Formulario Control Geométrico

Raúl Ultralaser

Preliminares

Definition 1 (**Polinomio anulador o aniquilador de un vector**). *Cualquier polinomio* $f(\lambda)$ *tal que* $f(A) = 0$

Definition 2 (**Polinomio anulador mínimo de** x **o polinomio mínimo de** x). *El polinomio* $\phi(\lambda)$ *es el polinomio anulador de menor grado del vector* x

Definition 3 (**Polinomio anulador mínimo de** X). *El polinomio* $\Psi(\lambda)$ *es el polinomio anulador mínimo de menor grado del espacio completo* X*, y es único.*

se satisface que

$$1 \leq deg\Psi(\lambda) \leq dimX$$

Definition 4 (**Subespacio A-invariante**). *Un espacio* τ *de* X *se dice invariante bajo el operador* A *o* A*-invariante, si*

$$Ax \in \tau \forall x \in \tau$$

Theorem 1 (Primer teorema de descomposición de un espacio en subespacios invariantes). *Sea* A *un operador* $A : X \to X$ *y* $\Psi(\lambda)$ *el polinomio mínimo de* X *tal que* $\Psi(\lambda)$ *es expresado como el producto de dos polinomios coprimos* $\phi_1(\lambda)$ *y* $\phi_2(\lambda)$*, es decir* $\Psi(\lambda) = \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda)$.

Entonces X *se puede descomponer en la suma directa de 2 subespacios A-invariantes* τ_1 *y* τ_2 *cuyos polinomios mínimos son, respectivamente,* $\phi_1(\lambda)$ *y* $\phi_2(\lambda)$*, esto es,* $X = \tau_1 \oplus \tau_2$

Theorem 2. *En un espacio vectorial siempre existe un vector cuyo polinomio mínimo coincide con el polinomio mínimo del espacio completo.*

Lemma 1. *Si los polinomios mínimos de los vectores* e *y* e'' *son coprimos, entonces el polinomio mínimo del vector* $e = e' + e''$ *es igual al producto de los polinomios mínimos de* e *y* e''

Definition 5 (**Congruente módulo** τ). *Sea* τ *un subespacio de* X*. Los vectores* $x, y \in X$ *se dicen congruentes módulo* τ*, representado como* $x \equiv y(mod\tau)$ *si*

$$y - x \in \tau$$

El concepto de congruencia establece **clases de equivalencia**

$$[x] = \{y \in X : y = x + t, t \in \tau\}$$

Definition 6 (Espacio cociente). *Denotado como* X/τ*, es el conjunto de todas las clases de equivalencia de los vectores* $x \in X$*.*

Nota: la manera fácil de encontrar una base del espacio cociente es tomando las clases de equivalencia de los vectores que no están en la base de τ, pero sí en la base de X

Theorem 3. *La dimensión del espacio cociente* X/τ *está dada por*

$$dim(X/\tau) = dimX - dim\tau$$

Definition 7 (**Dependencia e independencia lineal**). *Los vectores* $x_1, x_2, ..., x_p$ *se dicen linealmente dependientes módulo* τ *si existen escalares* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in F$*, no todos cero, tal que*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_p x_p \equiv 0(mod\tau)$$

y linealmente independientes módulo τ*, en caso contrario.*

Nota: Los conceptos de polinomio anulador, polinomio mínimo, etc. como se vieron anteriormente, se les llamará **absolutos**, y cuando se trate del caso módulo τ se les llamará **relativos**.

Definition 8 (**Subespacio cíclico**). *Los vectores* $\{e, Ae, A^2e, ..., A^{p-1}e\}$ *forman una base de un espacio* A*-invariante de dimensión* p

$$\tau = span\{e, Ae, A^2e, ..., A^{p-1}e\}$$

Se dice que τ *es un subespacio cíclico, y que el vector* e *es el elemento generador de este subespacio.*

Theorem 4 (Segundo teorema de la descomposición de un espacio vectorial en subespacios invariantes cíclicos)**.** *Relativo a un operador lineal dado* $A : X \to X$*, el espacio* X *puede descomponerse en la suma directa de subespacios invariantes cíclicos* $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_t$ *con polinomios mínimos* $\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda), ..., \Psi_t(\lambda)$ *tal que*

$$X = \tau_1 \oplus \tau_2 \oplus ... \oplus \tau_t$$

donde $\Psi_1(\lambda)$ *coincide con el polinimio mínimo* $\Psi(\lambda$ *del espacio completo* X *y cada* $\Psi_i(\lambda)$ *es divisible por* $\Psi_{i+1}(\lambda), i = 1, 2, ..., t-1$.