# SUBESPACIOS (C,A)-INV Y SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

Aplicación en el diagnóstico de faltas

Héctor Daniel flores león

REFERENCIAS:

- A GEOMETRIC APPROACH TO FAILURE DETECTION AND IDENTIFICATION IN LINEAR SYSTEMS - MASSOUMNIA
- CONTROLLED AND CONDITIONED INVARIANTS IN LINEAR SYSTEM THEORY – BASILE & MARRO
- LINEAR MULTIVARIABLE CONTROL: A GEOMETRIC APPROACH - WONHAM

# PRELIMINARES

# MAPEOS Y SUBESPACIOS

❖ Sea $\mathcal{C}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un mapeo lineal

○ Normalmente se denota la imagen de un mapeo arbitrario $C$ por $\mathcal{C}$.

- *La imagen* de $C$ es el subespacio

$$Im(C) \coloneqq \{\, y : y \in \mathcal{Y} \,\&\, \exists x \in \mathcal{X}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

- *El Kernel* de $C$ es el subespacio

$$ker(C) \coloneqq \{\, x : x \in \mathcal{X}, Cx = 0\} \subseteq \mathcal{X}$$

- Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$, $C\mathcal{R}$ denota *la imagen de $\mathcal{R}$ bajo $C$*. Se define como

$$C\mathcal{R} \coloneqq \{\, y : y \in \mathcal{Y} \,\&\, \exists x \in \mathcal{R}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

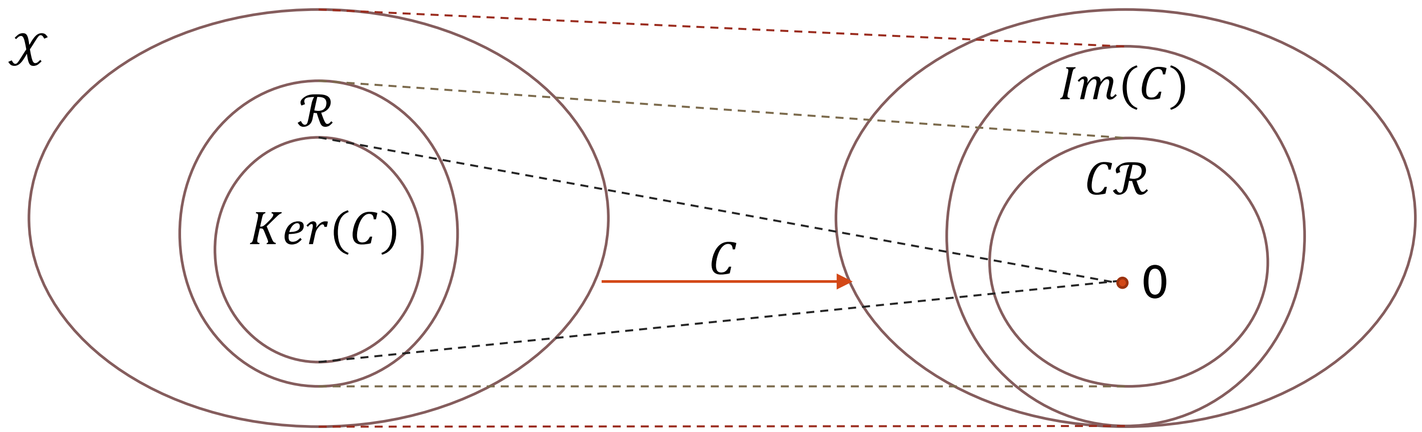
- Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y}, C^{-1}\mathcal{S}$ denota *la imagen inversa de $\mathcal{S}$* bajo $C$. Se define como

$$C^{-1}\mathcal{S} \coloneqq \{\, x : x \in \mathcal{X} \,\&\, Cx \in \mathcal{S}\,\} \subseteq \mathcal{X}$$

# MAPEOS Y SUBESPACIOS

- Decimos que el mapeo $C$ es <u>*sobreyectivo*</u> (*épico*) si $Im(C) = \mathcal{Y}$.
  - Entonces $C$ tiene rango pleno por filas.
  - Existe la inversa derecha de $C^{-r}$ tal que $CC^{-r} = I$.

- Decimos que el mapeo $C$ es <u>*inyectivo*</u> (*mónico*) si $\mathrm{Ker}(C) = 0$.
  - Entonces $C$ tiene rango pleno por columnas.
  - Existe la inversa izquierda $C^{-l}$ tal que $C^{-l}C = I$.



# APLICACIÓN EN ECUACIONES MATRICIALES LINEALES

Considere las siguientes ecuaciones matriciales lineales, donde se desea encontrar solución para $X$

**BX = C**

- $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, X: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m, C: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$.
- Para que exista solución, cada columna de $C$ debe de ser una combinación lineal de las columnas de $B$.
- Es decir, existe solución ssi $Im(C) \subseteq Im(B)$.
- Por lo tanto, existe solución si $B$ es épica, ya que se tendría que $Im(C) \subseteq \mathbb{R}^n = Im(B)$.

**XB = C**

- $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l, C: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$.
- Existe solución para $X$ ssi $Ker(B) \subseteq Ker(C)$. ¿Cómo se llega a esta conclusión? (Utilizar conceptos de espacio dual y aniquiladores)
- Por lo tanto, existe solución si $B$ es mónica, ya que se tendría que $0 = Ker(B) \subseteq Ker(C)$.

En estos casos, sabemos que al menos existe una solución!

# MAPEOS Y SUBESPACIOS

**Mapeo de inserción:**

- Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$, $d(\mathcal{V}) = k$. Como $\mathcal{V}$ puede ser considerado en sí mismo un espacio vectorial de dimensión $k$, un vector $v \in \mathcal{V}$ puede ser representado como un elemento de $\mathcal{V}$ o de $\mathcal{X}$.
- Sea $\{ v_1, \dots, v_k \}$ una base de $\mathcal{V}$ y $\{ x_1, \dots, x_n \}$ una base de $\mathcal{X}$.

Entonces cada $v_j$ puede ser representado como

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} x_i , \qquad j \in \{1, \dots, k\}$$

- La matriz $[v_{ij}]$ de $n \times k$ determina un mapeo único $V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$. Llamamos *mapeo de inserción de* $\mathcal{V}$ *en* $\mathcal{X}$ a este mapeo. Claramente $V$ es mónica.

Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ con mapeo de inserción

$$V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$$

y sea $\mathrm{Im}(\mathrm{C}) \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{Y}$ con mapeo de inserción

$$W: \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{W} \arrow[d, "W"] \\
\mathcal{X} \arrow[ur, "(\mathcal{W}:C) := W^{-1}C"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{Y} \\
\mathcal{V} \arrow[u, "V"] \arrow[ur, "(C:\mathcal{V}) := CV"'] &
\end{tikzcd}$$

# EJEMPLO

1. Sea $\mathcal{V} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$, calcule el mapeo de inserción $V: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$ considerando la base canónica.
   - $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}_{v_1} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}_{v_2} = 0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
   - $V = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$
   - $v = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V} \rightarrow x = Vv = \begin{bmatrix}1\\8\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{X}}$

Puede verse que el mapeo de inserción es una herramienta útil para la representación numérica de un subespacio.

2. Sea $\mathcal{V} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathcal{X}$, y sea $C: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ el mapeo representado por $C = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}$. Calcule el mapeo de inserción $V: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$, el mapeo de restricción de $C$ respecto a $\mathcal{V}$ $(C: \mathcal{V})$ y compruebe que la imagen bajo $C$ es la misma para el vector $x = \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{V}$ (Considere la base canónica).

Realizar de tarea.

# ESPACIO DUAL Y ANIQUILADORES

**Espacio Dual:**

- Sea $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial. Se denota el conjunto de todos los funcionales lineales $x' : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ por $\mathcal{X}'$.
- El conjunto de los funcionales lineales es un espacio vectorial bajo los reales con las definiciones

$$(x_1' + x_2')x \coloneqq x_1'x + x_2'x; \qquad x_i \in \mathcal{X}', x \in \mathcal{X}$$

$$(cx_1')x \coloneqq c(x_1'x); \qquad x_1 \in \mathcal{X}', c \in \mathbb{R}$$

- El espacio vectorial ***$\mathcal{X}'$ es llamado el espacio dual de $\mathcal{X}$***.
- Si $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, el mapeo dual $C' : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ puede representarse como $C' = C^T$.

❖ Si $\{ x_1, \dots, x_n \}$ es una base de $\mathcal{X}$, la base dual correspondiente de $\mathcal{X}'$ es el conjunto único $\{ x_1', \dots, x_n' \} \subseteq \mathcal{X}'$ tal que $x_i'x_j = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij}$ es la delta de Kronecker.

Ejemplo:
$span(\mathcal{X}) = \{ [3\ 0\ \ -1]^T, [0\ 2\ 1]^T, [1\ \ -1\ 0]^T \}$,
Entonces
$span(\mathcal{X}') = \{x_1', x_2', x_3'\}$, donde
$x_1' = [0.2\ \ 0.2\ \ \ -0.4]$,
$x_2' = [0.2\ \ 0.2\ \ 0.6]$,
$x_3' = [0.4\ \ \ -0.6\ \ 1.2]$.

# ESPACIO DUAL Y ANIQUILADORES

**Aniquilador de un subespacio:**

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. El *aniquilador* de $\mathcal{S}$ se denota $\mathcal{S}^{\perp}$ y se define como

$$\mathcal{S}^{\perp} := \{ x' : x'\mathcal{S} = 0,\ x' \in \mathcal{X}'\} \subseteq \mathcal{X}'$$

Sea $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, sean además $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Y}$. Algunas relaciones de aniquiladores son:

- $0^{\perp} = \mathcal{X}'$
- $\mathcal{X}^{\perp} = 0$
- $(\mathcal{S}_1^{\perp})^{\perp} = \mathcal{S}_1$
- $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \mathcal{S}_2^{\perp} \subseteq \mathcal{S}_1^{\perp}$
- $(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)^{\perp} = \mathcal{S}_1^{\perp} \cap \mathcal{S}_2^{\perp}$
- $(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)^{\perp} = \mathcal{S}_1^{\perp} + \mathcal{S}_2^{\perp}$
- $\big(Im(C)\big)^{\perp} = Ker(C')$
- $\big(Ker(C)\big)^{\perp} = Im(C')$
- $C\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \Leftrightarrow C'\mathcal{R}^{\perp} \subseteq \mathcal{S}^{\perp}$
- $(C\mathcal{S})^{\perp} = (C')^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$
- $(C^{-1}\mathcal{R})^{\perp} = C'\mathcal{R}^{\perp}$

Sean $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$. Sean además $R: \mathcal{R} \to \mathcal{X}$ y $S: \mathcal{S} \to \mathcal{X}$ mapeos de inserción y $R^{\perp}(S^{\perp})$ soluciones de máximo rango de $R^{\perp}R = 0$ $(S^{\perp}S = 0)$. Entonces

- $\mathcal{R} + \mathcal{S} = Im[R\ \ S]$
- $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = Ker\begin{bmatrix} R^{\perp} \\ S^{\perp} \end{bmatrix}$
- $A^{-1}\mathcal{R} = Ker[R^{\perp}A]$

# SISTEMA COCIENTE

**Espacio cociente:**

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Los vectores $x, y \in \mathcal{X}$ son equivalentes módulo $\mathcal{S}$ si $x - y \in \mathcal{S}$.
- La equivalencia módulo $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva), y cada vector $x \in \mathcal{X}$ tiene asociado consigo una clase de equivalencia $w$ definida como

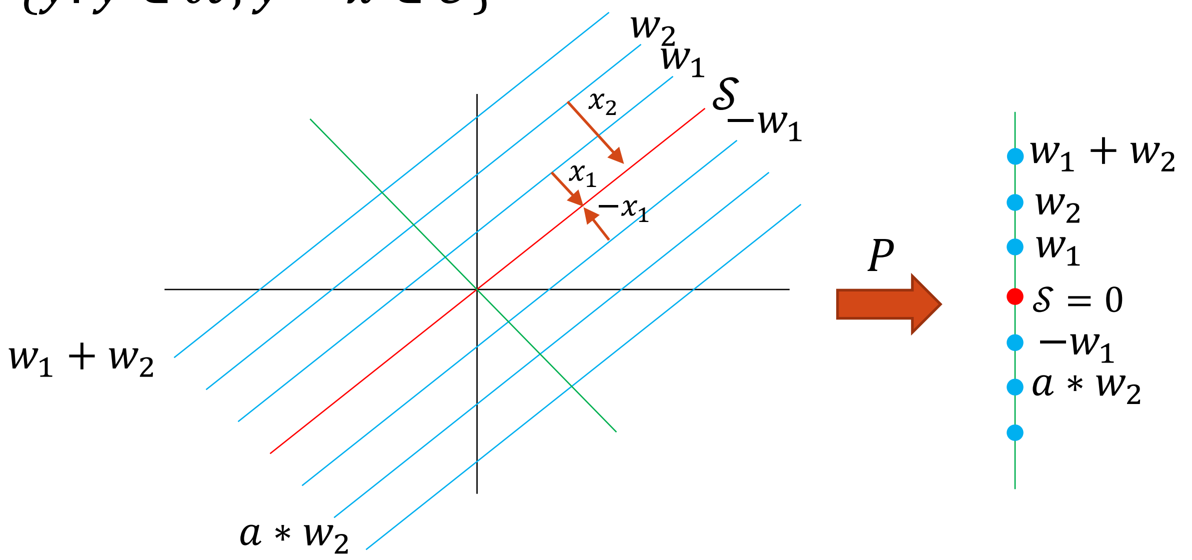
$$w \coloneqq \{y : y \in \mathcal{X}, y - x \in \mathcal{S}\}$$

❖ Se cumple que

$d(\mathcal{X}/\mathcal{S}) = d(\mathcal{X}) - d(\mathcal{S})$

El mapeo $P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$ tal que $w = Px$ es llamado la *proyección canónica* de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}/\mathcal{S}$.

- $P$ es épica, y $Ker(P) = \mathcal{S}$




- El conjunto de todas las clases de equivalencia forman un espacio vectorial lineal, llamado el ***espacio cociente*** $\mathcal{X}/\mathcal{S}$.

# SISTEMA COCIENTE

- Considere el sistema lineal, donde $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{U} \in \mathbb{R}^m, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ un subespacio $A$-invariante $(A\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S})$ con $d(\mathcal{S}) = k$, y sea $P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S} \arrow[r, "A:\mathcal{S}"] \arrow[d, "S"] & \mathcal{S} \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, "CS"] & \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "S^{-l}B"] \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "PB"'] & \mathcal{X} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{X} \arrow[r, "C"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{Y} \\
 & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[r, "A:\mathcal{X}/\mathcal{S}"] & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[ur, "CP^{-r}"'] &
\end{tikzcd}$$

- Si $\{s_1, \dots, s_k\}$ es una base de $\mathcal{S}$ y $\{r_1, \dots, r_j\}$ es una base de $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{X}$, entonces en la base $\{s_1, \dots, s_k, r_1, \dots, r_j\}$ para $\mathcal{X}$ la matriz $A$ tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

en donde $A_1 = A: \mathcal{S}$ y $A_2 = A: \mathcal{X}/\mathcal{S}$.

❑ $\sigma(A) = \sigma(A:\mathcal{S}) \uplus \sigma(A:\mathcal{X}/\mathcal{S})$.

❖ La tripleta $(C_0, A_0, B_0)$ conforma el <u>sistema cociente respecto a $\mathcal{S}$,</u> donde

$$C_0 = CP^{-r}, A_0 = PAP^{-r}, B_0 = PB$$

- ○ Si $\mathcal{S} = \langle Ker(C)|A\rangle$, entonces el par $(C_0, A_0)$ es observable!
- ○ Si $(C, A)$ es observable, entonces el par $(CS, A:\mathcal{S})$ es observable!

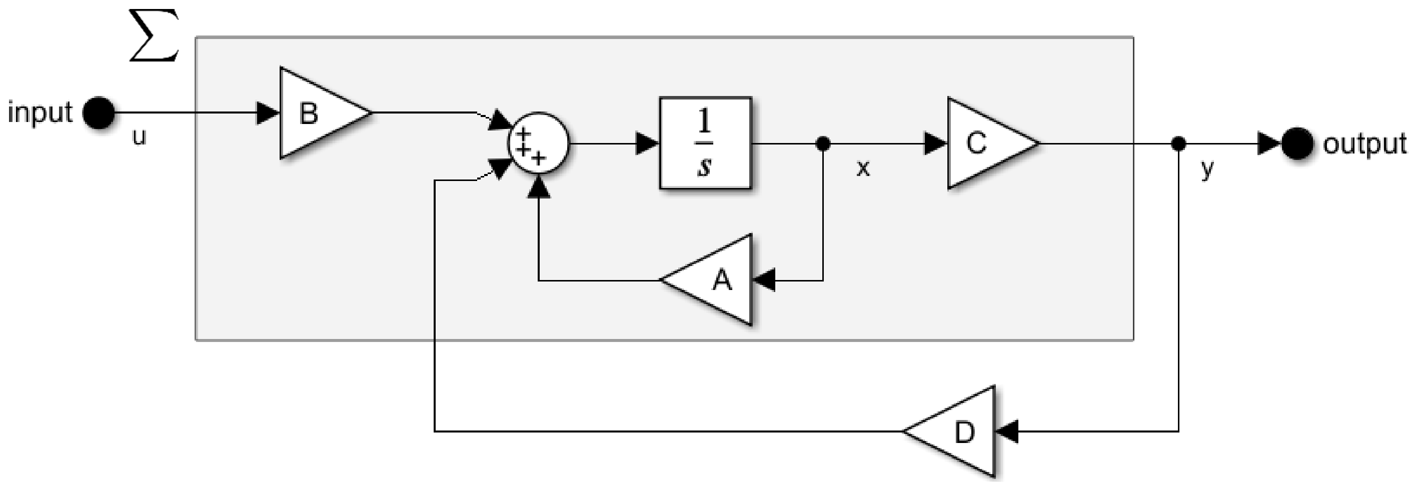
# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

**Definición:**

- Sea $A\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $C\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Un subespacio $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$ es $(C, A)$-*invariante* si existe un mapeo de inyección de salida $D\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que

$$(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$$




Generalmente esto no es implementable!

- Sin embargo, conociendo el modelo del sistema, los subespacios $(C, A)$-invariantes son muy útiles a la hora de modificar las dinámicas de un observador del sistema.

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

**Caracterización del mapeo $D: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$**

- El conjunto de mapeos $D$ tal que $(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ se denota por $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$.

- Sea $\mathcal{W}$ un subespacio $(C, A)$-inv donde $W: \mathcal{W} \to \mathcal{X}$ es su mapeo de inserción y sea $P$ la solución de máximo rango de $PW = 0$. Entonces $D \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$ si y sólo si

$$P(A + DC)W = 0$$

- Se tiene que $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$

Notar que todo subespacio $A$-invariante es también $(C, A)$-invariante!

Esto se puede comprobar simplemente eligiendo $D = 0$.

- Sea $\mathcal{W}$ tal que $A\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.
- $(A + 0C)\mathcal{W} = A\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

**Lema:**

- Un subespacio $\mathcal{W}$ es $(C,A)$-invariante si y sólo si

$$A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$$

$(si)$ *Suponemos que* $A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$:
Sea $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_r\}$ una base de $\mathcal{W}$ tal que $span(w_1, \dots, w_k) = \mathcal{W} \cap Ker(C)$.
Entonces $Aw_i = s_i \quad (i \in \boldsymbol{k})$ para algún $s_i \in \mathcal{W}$.
Además $(A + DC)w_i = s_i \quad (i \in \boldsymbol{k})$ para cualquier $D$ ya que $w_i \in Ker(C)$.
Sea $Aw_j = x_j \;\; (k + 1 \leq j \leq r)$ para algún $x_j \in \mathcal{X}$, y sea $D$ solución de

$$DC[w_{k+1} \;\; \dots \;\; w_r] = -[x_{k+1} \;\; \dots \;\; x_r]$$

Entonces $(A + DC)w_i = s_i \;\; (i \in \boldsymbol{r})$ donde $s_i \in \mathcal{W}$.

$(sólo\ si)$ *Suponemos que* $\mathcal{W}$ *es* $(C,A)$*-inv*:
Sea $\mathcal{W}$ $(C,A)$-inv, y sea $\{w_i, i \in \boldsymbol{k}\}$ una base para $\mathcal{W} \cap Ker(C)$.
Por hipótesis, $(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$, por lo que $(A + DC)w_i \in \mathcal{W}$. Pero $Cw_i = 0$, por lo que $Aw_i \in \mathcal{W}$. Se tiene entonces que $A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$.

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

**<u>Otras propiedades de los subespacios $(C, A)$-invariantes:</u>**

- Del lema anterior, se tiene que cualquier $D_0$ tal que $D_0 C w_j = -x_j + y_j \;\; (k+1 \leq j \leq p)$, para cualquier $y_j \in \mathcal{W}$, es también miembro de $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$.
  - Por lo tanto, si $D \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$, se tiene que también $D_0 \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$ si

$$(D - D_0)C\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$$

$D$ y $D_0$ son "amigas" de $\mathcal{W}$.

- $\mathcal{W}$ es $(C, A)$-inv si y sólo si $\mathcal{W}$ es $(C, A + D_0 C)$-inv para cualquier mapeo arbitrario $D_0$.

- $\mathcal{W}$ es $(C, A)$-invariante si y sólo si $\mathcal{W}^{\perp}$ es $(A', C')$-invariante.

Demostración de tarea
(Utilizar conceptos de (A,B)-inv y de aniquiladores)

- La intersección de dos subespacios $(C, A)$-invariantes es $(C, A)$-invariante.

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

**Ínfimo subespacio $(C, A)$-invariante que contiene a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$:**

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. El conjunto de subespacios $(C, A)$-inv que contienen a $\mathcal{E}$ se denota por

$$\underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$$

  - El conjunto de todos los subespacios $(C, A)$-inv en $\mathcal{X}$ se escribe como $\underline{\mathcal{W}}(0)$.
  - Al ser cerrado bajo la intersección de subespacios, $\underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ contiene un elemento ínfimo, denotado como

$$\mathcal{W}^*(\mathcal{E}) := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$$

**Algoritmo CAISA ($(C, A)$-invariant subspace algorithm)**

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{W}^* := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$. Entonces $\mathcal{W}^*$ coincide con el último término de la secuencia siguiente:

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{E},$$
$$\mathcal{W}_i = \mathcal{E} + A\big(\mathcal{W}_{i-1} \cap Ker(C)\big), \quad (i = 1, \dots, k)$$

(Solución matricial de tarea)

donde el valor de $k \leq n - 1$ es determinado por la condición $\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k$.

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

**Observador de una transformación del estado utilizando subespacios $(C,A)$-inv:**

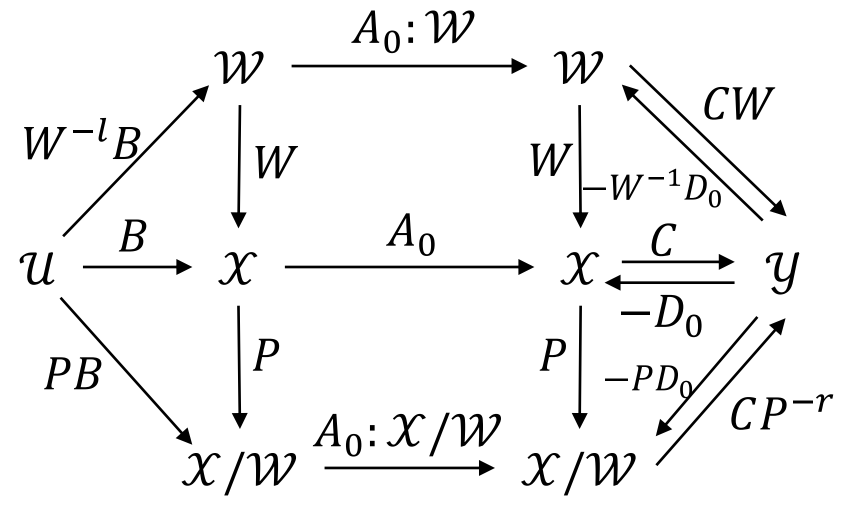
- Considere el observador de Luenberger
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + D_0(\hat{y}(t) - y(t)),$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t).$$

- De acuerdo al sistema lineal
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ld(t),$$
$$y(t) = Cx(t).$$

y sea $\mathcal{W} := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{L}), P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{W}, D_0 \in \underline{D}(\mathcal{W})$

Tenemos que
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + D_0\hat{y} - D_0y,\\ &= A\hat{x} + Bu + D_0C\hat{x} - D_0y,\\ &= (A + D_0C)\hat{x} + Bu - D_0y,\\ &= A_0\hat{x} + Bu - D_0y,\end{aligned}$$

En las dinámicas del observador, $\mathcal{W}$ es $(A + D_0C)$-invariante!




En el sistema cociente, con $z = Px$, tenemos:
$$\begin{aligned}P^{-r}\dot{\hat{z}} &= A_0P^{-r}\hat{z} + Bu - D_0y,\\ \dot{\hat{z}} &= PA_0P^{-r}\hat{z} + PBu - PD_0y,\\ \hat{g} &= CP^{-r}\hat{z}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\dot{\hat{z}} = F\hat{z} + Gu - Ey,}$$
$$\boldsymbol{\hat{g} = M\hat{z}.}$$

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Continuación:

- Podemos ver que, las dinámicas del error $e(t) = \hat{z}(t) - Px(t) = \hat{z}(t) - z(t)$,

$$
\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{\hat{z}} - P\dot{x}, \\
&= PA_0P^{-r}\hat{z} + PBu - PD_0y - PAx - PBu - PLd.
\end{aligned}
$$

$PL = 0$, ya que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{W}$, con lo que

$$
\begin{aligned}
\dot{e} &= PA_0P^{-r}\hat{z} - PD_0y - PAx, \\
&= PA_0P^{-r}\hat{z} - PD_0Cx - PAx, \\
&= PA_0P^{-r}\hat{z} - P(A + D_0C)x, \\
&= PA_0P^{-r}\hat{z} - P(A + D_0C)P^{-r}z, \\
&= PA_0P^{-r}(\hat{z} - z), \\
&= PA_0P^{-r}e, \\
&= Fe.
\end{aligned}
$$

- Podemos notar que se hizo un observador que no es afectado por la perturbación $d(t)$.

- Sin embargo, para que el error tienda a cero cuando el error de observación inicial es diferente de cero, las dinámicas de $(A + D_0 : \mathcal{X}/\mathcal{W})$ deben de ser estables.

  - Esto normalmente no es posible con utilizar simplemente subespacios $(C, A)$-invariantes.

# SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Tarea:

- Calcular $\mathcal{W} := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{L}), P\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{W},\ D_0 \in \underline{D}(\mathcal{W})$ para el sistema lineal con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diseñar un observador del sistema bajo la entrada desconocida $Ld(t)$ de la forma

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

$$\widehat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

- Simular el sistema con su observador, estableciendo el error de observación inicial igual a cero, y después diferente de cero. Comparar. (Considere $d(t)$ como una señal cuadrada, simulando una perturbación intermitente de valor constante).

¿El sistema cociente $(F, G, M)$ es observable? ¿Qué implica esto?

# SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

# SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

**Definición:**

- Un subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio $(C, A)$-*invariante de no observabilidad* ***(u.o.s.)*** si

$$\mathcal{S} = \langle Ker(HC) | A + DC \rangle$$

para algún mapeo $D: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ y un mapeo 'mezclador' de mediciones $H: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$.

- Se denota con $\underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ al conjunto de u.o.s. que contienen a un subespacio dado $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$.
- Claramente $\underline{\mathbf{D}}(\mathcal{S}) \neq 0$.

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{S}}(0)$ si y sólo si existe un mapeo $D: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{S} = \langle Ker(C) + \mathcal{S} | A + DC \rangle$$

Esto cumple para todo $D \in \underline{\mathbf{D}}(\mathcal{S})$.

- Entonces, dado $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{S}}(0)$, podemos calcular $H$ resolviendo $Ker(HC) = Ker(C) + \mathcal{S}$.

# SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

**Algunas propiedades de los subespacios de no observabilidad:**

- $\mathcal{S}$ es un u.o.s. si y sólo si $\mathcal{S}^{\perp} = \langle\, A' + C'D' |\, Im(C'H')\,\rangle$
- $\mathcal{S}$ es el subespacio no observable del par $(HC, A + DC)$.

**Teorema:**
Sea $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{S}}(0)$, con $d(\mathcal{S}) = k$. Entonces para cada conjunto $\Lambda$ de $n - k$ números complejos, existe un mapeo $D: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que

$$\sigma(A + DC : \mathcal{X}/\mathcal{S}) = \Lambda$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{X} \arrow[r, "A_0"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{X} \arrow[d, "P"] \arrow[dr, "C"] & \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "PB"'] & & & \mathcal{Y} \arrow[ul, bend right, "P^{-r}D_1H"'] \arrow[dl, bend left, "D_1"] \arrow[loop right, "H"] \\
& \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[r, "A_0 : \mathcal{X}/\mathcal{S}"] & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[ur, "HCP^{-r}"] &
\end{tikzcd}$$

# SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

**Ínfimo subespacio $(C, A)$-inv de no observabilidad que contiene a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$:**

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. Al ser cerrado bajo la intersección de subespacios, $\underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$ contiene un elemento ínfimo, denotado como

$$\mathcal{S}^*(\mathcal{E}) := \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$$

**Algoritmo UOSA (Unobservability subspace algorithm)**

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$, $\mathcal{W}^* := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ y $\mathcal{S}^* := \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$. Entonces $\mathcal{S}^*$ coincide con el último término de la secuencia siguiente:

$$\mathcal{S}^0 = \mathcal{X},$$
$$\mathcal{S}^i = \mathcal{W}^* + \left(A^{-1}\mathcal{S}^{i-1}\right) \cap Ker(C), \quad (i = 1, \dots, k)$$

(Solución matricial de tarea)

donde el valor de $k \leq n-1$ es determinado por la condición $\mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S}^k$.

# SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

- **Demostrando que $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k+1}$ es el ínfimo u.o.s. que contiene a $\mathcal{E}$:**

A. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ un subespacio cualquiera, y defina la familia $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ de subespacios $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$ como:

$$\mathfrak{S}(\mathcal{E}) := \{\, \mathcal{L} : \mathcal{L} = \mathcal{E} + (A^{-1}\mathcal{L}) \cap Ker(C) \,\}$$

- $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ tiene un elemento máximo $\mathcal{L}^*$, el cual puede ser calculado con la secuencia siguiente:

$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{X},$$
$$\mathcal{L}^\mu = \mathcal{E} + (A^{-1}\mathcal{L}^{\mu-1}) \cap Ker(C), \quad (\mu \in \boldsymbol{n})$$

B. Sea $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{W}}(0)$. Si se tiene $D \in \underline{D}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{S} \subseteq \hat{\mathcal{S}}$, entonces

$$(Ker(C) + \mathcal{S}) \cap (A + DC)^{-1}\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} + (A^{-1}\hat{\mathcal{S}}) \cap Ker(C).$$

- Puede obtenerse por dualidad, sabiendo que, si $\mathcal{R} \in \underline{\mathcal{V}}(\mathcal{X})$, $F \in \underline{F}(\mathcal{R})$ y $\hat{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}$, entonces se cumple que

$$(\mathcal{B} \cap \mathcal{R}) + (A + BF)\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap (A\hat{\mathcal{R}} + \mathcal{B})$$

- Al tener en cuenta que

$$A\hat{\mathcal{R}} + \mathcal{B} = (A + BF)\hat{\mathcal{R}} + \mathcal{B}$$

Tarea: Obtener resultado por dualidad

# SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

❖ **Demostrando que $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k+1}$ es el ínfimo u.o.s. que contiene a $\mathcal{E}$:**

C. Sea $\mathcal{S} \in \underline{\mathcal{W}}(0)$, $D \in \underline{D}(\mathcal{S})$ y sea $\mathcal{L}_\mu \in \mathfrak{S}(\mathcal{S})$ como se definió anteriormente, entonces

$$\mathcal{L}^\mu = \bigcap_{j=1}^{\mu} (A + DC)^{-j+1} \left(Ker(C) + \mathcal{S}\right)$$

➢ Notar que de esta manera, para $\mu = n$, se tiene que

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^* = \langle Ker(C) + \mathcal{S} \mid A + DC \rangle,$$

demostrando que $\mathcal{L}^\mu \in \underline{\mathcal{S}}(0)$.

D. Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ tales que

$$\mathcal{L}_i^n = \mathcal{S}_i + \left(A^{-1}\mathcal{L}_i^{n-1}\right) \cap Ker(C)$$

Entonces $\mathcal{L}_i^n \in \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{E})$.

Defina

$$\mathcal{L}^\mu = (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) + (A^{-1}\mathcal{L}^{\mu-1}) \cap Ker(C)$$

¿ $\mathcal{L}^n \subseteq (\mathcal{L}_1^n \cap \mathcal{L}_2^n)$ ?

- Si esto es cierto, implica la existencia de un elemento ínfimo, de acuerdo al subespacio $(C, A)$-invariante elegido.

# SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

<u>Tarea:</u>

- Calcular $\mathcal{S} := \inf \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{L}), P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$, para el sistema lineal con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diseñar un observador del sistema bajo la entrada desconocida $Ld(t)$ de la forma

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

- Calcular la matriz de inyección de salida adecuada para que $\sigma(F) = \{-5\}$.

- Simular el sistema con su observador, estableciendo el error de observación inicial igual a cero, y después diferente de cero. Comparar. (Considere $d(t)$ como una señal cuadrada, simulando una perturbación intermitente de valor constante).

¿Qué diferencias encuentras con el observador hecho anteriormente?