SUBESPACIOS (C,A)-INV Y SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

Aplicación en el diagnóstico de faltas

Héctor Daniel flores león

REFERENCIAS:

- A GEOMETRIC APPROACH TO FAILURE DETECTION AND IDENTIFICATION IN LINEAR SYSTEMS - MASSOUMNIA
- CONTROLLED AND CONDITIONED INVARIANTS IN LINEAR SYSTEM THEORY – BASILE & MARRO
- LINEAR MULTIVARIABLE CONTROL: A GEOMETRIC APPROACH - WONHAM

PRELIMINARES

MAPEOS Y SUBESPACIOS

❖ Sea $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un mapeo lineal

○ Normalmente se denota la imagen de un mapeo arbitrario C por $\mathcal{C}$.

- *La imagen* de C es el subespacio

$$Im(C) := \{\, y : y \in \mathcal{Y} \;\&\; \exists x \in \mathcal{X}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

- *El Kernel* de C es el subespacio

$$ker(C) := \{\, x : x \in \mathcal{X}, Cx = 0\} \subseteq \mathcal{X}$$

- Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$, $C\mathcal{R}$ denota *la imagen de* $\mathcal{R}$ *bajo* C. Se define como

$$C\mathcal{R} := \{\, y : y \in \mathcal{Y} \;\&\; \exists x \in \mathcal{R}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

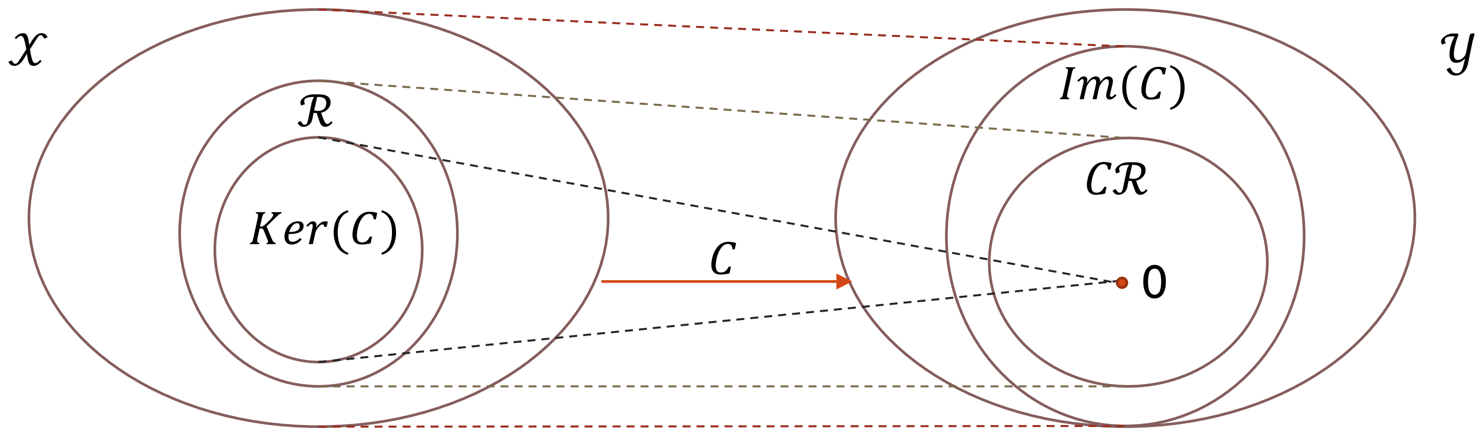
- Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y}$, $C^{-1}\mathcal{S}$ denota *la imagen inversa de* $\mathcal{S}$ bajo C. Se define como

$$C^{-1}\mathcal{S} := \{\, x : x \in \mathcal{X} \;\&\; Cx \in \mathcal{S}\,\} \subseteq \mathcal{X}$$

MAPEOS Y SUBESPACIOS

- Decimos que el mapeo C es <u>*sobreyectivo*</u> (*épico*) si $Im(C) = \mathcal{Y}$.
  - Entonces C tiene rango pleno por filas.
  - Existe la inversa derecha de C^{-r} tal que $CC^{-r} = I$.

- Decimos que el mapeo C es <u>*inyectivo*</u> (*mónico*) si $\mathrm{Ker}(C) = 0$.
  - Entonces C tiene rango pleno por columnas.
  - Existe la inversa izquierda C^{-l} tal que $C^{-l}C = I$.



APLICACIÓN EN ECUACIONES MATRICIALES LINEALES

Considere las siguientes ecuaciones matriciales lineales, donde se desea encontrar solución para X

BX = C

- $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, X: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m, C: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n.$
- Para que exista solución, cada columna de C debe de ser una combinación lineal de las columnas de B.
- Es decir, existe solución ssi $Im(C) \subseteq Im(B)$.
- Por lo tanto, existe solución si B es <u>épica</u>, ya que se tendría que $Im(C) \subseteq \mathbb{R}^n = Im(B)$.

XB = C

- $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l, C: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l.$
- Existe solución para X ssi $Ker(B) \subseteq Ker(C)$. ¿Cómo se llega a esta conclusión? (Utilizar conceptos de espacio dual y aniquiladores)
- Por lo tanto, existe solución si B es <u>mónica</u>, ya que se tendría que $0 = Ker(B) \subseteq Ker(C)$.

En estos casos, sabemos que al menos existe una solución!

MAPEOS Y SUBESPACIOS

Mapeo de inserción:

- Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$, $d(\mathcal{V}) = k$. Como $\mathcal{V}$ puede ser considerado en sí mismo un espacio vectorial de dimensión k, un vector $v \in \mathcal{V}$ puede ser representado como un elemento de $\mathcal{V}$ o de $\mathcal{X}$.
- Sea $\{\, v_1, \dots, v_k \,\}$ una base de $\mathcal{V}$ y $\{\, x_1, \dots, x_n \,\}$ una base de $\mathcal{X}$.

Entonces cada v_j puede ser representado como

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} x_i\,, \qquad j \in \{1, \dots, k\}$$

- La matriz $[v_{ij}]$ de $n \times k$ determina un mapeo único $V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$. Llamamos *mapeo de inserción de* $\mathcal{V}$ *en* $\mathcal{X}$ a este mapeo. Claramente V es mónica.

Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ con mapeo de inserción

$$V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$$

y sea $\mathrm{Im}(C) \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{Y}$ con mapeo de inserción

$$W: \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{W} \arrow[d, "W"] \\
\mathcal{X} \arrow[ur, "(\mathcal{W}:C) := W^{-1}C"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{Y} \\
\mathcal{V} \arrow[u, "V"] \arrow[ur, "(C:\mathcal{V}) := CV"'] &
\end{tikzcd}$$

EJEMPLO

1. Sea $\mathcal{V} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$, calcule el mapeo de inserción $V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ considerando la base canónica.
   - $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}_{v_1} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}_{v_2} = 0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
   - $V = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$
   - $v = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V} \to x = Vv = \begin{bmatrix}1\\8\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{X}}$

Puede verse que el mapeo de inserción es una herramienta útil para la representación numérica de un subespacio.

2. Sea $\mathcal{V} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathcal{X}$, y sea $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ el mapeo representado por $\mathrm{C} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}$. Calcule el mapeo de inserción $V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$, el mapeo de restricción de C respecto a $\mathcal{V}$ $(C: \mathcal{V})$ y compruebe que la imagen bajo C es la misma para el vector $x = \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{V}$ (Considere la base canónica).

Realizar de tarea.

ESPACIO DUAL Y ANIQUILADORES

Espacio Dual:

- Sea $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial. Se denota el conjunto de todos los funcionales lineales $x': \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ por $\mathcal{X}'$.
- El conjunto de los funcionales lineales es un espacio vectorial bajo los reales con las definiciones

$$(x_1' + x_2')x \coloneqq x_1'x + x_2'x; \qquad x_i \in \mathcal{X}', x \in \mathcal{X}$$

$$(cx_1')x \coloneqq c(x_1'x); \qquad x_1 \in \mathcal{X}', c \in \mathbb{R}$$

- El espacio vectorial ***$\mathcal{X}'$ es llamado el espacio dual de $\mathcal{X}$***.
- Si $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, el mapeo dual $C': \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ puede representarse como $C' = C^T$.

❖ Si $\{ x_1, \dots, x_n \}$ es una base de $\mathcal{X}$, la base dual correspondiente de $\mathcal{X}'$ es el conjunto único $\{ x_1', \dots, x_n' \} \subseteq \mathcal{X}'$ tal que $x_i' x_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Ejemplo:
$span(\mathcal{X}) = \{ [3\ 0\ -1]^T, [0\ 2\ 1]^T, [1\ -1\ 0]^T \}$,
Entonces
$span(\mathcal{X}') = \{x_1', x_2', x_3'\}$, donde
$x_1' = [0.2\ \ 0.2\ \ -0.4]$,
$x_2' = [0.2\ \ 0.2\ \ 0.6]$,
$x_3' = [0.4\ \ -0.6\ \ 1.2]$.

ESPACIO DUAL Y ANIQUILADORES

Aniquilador de un subespacio:

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. El *aniquilador* de $\mathcal{S}$ se denota $\mathcal{S}^{\perp}$ y se define como

$$\mathcal{S}^{\perp} := \{ x' : x'\mathcal{S} = 0,\ x' \in \mathcal{X}'\} \subseteq \mathcal{X}'$$

Sea $C: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, sean además $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Y}$. Algunas relaciones de aniquiladores son:

- $0^{\perp} = \mathcal{X}'$
- $\mathcal{X}^{\perp} = 0$
- $(\mathcal{S}_1^{\perp})^{\perp} = \mathcal{S}_1$
- $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \mathcal{S}_2^{\perp} \subseteq \mathcal{S}_1^{\perp}$
- $(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)^{\perp} = \mathcal{S}_1^{\perp} \cap \mathcal{S}_2^{\perp}$
- $(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)^{\perp} = \mathcal{S}_1^{\perp} + \mathcal{S}_2^{\perp}$
- $\big(Im(C)\big)^{\perp} = Ker(C')$
- $\big(Ker(C)\big)^{\perp} = Im(C')$
- $C\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \Leftrightarrow C'\mathcal{R}^{\perp} \subseteq \mathcal{S}^{\perp}$
- $(C\mathcal{S})^{\perp} = (C')^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$
- $(C^{-1}\mathcal{R})^{\perp} = C'\mathcal{R}^{\perp}$

Sean $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$. Sean además $R: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{X}$ y $S: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ mapeos de inserción y $R^{\perp}(S^{\perp})$ soluciones de máximo rango de $R^{\perp}R = 0$ $(S^{\perp}S = 0)$. Entonces

- $\mathcal{R} + \mathcal{S} = Im[R\ \ S]$
- $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = Ker\begin{bmatrix} R^{\perp} \\ S^{\perp} \end{bmatrix}$
- $A^{-1}\mathcal{R} = Ker[R^{\perp}A]$

SISTEMA COCIENTE

Espacio cociente:

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Los vectores $x, y \in \mathcal{X}$ son equivalentes módulo $\mathcal{S}$ si $x - y \in \mathcal{S}$.
- La equivalencia módulo $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva), y cada vector $x \in \mathcal{X}$ tiene asociado consigo una clase de equivalencia w definida como

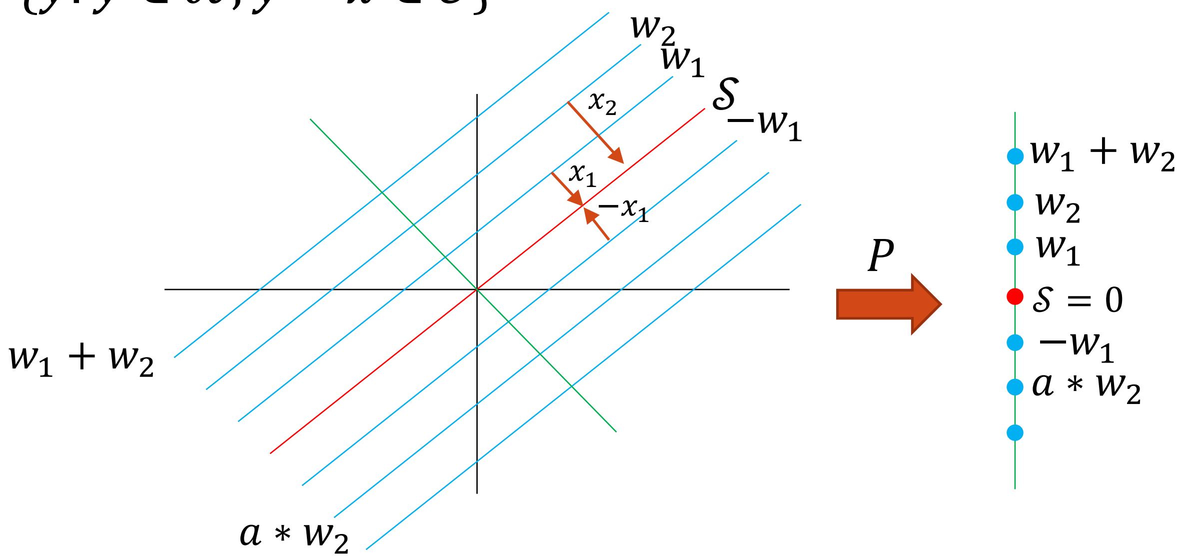
$$w := \{y : y \in \mathcal{X}, y - x \in \mathcal{S}\}$$

❖ Se cumple que

$d(\mathcal{X}/\mathcal{S}) = d(\mathcal{X}) - d(\mathcal{S})$

El mapeo $P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$ tal que $w = Px$ es llamado la *proyección canónica* de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}/\mathcal{S}$.

- P es épica, y $Ker(P) = \mathcal{S}$



- El conjunto de todas las clases de equivalencia forman un espacio vectorial lineal, llamado el ***espacio cociente*** $\mathcal{X}/\mathcal{S}$.

SISTEMA COCIENTE

- Considere el sistema lineal, donde $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{U} \in \mathbb{R}^m, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ un subespacio A-invariante $(A\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S})$ con $d(\mathcal{S}) = k$, y sea $P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S} \arrow[r, "A:\mathcal{S}"] \arrow[d, "S"] & \mathcal{S} \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, "CS"] & \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "S^{-l}B"] \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "PB"'] & \mathcal{X} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{X} \arrow[r, "C"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{Y} \\
 & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[r, "A:\mathcal{X}/\mathcal{S}"] & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[ur, "CP^{-r}"'] &
\end{tikzcd}$$

- Si $\{s_1, \dots, s_k\}$ es una base de $\mathcal{S}$ y $\{r_1, \dots, r_j\}$ es una base de $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{X}$, entonces en la base $\{s_1, \dots, s_k, r_1, \dots, r_j\}$ para $\mathcal{X}$ la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

en donde $A_1 = A: \mathcal{S}$ y $A_2 = A: \mathcal{X}/\mathcal{S}$.

❑ $\sigma(A) = \sigma(A: \mathcal{S}) \uplus \sigma(A: \mathcal{X}/\mathcal{S})$.

❖ La tripleta (C_0, A_0, B_0) conforma el sistema cociente respecto a $\mathcal{S}$, donde
$C_0 = CP^{-r}, A_0 = PAP^{-r}, B_0 = PB$

- Si $\mathcal{S} = \langle Ker(C) | A \rangle$, entonces el par (C_0, A_0) es observable!
- Si (C, A) es observable, entonces el par $(CS, A: \mathcal{S})$ es observable!

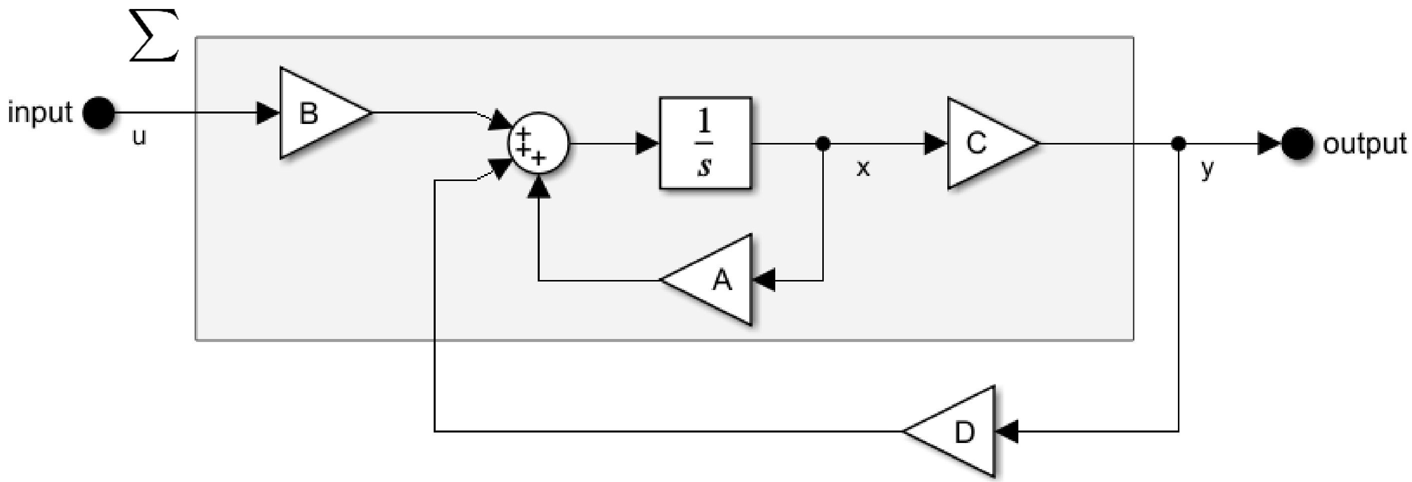
SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Definición:

- Sea $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Un subespacio $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$ es (C, A)-*invariante* si existe un mapeo de inyección de salida $D: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que

$$(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$$



Generalmente esto no es implementable!

- Sin embargo, conociendo el modelo del sistema, los subespacios (C, A)-invariantes son muy útiles a la hora de modificar las dinámicas de un observador del sistema.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Caracterización del mapeo $D: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$

- El conjunto de mapeos D tal que $(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ se denota por $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$.
- Sea $\mathcal{W}$ un subespacio (C, A)-inv donde $W: \mathcal{W} \to \mathcal{X}$ es su mapeo de inserción y sea P la solución de máximo rango de $PW = 0$. Entonces $D \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$ si y sólo si

$$P(A + DC)W = 0$$

- Se tiene que $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$

Notar que todo subespacio A-invariante es también (C, A)-invariante!

Esto se puede comprobar simplemente eligiendo $D = 0$.

- Sea $\mathcal{W}$ tal que $A\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.
- $(A + 0C)\mathcal{W} = A\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Lema:

- Un subespacio $\mathcal{W}$ es (C,A)-invariante si y sólo si

$$A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$$

(si) *Suponemos que* $A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$:
Sea $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_r\}$ una base de $\mathcal{W}$ tal que $span(w_1, \dots, w_k) = \mathcal{W} \cap Ker(C)$.
Entonces $Aw_i = s_i \quad (i \in \boldsymbol{k})$ para algún $s_i \in \mathcal{W}$.
Además $(A + DC)w_i = s_i \quad (i \in \boldsymbol{k})$ para cualquier D ya que $w_i \in Ker(C)$.
Sea $Aw_j = x_j \ \ (k+1 \leq j \leq r)$ para algún $x_j \in \mathcal{X}$, y sea D solución de

$$DC[w_{k+1} \ \ \dots \ \ w_r] = -[x_{k+1} \ \ \dots \ \ x_r]$$

Entonces $(A + DC)w_i = s_i \ \ (i \in \boldsymbol{r})$ donde $s_i \in \mathcal{W}$.

$(sólo\ si)$ *Suponemos que* $\mathcal{W}$ *es* (C,A)*-inv*:
Sea $\mathcal{W}$ (C,A)-inv, y sea $\{w_i, i \in \boldsymbol{k}\}$ una base para $\mathcal{W} \cap Ker(C)$.
Por hipótesis, $(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$, por lo que $(A + DC)w_i \in \mathcal{W}$. Pero $Cw_i = 0$, por lo que $Aw_i \in \mathcal{W}$. Se tiene entonces que $A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

<u>Otras propiedades de los subespacios (C, A)-invariantes:</u>

- Del lema anterior, se tiene que cualquier D_0 tal que $D_0 C w_j = -x_j + y_j \ \ (k+1 \leq j \leq p)$, para cualquier $y_j \in \mathcal{W}$, es también miembro de $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$.
  - Por lo tanto, si $D \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$, se tiene que también $D_0 \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$ si

$$(D - D_0)C\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$$

D y D_0 son "amigas" de $\mathcal{W}$.

- $\mathcal{W}$ es (C, A)-inv si y sólo si $\mathcal{W}$ es $(C, A + D_0 C)$-inv para cualquier mapeo arbitrario D_0.

- $\mathcal{W}$ es (C, A)-invariante si y sólo si $\mathcal{W}^{\perp}$ es (A', C')-invariante.

Demostración de tarea
(Utilizar conceptos de (A,B)-inv
y de aniquiladores)

- La intersección de dos subespacios (C, A)-invariantes es (C, A)-invariante.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Ínfimo subespacio (C, A)-invariante que contiene a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$:

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. El conjunto de subespacios (C, A)-inv que contienen a $\mathcal{E}$ se denota por

$$\underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$$

  - El conjunto de todos los subespacios (C, A)-inv en $\mathcal{X}$ se escribe como $\underline{\mathcal{W}}(0)$.
  - Al ser cerrado bajo la intersección de subespacios, $\underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ contiene un elemento ínfimo, denotado como

$$\mathcal{W}^*(\mathcal{E}) := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$$

Algoritmo CAISA ((C, A)-invariant subspace algorithm)

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{W}^* := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$. Entonces $\mathcal{W}^*$ coincide con el último término de la secuencia siguiente:

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{E},$$
$$\mathcal{W}_i = \mathcal{E} + A\big(\mathcal{W}_{i-1} \cap Ker(C)\big), \quad (i = 1, \dots, k)$$

(Solución matricial de tarea)

donde el valor de $k \leq n - 1$ es determinado por la condición $\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k$.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Observador de una transformación del estado utilizando subespacios (C, A)-inv:

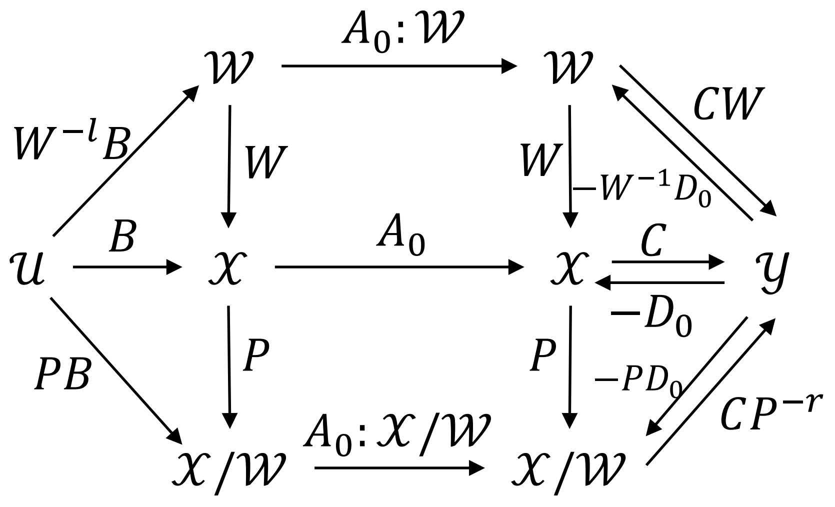
- Considere el observador de Luenberger
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + D_0(\hat{y}(t) - y(t)),$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t).$$

- De acuerdo al sistema lineal
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ld(t),$$
$$y(t) = Cx(t).$$

y sea $\mathcal{W} := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{L}), P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{W}, D_0 \in \underline{D}(\mathcal{W})$

Tenemos que
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + D_0\hat{y} - D_0 y,\\ &= A\hat{x} + Bu + D_0 C\hat{x} - D_0 y,\\ &= (A + D_0 C)\hat{x} + Bu - D_0 y,\\ &= A_0\hat{x} + Bu - D_0 y,\end{aligned}$$

En las dinámicas del observador, $\mathcal{W}$ es $(A + D_0C)$-invariante!



En el sistema cociente, con $z = Px$, tenemos:
$$\begin{aligned}P^{-r}\dot{\hat{z}} &= A_0 P^{-r}\hat{z} + Bu - D_0 y,\\ \dot{\hat{z}} &= PA_0P^{-r}\hat{z} + PBu - PD_0 y,\\ \hat{g} &= CP^{-r}\hat{z}.\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\dot{\hat{z}} = F\hat{z} + Gu - Ey,}$$
$$\boldsymbol{\hat{g} = M\hat{z}.}$$

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Continuación:

- Podemos ver que, las dinámicas del error $e(t) = \hat{z}(t) - Px(t) = \hat{z}(t) - z(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{\hat{z}} - P\dot{x},\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} + PBu - PD_0y - PAx - PBu - PLd.\end{aligned}$$

$PL = 0$, ya que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{W}$, con lo que

$$\begin{aligned}\dot{e} &= PA_0P^{-r}\hat{z} - PD_0y - PAx,\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} - PD_0Cx - PAx,\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} - P(A + D_0C)x,\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} - P(A + D_0C)P^{-r}z,\\ &= PA_0P^{-r}(\hat{z} - z),\\ &= PA_0P^{-r}e,\\ &= Fe.\end{aligned}$$

- Podemos notar que se hizo un observador que no es afectado por la perturbación $d(t)$.

- Sin embargo, para que el error tienda a cero cuando el error de observación inicial es diferente de cero, las dinámicas de $(A + D_0 : \mathcal{X}/\mathcal{W})$ deben de ser estables.

  - Esto normalmente no es posible con utilizar simplemente subespacios (C, A)-invariantes.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Tarea:

- Calcular $\mathcal{W} := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{L})$, $P\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{W}$, $D_0 \in \underline{D}(\mathcal{W})$ para el sistema lineal con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diseñar un observador del sistema bajo la entrada desconocida $Ld(t)$ de la forma

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

$$\widehat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

- Simular el sistema con su observador, estableciendo el error de observación inicial igual a cero, y después diferente de cero. Comparar. (Considere $d(t)$ como una señal cuadrada, simulando una perturbación intermitente de valor constante).

¿El sistema cociente (F, G, M) es observable? ¿Qué implica esto?

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

Definición:

- Un subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio (C, A)-*invariante de no observabilidad **(u.o.s.)*** si

$$\mathcal{S} = \langle Ker(HC) | A + DC \rangle$$

para algún mapeo $D: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ y un mapeo 'mezclador' de mediciones $H: \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$.

- Se denota con $\underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ al conjunto de u.o.s. que contienen a un subespacio dado $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$.
- Claramente $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{S}) \neq 0$.

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{S}}(0)$ si y sólo si existe un mapeo $D: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{S} = \langle Ker(C) + \mathcal{S} | A + DC \rangle$$

Esto cumple para todo $D \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{S})$.

- Entonces, dado $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{S}}(0)$, podemos calcular H resolviendo $Ker(HC) = Ker(C) + \mathcal{S}$.

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

Algunas propiedades de los subespacios de no observabilidad:

- $\mathcal{S}$ es un u.o.s. si y sólo si $\mathcal{S}^{\perp} = \langle\, A' + C'D' \,|\, Im(C'H') \,\rangle$
- $\mathcal{S}$ es el subespacio no observable del par $(HC, A + DC)$.

Teorema:
Sea $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{S}}(0)$, con $d(\mathcal{S}) = k$. Entonces para cada conjunto Λ de $n - k$ números complejos, existe un mapeo $D\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que

$$\sigma(A + DC \,:\, \mathcal{X}/\mathcal{S}) = \Lambda$$

Si $D_0 \in \mathbf{D}(\mathcal{S})$ y $D_1\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$ tal que $\sigma(\bar{A}_0 + D_1\bar{C}) = \Lambda$,
Entonces

$$D = D_0 + P^{-r}D_1H$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{X} \arrow[r, "A_0", "A+D_0C"'] \arrow[d, "P"] & \mathcal{X} \arrow[d, "P"] \arrow[dr, "C"] & \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "\overline{B}", "PB"'] & & & \mathcal{Y} \arrow[ul, bend right, "P^{-r}D_1H"'] \arrow[dl, bend left, "D_1"] \arrow[loop right, "H"] \\
& \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[r, "\bar{A}_0", "A_0:\mathcal{X}/\mathcal{S}"'] & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[ur, "\overline{C}", "HCP^{-r}"'] &
\end{tikzcd}$$

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

Ínfimo subespacio (C, A)-inv de no observabilidad que contiene a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$:

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Al ser cerrado bajo la intersección de subespacios, $\underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ contiene un elemento ínfimo, denotado como

$$\mathcal{S}^*(\mathcal{E}) := \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$$

Algoritmo UOSA (Unobservability subspace algorithm)

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{W}^* := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ y $\mathcal{S}^* := \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$. Entonces $\mathcal{S}^*$ coincide con el último término de la secuencia siguiente:

$$\mathcal{S}^0 = \mathcal{X},$$
$$\mathcal{S}^i = \mathcal{W}^* + \left(A^{-1}\mathcal{S}^{i-1}\right) \cap Ker(C), \quad (i = 1, \dots, k)$$

(Solución matricial de tarea)

donde el valor de $k \leq n-1$ es determinado por la condición $\mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S}^k$.

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

- **Demostrando que $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k+1}$ es el ínfimo u.o.s. que contiene a $\mathcal{E}$:**

A. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ un subespacio cualquiera, y defina la familia $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ de subespacios $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ como:

$$\mathfrak{S}(\mathcal{E}) := \{\, \mathcal{L} : \mathcal{L} = \mathcal{E} + (A^{-1}\mathcal{L}) \cap Ker(C) \,\}$$

- $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ tiene un elemento máximo $\mathcal{L}^*$, el cual puede ser calculado con la secuencia siguiente:

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{X},$$
$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{E} + (A^{-1}\mathcal{L}^{\mu-1}) \cap Ker(C), \quad (\mu \in \boldsymbol{n})$$

B. Sea $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{W}}(0)$. Si se tiene $D \in \underline{D}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{S} \subseteq \hat{\mathcal{S}}$, entonces

$$(Ker(C) + \mathcal{S}) \cap (A + DC)^{-1}\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} + (A^{-1}\hat{\mathcal{S}}) \cap Ker(C).$$

- Puede obtenerse por dualidad, sabiendo que, si $\mathcal{R} \in \underline{\mathcal{V}}(\mathcal{X})$, $F \in \underline{F}(\mathcal{R})$ y $\hat{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}$, entonces se cumple que

$$(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}) + (A + BF)\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap (A\hat{\mathcal{R}} + \mathcal{B})$$

- Al tener en cuenta que
$$A\hat{\mathcal{R}} + \mathcal{B} = (A + BF)\hat{\mathcal{R}} + \mathcal{B}$$

Tarea: Obtener resultado por dualidad

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

- **Demostrando que $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k+1}$ es el ínfimo u.o.s. que contiene a $\mathcal{E}$:**

C. Sea $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{W}}(0)$, $D \in \underline{D}(\mathcal{S})$ y sea $\mathcal{L}_\mu \in \mathfrak{S}(\mathcal{S})$ como se definió en A, entonces, utilizando B, se puede comprobar que

$$\mathcal{L}^\mu = \bigcap_{j=1}^{\mu} (A + DC)^{-j+1} \left(Ker(C) + \mathcal{S}\right)$$

- Notar que de esta manera, para $\mu = n$ (asegurando convergencia), se tiene que

$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^* = \langle Ker(C) + \mathcal{S} \mid A + DC \rangle$,

demostrando que $\mathcal{L}^* \in \underline{\mathcal{S}}(0)$.

D. Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ tales que

$$\mathcal{L}_i^\mu = \mathcal{S}_i + \left(A^{-1}\mathcal{L}_i^{\mu-1}\right) \cap Ker(C)$$

Entonces, por C, $\mathcal{L}_i^n \in \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$.

Defina

$$\mathcal{L}^\mu = (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) + (A^{-1}\mathcal{L}^{\mu-1}) \cap Ker(C)$$

¿ $\mathcal{L}^n \subseteq (\mathcal{L}_1^n \cap \mathcal{L}_2^n)$?

- Si esto es cierto, implica la existencia de un elemento ínfimo, de acuerdo al subespacio (C, A)-invariante elegido.
  - ¿Qué pasa si se elige $\mathcal{W}^* := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$?

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

<u>Tarea:</u>

- Calcular $\mathcal{S}^* := \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}), P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}^*$, para el sistema lineal con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diseñar un observador del sistema bajo la entrada desconocida $Ld(t)$ de la forma

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

- Calcular la matriz de inyección de salida adecuada para que $\sigma(F) = \{-5\}$.

- Simular el sistema con su observador, estableciendo el error de observación inicial igual a cero, y después diferente de cero. Comparar. (Considere $d(t)$ como una señal cuadrada, simulando una perturbación intermitente de valor constante).

¿Qué diferencias encuentras con el observador hecho anteriormente?

SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD EN EL DIAGNÓSTICO DE FALTAS

U.O.S. EN EL DIAGNÓSTICO DE FALTAS

El problema fundamental en Generación de residuos (FPRG):

1. Se considera que sólo dos faltas están afectando el sistema.
2. Se desea diseñar un generador de residuos que sea sensible a una falta e insensible a la otra (tomando como entrada $u(t)$ y $y(t)$).

- Considere el sistema lineal con faltas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L_1m_1(t) + L_2m_2(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

y el generador de residuos de la forma:

$$\dot{w}(t) = Fw(t) + Gu(t) - Ey(t),$$

$$r(t) = Mw(t) - Hy(t) + Ku(t).$$

- $L_1m_1(t)$ representa el comportamiento de la falta que se desea monitorear.
- $L_2m_2(t)$ representa el comportamiento de la falta que no debe afectar al residuo.

U.O.S. EN EL DIAGNÓSTICO DE FALTAS

- Se define FPRG como el problema de encontrar las matrices F, E, G, M, H y K tales que:

  a) $(u, m_2) \to r = 0$,

  b) $m_1 \to r$ sea 'input observable',

  c) $\sigma(F) \in \mathbb{C}^-$.

- Se dice que el sistema (C, A, B) es '<u>input observable</u>' si B es Mónica y

$$\langle \mathrm{Ker}(C) | A \rangle \cap \mathrm{Im}(B) = 0$$

  - Si además $d(B) = 1$, se consigue 'left invertibility'.

Un sistema (C, A, B) es 'left invertible' ssi B es mónica e $\mathrm{Im}(B) \cap \mathcal{V}^*(\mathrm{Ker}(C)) = 0$.

<u>Teorema:</u>

- El problema fundamental en generación de residuos (FPRG) tiene solución si y sólo si:

$$\mathcal{S}^* \cap \mathcal{L}_1 = 0$$

donde $\mathcal{S}^* = \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}_2)$.

U.O.S. EN EL DIAGNÓSTICO DE FALTAS

- Sea $D \in \mathrm{D}(\mathcal{S}^*)$, $P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}^*$, $F = P(A + DC)P^{-r}$, $G = PB$, $E = PD$, $M = HCP^{-r}$ y $K = 0$, donde H es solución de $\mathrm{Ker}(HC) = \mathrm{Ker}(C) + \mathcal{S}^*$.
- Podemos ver que, las dinámicas del error $e(t) = \widehat{w}(t) - Px(t) = \widehat{w}(t) - w(t)$,

$$\dot{e} = \dot{\widehat{w}} - P\dot{x} = P(A + DC)P^{-r}\widehat{w} + PBu - PDy - PAx - PBu - PL_1m_1 - PL_2m_2.$$

$PL_2 = 0$, ya que $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{S}^*$, con lo que

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= P(A + DC)P^{-r}\widehat{w} - PDy - PAx - PL_1m_1, \\
&= P(A + DC)P^{-r}\widehat{w} - PDCx - PAx - PL_1m_1, \\
&= P(A + DC)P^{-r}\widehat{w} - P(A + DC)x - PL_1m_1, \\
&= P(A + DC)P^{-r}\widehat{w} - P(A + DC)P^{-r}w - PL_1m_1, \\
&= P(A + DC)P^{-r}(\widehat{w} - w) - PL_1m_1, \\
&= P(A + DC)P^{-r}e - PL_1m_1, \\
&= Fe - PL_1m_1.
\end{aligned}$$

- Y el residuo

$$\begin{aligned}
r &= M\widehat{w} - Hy = HCP^{-r}\widehat{w} - HCx \\
&= HCP^{-r}\widehat{w} - HCP^{-r}w = HCP^{-r}(\widehat{w} - w) \\
&= HCP^{-r}e = Me.
\end{aligned}$$

- Si $\sigma(F) \in \mathbb{C}^-$, $e(t) \to 0$ cuando $m_1(t) = 0$, con lo que $r(t) \to 0$.
- Si $m_1(t) \neq 0 \to e(t) \neq 0 \to r(t) \neq 0$.
- Notar que $r(t)$ no es afectado por cambios en la función $m_2(t)$.

❑ ¿Qué condición se debería cumplir si quisiéramos diagnosticar la falta L_2m_2?

U.O.S. EN EL DIAGNÓSTICO DE FALTAS

Tarea:

- Calcular $\mathcal{S} := \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}_2)$, $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{S}$, $D_0 \in \underline{D}(\mathcal{S})$ para el sistema lineal con faltas, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diseñar un generador de residuos que sea sensible a la falta L_1 y no se vea afectado por la falta L_2, de la forma

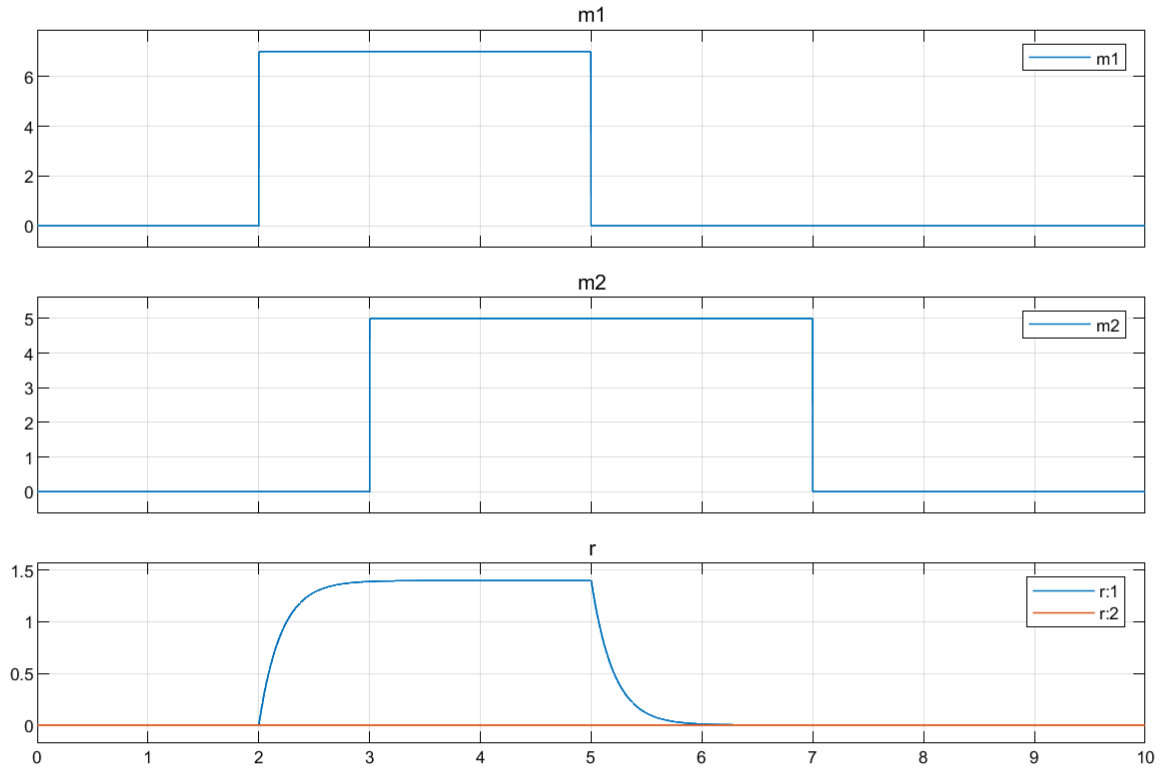
$$\dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

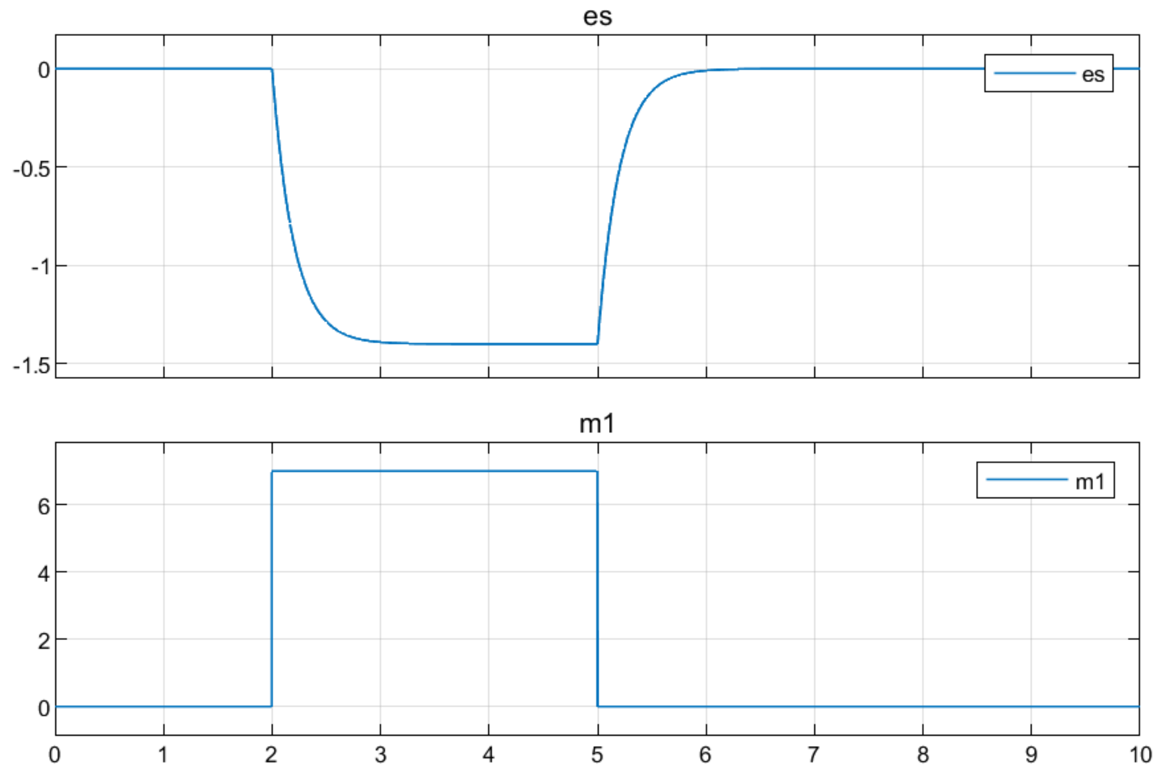
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}.$$

- Calcular la matriz de inyección de salida adecuada para que $\sigma(F) = \{-5\}$.
- Simular el sistema con generador de residuos, estableciendo el error de observación inicial igual a cero, y después diferente de cero. Analize el residuo ante cambios de $m_1(t)$ y $m_2(t)$.
- **¿Se permiten faltas simultáneas?** (Considere $m_i(t)$ como una señal cuadrada, simulando faltas intermitentes de valor constante).

U.O.S. EN EL DIAGNÓSTICO DE FALTAS

Simulación:





FIN DEL CURSO

¿Dudas?