

# Formulario Control Geométrico

Raúl Ultralaser

## Preliminares

**Definition 1 (Polinomio anulador o aniquilador de un vector).** *Cualquier polinomio  $f(\lambda)$  tal que  $f(A) = 0$*

**Definition 2 (Polinomio anulador mínimo de  $x$  o polinomio mínimo de  $x$ ).** *El polinomio  $\phi(\lambda)$  es el polinomio anulador de menor grado del vector  $x$*

**Definition 3 (Polinomio anulador mínimo de  $X$ ).** *El polinomio  $\Psi(\lambda)$  es el polinomio anulador mínimo de menor grado del espacio completo  $X$ , y es único.*

se satisface que

$$1 \leq \deg \Psi(\lambda) \leq \dim X$$

**Definition 4 (Subespacio  $A$ -invariante).** *Un espacio  $\tau$  de  $X$  se dice invariante bajo el operador  $A$  o  $A$ -invariante, si*

$$Ax \in \tau \forall x \in \tau$$

**Theorem 1** (Primer teorema de descomposición de un espacio en subespacios invariantes). *Sea  $A$  un operador  $A : X \rightarrow X$  y  $\Psi(\lambda)$  el polinomio mínimo de  $X$  tal que  $\Psi(\lambda)$  es expresado como el producto de dos polinomios coprimos  $\phi_1(\lambda)$  y  $\phi_2(\lambda)$ , es decir  $\Psi(\lambda) = \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda)$ .*

*Entonces  $X$  se puede descomponer en la suma directa de 2 subespacios  $A$ -invariantes  $\tau_1$  y  $\tau_2$  cuyos polinomios mínimos son, respectivamente,  $\phi_1(\lambda)$  y  $\phi_2(\lambda)$ , esto es,  $X = \tau_1 \oplus \tau_2$*

**Theorem 2.** *En un espacio vectorial siempre existe un vector cuyo polinomio mínimo coincide con el polinomio mínimo del espacio completo.*

**Lemma 1.** *Si los polinomios mínimos de los vectores  $e$  y  $e''$  son coprimos, entonces el polinomio mínimo del vector  $e = e' + e''$  es igual al producto de los polinomios mínimos de  $e$  y  $e''$*

**Definition 5 (Congruente módulo  $\tau$ ).** *Sea  $\tau$  un subespacio de  $X$ . Los vectores  $x, y \in X$  se dicen congruentes módulo  $\tau$ , representado como  $x \equiv y \pmod{\tau}$  si*

$$y - x \in \tau$$

El concepto de congruencia establece **clases de equivalencia**

$$[x] = \{y \in X : y = x + t, t \in \tau\}$$

**Definition 6** (Espacio cociente). *Denotado como  $X/\tau$ , es el conjunto de todas las clases de equivalencia de los vectores  $x \in X$ .*

**Nota:** la manera fácil de encontrar una base del espacio cociente es tomando las clases de equivalencia de los vectores que no están en la base de  $\tau$ , pero sí en la base de  $X$

**Theorem 3.** *La dimensión del espacio cociente  $X/\tau$  está dada por*

$$\dim(X/\tau) = \dim X - \dim \tau$$

**Definition 7 (Dependencia e independencia lineal).** *Los vectores  $x_1, x_2, \dots, x_p$  se dicen linealmente dependientes módulo  $\tau$  si existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in F$ , no todos cero, tal que*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p \equiv 0 \pmod{\tau}$$

*y linealmente independientes módulo  $\tau$ , en caso contrario.*

**Nota:** Los conceptos de polinomio anulador, polinomio mínimo, etc. como se vieron anteriormente, se les llamará **absolutos**, y cuando se trate del caso módulo  $\tau$  se les llamará **relativos**.

**Definition 8 (Subespacio cíclico).** Los vectores  $\{e, Ae, A^2e, \dots, A^{p-1}e\}$  forman una base de un espacio  $A$ -invariante de dimensión  $p$

$$\tau = \text{span}\{e, Ae, A^2e, \dots, A^{p-1}e\}$$

Se dice que  $\tau$  es un subespacio cíclico, y que el vector  $e$  es el elemento generador de este subespacio.

**Theorem 4** (Segundo teorema de la descomposición de un espacio vectorial en subespacios invariantes cíclicos). Relativo a un operador lineal dado  $A : X \rightarrow X$ , el espacio  $X$  puede descomponerse en la suma directa de subespacios invariantes cíclicos  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t$  con polinomios mínimos  $\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda), \dots, \Psi_t(\lambda)$  tal que

$$X = \tau_1 \oplus \tau_2 \oplus \dots \oplus \tau_t$$

donde  $\Psi_1(\lambda)$  coincide con el polinomio mínimo  $\Psi(\lambda)$  del espacio completo  $X$  y cada  $\Psi_i(\lambda)$  es divisible por  $\Psi_{i+1}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, t-1$ .

**Theorem 5.** Un espacio vectorial es cíclico si y solo si su dimensión es igual al grado de su polinomio mínimo.

**Theorem 6.** Un espacio cíclico puede descomponerse únicamente en subespacios invariantes que: son también cíclicos, y tienen polinomios mínimos coprimos.

**Theorem 7.** Si un espacio es descompuesto en subespacios invariantes que son también cíclicos, y tienen polinomios mínimos coprimos, entonces el espacio mismo es cíclico.

**Theorem 8.** Un espacio no puede descomponerse en subespacios invariantes, si y solo si es cíclico, su polinomio mínimo es potencia de un polinomio irreducible sobre  $F$ .

**Theorem 9** (Tercer teorema de la descomposición de un subespacio vectorial en subespacios invariantes

cíclicos). UN espacio vectorial  $X$  siempre puede ser descompuesto en subespacios invariantes cíclicos

$$X = \tau' \oplus \tau'' \oplus \dots \oplus \tau^{(u)}$$

tales que el polinomio mínimo de cada uno de estos subespacios cíclicos es una potencia de un polinomio irreducible.