Estruturas Algébricas em Teoria de Nós

Raúl Penaguião

Técnico Lisboa

raul.penegas@gmail.com

22 Fevereiro de 2013

Introdução e Motivação

O projecto destina-se ao estudo das estruturas algébricas que chamamos **Quandulos**.
Estas estruturas foram introduzidas em 1982 por David Joyce e em 1984 por Sergei Matveev, tendo em vista a construção de um invariante para nós topolgicos, i.e., distinguindo quandulos conseguimos distinguir nós.

Definição

Um *Quandulo* é um conjunto Q com uma operação binária $* : Q \times Q \to Q$ que satisfaz

1. $\forall a \in Q \qquad a * a = a$
2. $\forall a, b \in Q \qquad \exists! c \in Q \ \ c * b = a$
3. $\forall a, b, c \in Q \qquad (a * b) * c = (a * c) * (b * c)$

Uma aplicação entre dois quandulos $f : Q \to Q'$ diz-se um *homomorfismo de quandulos* se $f(a * b) = f(a) *' f(b)$.
Um automorfismo em Q é um homomorfismo de Q para Q que é injectivo e sobrejectivo.

Automorfismos internos

As funções $r_b : Q \to Q$ dadas por $r_b(c) = c * b$ chamam-se automorfismos internos.
Estas são, pelo segundo axioma, uma bijecção.

(Axioma 2) $\forall a, b \in Q \qquad \exists! c \in Q \;\; c * b = a$

(Axioma 2) $\forall a, b \in Q \qquad \exists! c \in Q \;\; r_b(c) = a$

Automorfismos internos

Para cada $b \in Q$, a função r_b é também um homomorfismo, pelo axioma 3:
(Axioma 3) $\forall a, b, c \in Q \qquad (a * b) * c = (a * c) * (b * c)$
$(a * b) * c = r_c(a * b)$
$(a * c) * (b * c) = r_c(a) * r_c(b)$;

$$r_c(a * b) = r_c(a) * r_c(b)$$

$$r_c \circ r_b(a) = r_{r_c(b)} \circ r_c(a) \tag{1}$$

O grupo gerado pelas bijeções r_b chama-se $Inn(Q)$, o grupo de automorfismos internos.

Quandulo Dual

Cada quandulo dá origem no mesmo conjunto a outro Quandulo, com uma operação $\bar{*} : Q \times Q \to Q$ dada por $a \bar{*} b = r_b^{-1}(a)$.

Esta operação tem estrutura de quandulo porque:

1. $a \bar{*} a = r_a^{-1}(a) = a$
2. $c \bar{*} b = a \Leftrightarrow r_b^{-1}(c) = a \Leftrightarrow c = r_b(a)$
3. Consideramos a equação (1), escolhendo $b' = r_c^{-1}(b)$ e manipulamos:

$$r_c \circ r_{b'} = r_{r_c(b')} \circ r_c \Leftrightarrow r^{-1}_{r_c^{-1}(b)} \circ r_c^{-1} = r_c^{-1} \circ r_b^{-1}$$

Logo, aplicando a um $a \in Q$ genérico:

$$r^{-1}_{b \bar{*} c} \circ r_c^{-1}(a) = r_c^{-1} \circ r_b^{-1}(a) \Leftrightarrow (a \bar{*} c) \bar{*} (b \bar{*} c) = (a \bar{*} b) \bar{*} c$$

Relações Básicas

- $\forall a, b, c \in Q \qquad (a * b)\overline{*}c = (a\overline{*}c) * (b\overline{*}c)$
- $\forall a, b, c \in Q \qquad (a\overline{*}b) * c = (a * c)\overline{*}(b * c)$
- $\forall a, b, c \in Q \qquad a * (b * c) = ((a\overline{*}c) * b) * c$

Ou, de forma equivalente

- $\forall b, c \in Q \qquad r_c^{-1} \circ r_b = r_{r_c^{-1}(b)} \circ r_c^{-1}$
- $\forall b, c \in Q \qquad r_c \circ r_b^{-1} = r_{r_c(b)}^{-1} \circ r_c$
- $\forall b, c \in Q \qquad r_{r_c(b)} = r_c \circ r_b \circ r_c^{-1}$

$$r_c(a) * r_c(b) = r_c(a * b) \Leftrightarrow r_{r_c(b)} \circ r_c(a) = r_c \circ r_b(a) \Leftrightarrow r_{r_c(b)} = r_c \circ r_b \circ r_c^{-1}$$

Quandulos diedrais

Dado $n \geq 2$, o quandulo diedral é o conjunto $\mathbb{Z}_n$ munido da operação

$$a * b = 2b - a$$

Assim $r_0 = (0)(1, -1)(2, -2) \cdots$.
Para n impar, o quandulo é conexo [1].

$$r_{r_c(b)} = r_c \circ r_b \circ r_c^{-1}$$

Num quandulo conexo, todos os automorfismos internos r_b têm o mesmo tipo cíclico. A esse tipo cíclico comum chamamos o **perfil** de Q.
O **perfil** deste quandulo, quando n é impar, é $\{1, 2, 2, \cdots\}$

[1] Um Quandulo diz-se conexo quando para cada $a, b \in Q$ podemos escrever $r_{c_1}^{\pm 1} \circ \cdots \circ r_{c_k}^{\pm 1}(a) = b$ para alguma escolha de c_i's

Quandulos triviais

Chamamos triviais aos quandulos cuja operação $*$ se comporta

$$a * b := a$$

Assim $r_b = id$. Para $n > 1$ o quandulo não é conexo, já que $r_c(1) = 1$ para qualquer $c \in Q$.

Quandulos de conjugação

Dado um grupo G, a conjugação forma um quandulo. Mais especificamente, escolhemos $n \in \mathbb{Z}$ e definimos em G a operação binária

$$a * b = b^n a b^{-n}$$

Este quandulo, quando $\#G > 1$, não é conexo, pois $r_g(e) = r_g^{-1}(e) = e$

Quandulos de Coxeter

Fixando $Q = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, definimos a operação entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como a reflecção de $\vec{a}$ na recta definida por $\vec{b}$

$$\vec{a} * \vec{b} = 2\vec{b}\frac{< \vec{a}, \vec{b} >}{< \vec{b}, \vec{b} >} - \vec{a}$$

Este quandulo não é conexo. As suas órbitas [2] são superfícies esféricas.

[2] A órbita $\mathcal{O}(a)$ de um elemento $a \in Q$ é o conjunto $\mathcal{O}(a) := \{r_{c_1}^{\pm 1} \circ \cdots \circ r_{c_k}^{\pm 1}(a) | c_i \in Q\}$

Tabelas

Uma reordenação natural é uma bijeção em Q que permite que r_n se escreva da seguinte forma de produto de cíclos disjuntos $(1, \cdots, l_1) \cdots ((l_1 + \cdots + l_{k-1}) + 1, \cdots, (l_1 + \cdots + l_{k-1}) + l_k)(n)$. Com $1 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_k$.

O número de ordenações naturais, dado o perfil, é fácil de calcular.

A tabela de multiplicação é uma matriz com entradas $[a * b]_{a,b}$. Se um quandulo que já está ordenado naturalmente [3], a sua tabela de multiplicação diz-se estar na forma canónica.

O número de formas canónicas é um invariante que estou a estudar nos quandulos. Este invariante distingue o quandulo $\mathbb{Z}_9$ de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, por exemplo.

[3] Isto é, *id* é uma ordenação natural

Resultados

Theorem (K. Oshiro)

Se o perfil do quandulo conexo Q é $\{1, n-1\}$ então Q é latino [4]

[4] Um quandulo latino é um quandulo que verifica o dual do axioma 2, isto é, $\forall a, c \in Q \exists! b \in Q \; c * b = a$

Problemas em Aberto

- Num quandulo conexo de perfil $\{1, l_1, \cdots, l_k\}$, l_k é um múltiplo de cada l_i.
- Para que inteiros a, b positivos temos a garantia de que um quandulo com perfil $\{1, a, b\}$ é, ou não, latino.

Agradecimentos e Referências

Chuichiro Hayashi (2013)
Canonical Forms for Operation Tables of Finite Connected Quandles
Communications in Algebra 41:9, 3340-3349.

F I M