Examen control geométrico

Alejandro Díaz Hernández

1.-

Proof. Sea X un espacio vectorial y A un operador lineal actuando en ese espacio, haremos la demostración por contradicción.

Suponemos que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios mínimos del mismo espacio y diferentes entre ellos. Como son diferentes podemos escribir:

$$p(\lambda) = q(\lambda)c(\lambda) + r(\lambda)$$

de donde se ve que $deg(r(x)) < deg(q(x)) < deg(p(x))$. Además, sabemos que $q(A) = 0$ por ser anulador, por lo tanto:

$$\begin{aligned} p(A)x &= q(A)c(A)x + r(A)x \\ p(A)x &= r(A)x \\ p(\lambda) &= r(\lambda) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por lo que concluimos que no puede haber dos polinomios mínimos diferentes en el mismo espacio. □

2.-

Las pruebas PBH de vectores propios establecen lo siguiente:

1. El par (A, B) es controlable si solo si no existe un vector fila $q \neq 0$ tal que $qA = \lambda q$ y $qB = 0$.

   Es decir el par (A, B) es controlable si solo ningún vector propio izquierdo de A es ortogonal a B

2. El par (C, A) es observable si solo si no existe un vector columna $p \neq 0$ tal que $Ap = \lambda p$ y $Cp = 0$).

   Es decir el par (C, A) es observable si solo si ningún vector propio derecho de A es ortogonal a C

Las condiciones geométricas son:

1. El par (A, B) es controlable si $R_0 = X$. Donde $R_0 := ImB + AImB + ... + A^{n-1}ImB$.

2. El sistema $\Sigma(A, B, C)$ es observable si solo $N = 0$. Donde $N = \bigcap_{i=1}^{n} ker(CA^{i-1})$.

La relación entre estas condiciones se puede ver a través de la proyección canónica. Expliquémosla primero para **controlabilidad**. Supongamos que el sistema es no controlable y, por lo tanto, $R_0 \neq X$ de hecho como mínimo es ImB ahora sabemos que la proyección canónica es aniquilador de B como se menciona en la diapositiva 90, y eso es que $0 = PImB$ y también $PAImB = 0$ ya que R_0 es $A - invariante$. Esto implica que PA debe aniquilador de Im y eso implica que $PA = \lambda A$, es decir, P es eigenvector de A. Además, como $PB = 0$, P es un eigenvector izquierdo de A y es ortogonal a B, lo que es la prueba PBH. P existe porque el sistema es no controlable. El caso de que el sistema sea controlable $R_0 = X$, al momento de hacer la proyección canónica, (la cual se queda con la parte no controlable), al no existir esta, implica $P = 0$, es decir, no existe un eigenvector de A ortogonal a B, por lo que no puede existir q y como menciona las pruebas PBH el sistema es controlable.

Análogamente, se relaciona la parte de **observabilidad**. Nótese que proyección canónica nos deja con la parte observable del sistema. Si el sistema es observable $N = 0$ y por definición del mismo implica que el kernel de $C = 0$, es decir, no existe un vector ortogonal a C, y se cumplen los criterios de las pruebas PBH.

3.-

Proof. Sea m el número de entradas del sistema, es decir, el número de columnas de B, y sea r el índice de ciclicidad de la matriz A, es decir, el número de polinomios mínimos invariantes diferentes de cero. Para que el sistema sea controlable se requiere que

$$X = R_0 = ImB + AImB + \cdots + A^{n-1}ImB$$

como el grado de ciclidad son los polinomios invariantes diferentes de cero, si escribimos la matriz A en su forma de Jordan, tendremos tantos bloques en su diagonal como el índice de ciclicidad es decir que la representación en forma de Jordan de la matriz A tendrá la forma:

$$J_A = \begin{bmatrix} Bloq & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Bloq \end{bmatrix}$$

, donde $Bloq$ es un bloque en la forma de Jordan, y habrá r bloques. Si en lugar de utilizar la matriz A usamos su forma de Jordan en R_0 al momento de multiplicar por B se volverá linealmente dependiente después de la $m - esima$ multiplicación, y como $m < r$, R_0 quedará limitado a $A^{m-1}ImB$ antes de ser linealmente dependiente, por lo que no podremos abarcar todo el espacio X y por ello el sistema es no controlable. $\square$

4.-

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontramos el polinomio mínimo de A mediante la forma de Smith:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

por lo que $\alpha(\lambda) = \lambda^2((\lambda + 2)$.

La condición para ser considerado en la partición buena es $C_g := \{s : Re(s) \leq -1\}$ lo que nos genera la siguiente partición:

$$\alpha_g(\lambda) = \lambda + 2 \qquad y \qquad \alpha_b(\lambda) = \lambda$$

Ahora bien, como

$$X_b(A) := ker\alpha_b(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\langle A|ImB\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que $X_b(A) \subset \langle A|ImB\rangle$ y por el teorema 3.2 de la presentación, Existe $F : X \to U$ tal que $\sigma(A + BF) \in C_g$

5.-

Como el sistema $\Sigma(A, B, C)$ es no observable, se tiene que las primeras i filas de la matriz de observabilidad son linealmente independientes entre ellas, marcaremos estas con el superíndice i, y la matriz T^{-1} está conformada por estas. A partir de $i+1$ serán combinaciones lineales de las anteriores, por ser no observable.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^i \\ CA^{i+1} \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

La matriz T^{-1} se utiliza para seccionar el sistema en su parte observable no observable de la siguiente manera:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{21} & A_{no} \end{bmatrix}$$

En términos de espacios vectoriales, se utiliza la proyección canónica $P : X \to X/N$ para separar el sistema en su parte observable, es decir, al proyectar el espacio en el espacio cociente, no quedamos con la parte observable. Las filas de la representación matricial de la proyección canónica coinciden con las filas linealmente independientes, de la matriz de observabilidad, no de manera exacta, pero dentro del span de estas, como se puede notar en el ejercicio siguiente. Por esto tiene sentido que las primeras filas de T^{-1} sean las linealmente independientes de $\mathcal{O}$.

6.-

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el subespacio N como $ker\mathcal{O}$, donde $\mathcal{O}$ es la matriz de controlabilidad,

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. Propongo las bases de X como:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y las bases del espacio cociente X/N como:

$$\left\{ \overline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$$

(la barra arriba de los vectores significa que son las clases de equivalencia).

Ahora la proyección canónica mapea cada vector de la base de X a su correspondiente clase de equivalencia, es decir:

$$P\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \overline{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

representándolo en la base del espacio cociente X/N

$$\beta_1\overline{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}} + \beta_2\overline{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

obtengo $-\frac{1}{2}v_1 + 0v_2$, donde v_1 y v_2 son el primer y el segundo vector de la base de X/N respectivamente.

Repitiendo el proceso para los otros vectores de la base de X obtenemos:

$$P\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}v_1 + 0v_2$$
$$P\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 0v_1 + v_2$$

y la representación matricial de P sería:

$$P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Usando el diagrama de conmutación de la diapositiva 115, $PA = \bar{A}P$ y $C = \bar{C}P$, obtenemos:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \bar{C} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

El par $(\bar{A}, \bar{C})$ es observable, por el lema 4.1 o bien se puede comprobar fácilmente.

Finalmente, los modos observables son los valores propios de la matriz observable $\bar{A}$ es decir que son $1, 0$. Los modos no observables son los asociados a la matriz A pero que no comparte con $\bar{A}$ es decir 2.


Adópteme