# Formulario Control Geométrico

Raúl Ultralaser

## Preliminares

**Definición** (**Polinomio anulador o aniquilador de un vector**). *Cualquier polinomio* $f(\lambda)$ *tal que* $f(A) = 0$

**Definición** (**Polinomio anulador mínimo de** $x$ **o polinomio mínimo de** $x$). *El polinomio* $\phi(\lambda)$ *es el polinomio anulador de menor grado del vector* $x$

**Definición** (**Polinomio anulador mínimo de** $X$). *El polinomio* $\Psi(\lambda)$ *es el polinomio anulador mínimo de menor grado del espacio completo* $X$*, y es único.*

se satisface que

$$1 \leq deg\Psi(\lambda) \leq dimX$$

**Definición** (**Subespacio A-invariante**). *Un espacio* $\tau$ *de* $X$ *se dice invariante bajo el operador* $A$ *o* $A$*-invariante, si*

$$Ax \in \tau \forall x \in \tau$$

**Teorema** ( **1.2.1 Primer teorema de descomposición de un espacio en subespacios invariantes**). *Sea* $A$ *un operador* $A : X \to X$ *y* $\Psi(\lambda)$ *el polinomio mínimo de* $X$ *tal que* $\Psi(\lambda)$ *es expresado como el producto de dos polinomios coprimos* $\phi_1(\lambda)$ *y* $\phi_2(\lambda)$*, es decir* $\Psi(\lambda) = \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda)$.

*Entonces* $X$ *se puede descomponer en la suma directa de 2 subespacios* $A$*-invariantes* $\tau_1$ *y* $\tau_2$ *cuyos polinomios mínimos son, respectivamente,* $\phi_1(\lambda)$ *y* $\phi_2(\lambda)$*, esto es,* $X = \tau_1 \oplus \tau_2$

**Teorema** (**1.2.2**). *En un espacio vectorial siempre existe un vector cuyo polinomio mínimo coincide con el polinomio mínimo del espacio completo.*

**Lema** (**1.2.1**). *Si los polinomios mínimos de los vectores* $e$ *y* $e''$ *son coprimos, entonces el polinomio mínimo del vector* $e = e' + e''$ *es igual al producto de los polinomios mínimos de* $e$ *y* $e''$

**Definición** (**Congruente módulo** $\tau$). *Sea* $\tau$ *un subespacio de* $X$*. Los vectores* $x, y \in X$ *se dicen congruentes módulo* $\tau$*, representado como* $x \equiv y(mod\tau)$ *si*

$$y - x \in \tau$$

El concepto de congruencia establece **clases de equivalencia**

$$[x] = \{y \in X : y = x + t, t \in \tau\}$$

**Definición** (Espacio cociente). *Denotado como* $X/\tau$*, es el conjunto de todas las clases de equivalencia de los vectores* $x \in X$.

**Nota:** la manera fácil de encontrar una base del espacio cociente es tomando las clases de equivalencia de los vectores que no están en la base de $\tau$, pero sí en la base de $X$

**Teorema** (**1.3.1**). *La dimensión del espacio cociente* $X/\tau$ *está dada por*

$$dim(X/\tau) = dimX - dim\tau$$

**Definición** (**Dependencia e independencia lineal**). *Los vectores* $x_1, x_2, ..., x_p$ *se dicen linealmente dependientes módulo* $\tau$ *si existen escalares* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in F$*, no todos cero, tal que*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_p x_p \equiv 0(mod\tau)$$

*y linealmente independientes módulo* $\tau$*, en caso contrario.*

**Nota:** Los conceptos de polinomio anulador, polinomio mínimo, etc. como se vieron anteriormente, se les llamará **absolutos**, y cuando se trate del caso módulo $\tau$ se les llamará **relativos**.

**Definición** (**Subespacio cíclico**). *Los vectores* $\{e, Ae, A^2e, ..., A^{p-1}e\}$ *forman una base de un espacio A-invariante de dimensión p*

$$\tau = span\{e, Ae, A^2e, ..., A^{p-1}e\}$$

*Se dice que $\tau$ es un subespacio cíclico, y que el vector e es el elemento generador de este subespacio.*

**Teorema** (**1.4.1 Segundo teorema de la descomposición de un espacio vectorial en subespacios invariantes cíclicos**). *Relativo a un operador lineal dado $A : X \to X$, el espacio $X$ puede descomponerse en la suma directa de subespacios invariantes cíclicos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_t$ con polinomios mínimos $\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda), ..., \Psi_t(\lambda)$ tal que*

$$X = \tau_1 \oplus \tau_2 \oplus ... \oplus \tau_t$$

*donde $\Psi_1(\lambda)$ coincide con el polinomio mínimo $\Psi(\lambda$ del espacio completo $X$ y cada $\Psi_i(\lambda)$ es divisible por $\Psi_{i+1}(\lambda), i = 1, 2, ..., t-1$.*

**Teorema** (**1.4.2**). *Un espacio vectorial es cíclico si y solo si su dimensión es igual al grado de su polinomio mínimo.*

**Teorema** (**1.4.3**). *Un espacio cíclico puede descomponerse únicamente en subespacios invariantes que:*

- *son también cíclicos, y*
- *tienen polinomios mínimos coprimos.*

**Teorema** (**1.4.4**). *Si un espacio es descompuesto en subespacios invariantes que*

- *son también cíclicos, y*
- *tienen polinomios mínimos coprimos, entonces el espacio mismo es cíclico.*

**Teorema** (**1.4.5**). *Un espacio no puede descomponerse en subespacios invariantes, si y solo si*

- *es cíclico,*
- *su polinomio mínimo es potencia de un polinomio irreducible sobre $F$.*

**Teorema** (**1.4.6 Tercer teorema de la descomposición de un subespacio vectorial en subespacios invariantes cíclicos**). *UN espacio vectorial $X$ siempre puede ser descompuesto en subespacios invariantes cíclicos*

$$X = \tau' \oplus \tau'' \oplus ... \oplus \tau^{(u)}$$

*tales que el polinomio mínimo de cada uno de estos subespacios cíclicos es una potencia de un polinomio irreducible.*

**Teorema** (**2.1**). *El subespacio $R_0$ está dado por*

$$R_0 = \langle A|ImB \rangle$$

*donde*

$$R_0 = \langle A|ImB \rangle := ImB + AImB + \cdots + A^{n-1}ImB$$

**Teorema** (**2.2**). *El subespacio $R_0$ es el subespacio $A-invariante$ más pequeño que contiene a $ImB$*