

# Examen control geométrico

Alejandro Díaz Hernández

## 1.-

*Proof.* Sean  $V_1, V_2 \in J(A, B; X)$ . Es decir, son  $(A, B)$ -invariantes, por lo que se cumple:

$$AV_1 \subset V_1 + \text{Im}B$$

$$AV_2 \subset V_2 + \text{Im}B$$

Considerando un vector  $v_3 \in V_3$ , donde  $V_3 = V_1 \cap V_2$ , se tiene que

$$Av_3 \subset V_1 + \text{Im}B$$

$$Av_3 \subset V_2 + \text{Im}B$$

porque  $v_3 \in V_1$  y  $v_3 \in V_2$ . Por lo tanto:

$$AV_3 \subset V_1 + V_2 + \text{Im}B$$

Se puede ver que  $V_3 \notin J(A, B; X)$  a menos que  $V_1 \cap V_2 = V_1 + V_2$ . Así, la intersección de dos subespacios  $(A, B)$ -invariantes no necesariamente es  $(A, B)$ -invariante.

De donde se concluye que el conjunto  $J(A, B; X)$  no es cerrado bajo la intersección.  $\square$

## 2.-

*Proof.* (Si)

Tomando vectores  $v, w_1, w_0 \in V$ .

Como  $F_1 \in \mathbf{F}(V) \rightarrow (A + BF_1)v = w_1 \in V$ , por hipótesis  $(A + BF_0)v = w_0 \in V$ .

Además, como la suma de subespacios es cerrado bajo la suma

$$(A + BF_1)v - (A + BF_0)v = w_1 - w_0 \in V$$

$$B(F_1 - F_0)v = w_1 - w_0$$

$$(F_1 - F_0)v = B^{-1}(w_1 - w_0)$$

$$(F_1 - F_0)V \subset B^{-1}V$$

(solo si)

Análogamente si  $(F_1 - F_0)V \subset B^{-1}V$

$$(F_1 - F_0)v = B^{-1}w$$

$$B(F_1 - F_0)v = w$$

$$BF_1v - BF_0v = w$$

Para algún  $w \in V$ . Ahora, considerando

$$(A + BF_0)v = w_0 \in V$$

$$BF_0v = w_0 - Av$$

sustituyendo tenemos

$$BF_1v - w_0 + Av = w$$

$$(A + BF_1)v = w + w_0 \in V$$

$$(A + BF_1)V \subset V$$

lo que implica que  $F_1 \in \mathbf{F}(V)$

□

### 3.-

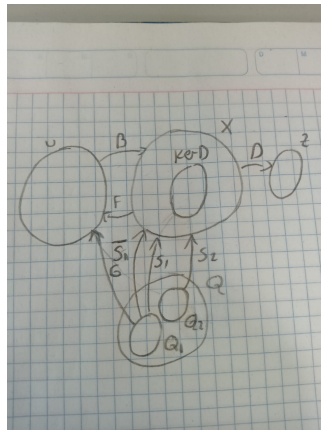
Para que un sistema sea desacoplable se tiene que cumplir la condición:

$$\langle A + BF | \text{Im} S \rangle \subset \ker D$$

Ahora bien, considerando la estructura dada en el problema, la perturbación  $q_1(t)$  no afecta a la salida si y solo si

$$\langle A + BF | \text{Im} \overline{S_1} \rangle \subset \ker D$$

en donde  $\text{Im} \overline{S_1}$  es la imagen de los mapeos del espacio de perturbaciones  $Q_1$  al espacio de estados. Del cual se puede observar que  $\overline{S_1} = BG + S_1$  debido a la acción de control  $u(t) = Fx(t) + Gq_1(t)$ , como se puede ver en el diagrama de abajo.



Así,  $q_1(t)$  se desacopla cuando se cumple

$$\langle A + BF | \text{Im}(BG + S_1) \rangle \subset \ker D$$

Y para que también  $q_2(t)$  sea desacoplable, se debe cumplir la condición

$$\langle A + BF | \text{Im}(BG + S_1) + \text{Im}S_2 \rangle \subset \ker D$$

Se puede ver que el control existe si  $\text{Im}S_1 \subset V^* + \text{Im}B$ , y  $\text{Im}S_2 \subset V^*$ :

Porque si  $\text{Im}S_2 \subset V^*$  quiere decir que toda perturbación del espacio  $Q_2$  cae dentro de  $V^*$ , y como  $V^*$  es el subespacio  $(A, B)$ -invariante más grande contenido en el  $\ker D$ , entonces  $q_2(t)$  siempre será rechazada.

Si  $\text{Im}S_1 \subset V^* + \text{Im}B$ , indica que toda perturbación del espacio  $Q_1$  cae dentro de  $V^* + \text{Im}B$ , cae en  $V^*$  por parte del operador  $S_1$  al igual que con  $q_2(t)$ , y se suma  $\text{Im}B$  por el operador compuesto  $BG$ . Por lo que al cumplirse dichas condiciones, deben de existir los operadores  $F : X \rightarrow U$  y  $G : Q_1 \rightarrow U$ .

#### 4.-

-

En el caso este sistema, no es posible encontrar una retroalimentación  $F$  que haga completamente observable al sistema y lo haga estable al mismo tiempo. Esto se debe a la estructura de la matriz  $A$ , que tiene una columna de ceros. Esta columna de ceros indica que no hay una dinámica directa en la variable de estado correspondiente.

Es decir, la tercera variable de estado no tiene influencia directa en la salida, lo que impide que el sistema sea completamente observable.

La retroalimentación de estado, solo puede afectar las variables de estado existentes y no puede introducir nuevas dinámicas en el sistema. Dado que la variable de estado no controlable no tiene influencia directa en la salida y no puede ser afectada por la retroalimentación de estado, no es posible hacer el sistema completamente observable mediante una ganancia  $F$ . O cuando menos ninguno de nosotros pudo.

-

Para ver que la perturbación puede ser rechazada a la salida y además tener estabilidad, como el sistema es no controlable se debe cumplir que

$$\text{Im}S \subset V_g^*, \text{ y } X_b(A) \subset \langle A | \text{Im}B \rangle$$

Así que comencemos por sacar  $V_g^*$  y para ello primero obtenemos  $V^*$  y  $R^*$ , que siguiendo los algoritmos de las diapositivas quedan como

$$V^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con estos espacios, formamos la proyección canónica  $P : X \rightarrow X/R^*$  cuya representación matricial está dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elegimos una  $F \in \mathbf{F}(V^*)$ , como

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -13 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 30 & 31 & 10 \end{bmatrix}$$

Por lo que definimos  $A_f = A + BF$  y con ayuda de esto y la representación matricial de  $P$  obtenemos el mapeo inducido en  $X/R^*$

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 30 & 31 & 10 \end{bmatrix}$$

Esta matriz la utilizaremos en el cálculo de  $\text{Ker} \beta_g(\bar{A}_f)$ . Calculando  $\beta_g$  buscaremos polinomios mínimos de  $A_f$  aplicado a cada uno de los vectores de  $V^*$ . Tomando  $e_1$  como el vector que contiene un uno en su primer fila, y cero en las otras cuatro, es decir, el primer vector de  $V^*$ ,

$$A_f e_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. Por lo que encontramos la relación  $A_f e_1 - 4e_1$  y su polinomio mínimo es  $\lambda - 4$ . Repitiendo el mismo proceso para los otros vectores a los cuales llamaremos usando la misma notación, el polinomio mínimo de  $e_2$  es  $\lambda - 1$  y finalmente el polinomio mínimo de  $e_3$  es  $\lambda^4 - 14\lambda^3 + 9\lambda^2 + 94\lambda + 120 = (\lambda - 4)(\lambda^3 - 10\lambda^2 - 31\lambda - 30)$ , por lo que  $\beta(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda^3 - 10\lambda^2 - 31\lambda - 30)$ . Separando  $\beta$  en la parte cuyas raíces están del lado izquierdo del plano complejo, obtenemos  $\beta_g(\lambda) = \lambda^3 + 3.64\lambda^2 + 0.266\lambda - 2.3734$ . Evaluando  $\beta$  en  $\bar{A}_f$ , obtenemos algo

muy horrible para escribirlo aquí, pero afortunadamente su kernel intersección con  $V^*/R^*$  es

$$V^*/R^* \cap Ker\beta_g(\bar{A}_f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con todo esto podemos calcular  $X_g^*$  y  $V_g^*$  que en este caso es igual a

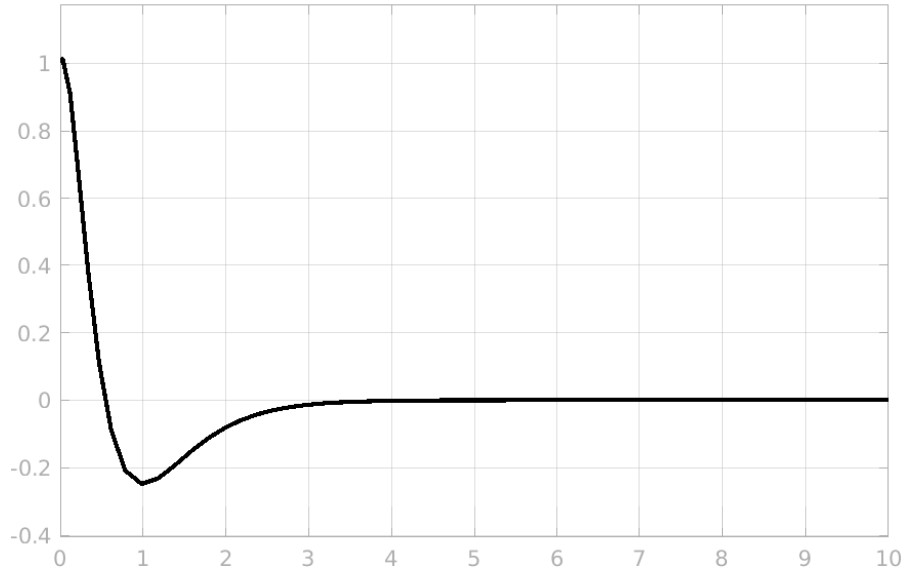
$$V_g^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = ImS$$

lo que satisface la primer condición y la segunda.

La segunda condición se cumple también al calcular

$$X_b(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad R_0 = \langle A|ImB \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando la  $F$  propuesta anteriormente, y al momento de simularlo obtenemos la siguiente salida. Se puede ver que la perturbación no afecta la salida, y además hace estable al sistema.



La condición inicial fue puesta en 1, para apreciar el movimiento hacia el cero.