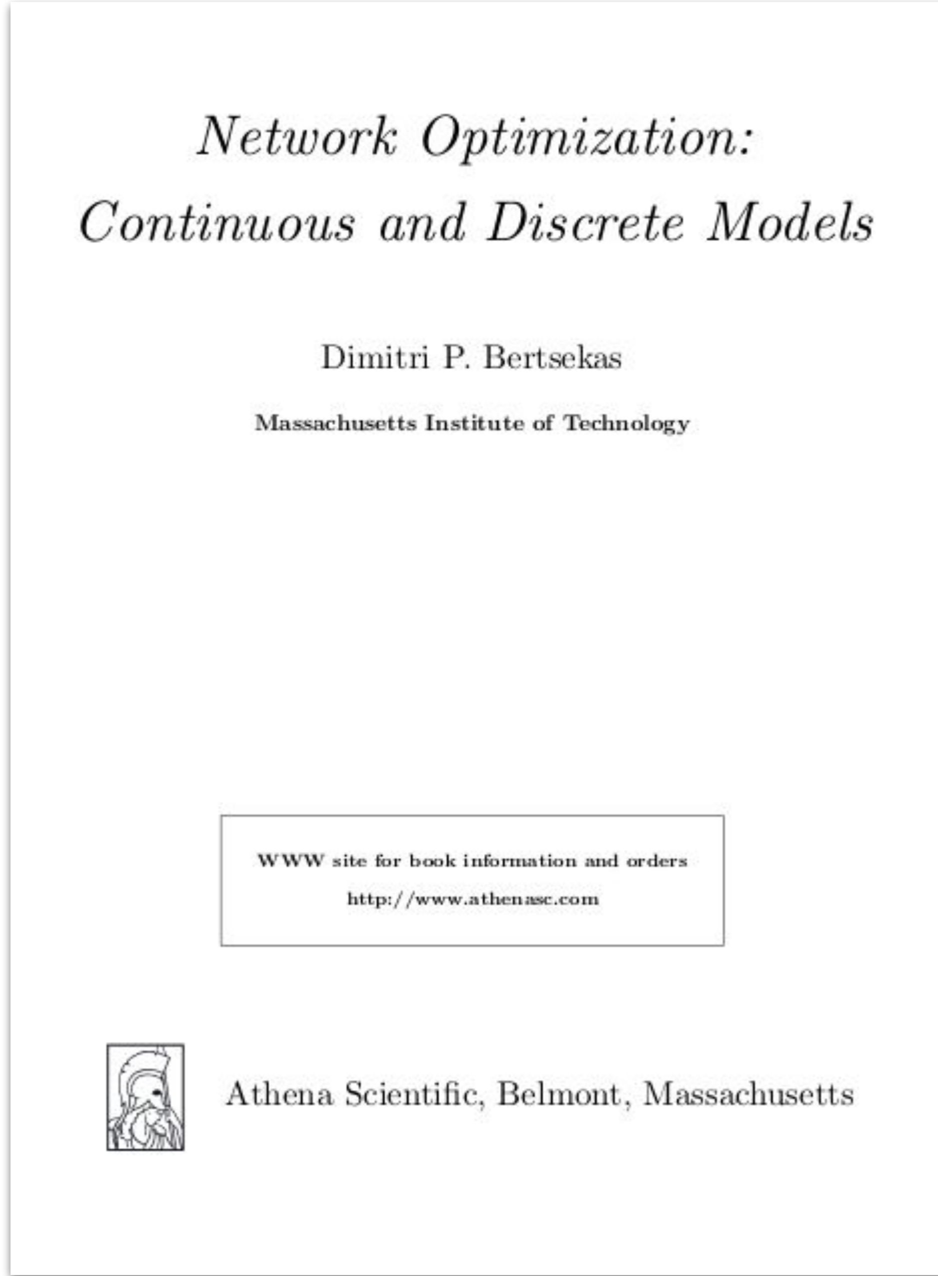
Exercício da última aula

Implementar no ORTools o problema de associação

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \qquad \forall\ i = 1,\dots,n, \\
& \sum_{\{i|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \qquad \forall\ j = 1,\dots,n, \\
& 0 \le x_{ij} \le 1, \qquad \forall\ (i,j) \in \mathcal{A}.
\end{aligned}
$$

Livro

- Problema do menor caminho
- Exemplo 1.1
  - Capítulo 2



Network Optimization:
Continuous and Discrete Models

Dimitri P. Bertsekas

Massachusetts Institute of Technology

WWW site for book information and orders
http://www.athenasc.com

Athena Scientific, Belmont, Massachusetts

Problemas lineares

Problemas lineares inteiros binários

- The assignment problem (problema de associação)
- The shortest path (problema do menor caminho)

The shortest path - Exemplo 1.1 (Bertsekas, 1998)

Suponha que a cada arco (i, j) de um gráfico seja atribuído um custo escalar a_{ij}, e suponha que definimos o custo de um caminho direto como a soma dos custos de seus arcos. Dados os pares de nós, o problema do caminho mais curto é encontrar um caminho direto que conecte esses nós e tenha custo mínimo. Uma analogia aqui é feita entre arcos e seus custos, e estradas em uma rede de transporte e seus comprimentos, respectivamente. Nesse contexto de transporte, o problema passa a ser encontrar a rota mais curta entre dois pontos geográficos. Com base nessa analogia, o problema é referido como o problema do caminho mais curto, e os custos do arco e os custos do caminho são comumente referidos como comprimentos de arco e comprimentos de caminho, respectivamente.

The shortest path - Exemplo 1.1 (Bertsekas, 1998)

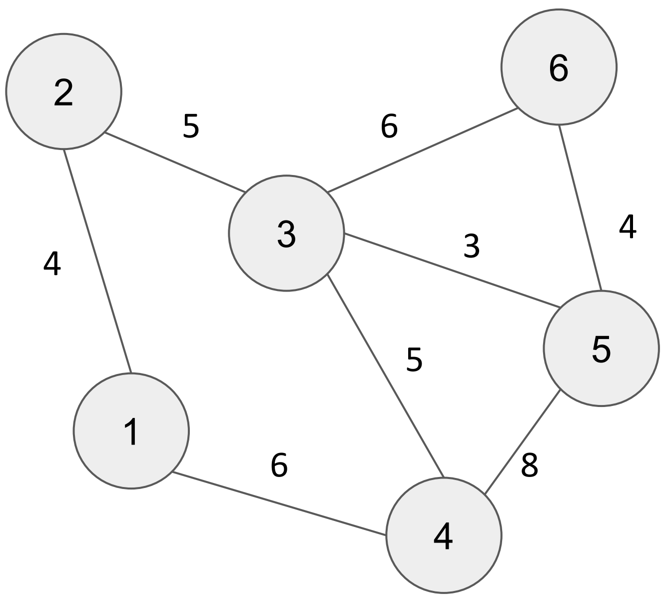
O problema do menor caminho é importante em muitos contextos práticos

- Logística
- Roteamento de redes
  - Baseado na latência
  - Número de saltos
  - BER ou PER
- Sistemas de GPS

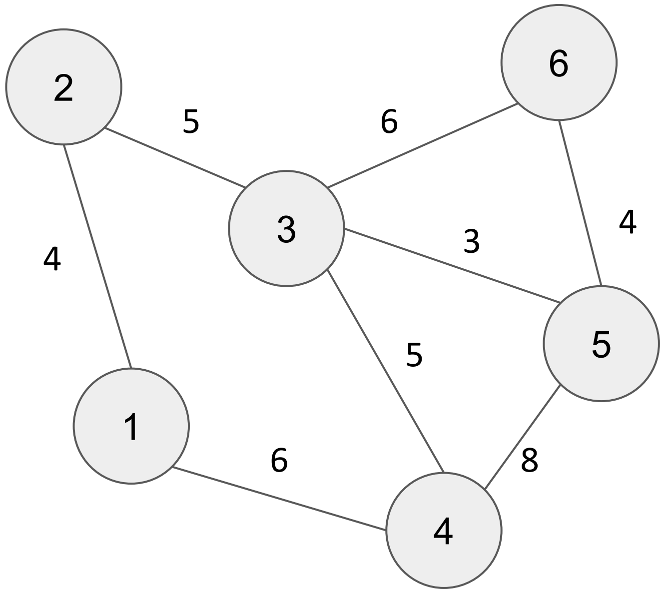
Modelando o problema
Parametrização

Modelando o problema - Parametrização

Grafo conectado

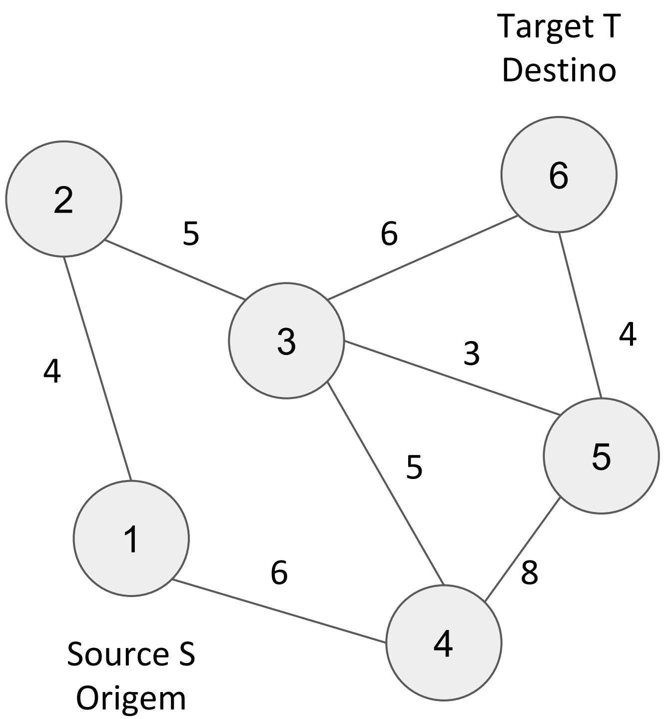


Modelando o problema - Parametrização



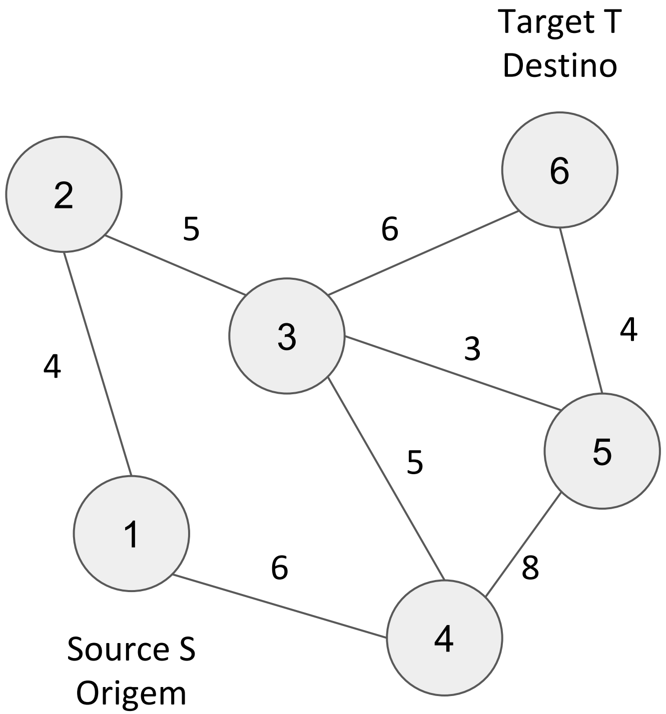
N = conjunto de nodos - {1,...,N}
N=número de nodos = 6
i,j = índices = {i,j ∈ *N*}

Modelando o problema - Parametrização



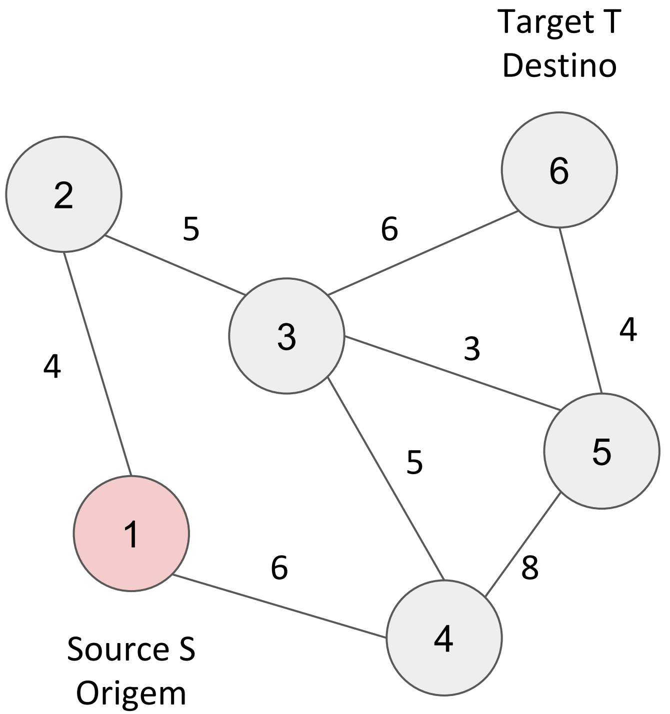
N = conjunto de nodos - {1,...,N}
N=número de nodos = 6
i,j = índices = {i,j $\in$ N}
T = 6
S = 1

Modelando o problema - Parametrização



Matriz de conectividade (ou conexão)

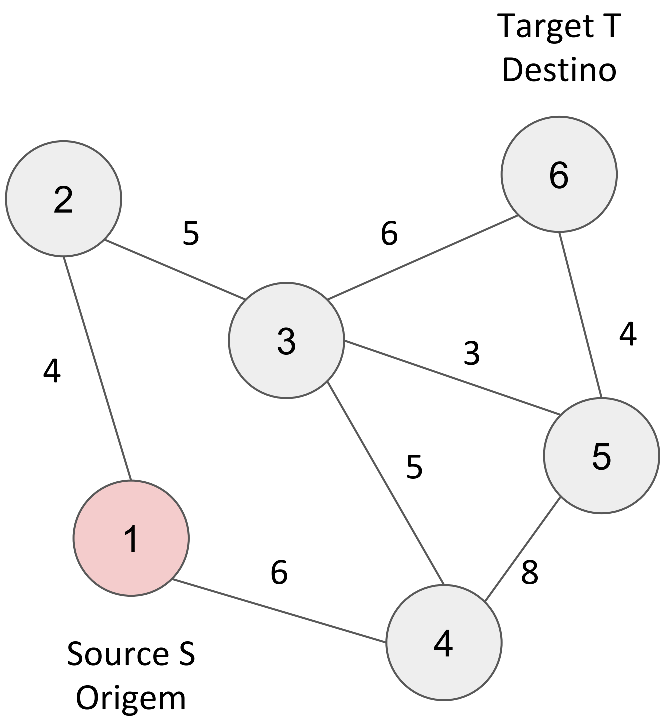
Modelando o problema - Parametrização



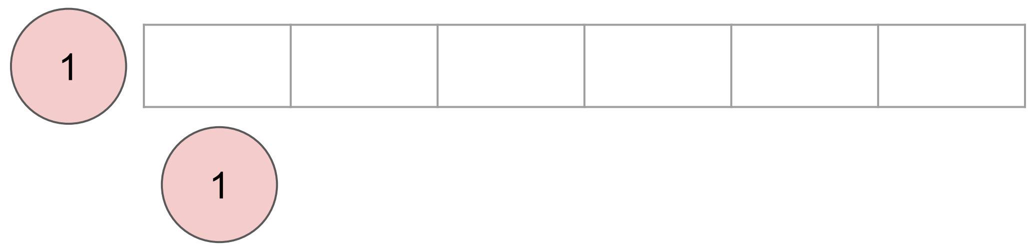
Matriz de conectividade (ou conexão)

1						

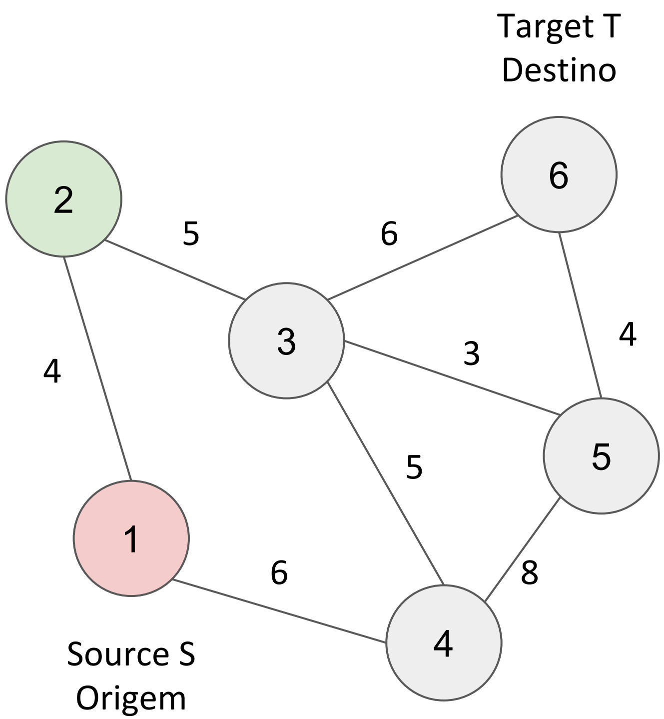
Modelando o problema - Parametrização



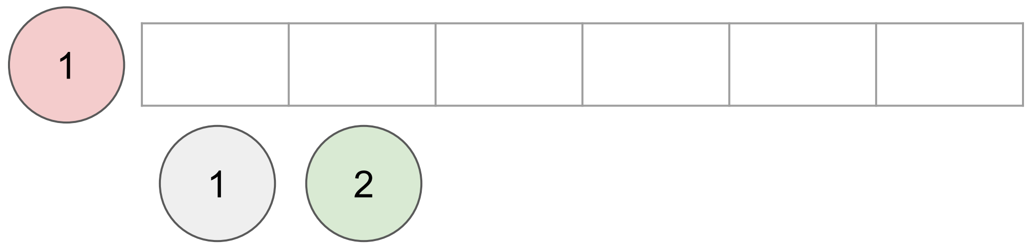
Matriz de conectividade (ou conexão)



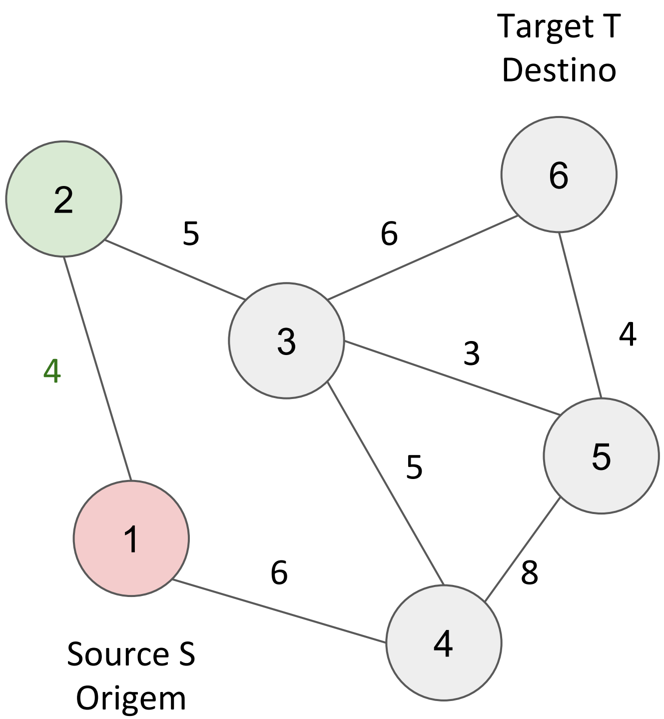
Modelando o problema - Parametrização



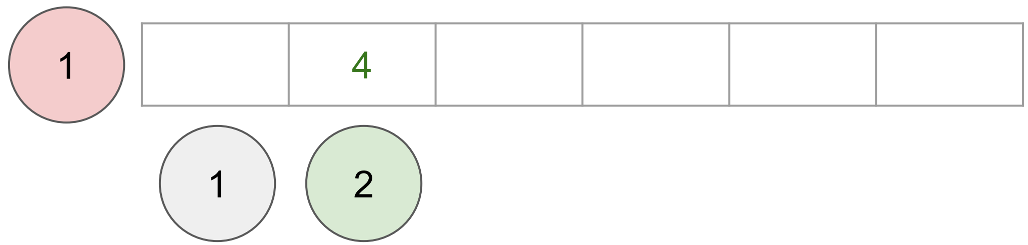
Matriz de conectividade (ou conexão)



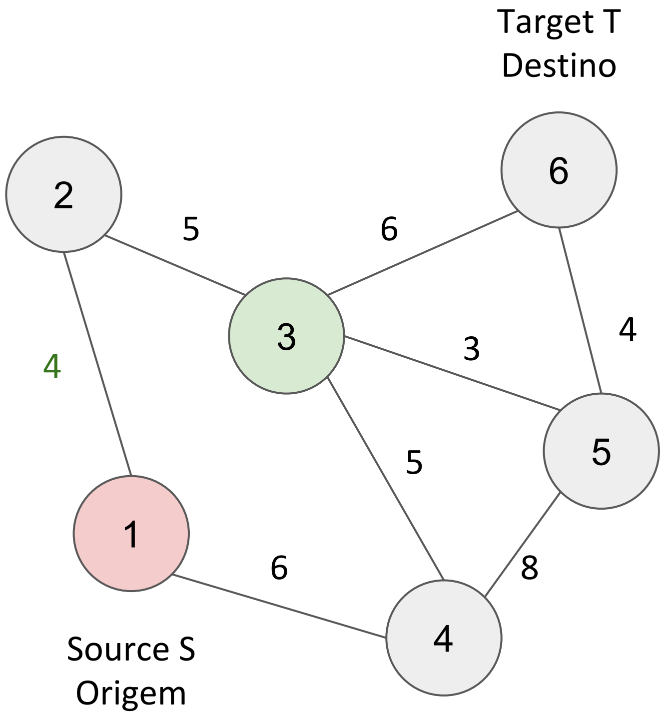
Modelando o problema - Parametrização



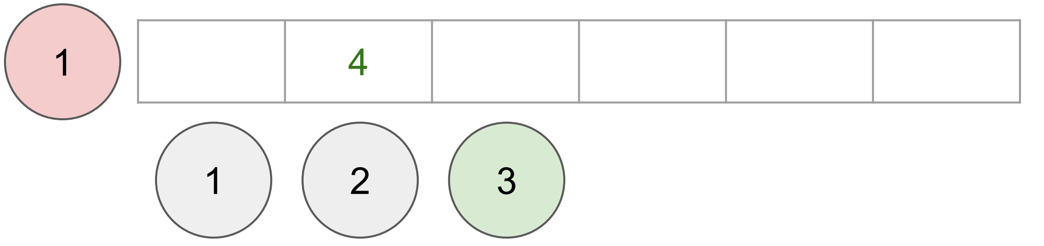
Matriz de conectividade (ou conexão)



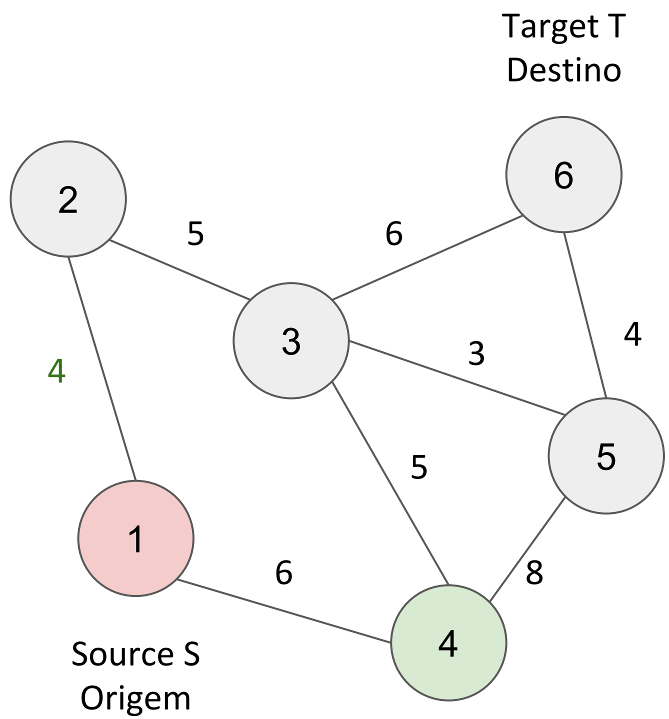
Modelando o problema - Parametrização

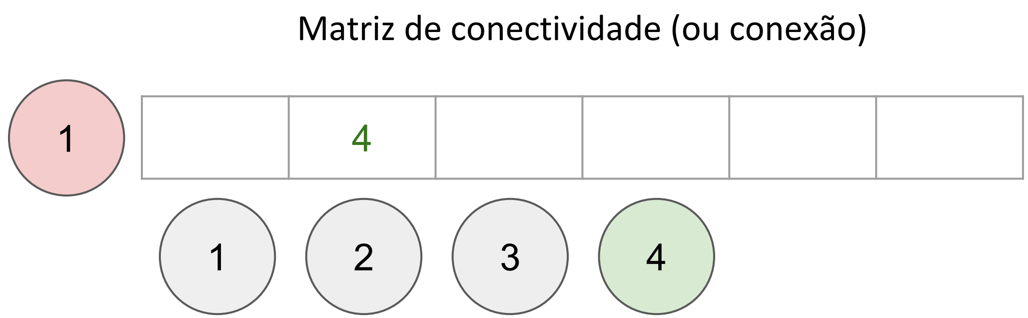


Matriz de conectividade (ou conexão)

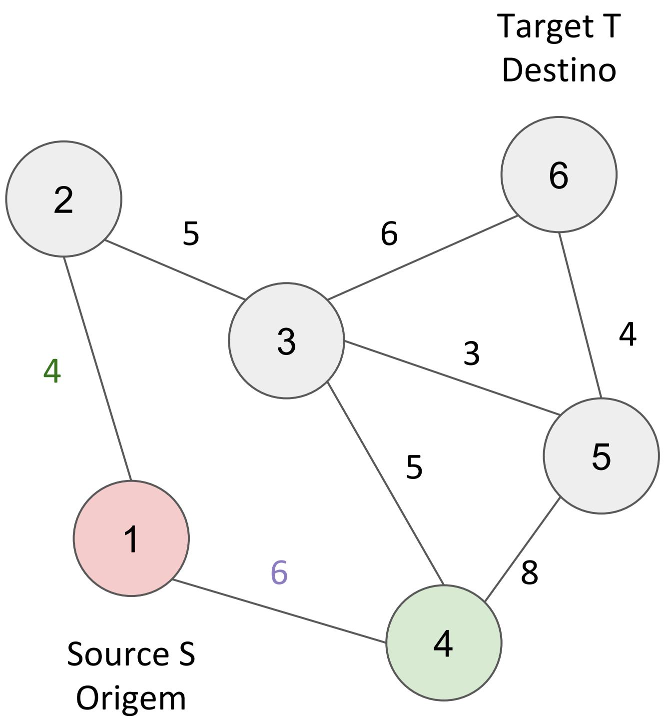


Modelando o problema - Parametrização

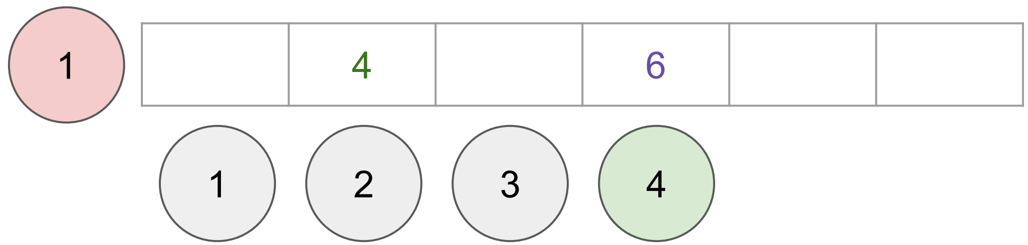




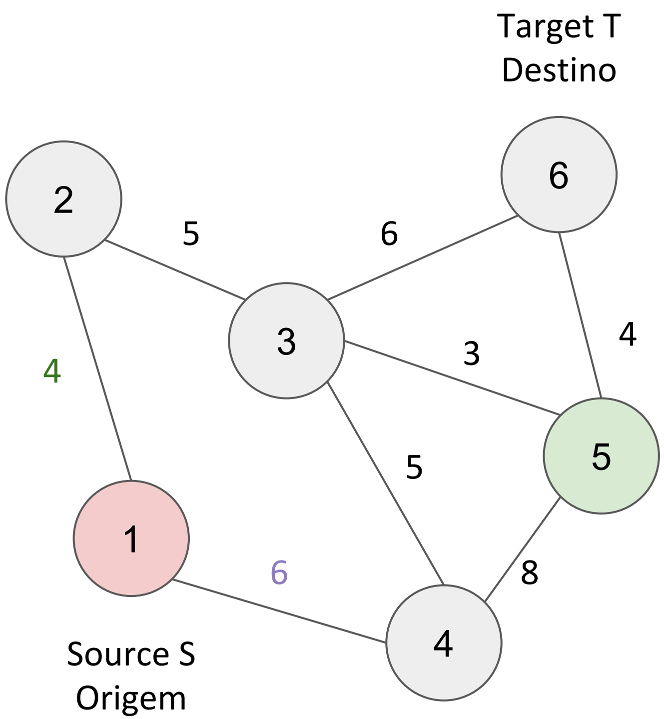
Modelando o problema - Parametrização



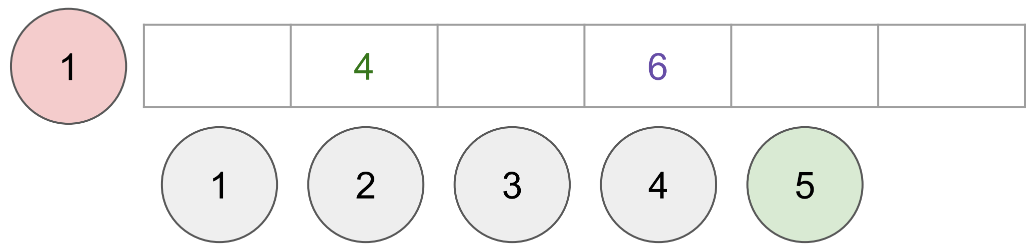
Matriz de conectividade (ou conexão)



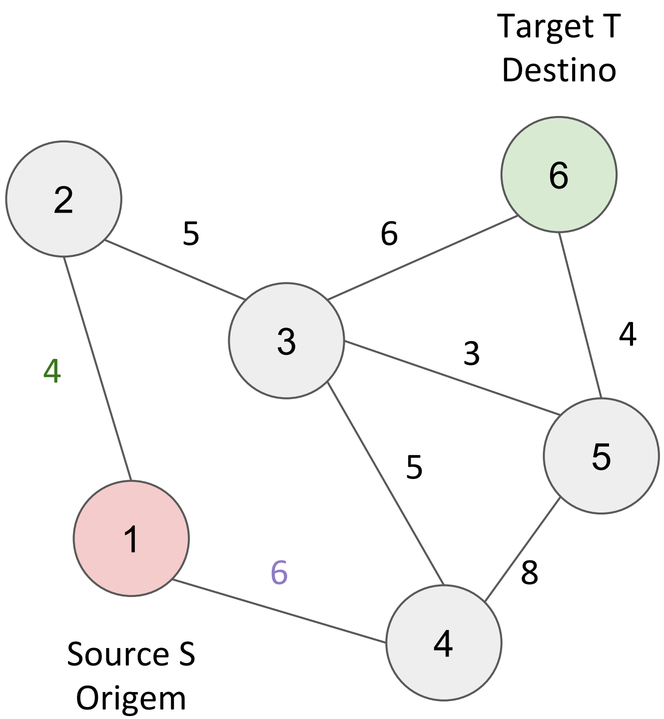
Modelando o problema - Parametrização



Matriz de conectividade (ou conexão)



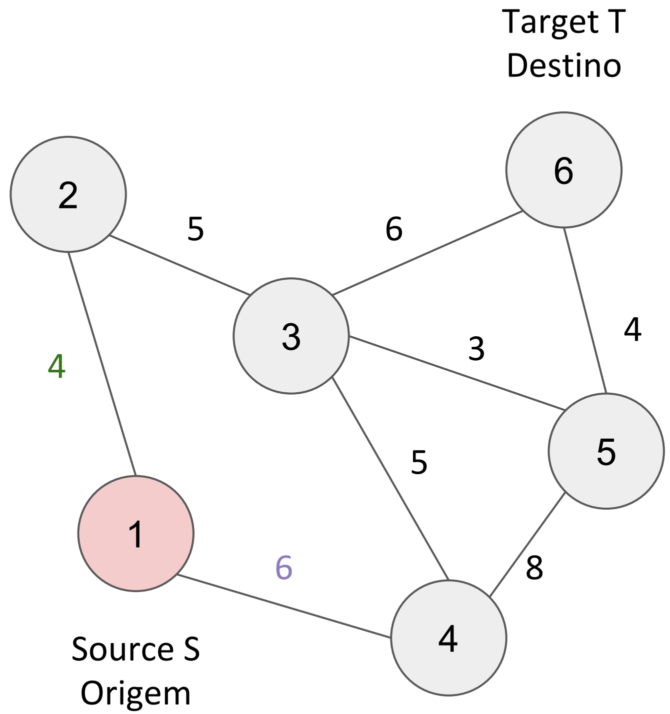
Modelando o problema - Parametrização



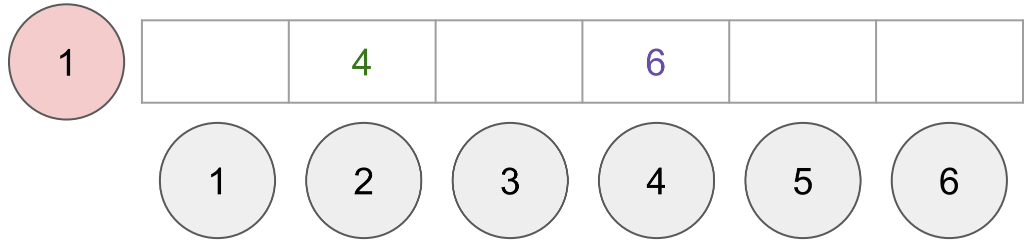
Matriz de conectividade (ou conexão)

	1	2	3	4	5	6
1		4		6		

Modelando o problema - Parametrização

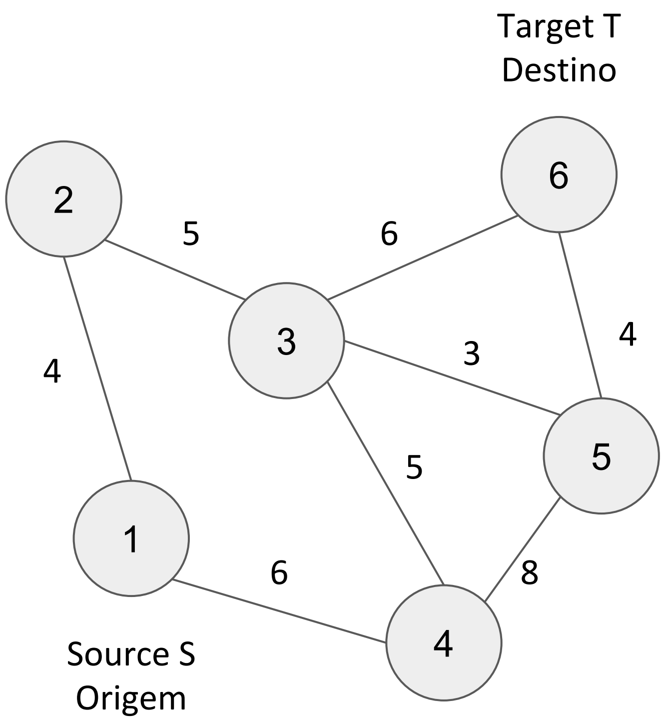


Matriz de conectividade (ou conexão)



Repete-se o processo para todos os nodos até gerar uma matriz

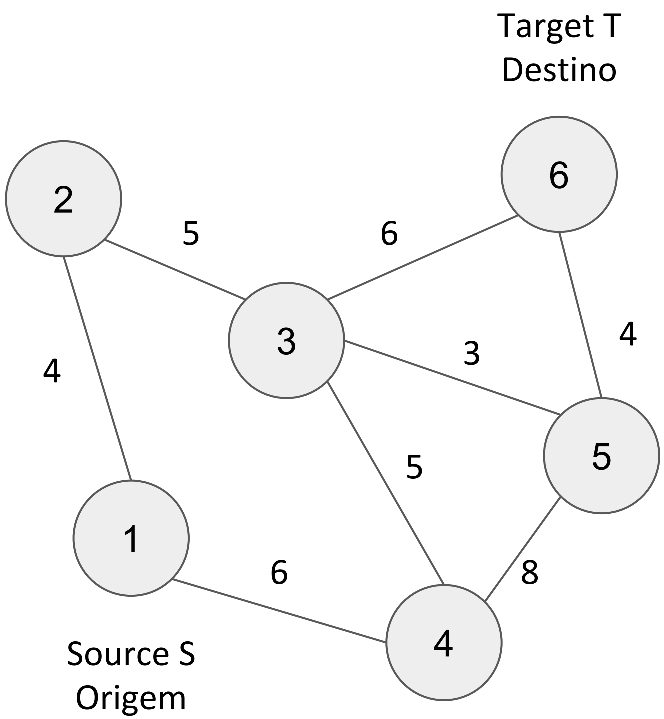
Modelando o problema - Parametrização



Matriz de conectividade (ou conexão)

1	2	3	4	5	6	
	4		6			1
4		5				2
	5		5	3	6	3
6		5		8		4
		3	8		4	5
		6		4		6

Modelando o problema - Parametrização

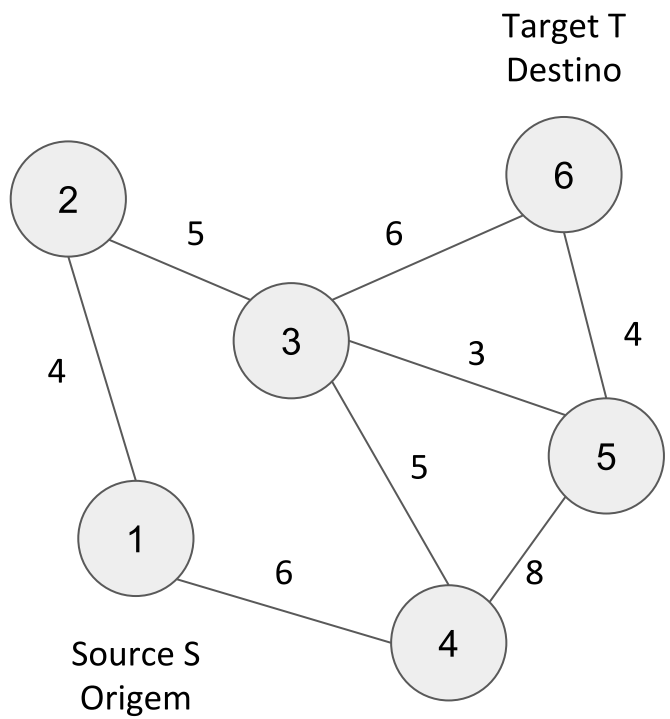


a_{ij} = Matriz de conectividade (ou conexão)

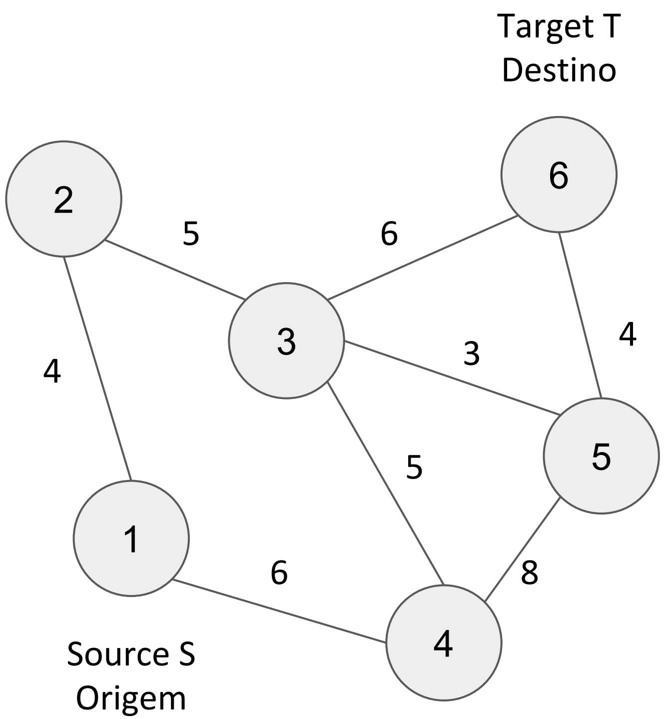
	4		6			1
4		5				2
	5		5	3	6	3
6		5		8		4
		3	8		4	5
		6		4		6
1	2	3	4	5	6	

Modelando o problema
Variáveis de decisão

Modelando o problema - Variáveis de decisão

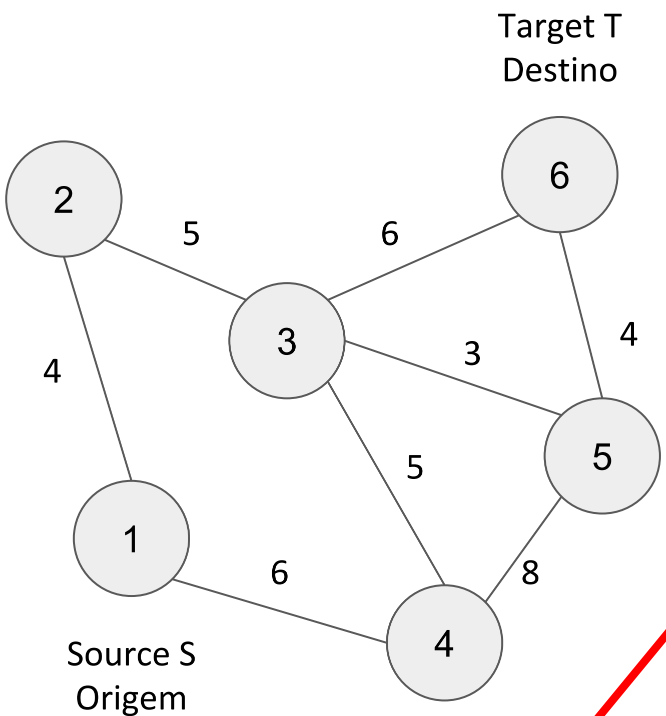


Modelando o problema - Variáveis de decisão



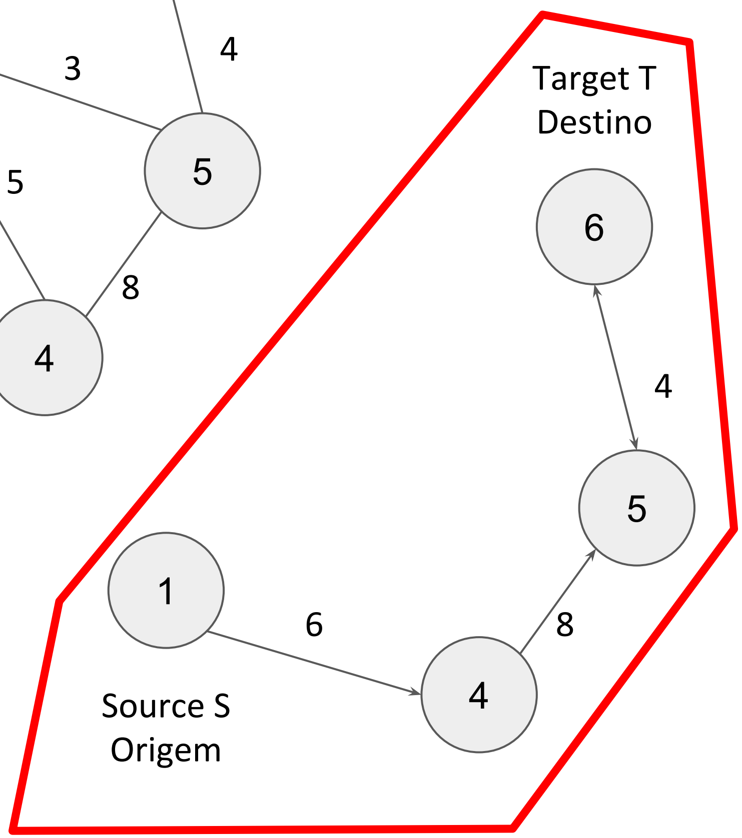
O que seria uma solução válida para o problema?

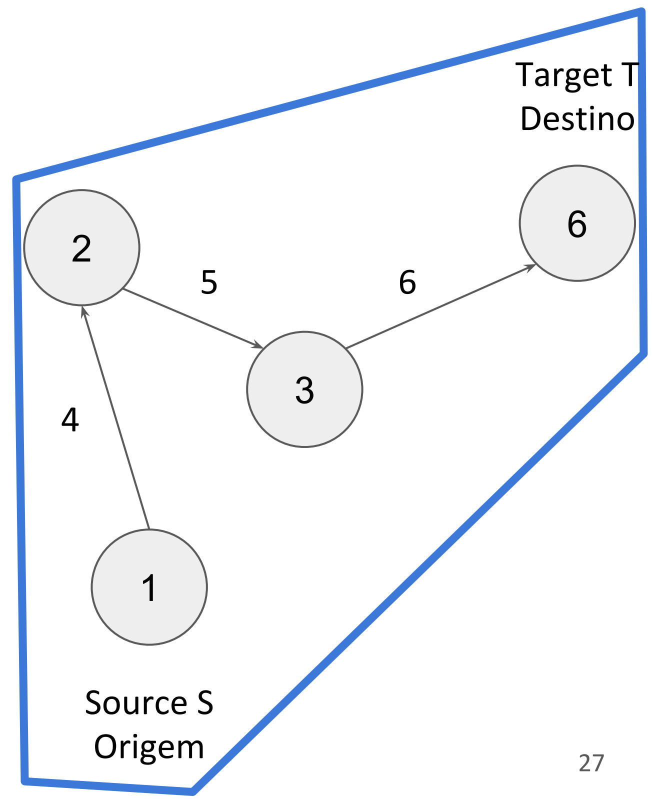
Modelando o problema - Variáveis de decisão



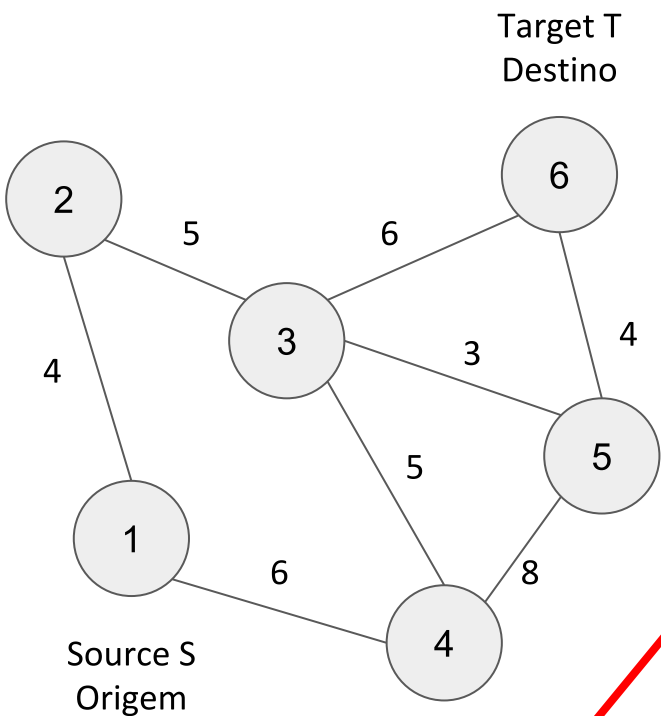
O que seria uma solução válida para o problema?

Qualquer caminho entre S e T

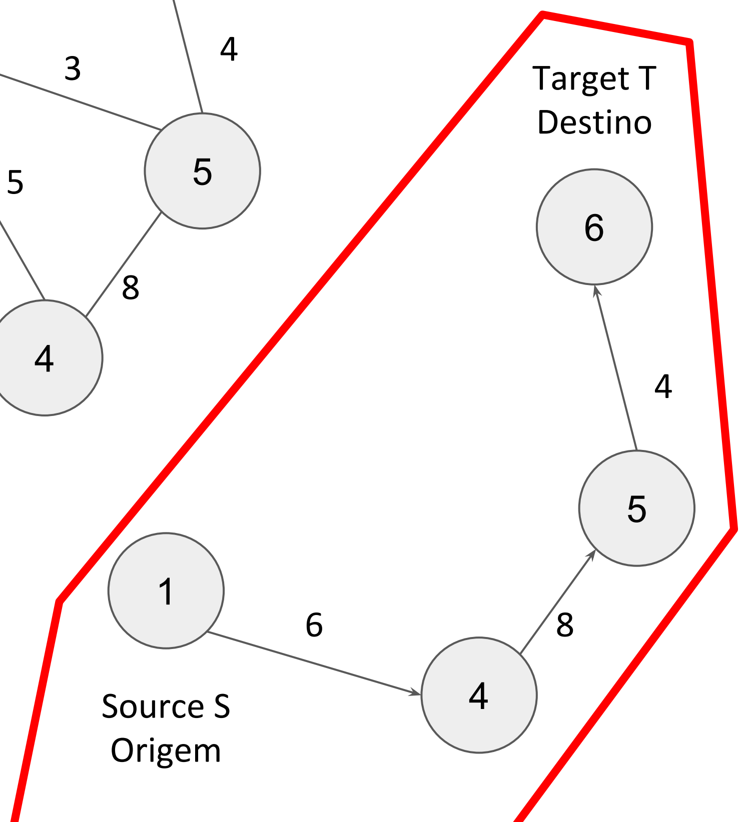




Modelando o problema - Variáveis de decisão

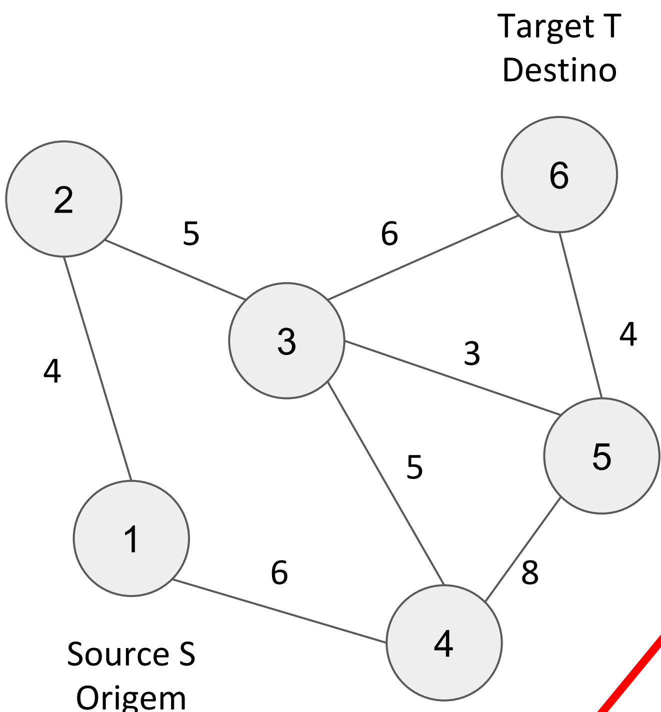


O que seria uma solução válida para o problema?

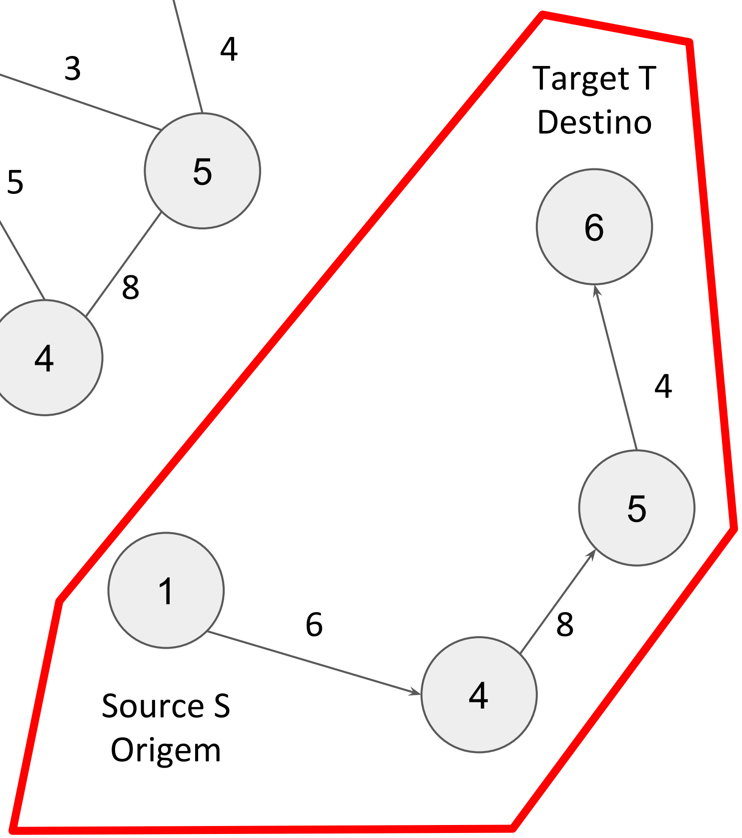


Mas, como modelar um desses caminhos?

Modelando o problema - Variáveis de decisão

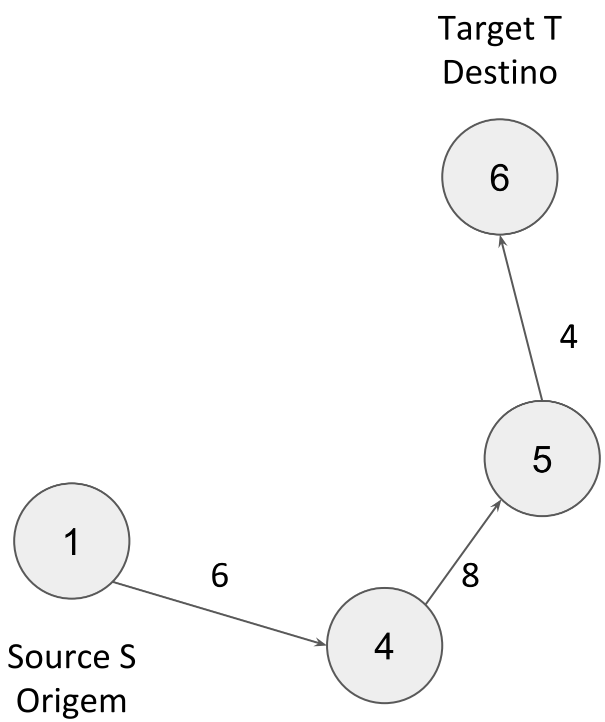


O que seria uma solução válida para o problema?



Utilizando uma matriz binária de conexão orientada

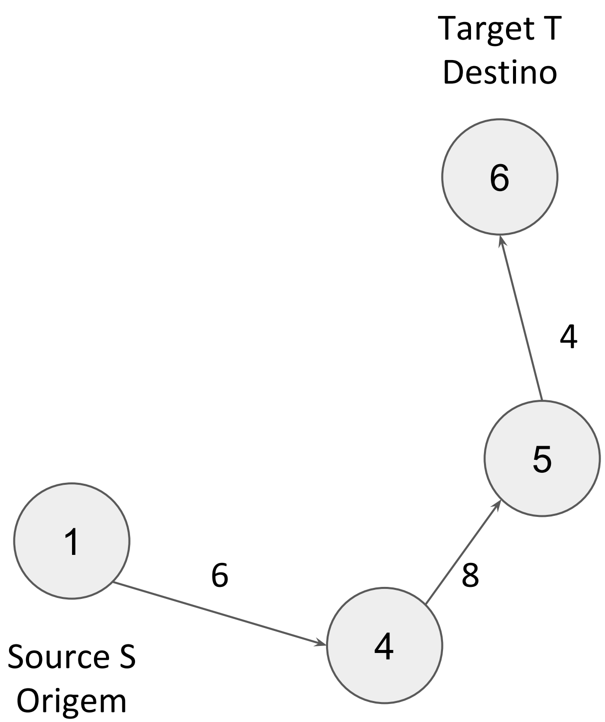
Modelando o problema - Variáveis de decisão



Matriz de conexão binária de solução

1	2	3	4	5	6	
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	1	0	4
0	0	0	0	0	1	5
0	0	0	0	0	0	6

Modelando o problema - Variáveis de decisão



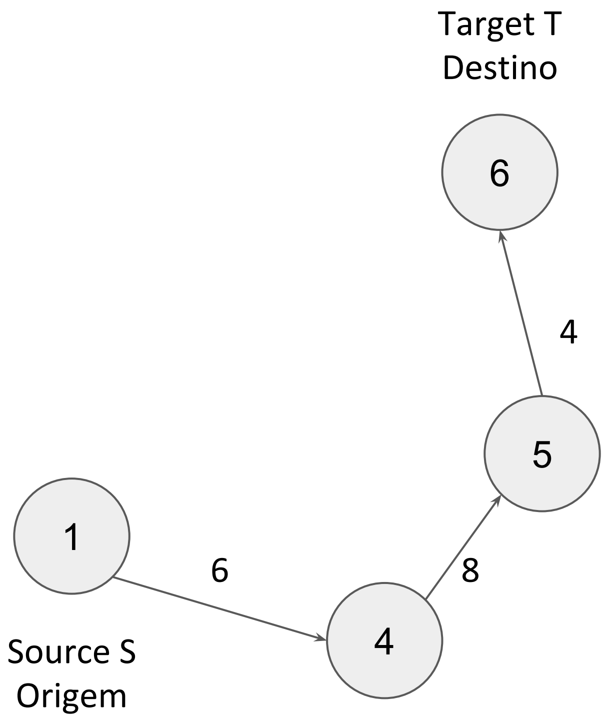
Matriz de conexão binária de solução

0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	1	0	4
0	0	0	0	0	1	5
0	0	0	0	0	0	6
1	2	3	4	5	6	

ORIENTADO!

CIC

Modelando o problema - Variáveis de decisão

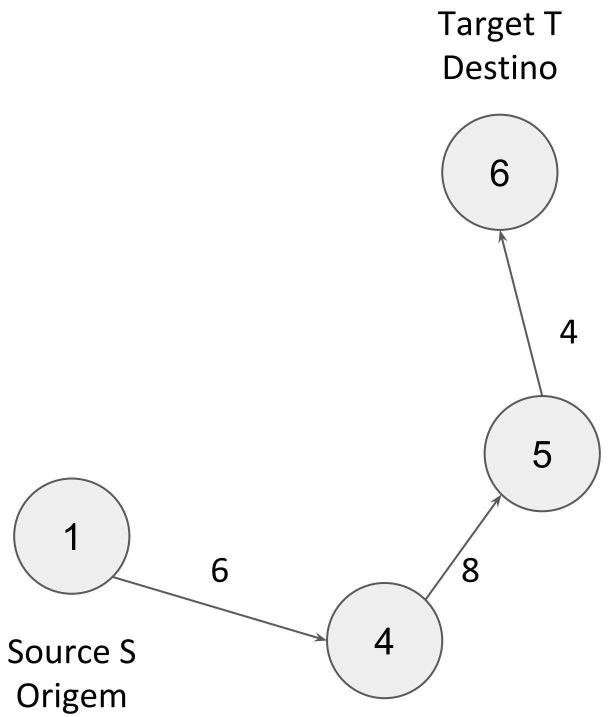


Matriz de conexão binária de solução

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	**1**	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	**1**	0
5	0	0	0	0	0	**1**
6	0	0	0	0	0	0

Mas, como modelar essa matriz como uma variável de decisão?

Modelando o problema - Variáveis de decisão

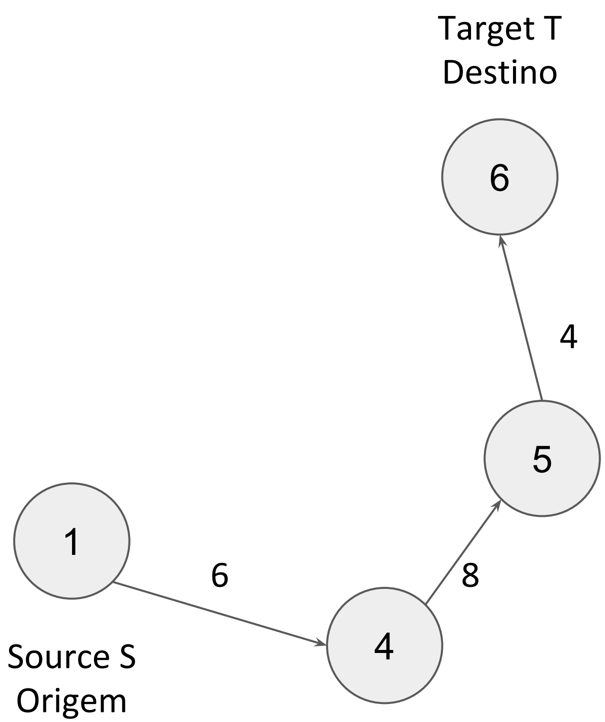


Matriz de conexão binária de solução

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	**1**	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	**1**	0
5	0	0	0	0	0	**1**
6	0	0	0	0	0	0

Cada aresta (elemento da matriz) torna-se uma variável binária de decisão x_{ij}

Modelando o problema - Variáveis de decisão

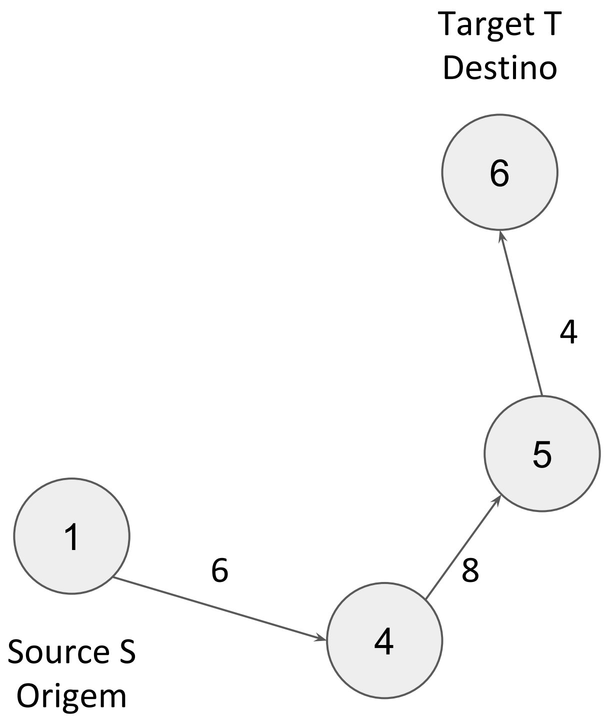


Matriz de conexão binária de solução

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	**1**	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	**1**	0
5	0	0	0	0	0	**1**
6	0	0	0	0	0	0

Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

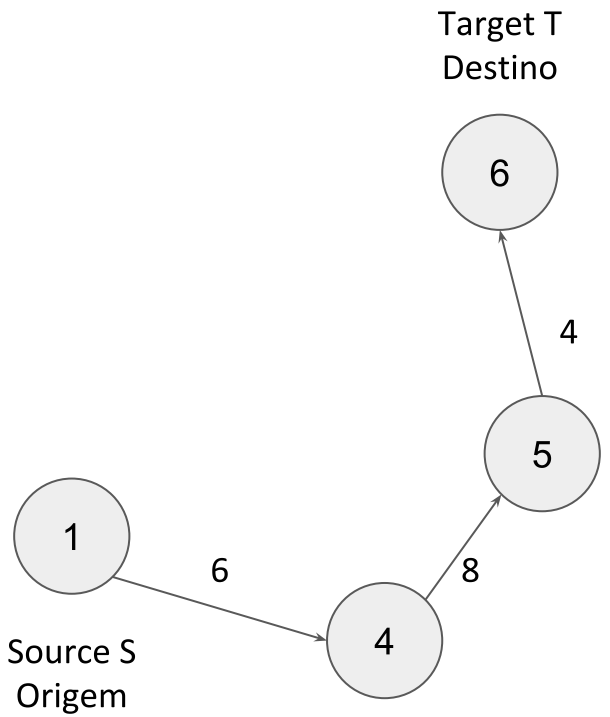
Modelando o problema - Variáveis de decisão



Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

Mas, como obrigar o algoritmo a selecionar um caminho válido e não selecionar várias variáveis a esmo?

Modelando o problema - Variáveis de decisão

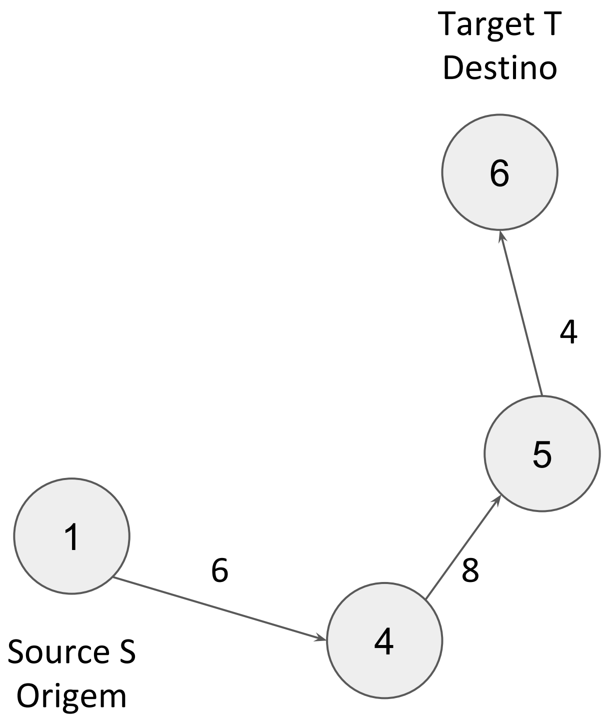


Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

Utilizaremos algumas restrições

Modelando o problema
Restrições

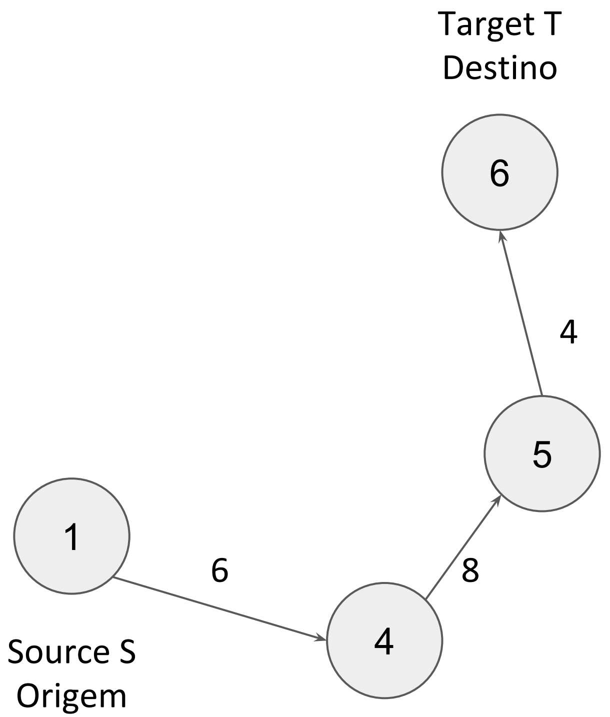
Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

Modelando o problema - Restrições

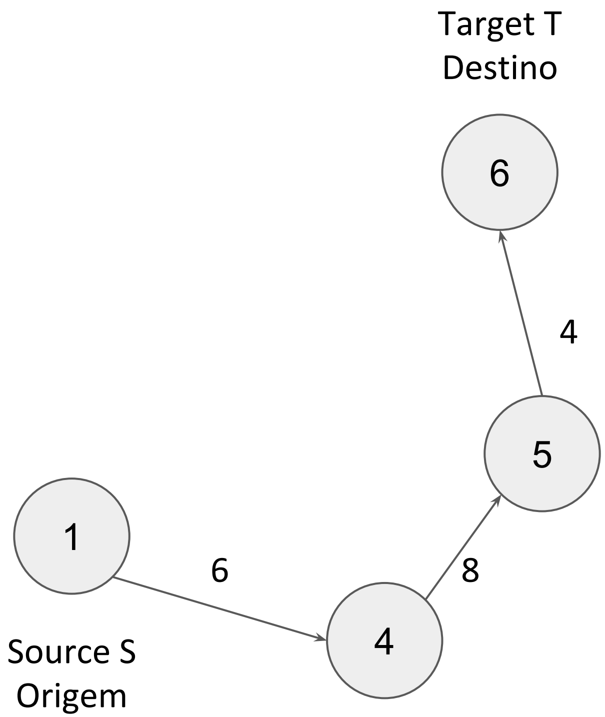


Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

Mas, o que é uma divergência? E como modelá-la?

Modelando o problema - Restrições



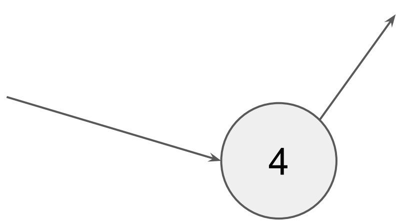
Nesse exemplo: $x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

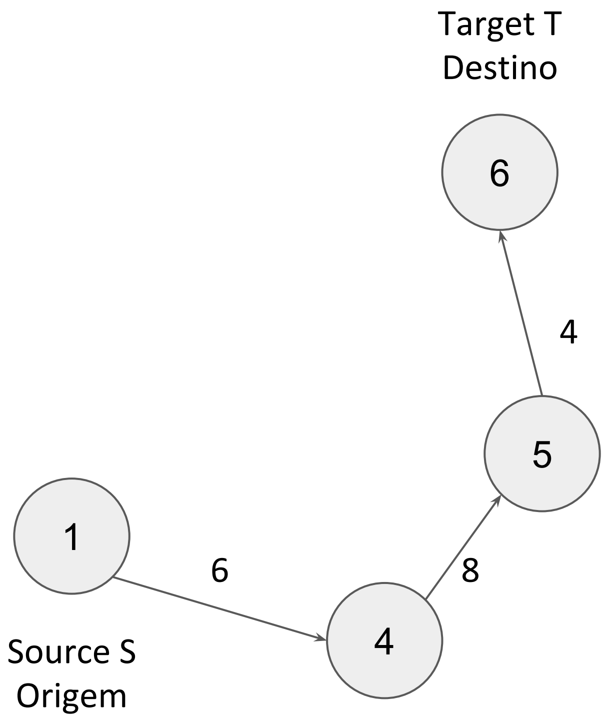
Para podermos modelar a divergência de um nodo, precisamos analisar suas arestas de chegada e saída. Para isso, vamos utilizar a seguinte lógica

- Tudo que sai de um nodo é positivo
- Tudo que entra em um nodo é negativo

Por exemplo, se pegarmos o nodo 4



Modelando o problema - Restrições



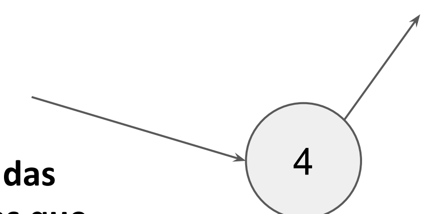
Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

Para podermos modelar a divergência de um nodo, precisamos analisar suas arestas de chegada e saída. Para isso, vamos utilizar a seguinte lógica

- Tudo que sai de um nodo é positivo
- Tudo que entra em um nodo é negativo

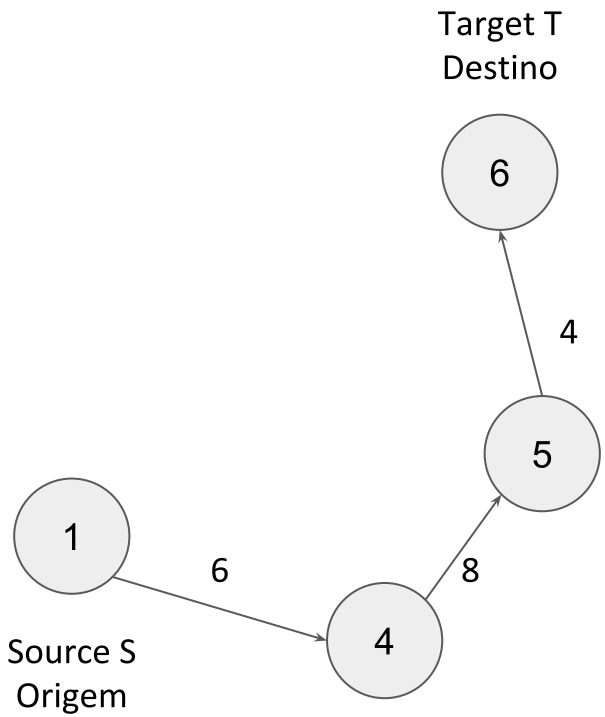
Por exemplo, se pegarmos o nodo 4



***No shortest path não levamos em consideração os pesos das arestas para calcular as divergências. Mas, terão problemas que precisaremos considerar os pesos.**

CIC

Modelando o problema - Restrições



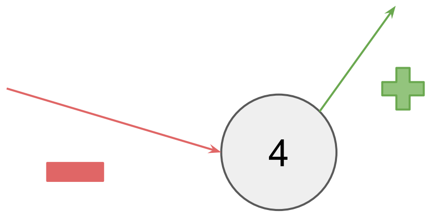
Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

Para podermos modelar a divergência de um nodo, precisamos analisar suas arestas de chegada e saída. Para isso, vamos utilizar a seguinte lógica

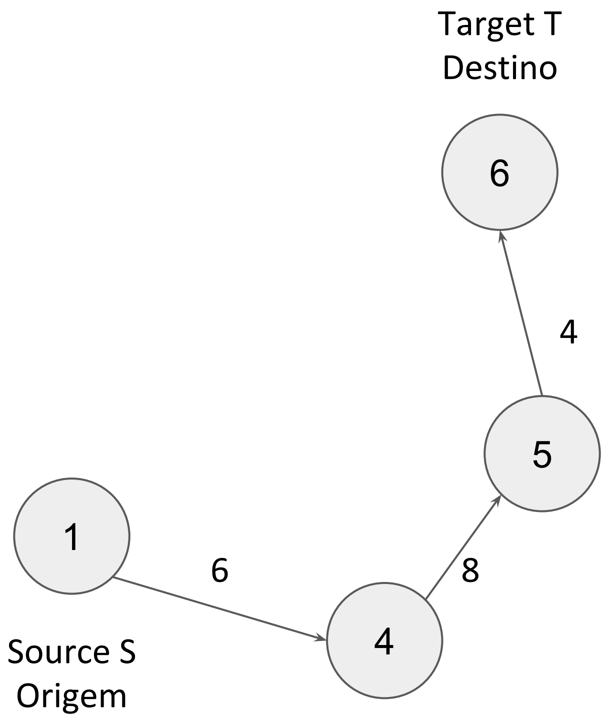
- Tudo que sai de um nodo é positivo
- Tudo que entra em um nodo é negativo

Por exemplo, se pegarmos o nodo 4



CIC

Modelando o problema - Restrições



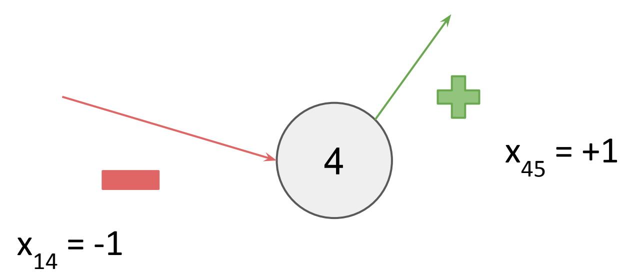
Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

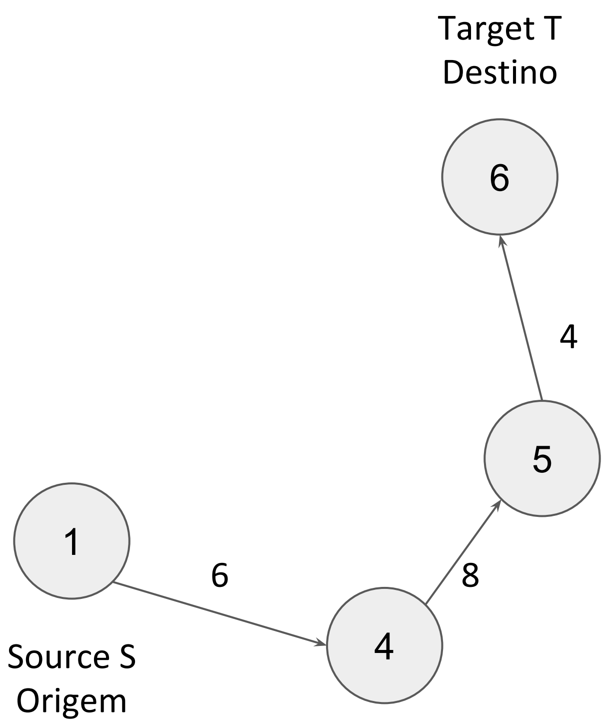
Para podermos modelar a divergência de um nodo, precisamos analisar suas arestas de chegada e saída. Para isso, vamos utilizar a seguinte lógica

- Tudo que sai de um nodo é positivo
- Tudo que entra em um nodo é negativo

Por exemplo, se pegarmos o nodo 4

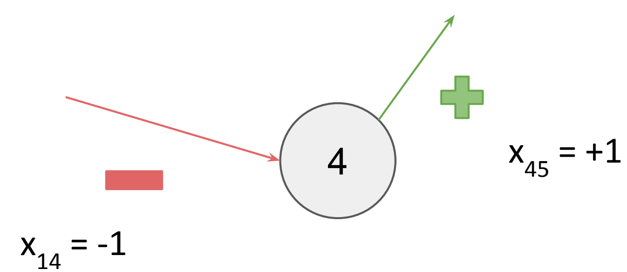


Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



Logo:

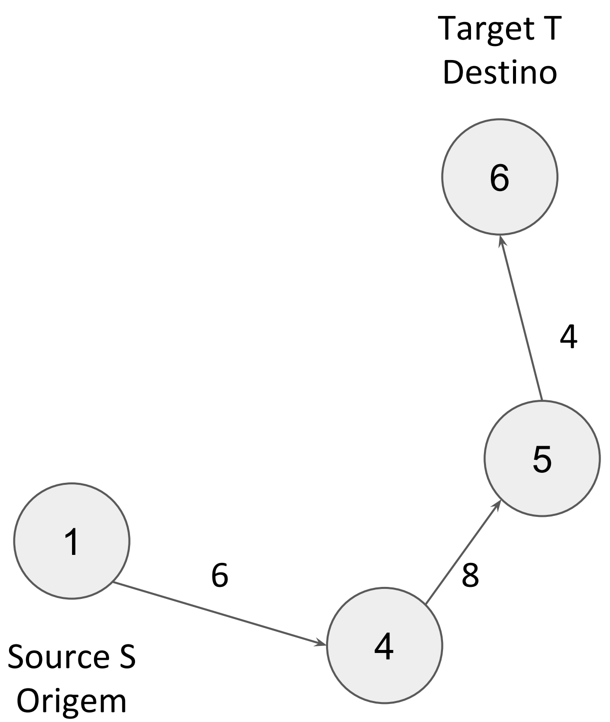
$x_{45} - x_{14} = 0$

Precisamos generalizar

- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
  - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

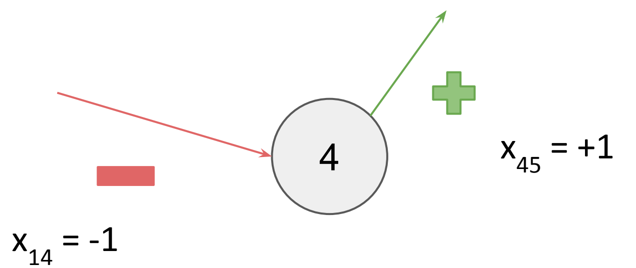
$x_{i5} - x_{1i} = 0 \; ; \quad \forall i \in N$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: $x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



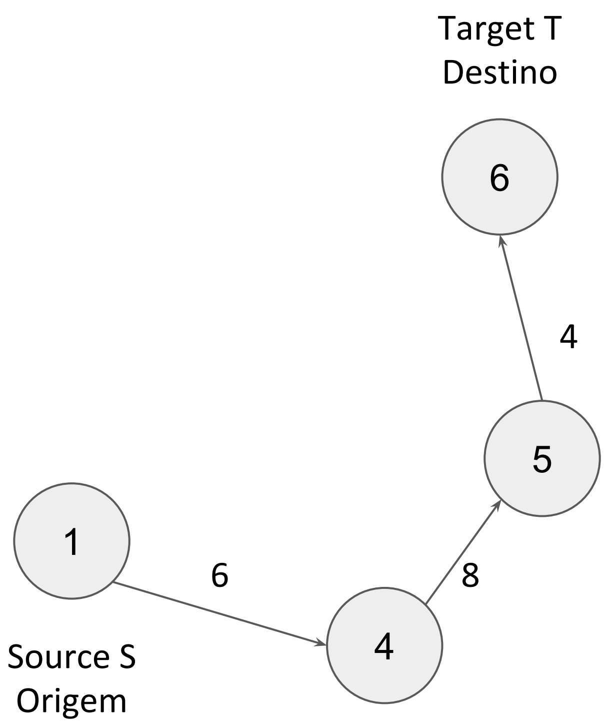
Logo:
$x_{45} - x_{14} = 0$
Precisamos generalizar

- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
  - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

$x_{i5} - x_{1i} = 0 \; ; \quad \forall i \in N$

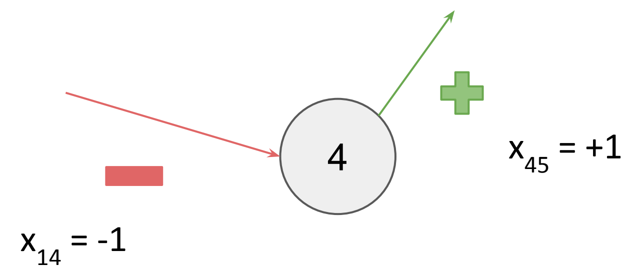
Mas, como generalizar o 5 e o 1? Pode só escrever um j?

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



Logo:

x_{45} - x_{14} = 0

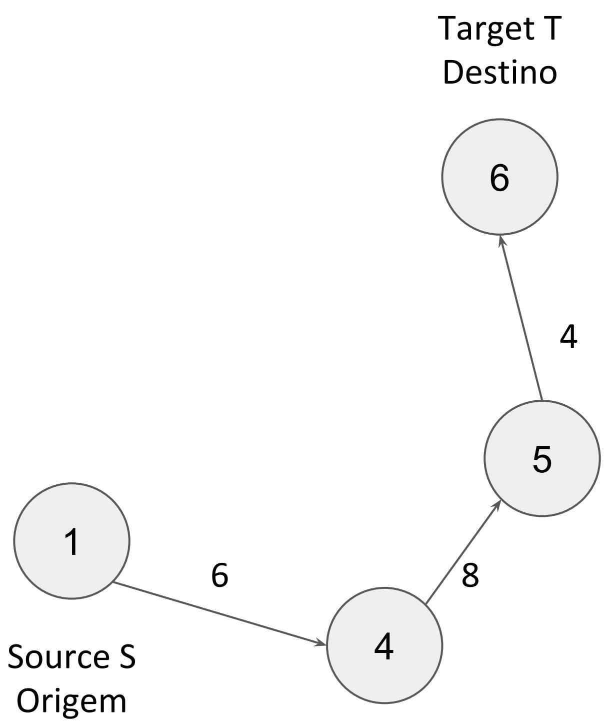
Precisamos generalizar

- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
  - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

$x_{i5} - x_{1i} = 0 \; ; \quad \forall i \in N$

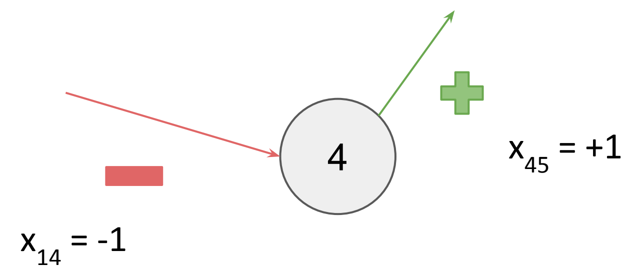
Não. Precisamos generalizar para todas as arestas

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

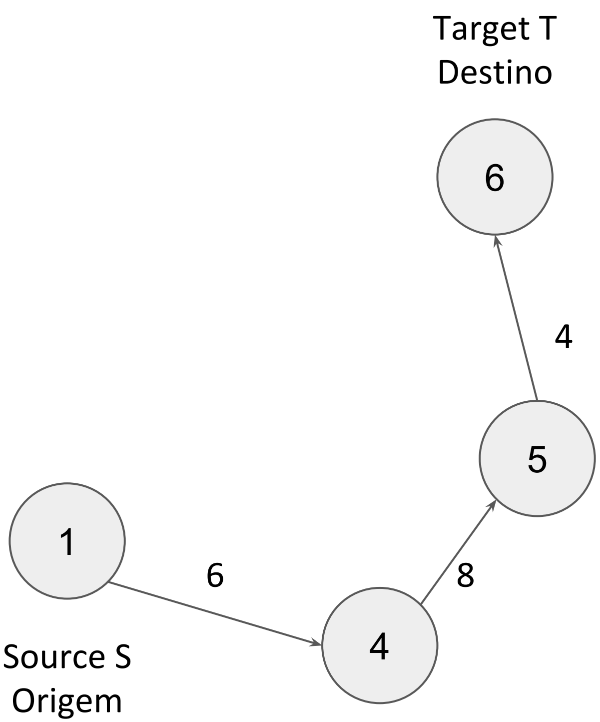


Logo:
$x_{45} - x_{14} = 0$
Precisamos generalizar
- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
  - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

$x_{i5} - x_{1i} = 0 \; ; \quad \forall i \in N$

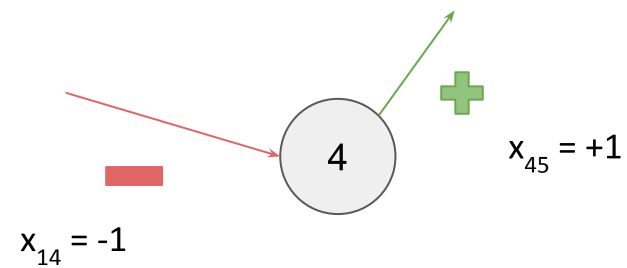
Usaremos dois somatórios

Modelando o problema - Restrições



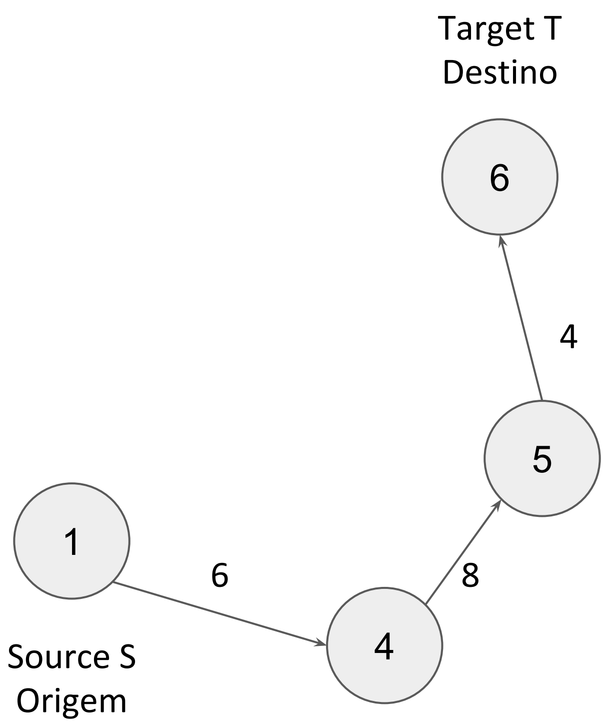
Nesse exemplo: $x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



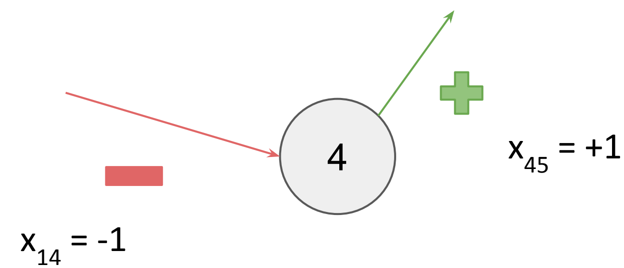
$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0 \; ; \forall i \in N$$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

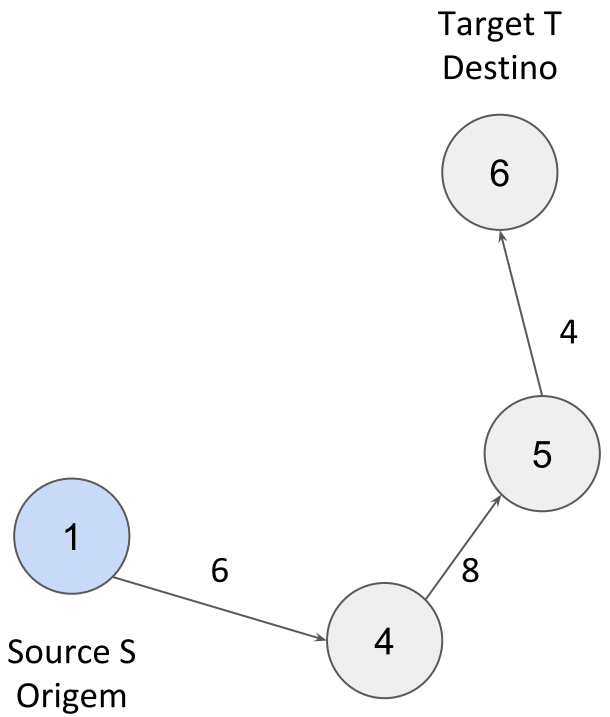
O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0 \; ; \forall i \in N$$

Infelizmente, a divergência não é sempre zero para todos os nodos, precisaremos avaliar cada tipo de nodo

Modelando o problema - Restrições



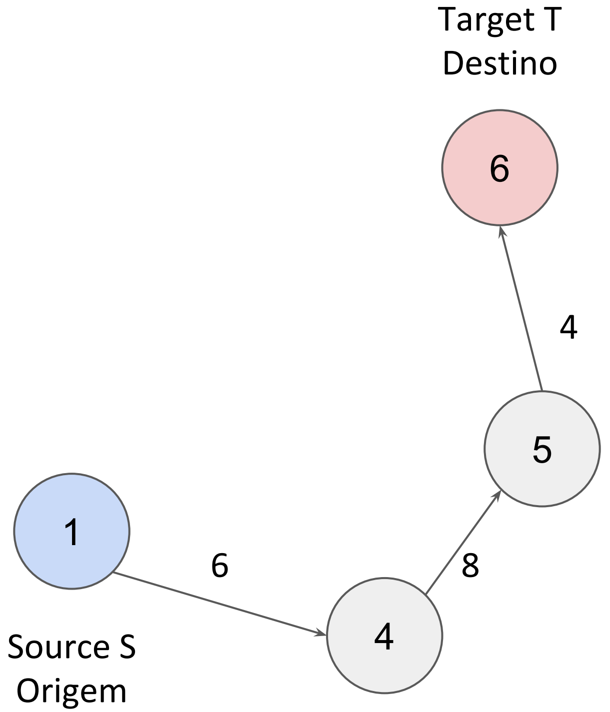
Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

3 tipos de nodos podem ser detectados

- Origem

Modelando o problema - Restrições



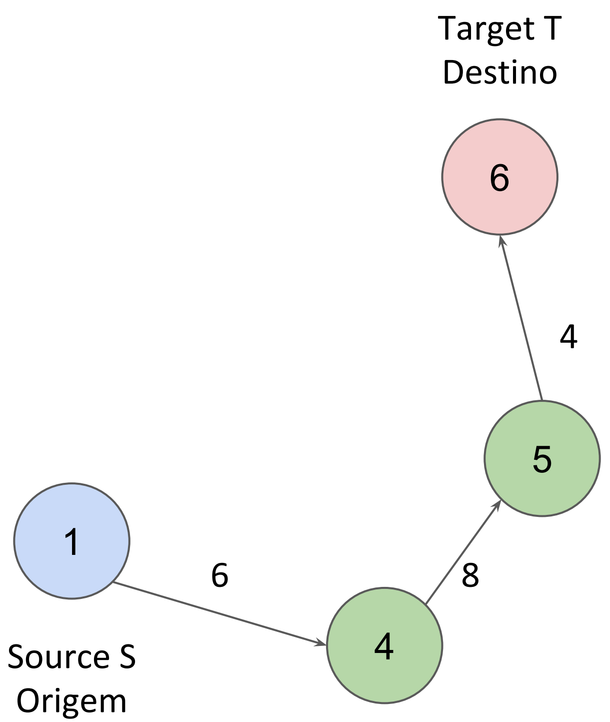
Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

3 tipos de nodos podem ser detectados

- Origem
- Destino

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

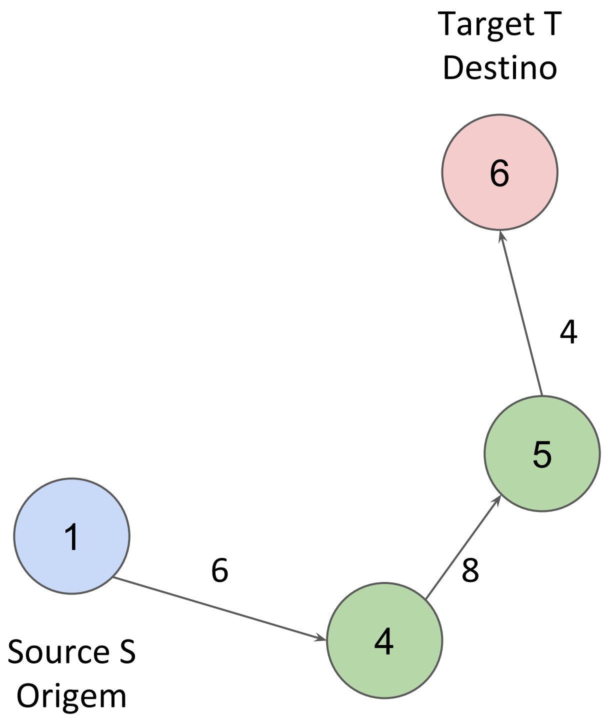
3 tipos podem ser detectados

- Origem
- Destino
- Intermediários

Agora precisaremos avaliar cada um deles em relação a sua divergência

CIC

Modelando o problema - Restrições



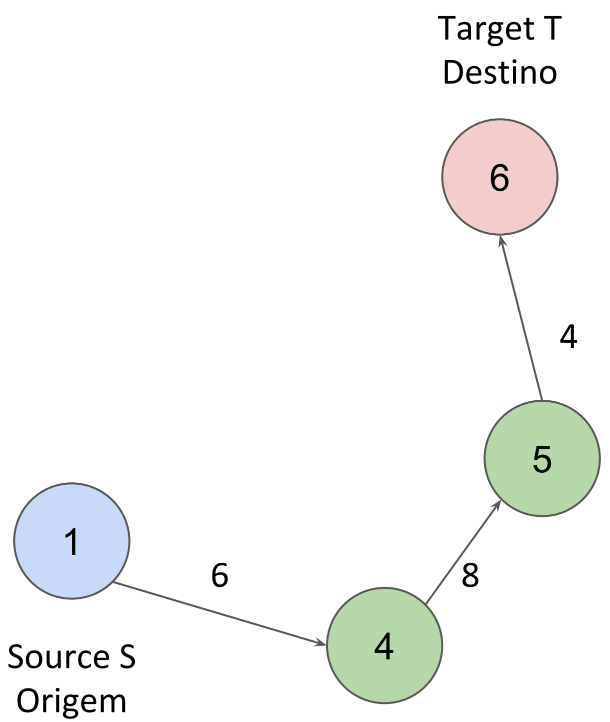
Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

- Origem
  - Apenas uma aresta saindo
- Destino
  - Apenas uma aresta chegando
- Intermediários
  - Apenas uma aresta chegando
  - Apenas uma aresta saindo

Para podermos modelar esse relacionamento, vamos utilizar a mesma lógica

- Tudo que sai de um nodo é positivo
- Tudo que entra em um nodo é negativo

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: $x_{14}=1$; $x_{45}=1$; $x_{56}=1$

- Origem
  - Apenas uma aresta saindo

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 1 \;; \forall i = S$$

- Destino
  - Apenas uma aresta chegando

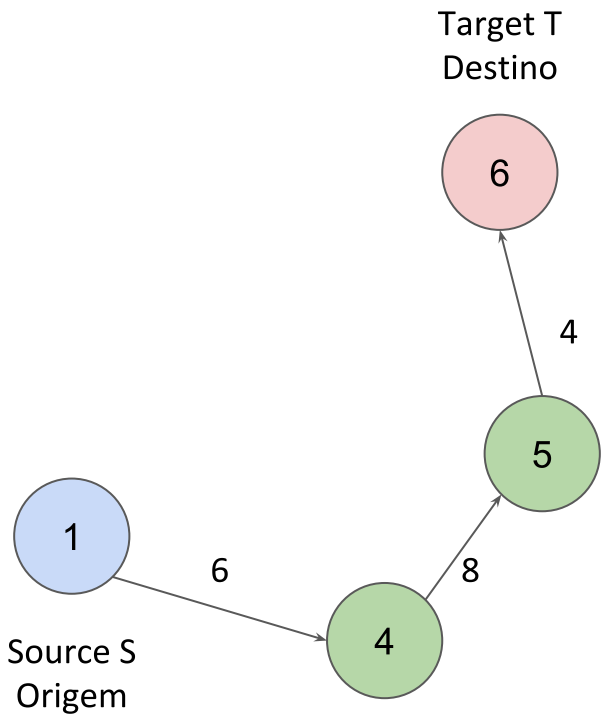
$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = -1 \;; \forall i = T$$

- Intermediários
  - Apenas uma aresta chegando
  - Apenas uma aresta saindo

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0; \;\forall i \in N \;\mid i \neq S,T$$

Função objetivo

Modelando o problema - Função objetivo



Nesse exemplo: x_{14}=1; x_{45}=1; x_{56}=1

Se multiplicarmos às variáveis pelos pesos e somarmos teremos o valor do caminho
Nesse exemplo

- x14*a14 + x45 * a45 + x56 * a56

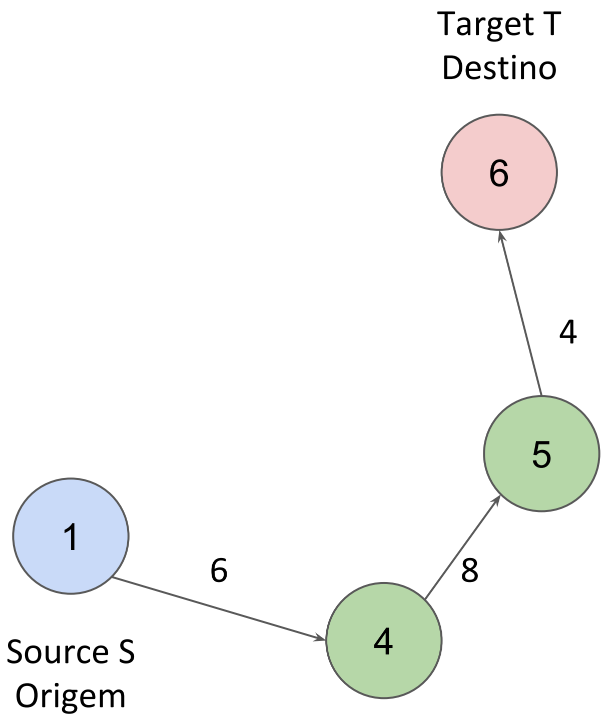
Generalizando, queremos o menor caminho
Ou seja, o caminho com menor combinação de pesos, resultando em uma minimização

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} x_{ij} a_{ij}$$

CIC

Modelagem final

Modelagem final do problema



$$\text{minimize} \quad \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = s, \\ -1 & \text{if } i = t, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij}, \qquad \forall\ (i,j) \in \mathcal{A}.$$

Implemente um problema de shortest path no ORTools

Para validar o modelo considere a instância:

N = 5

S = 0

T = N-1

Aij = [[9999, 0.2, 9999, 9999, 9999],

[9999, 9999, 0.4, 0.5, 9999],

[0.2, 9999, 9999, 0.6, 0.2],

[9999, 9999, 9999, 9999, 0.3],

[9999, 9999, 9999, 9999, 9999]]

```
Solucao:
Valor objetivo = 0.8
[ 0 1 0 0 0 ]
[ 0 0 1 0 0 ]
[ 0 0 0 0 1 ]
[ 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 ]
```