SUBESPACIOS (C,A)-INV Y SUBESPACIOS DE NO OBSERVABILIDAD

Aplicación en el diagnóstico de faltas

Héctor Daniel flores león

REFERENCIAS:

- A GEOMETRIC APPROACH TO FAILURE DETECTION AND IDENTIFICATION IN LINEAR SYSTEMS - MASSOUMNIA
- CONTROLLED AND CONDITIONED INVARIANTS IN LINEAR SYSTEM THEORY – BASILE & MARRO
- LINEAR MULTIVARIABLE CONTROL: A GEOMETRIC APPROACH - WONHAM

PRELIMINARES

MAPEOS Y SUBESPACIOS

❖ Sea $C: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un mapeo lineal

○ Normalmente se denota la imagen de un mapeo arbitrario C por $\mathcal{C}$.

- *La imagen* de C es el subespacio

$$Im(C) := \{\, y : y \in \mathcal{Y} \;\&\; \exists x \in \mathcal{X}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

- *El Kernel* de C es el subespacio

$$ker(C) := \{\, x : x \in \mathcal{X}, Cx = 0\} \subseteq \mathcal{X}$$

- Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$, $C\mathcal{R}$ denota *la imagen de* $\mathcal{R}$ *bajo* C. Se define como

$$C\mathcal{R} := \{\, y : y \in \mathcal{Y} \;\&\; \exists x \in \mathcal{R}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

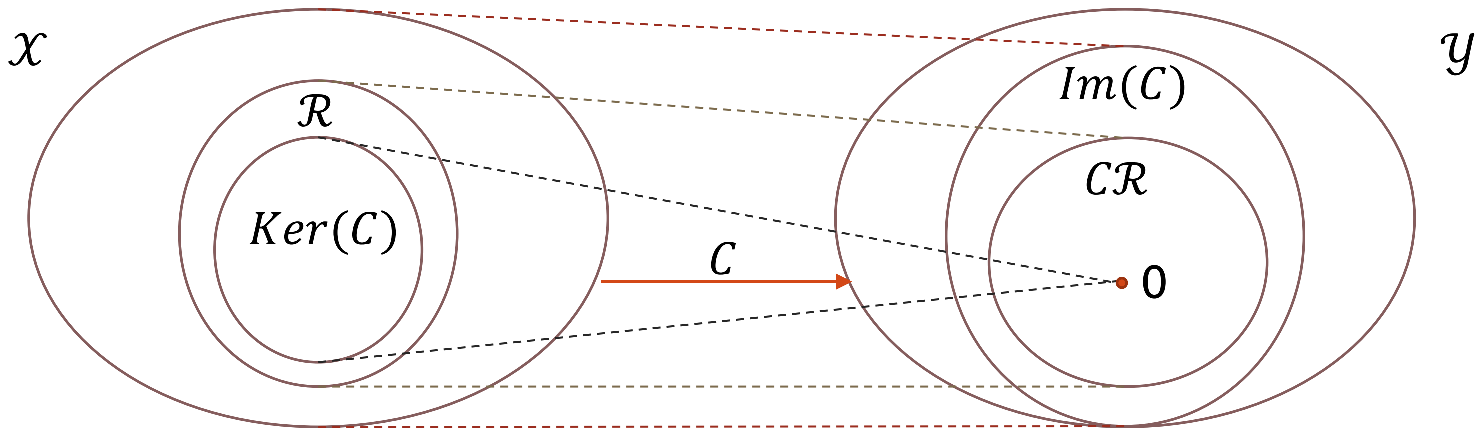
- Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Y}, C^{-1}\mathcal{S}$ denota *la imagen inversa de* $\mathcal{S}$ bajo C. Se define como

$$C^{-1}\mathcal{S} := \{\, x : x \in \mathcal{X} \;\&\; Cx \in \mathcal{S}\,\} \subseteq \mathcal{X}$$

MAPEOS Y SUBESPACIOS

- Decimos que el mapeo C es <u>*sobreyectivo*</u> (*épico*) si $Im(C) = \mathcal{Y}$.
  - Entonces C tiene rango pleno por filas.
  - Existe la inversa derecha de C^{-r} tal que $CC^{-r} = I$.

- Decimos que el mapeo C es <u>*inyectivo*</u> (*mónico*) si $\mathrm{Ker}(C) = 0$.
  - Entonces C tiene rango pleno por columnas.
  - Existe la inversa izquierda C^{-l} tal que $C^{-l}C = I$.



APLICACIÓN EN ECUACIONES MATRICIALES LINEALES

Considere las siguientes ecuaciones matriciales lineales, donde se desea encontrar solución para X

BX = C

- $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, X: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m, C: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$.
- Para que exista solución, cada columna de C debe de ser una combinación lineal de las columnas de B.
- Es decir, existe solución ssi $Im(C) \subseteq Im(B)$.
- Por lo tanto, existe solución si B es <u>épica</u>, ya que se tendría que $Im(C) \subseteq \mathbb{R}^n = Im(B)$.

XB = C

- $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l, C: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$.
- Existe solución para X ssi $Ker(B) \subseteq Ker(C)$. ¿Cómo se llega a esta conclusión? (Utilizar conceptos de espacio dual y aniquiladores)
- Por lo tanto, existe solución si B es <u>mónica</u>, ya que se tendría que $0 = Ker(B) \subseteq Ker(C)$.

En estos casos, sabemos que al menos existe una solución!

MAPEOS Y SUBESPACIOS

Mapeo de inserción:

- Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}, d(\mathcal{V}) = k$. Como $\mathcal{V}$ puede ser considerado en sí mismo un espacio vectorial de dimensión k, un vector $v \in \mathcal{V}$ puede ser representado como un elemento de $\mathcal{V}$ o de $\mathcal{X}$.
- Sea $\{\, v_1, \dots, v_k \,\}$ una base de $\mathcal{V}$ y $\{\, x_1, \dots, x_n \,\}$ una base de $\mathcal{X}$.

Entonces cada v_j puede ser representado como

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} x_i \,, \qquad j \in \{1, \dots, k\}$$

- La matriz $[v_{ij}]$ de $n \times k$ determina un mapeo único $V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$. Llamamos *mapeo de inserción de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{X}$* a este mapeo. Claramente V es mónica.

Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ con mapeo de inserción

$$V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$$

y sea $\mathrm{Im(C)} \subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{Y}$ con mapeo de inserción

$$W: \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{W} \arrow[d, "W"] \\
\mathcal{X} \arrow[ur, "(\mathcal{W}:C) := W^{-1}C"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{Y} \\
\mathcal{V} \arrow[u, "V"] \arrow[ur, "(C:\mathcal{V}) := CV"'] &
\end{tikzcd}$$

EJEMPLO

1. Sea $\mathcal{V} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$, calcule el mapeo de inserción $V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ considerando la base canónica.
   - $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}_{v_1} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}_{v_2} = 0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
   - $V = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$
   - $v = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V} \to x = Vv = \begin{bmatrix}1\\8\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{X}}$

Puede verse que el mapeo de inserción es una herramienta útil para la representación numérica de un subespacio.

2. Sea $\mathcal{V} = span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathcal{X}$, y sea $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ el mapeo representado por $\mathrm{C} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}$. Calcule el mapeo de inserción $V: \mathcal{V} \to \mathcal{X}$, el mapeo de restricción de C respecto a $\mathcal{V}$ $(C: \mathcal{V})$ y compruebe que la imagen bajo C es la misma para el vector $x = \begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{V}$ (Considere la base canónica).

Realizar de tarea.

ESPACIO DUAL Y ANIQUILADORES

Espacio Dual:

- Sea $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial. Se denota el conjunto de todos los funcionales lineales $x': \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ por $\mathcal{X}'$.
- El conjunto de los funcionales lineales es un espacio vectorial bajo los reales con las definiciones

$$(x_1' + x_2')x \coloneqq x_1'x + x_2'x; \qquad x_i \in \mathcal{X}', x \in \mathcal{X}$$

$$(cx_1')x \coloneqq c(x_1'x); \qquad x_1 \in \mathcal{X}', c \in \mathbb{R}$$

- El espacio vectorial ***$\mathcal{X}'$ es llamado el espacio dual de $\mathcal{X}$***.
- Si $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, el mapeo dual $C': \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$ puede representarse como $C' = C^T$.

❖ Si $\{ x_1, \dots, x_n \}$ es una base de $\mathcal{X}$, la base dual correspondiente de $\mathcal{X}'$ es el conjunto único $\{ x_1', \dots, x_n' \} \subseteq \mathcal{X}'$ tal que $x_i'x_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Ejemplo:
$span(\mathcal{X}) = \{ [3\ 0\ -1]^T, [0\ 2\ 1]^T, [1\ -1\ 0]^T \}$,
Entonces
$span(\mathcal{X}') = \{x_1', x_2', x_3'\}$, donde
$x_1' = [0.2\ \ 0.2\ \ -0.4]$,
$x_2' = [0.2\ \ 0.2\ \ 0.6]$,
$x_3' = [0.4\ \ -0.6\ \ 1.2]$.

ESPACIO DUAL Y ANIQUILADORES

Aniquilador de un subespacio:

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. El *aniquilador* de $\mathcal{S}$ se denota $\mathcal{S}^\perp$ y se define como

$$\mathcal{S}^\perp := \{ x' : x'\mathcal{S} = 0,\ x' \in \mathcal{X}' \} \subseteq \mathcal{X}'$$

Sea $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, sean además $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Y}$. Algunas relaciones de aniquiladores son:

- $0^\perp = \mathcal{X}'$
- $\mathcal{X}^\perp = 0$
- $(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2)^\perp = \mathcal{S}_1^\perp \cap \mathcal{S}_2^\perp$
- $(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)^\perp = \mathcal{S}_1^\perp + \mathcal{S}_2^\perp$
- $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \mathcal{S}_2^\perp \subseteq \mathcal{S}_1^\perp$
- $(\mathcal{S}_1^\perp)^\perp = \mathcal{S}_1$
- $\left(Im(C)\right)^\perp = Ker(C')$
- $\left(Ker(C)\right)^\perp = Im(C')$
- $C\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \Leftrightarrow C'\mathcal{R}^\perp \subseteq \mathcal{S}^\perp$

Sean $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathcal{S}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$. Sean además $R: \mathcal{R} \to \mathcal{X}$ y $S: \mathcal{S} \to \mathcal{X}$ mapeos de inserción y $R^\perp (S^\perp)$ soluciones de máximo rango de $R^\perp R = 0$ $(S^\perp S = 0)$. Entonces

- $\mathcal{R} + \mathcal{S} = Im[R\ \ S]$
- $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = Ker \begin{bmatrix} R^\perp \\ S^\perp \end{bmatrix}$
- $A^{-1}\mathcal{R} = Ker[R^\perp A]$

SISTEMA COCIENTE

Espacio cociente:

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Los vectores $x, y \in \mathcal{X}$ son equivalentes módulo $\mathcal{S}$ si $x - y \in \mathcal{S}$.
- La equivalencia módulo $\mathcal{S}$ es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva), y cada vector $x \in \mathcal{X}$ tiene asociado consigo una clase de equivalencia w definida como

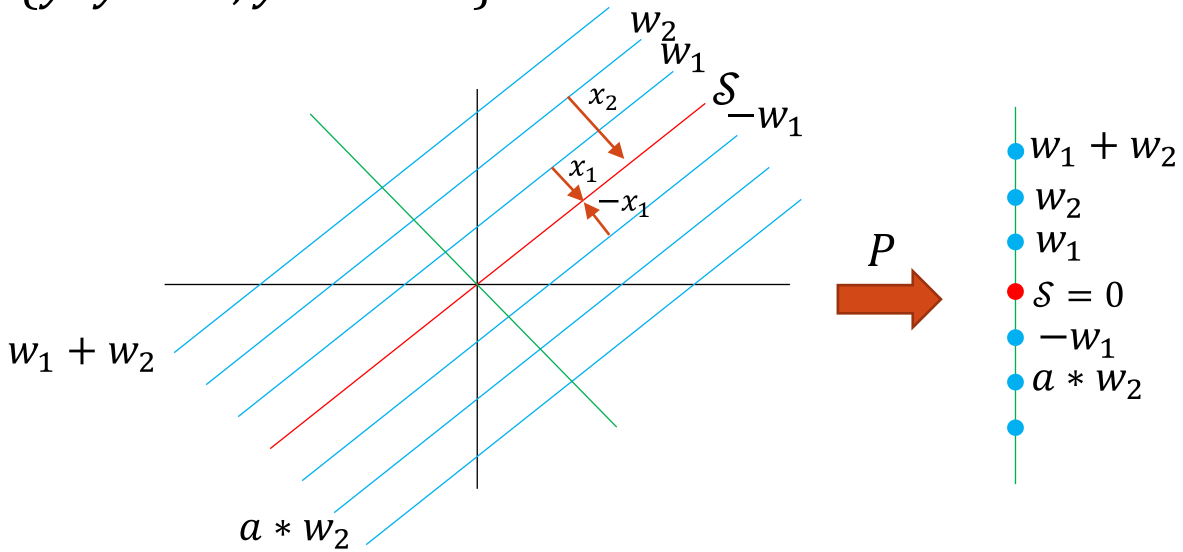
$$w \coloneqq \{y : y \in \mathcal{X}, y - x \in \mathcal{S}\}$$

❖ Se cumple que

$d(\mathcal{X}/\mathcal{S}) = d(\mathcal{X}) - d(\mathcal{S})$

El mapeo $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\mathcal{S}$ tal que $w = Px$ es llamado la *proyección canónica* de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}/\mathcal{S}$.

- P es épica, y $Ker(P) = \mathcal{S}$



- El conjunto de todas las clases de equivalencia forman un espacio vectorial lineal, llamado el ***espacio cociente*** $\mathcal{X}/\mathcal{S}$.

SISTEMA COCIENTE

- Considere el sistema lineal, donde $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n, \mathcal{U} \in \mathbb{R}^m, \mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

- Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$ un subespacio A-invariante $(A\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S})$ con $d(\mathcal{S}) = k$, y sea $P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{S}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S} \arrow[rr, "A:\mathcal{S}"] \arrow[d, "S"] & & \mathcal{S} \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, "CS"] & \\
\mathcal{U} \arrow[ur, "S^{-l}B"] \arrow[r, "B"] \arrow[dr, "PB"'] & \mathcal{X} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, "P"] & & \mathcal{X} \arrow[r, "C"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{Y} \\
 & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[rr, "A:\mathcal{X}/\mathcal{S}"] & & \mathcal{X}/\mathcal{S} \arrow[ur, "CP^{-r}"'] &
\end{tikzcd}$$

- Si $\{s_1, \dots, s_k\}$ es una base de $\mathcal{S}$ y $\{r_1, \dots, r_j\}$ es una base de $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R} = \mathcal{X}$, entonces en la base $\{s_1, \dots, s_k, r_1, \dots, r_j\}$ para $\mathcal{X}$ la matriz A tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

en donde $A_1 = A: \mathcal{S}$ y $A_2 = A: \mathcal{X}/\mathcal{S}$.

- ❑ $\sigma(A) = \sigma(A:\mathcal{S}) \uplus \sigma(A:\mathcal{X}/\mathcal{S})$.

❖ La tripleta (C_0, A_0, B_0) conforma el <u>sistema cociente respecto a $\mathcal{S}$,</u> donde

$$C_0 = CP^{-r}, A_0 = PAP^{-r}, B_0 = PB$$

- Si $\mathcal{S} = \langle Ker(C)|A \rangle$, entonces el par (C_0, A_0) es observable!
- Si (C, A) es observable, entonces el par $(CS, A:\mathcal{S})$ es observable!

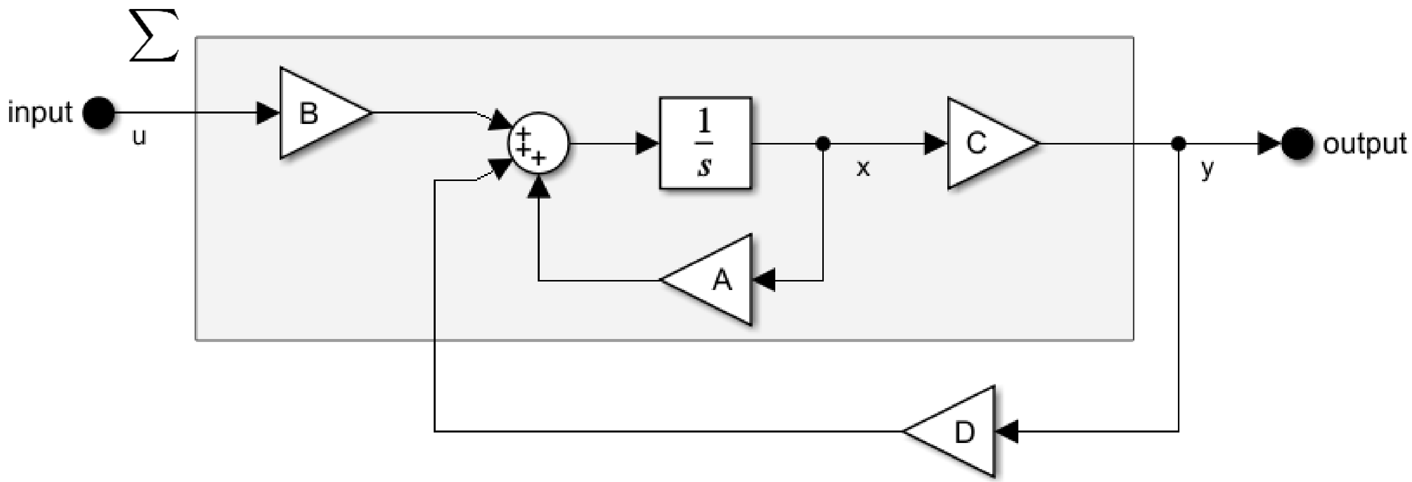
SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

<u>Definición:</u>

- Sea $A\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y $C\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Un subespacio $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$ es (C, A)-*invariante* si existe un mapeo de <u>inyección de salida</u> $D\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que

$$(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$$



Generalmente esto no es implementable!

- Sin embargo, conociendo el modelo del sistema, los subespacios (C, A)-invariantes son muy útiles a la hora de modificar las dinámicas de un observador del sistema.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Caracterización del mapeo $D: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$

- El conjunto de mapeos D tal que $(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ se denota por $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$.

- Sea $\mathcal{W}$ un subespacio (C, A)-inv donde $W: \mathcal{W} \to \mathcal{X}$ es su mapeo de inserción y sea P la solución de máximo rango de $PW = 0$. Entonces $D \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$ si y sólo si

$$P(A + DC)W = 0$$

- Se tiene que $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$

Notar que todo subespacio A-invariante es también (C, A)-invariante!

Esto se puede comprobar simplemente eligiendo $D = 0$.

- Sea $\mathcal{W}$ tal que $A\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.
- $(A + 0C)\mathcal{W} = A\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Lema:

- Un subespacio $\mathcal{W}$ es (C, A)-invariante si y sólo si

$$A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$$

(si) *Suponemos que* $A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$:
Sea $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_r\}$ una base de $\mathcal{W}$ tal que $span(w_1, \dots, w_k) = \mathcal{W} \cap Ker(C)$.
Entonces $Aw_i = s_i \quad (i \in \boldsymbol{k})$ para algún $s_i \in \mathcal{W}$.
Además $(A + DC)w_i = s_i \quad (i \in \boldsymbol{k})$ para cualquier D ya que $w_i \in Ker(C)$.
Sea $Aw_j = x_j \ \ (k + 1 \leq j \leq r)$ para algún $x_j \in \mathcal{X}$, y sea D solución de

$$DC[w_{k+1} \ \ \dots \ \ w_r] = -[x_{k+1} \ \ \dots \ \ x_r]$$

Entonces $(A + DC)w_i = s_i \ \ (i \in \boldsymbol{r})$ donde $s_i \in \mathcal{W}$.

$(sólo\ si)$ *Suponemos que* $\mathcal{W}$ *es* (C, A)*-inv*:
Sea $\mathcal{W}$ (C, A)-inv, y sea $\{w_i, i \in \boldsymbol{k}\}$ una base para $\mathcal{W} \cap Ker(C)$.
Por hipótesis, $(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$, por lo que $(A + DC)w_i \in \mathcal{W}$. Pero $Cw_i = 0$, por lo que $Aw_i \in \mathcal{W}$. Se tiene entonces que $A\big(\mathcal{W} \cap Ker(C)\big) \subseteq \mathcal{W}$.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

<u>Otras propiedades de los subespacios (C, A)-invariantes:</u>

- Del lema anterior, se tiene que cualquier D_0 tal que $D_0 C w_j = -x_j + y_j \;\; (k+1 \leq j \leq p)$, para cualquier $y_j \in \mathcal{W}$, es también miembro de $\underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$.
  - Por lo tanto, si $D \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$, se tiene que también $D_0 \in \underline{\mathrm{D}}(\mathcal{W})$ si

$$(D - D_0)C\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$$

D y D_0 son "amigas" de $\mathcal{W}$.

- $\mathcal{W}$ es (C, A)-inv si y sólo si $\mathcal{W}$ es $(C, A + D_0 C)$-inv para cualquier mapeo arbitrario D_0.

- $\mathcal{W}$ es (C, A)-invariante si y sólo si $\mathcal{W}^{\perp}$ es (A', C')-invariante.

Demostración de tarea (Utilizar conceptos de (A,B)-inv y de aniquiladores)

- La intersección de dos subespacios (C, A)-invariantes es (C, A)-invariante.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Ínfimo subespacio (C, A)-invariante que contiene a $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$:

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$. El conjunto de subespacios (C, A)-inv que contienen a $\mathcal{E}$ se denota por

$$\underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$$

  - El conjunto de todos los subespacios (C, A)-inv en $\mathcal{X}$ se escribe como $\underline{\mathcal{W}}(0)$.
  - Al ser cerrado bajo la intersección de subespacios, $\underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$ contiene un elemento ínfimo, denotado como

$$\mathcal{W}^*(\mathcal{E}) := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$$

Algoritmo CAISA ((C, A)-invariant subspace algorithm)

- Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ y $\mathcal{W}^* := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{E})$. Entonces $\mathcal{W}^*$ coincide con el último término de la secuencia siguiente:

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{E},$$
$$\mathcal{W}_i = \mathcal{E} + A\big(\mathcal{W}_{i-1} \cap Ker(C)\big), \quad (i = 1, \dots, k)$$

(Solución matricial de tarea)

donde el valor de $k \leq n - 1$ es determinado por la condición $\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k$.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

<u>Observador de una transformación del estado utilizando subespacios (C, A)-inv:</u>

- Considere el observador de Luenberger

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + D_0(\hat{y}(t) - y(t)),$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t).$$

- De acuerdo al sistema lineal

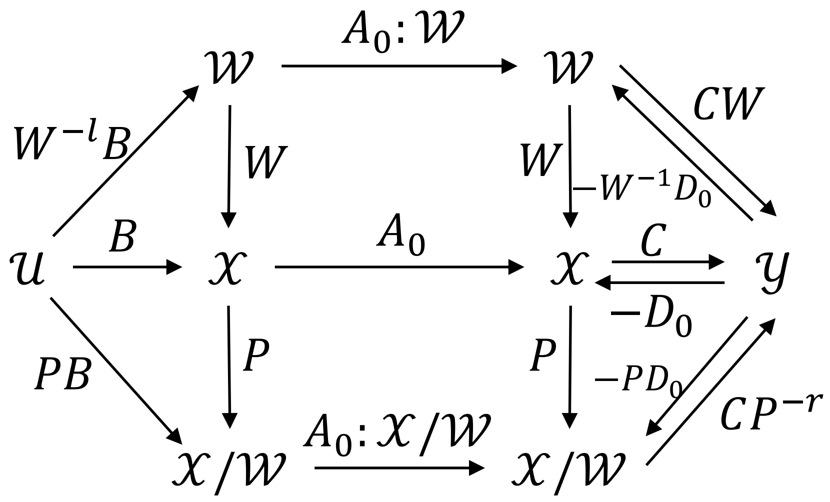
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ld(t),$$
$$y(t) = Cx(t).$$

y sea $\mathcal{W} := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{L}), P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{W}, D_0 \in \underline{D}(\mathcal{W})$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + D_0\hat{y} - D_0 y, \\ &= A\hat{x} + Bu + D_0C\hat{x} - D_0 y, \\ &= (A + D_0C)\hat{x} + Bu - D_0 y, \\ &= A_0\hat{x} + Bu - D_0 y, \end{aligned}$$

En las dinámicas del observador, $\mathcal{W}$ es $(A + D_0C)$-invariante!



En el sistema cociente, con $z = Px$, tenemos:

$$\begin{aligned} P^{-r}\dot{\hat{z}} &= A_0P^{-r}\hat{z} + Bu - D_0 y, \\ \dot{\hat{z}} &= PA_0P^{-r}\hat{z} + PBu - PD_0 y, \\ \hat{g} &= CP^{-r}\hat{z}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\dot{\hat{z}} = F\hat{z} + Gu - Ey,}$$
$$\boldsymbol{\hat{g} = M\hat{z}.}$$

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Continuación:

- Podemos ver que, las dinámicas del error $e(t) = \hat{z}(t) - Px(t) = \hat{z}(t) - z(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{\hat{z}} - P\dot{x},\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} + PBu - PD_0y - PAx - PBu - PLd.\end{aligned}$$

$PL = 0$, ya que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{W}$, con lo que

$$\begin{aligned}\dot{e} &= PA_0P^{-r}\hat{z} - PD_0y - PAx,\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} - PD_0Cx - PAx,\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} - P(A + D_0C)x,\\ &= PA_0P^{-r}\hat{z} - P(A + D_0C)P^{-r}z,\\ &= PA_0P^{-r}(\hat{z} - z),\\ &= PA_0P^{-r}e,\\ &= Fe.\end{aligned}$$

- Podemos notar que se hizo un observador que no es afectado por la perturbación $d(t)$.

- Sin embargo, para que el error tienda a cero cuando el error de observación inicial es diferente de cero, las dinámicas de $(A + D_0 : \mathcal{X}/\mathcal{W})$ deben de ser estables.

  - Esto normalmente no es posible con utilizar simplemente subespacios (C, A)-invariantes.

SUBESPACIOS (C,A)-INVARIANTES

Tarea:

- Calcular $\mathcal{W} := \inf \underline{\mathcal{W}}(\mathcal{L}), P: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/\mathcal{W},\ D_0 \in \underline{D}(\mathcal{W})$ para el sistema lineal con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Diseñar un observador del sistema bajo la entrada desconocida $Ld(t)$ de la forma

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{y},$$

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

- Simular el sistema con su observador, estableciendo el error de observación inicial igual a cero, y después diferente de cero. Comparar. (Considere $d(t)$ como una señal cuadrada, simulando una perturbación intermitente de valor constante).

¿El sistema cociente (F, G, M) es observable? ¿Qué implica esto?