Formulario Probabilidad y Procesos Estocásticos Tercer Parcial

Roberto Navarro Castañeda

Diciembre 2023

1. Secuencias de Variables aleatorias

- Dadas n V.A $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_2$ se define la distribución conjutna:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(\mathbf{X}_1 \leq x_1, \ldots, \mathbf{x}_n \leq x_n) \tag{1}$$

$$P((\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in D) = \int_D \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\ dx_1 \ldots dx_n \tag{2}$$

- Y la densidad cojunta:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial dx_n} \tag{3}$$

- La integral respecto a todo el espacio es igual a 1:

$$F(\infty, \ldots, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_{x_n})\quad dx_1 \ldots dx_n \tag{4}$$

$$F(\infty, \ldots, \infty) = 1 \tag{5}$$

- **Funciones de distribución marginales y densidades marginales**:
- Sea una función de distribución conjunta $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la marginal $F(x_1, x_3)$ se define

$$F(x_1, x_3) = F(x_1, \infty, x_3, \infty) \tag{6}$$

- Y la densidad marginal:

$$f(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3, x_4)\ dx_2 dx_4 \tag{7}$$

- **Densidad condicional**:
- Se denota la densidad condicional de $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k}$ asumiendo que se cumplen $\mathbf{x_{k+1}}, \ldots, \mathbf{x_n}$

$$f(x_1, \ldots, x_n | x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)}{f(x_{k+1}, \ldots, x_n)} \tag{8}$$

- Por ejemplo:

$$f(x_1 | x_2 x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_2, x_3)} \tag{9}$$

$$F(x_1 | x_2 x_3) = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} f(\xi_1, x_2, x_3)\ d\xi_1}{f(x_2, x_3)} \tag{10}$$

Porbabilidad Total:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_n | x_{n-1}, \ldots, x_1) \cdots f(x_2 | x_1) f(x_1) \tag{11}$$

Variables aleatorias independientes

- Se dice que si n variables aleatorias $x_1, \ldots, x_n$ son **independientes** entonces la distribución y densidad conjunta:

$$F(x_1,\ldots,x_n) = F(x_1)\cdots F(x_n) \tag{12}$$

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1)\cdots f(x_n) \tag{13}$$

- Si las variables aleatorias $x_1,\ldots,x_n$ son **independientes** entonces **las funciones de ellas** también serán **independientes**:

$$g_1(\mathbf{x_1}),\ldots,g_n(\mathbf{x_n}) \tag{14}$$

Independencia de grupos

- Existen grupos de variables aleatorias que son independientes. Se dice que las V.A $\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_k}$ son independientes de $\mathbf{x_{k+1}},\ldots,\mathbf{x_n}$ si:

$$f(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) =$$

$$f(x_1,\ldots,x_k)f(x_{k+1},\ldots,x_n) \tag{15}$$

- Una función del primer grupo es independiente de otra del segundo grupo:

$$g(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_k}) \text{ es independiente de}$$

$$h(\mathbf{x_{k+1}},\ldots,\mathbf{x_n}) \tag{16}$$

Esperanza

- La de una función $g(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})$ de n V.A está dada por:

$$E(g(\mathbf{x_1},\ldots,\mathbf{x_n})) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_n)f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \tag{17}$$

- La esperanza de la suma de V.A es una suma de esperanzas: $E(g_1+\cdots+g_k) = E(g_1)+\cdots+E(g_k)$.

- La esperanza condicional se obtiene inseranto (17) en la densidad condicional:

$$E(\mathbf{x_1}|x_2,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1|x_2,\ldots,x_n)\,dx_1 \tag{18}$$

$$E(\mathbf{x_1}|x_2,\ldots,x_n) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1}{f(x_2,\ldots,x_n)} \tag{19}$$

- **Teorema:**

$$E(E(\mathbf{x_1}|x_2,\ldots,x_n)) = E(\mathbf{x_1}) \tag{20}$$

- Si $\mathbf{x_1}$ es independiente de $\mathbf{x_2},\ldots,\mathbf{x_n}$

$$E(\mathbf{x_1}|x_2,\ldots,x_n) = E(\mathbf{x_1}) \tag{21}$$

V.A descorrelacionadas

- Se definen las V.A $\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_n}$ descorrelacionadas si

$$E(\mathbf{X_i}\mathbf{X_j}) = E(\mathbf{X_i})E(\mathbf{X_j}) \;\; \forall i \neq j \tag{22}$$

$$C_{\mathbf{X_i}\mathbf{X_j}} = 0 \;\; \forall i \neq j \tag{23}$$

- **Teorema:** Si $\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_n}$ son independientes entonces son descorrelacionadas:

$$E(\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_n}) = E(\mathbf{X_1})\cdots E(\mathbf{X_n}) \tag{24}$$

- Además:

$$E(g_1(\mathbf{X_1})\ldots g(\mathbf{X_n})) = E(g(\mathbf{X_1}))E(g(\mathbf{X_2}))\ldots E(g(\mathbf{X_n})) \tag{25}$$

- Si $(\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_k})$ es independiente de $(\mathbf{X_{k+1}},\ldots,\mathbf{X_n})$, entonces:

$$E(g((\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_k}))h(\mathbf{X_{k+1}},\ldots,\mathbf{X_n})) =$$

$$E(g((\mathbf{X_1},\ldots,\mathbf{X_k}))E(h(\mathbf{X_{k+1}},\ldots,\mathbf{X_n})) \tag{26}$$

V.A ortogonales y descorrelacionadas

- Las V.A $\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n}$ son **ortogonales** si:

$$E(\mathbf{X_i X_j}) = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j \tag{27}$$

- Si las V.A $\mathbf{X_i}$ son descorrelacionadas

$$\sigma^2_{\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}+\cdots+\mathbf{X_n}} = \sigma^2_{\mathbf{X_1}} + \sigma^2_{\mathbf{X_2}} + \cdots + \sigma^2_{\mathbf{X_n}} \tag{28}$$

- Si las V.A $\mathbf{X_i}$ son ortogonales:

$$E((\mathbf{X_1}+\cdots+\mathbf{X_n})^2) = E((\mathbf{X_1})^2)+\cdots+E((\mathbf{X_n})^2) \tag{29}$$

Momentos y Función característica

- Sean las V.A $\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n}$ sus *momentos* de orden $r = k_1 + \cdots + k_n$ son:

$$m_{k_1,\ldots,k_n} = E({\mathbf{X_1}}^{k_1}, \ldots, {\mathbf{X_n}}^{k_m}) \tag{30}$$

- Sean las V.A $\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n}$ su *función característica* es:

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = E(e^{j(\omega_1 \mathbf{X_1} + \omega_2 \mathbf{X_2} + \cdots + \omega_n \mathbf{X_n})}) \tag{31}$$

- Si son independientes:

$$E\left\{e^{j\omega_1 \mathbf{X_1}} \cdots e^{j\omega_n \mathbf{X_n}}\right\} = E\left\{e^{j\omega_1 \mathbf{X_1}}\right\} \cdot E\left\{e^{j\omega_2 \mathbf{X_2}}\right\} \cdots E\left\{e^{j\omega_n \mathbf{X_n}}\right\} \tag{32}$$

- Y se llega a que:

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \Phi(\omega_1) \cdots \Phi(\omega_n) \tag{33}$$

- Los momentos conjuntos:

$$\frac{\partial^\gamma \Phi(0, \ldots, 0)}{\partial \omega_1^{k_1} \ldots \omega_n^{k_n}} = j^r m_{k_1 \ldots, k_n} \tag{34}$$

- **Ejemplo:** La función característica de una suma de variables aleatorias independientes es igual al producto de las funciones características marginales de cada V.A

- **Convolución:** Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$

$$f_{\mathbf{Z}}(z) = f_1(z) * \cdots * f_n(z) \tag{35}$$

Media y Varianza en Estadística

- Sean las V.A $\mathbf{X_i}, \quad i = 1, \ldots, n$

- La **Media estadística** $\bar{X}$ es:

$$\bar{X} = \frac{\mathbf{X_1} + \cdots + \mathbf{X_n}}{n} \tag{36}$$

- Y la **Varianza estadística** es:

$$\bar{V} = \frac{(\mathbf{X_1} - \bar{X})^2 + \cdots + (\mathbf{X_n} - \bar{X})^2}{n} \tag{37}$$

- **Teorema:** Suponga que las V.A $\mathbf{X}_i$ son **descorrelacionadas** y que cada una de ellas tienen la misma **media y varianza**:

$$E(\mathbf{X_i X_j}) = E(\mathbf{X_i})E(\mathbf{X_j}) \tag{38}$$

$$E(\mathbf{X_i}) = \eta; \quad \sigma^2_{\mathbf{X_i}} = \sigma^2 \tag{39}$$

- Entonces:

$$E(\bar{X}) = \eta \qquad \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \tag{40}$$

$$E(\bar{V}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{41}$$

Conceptos de Convergencia de V.A

- **Def.1**: La secuencia de V.A { $\mathbf{X_n}$ } converge **por todos lados (** ***every where*** **)** si:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{X_n} = \mathbf{X} \tag{42}$$

- Esta definición pide que absolutamente todas las secuencias de { $\mathbf{X_n}(\xi)$ } converjan.

- **Def.2**: La secuencia de V.A { $\mathbf{X_n}$ } converge con **Probabilidad 1** (*almos everywhere, almost sure*) si:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\mathbf{X_n} \to \mathbf{X}\} = 1 \tag{43}$$

- La definición anterior indica que para el conjunto de resultados ξ donde:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n}(\xi) = \mathbf{x}(\xi) \tag{44}$$

- Tiene probabilidad 1 y que aquellos para los cuales con converge tiene probabilidad 0.

- **Def.3**: La secuencia de V.A $\{\ \mathbf{X_n}\ \}$ converge en **media cuadrática** (m.s) si:

$$\lim_{n\to\infty} E\{|x_n - x|^2\} = 0 \tag{45}$$

- **Def.4**: La secuencia de V.A $\{\ \mathbf{X_n}\ \}$ converge en **Probabilidad** (**P**):

$$\lim_{n\to\infty} P\{|x_n - x|>\epsilon\} = 0 \quad \forall\epsilon \tag{46}$$

- **Def. 5**: La secuencia de la V.A $\{\ \mathbf{X_n}\ \}$ converge en **distribución (d)** si dadas: $F_n(x)$ la distribución de X_n y $F(x)$ la distribución de **X**, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \tag{47}$$

- para todo x en el cual $F_n(x)$ es continua.

- **Teorema:** si la consecuencia de V.A $\{\ \mathbf{X_n}\ \}$ converge en **converge en media cuadrática** entonces **converge en probabilidad**.

- **Criterio de Cauchy:** Si el límite **X** no es conocido, podemos hablar aún de convergencia si:

$$E\left\{|\mathbf{X}_{n+m} - \mathbf{X}_n|^2\right\} < \epsilon \quad n > n_0 \quad \text{y} \quad m > 0 \tag{48}$$

Ley de los grandes números

- **Bernoulli**: según Bernoulli: Si la probabilidad de un evento A en un experimento dado es p y el experimento es repetido n veces entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{k}{n} - p| \le \epsilon\} = 1 \quad \forall\ \epsilon > 0 \tag{49}$$

- Donde k es el número de veces que A ocurre

- **Tchebycheff**: Según Tchebycheff si las V.A X_n son descorrelacionadas con:

$$E\{X_i\} = \eta_i; \quad \sigma^2_{X_i} = \sigma^2_i \tag{50}$$

- Y además satisface que:

$$\sigma^2_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma^2_i + \cdots + \sigma^2_n}{n} \to 0 \tag{51}$$

- Entonces si:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \tag{52}$$

- Se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\left(\bar{X} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right)^2\right\} = 0 \tag{53}$$

- $\bar{X}$ es un buen estimado del promedio de lals esperanzas matemáticas de las X_i cuando el número de experimentos es basnte grande.

- Entonces:

$$E\left\{\left(\bar{X} - \eta\right)^2\right\} = 0 \tag{54}$$

- Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\bar{X} - \eta|>\epsilon\right\} \to 0 \quad \forall\epsilon \tag{55}$$

- **Markoff**:

$$\sigma_{\bar{\mathbf{x}}_n} \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty \tag{56}$$

$$\sigma_{\bar{\mathbf{x}}_n} = E\left\{\left[\bar{\mathbf{x}_n} - \frac{\eta_1 + \cdots + \eta_n}{n}\right]^2\right\} \to 0 \tag{57}$$

Teorema del límite central

- La densidad $f_x(x)$ de una suma de V.A independientes X_i (con igual o diferente distribución), bajo ciertas condiciones se aproxima a una densidad normal cuando $n \to \infty$.

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \tag{58}$$

2. Procesos Estocásticos

- Sea un proceso estocástico $X(t)$ se define:
- **Función de distribución de primer orden**:
$$F(x;t) = P\{\mathbf{X}(t) \leq x\} \tag{59}$$
- **Función de densidad de primer orden**
$$f(x;t) = \frac{\partial F(x;t)}{\partial x} \tag{60}$$
- También:
$$F(x;t) = \int_{-\infty}^{x} f(x;t)\ dx \tag{61}$$
- **La función de distribución conjunta de segundo orden** se define:
$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \mathbf{X}(t_2) \leq x_2\} \tag{62}$$
- **La densidad conjunta de segundo orden** se define:
$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{63}$$
- También:
$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1 dx_2 \tag{64}$$
- Y la función de distribución marginal y la densidad marginal:
$$F(x_1,\infty;t_1,t_2) = P\{\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \mathbf{X}(t_2) \leq \infty\} =$$
$$P\{\mathbf{X}(t_1) \leq x_1\} = F(x_1;t_1) \tag{65}$$
$$f(x_1;t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\ dx_2 \tag{66}$$
- La función de **Distribución de n-ésimo orden** se define:
$$F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) =$$
$$P\{\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \ldots, \mathbf{X}(t_n) \leq x_n\} \tag{67}$$
$$F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) =$$
$$\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)\, dx_1,\ldots,dx_n \tag{68}$$
- **La densidad condicional**
$$f(x_1;t_1|X_2(t_2)=x_2) = \frac{f(x_1,x_2;t_1,t_2)}{f(x_2;t_2)} \tag{69}$$
- **La media** $\eta(t)$ de un proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ se define (t fijo)
$$\eta(t) = E\{\mathbf{X}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x;t)\ dx \tag{70}$$
- La **Autocorrelación** *(O solo Correlación)* $R_x(t_1,t_2)$ de un proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$ real escalar (t_1 y t_2 fijos) se definen como:
$$R_x(t_1,t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)\} \tag{71}$$
$$R_x(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1 dx_2 \tag{72}$$
- La **autocovarianza** $C(t_1,t_2)$ de la V.A $\mathbf{X}(t_1)$ y $\mathbf{X}(t_2)$:
$$C(t_1,t_2) = E\{[\mathbf{x}(t_1) - \eta(t_1)][\mathbf{x}(t_2) - \eta(t_2)]\} \tag{73}$$
$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2) \tag{74}$$
- La varianza de la V.A $\mathbf{X}(t)$ está dada por:
$$\sigma^2_{\mathbf{X}(t)} = C(t,t) = R(t,t) - \eta^2(t) \tag{75}$$

Proceso de Poisson

- La probabilidad de tener k punto en un intervalo de longitud t es igual a:
$$\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \tag{76}$$

- Y los puntos que no se traslapan/superponen en un intervalo, se dicen *independientes*.

- La variable aleatoria $\mathbf{x}(t)$ se define asumiendo: $\mathbf{x}(0) = 0$ y que el *número de puntos en el intervalo* (t_1, t_2) es igual a $\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)$

Caminata Aleatoria

- Como ejemplo se supone que se lanza una moneda *bien equilibrada* cada T segundos y que se efectúa un *número infinito* de lanzamientos. Si al lanzar la moneda se obtiene sol, se dará un paso a la derecha de longitud s, sino se dará un paso en dirección opuesta. La posición al instante t será $\mathbf{x}(t)$. A cada instante se obtiene una V.A $\mathbf{x}_i$, donde $i \in 1, 2, \ldots, n$ que toma los valores $\pm s$ tal que:

$$P(\mathbf{x}_i = s) = p = \frac{1}{2} \qquad P(\mathbf{x}_i = -s) = q = \frac{1}{2} \tag{77}$$

$$E\left\{\mathbf{x}_i = 0\right\} \qquad E\left\{\mathbf{x}_i^2\right\} = s^2 \tag{78}$$

- La posición al instante nT estára representada por:

$$\mathbf{X}(nT) = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n \tag{79}$$

- La media del procesoe estocástico $\mathbf{x}(nT)$ está dad por:

$$E\left\{\mathbf{X}(nT)\right\} = E\left\{\mathbf{X}_1\right\} + \cdots + E\left\{\mathbf{X}_n\right\} = 0 \tag{80}$$

- Como las V.A son independientes y tienen media cero:

$$\sigma_x^2(nT) = E\left\{\mathbf{x}^2(nT)\right\} =$$

$$E\left\{\mathbf{x}_i^2\right\} + \cdots + E\left\{\mathbf{x}_n^2\right\} = ns^2 \tag{81}$$

- Ahora suponiendo que en los lanzamientos se obtuvieron k soles. Si esto sucede, la posición al timepo nT es:

$$\mathbf{X}(nT) = ks - (n-k)s = (2k-n)s \tag{82}$$

- Definiendo $r = 2k - n$ con lo que $k = \frac{r+n}{2}$

$$\mathbf{X}(nT) = rs \tag{83}$$

- Ahora:

$$P(\mathbf{x}(nT) = rs) = P(k - \text{soles}) =$$

$$\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{n-k} = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n \tag{84}$$

- Por el teorema de Moivre-Laplace, cuando $n \to \infty$, la distribución *binomial* se aproxima por una *normal*, en:

$$P(k\text{−soles}) = \binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n \to \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \tag{85}$$

- Sustituimos k,p y q:

$$(k-np)^2 = -\left[\frac{r+n}{2} - \frac{n}{2}\right]^2 = \left[\frac{r}{2}\right]^2 \tag{86}$$

- Se tiene:

$$\lim_{n\to 0} p\left(\mathbf{X}(nT) = rs\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi n}{4}}} e^{-\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\frac{2n}{4}}} \tag{87}$$

- La densidad $\mathbf{X}(nT)$ en el *límite* es una *densidad normal*.

- Definiendo una nueva variable Y_1:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}(n_1T) - \mathbf{X}(n_2T) \tag{88}$$

- Significando el incremento (o decremento) que hay en la posición en el intervalo de tiempo $n_2T - n_1T$.

- Notar que:

$$p\left(\mathbf{Y}_1 = r's\right) = p\left(\mathbf{X}(n_1T) - \mathbf{X}(n_2T) = r's\right); \qquad n_1 > n_2 \tag{89}$$

- Coincide con la probabilidad de obtener un cierto número de caras en $n_2T - n_1T$

- Si se tiene ahora:

$$p\left(\mathbf{Y}_2 = r''s\right) = \left(\mathbf{X}(n_3T) - \mathbf{X}(n_4T) = r''s\right); \tag{90}$$

$$n_2 > n_3 > n_4 \tag{91}$$

- coincide con la probabilidad de obtener otro cierto número de caras en $n_3T - n_4T$. Por otro lado el número de caras que aparecen en $n_2T - n_1T$ es independiente del que aparece en $n_3T - n_4T$, por ser disjuntos los intervalos de tiempo considerados, con lo que $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$ son independientes, o lo que es lo mismo, los incrementos de posición en dos intervalos disjuntos de tiempo son independientes. Por esta razón, se dice que **la caminata aleatoria es un proceso estocástico con incrementos independientes**. Finalmente calculemos:

$$E\left\{[\mathbf{X}(n_iT) - \mathbf{X}(n_jT)]\right\} =$$

$$E\left\{\mathbf{X}(n_iT)\right\} - E\left\{\mathbf{X}(n_jT)\right\} \tag{92}$$

$$n_iT \neq n_jT \tag{93}$$

- Sean $n_1 > n_2 > n_3 > n_4$

$$E\left\{[\mathbf{X}(n_1T) - \mathbf{X}(n_2T)]\,[\mathbf{X}(n_3T) - \mathbf{X}(n_4T)]\right\} \tag{94}$$

- Recodermos que los incrementos de posición son independientes y entonces descorrelacionados y además la media de ellos es cero, entonces son ortogonales, con lo que:

$$E\left\{[\mathbf{X}(n_1T) - \mathbf{X}(n_2T)]\,[\mathbf{X}(n_3T) - \mathbf{X}(n_4T)]\right\} = 0 \tag{95}$$

Proceso de Wiener-Lévy

- Se toma del proceso de la caminata aleatoria cuando:

$$t = n\mathbf{T} \tag{96}$$

- La media y varianza de $\mathbf{W}(t)$ está dada por:

$$E\left\{\mathbf{X}(t)\right\} = 0 \tag{97}$$

$$E\left\{\mathbf{X}^2(nT)\right\} = E\left\{\mathbf{X}^2(t)\right\} = \frac{ts^2}{T} \tag{98}$$

- Suponiendo que se mantiene a t constante, pero se hace que s y T tiendan a cero ($T \to 0$). La varianza de $\mathbf{x}(t)$ se mantendrá finita si $s^2 = \alpha T$ tal que:

$$\lim_{T\to 0} E\left\{\mathbf{X}^2(t)\right\} = \alpha t \tag{99}$$

- De esto, se define al **Proceso de Wiener** $\mathbf{w}(t)$ como el límite de la posición en la caminata aleatoria:

$$\mathbf{W}(t) = \lim_{T\to 0} \mathbf{W}(t) \tag{100}$$

- La *autocorrelación* de $\mathbf{W}(t)$ es:

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \alpha t_2, & t_1 \geq t_2 \\ \alpha t_1, & t_1 \leq t_2 \end{cases} \tag{101}$$

- **Propiedades del proceso de Wiener-Lévy**

$$\mathbf{w}(t = 0) = 0 \tag{102}$$

$$E\left\{\mathbf{W}(t)\right\} = 0 \tag{103}$$

$$E\left\{\mathbf{W}^2(t)\right\} = \alpha t \tag{104}$$

- Si $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$

$$E\left\{[\mathbf{w}(t_1) - \mathbf{w}(t_2)][\mathbf{w}(t_3) - \mathbf{w}(t_4)]\right\} = 0 \tag{105}$$

- La V.A $\mathbf{w}(t)$ es *normal distribuida*. Si w y t se eligen tal que:

$$w = rs \quad t = nT \tag{106}$$

- Entonces:

$$\frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{w}{s}}{\sqrt{\frac{t}{T}}} = \frac{w}{\sqrt{\alpha t}} \tag{107}$$

- De esto:

$$P\{\mathbf{x}(t) \leq w\} \simeq \frac{1}{2} + \operatorname{erf}\frac{w}{\sqrt{\alpha t}} \tag{108}$$

- Haciendo $T \to 0$, se tiene que $n \to \infty$ y $r = w\sqrt{\frac{n}{\alpha t}}$ tiendan al infinito como $\sqrt{n}$ y la densidad $f(w;t)$ está dada por:

$$f(w;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} e^{-\frac{w^2}{2\alpha t}} \tag{109}$$

Mas conceptos y definiciones

- Un *proceso estocástico* está **completamente determinado** si se conocen sus funciones de distribución de orden n para todo n y para todo $t_1, \ldots, t_n$
- Un **proceso bidimensional** consiste de dos *procesos estocásticos*:

$$\mathbf{X}(t) \quad \mathbf{Y}(t)$$

- Y este queda **completamente determinado** si se conoce la función de **distribución conjunta** de las variables aleatorias:

$$\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_n), \mathbf{Y}(t'_1), \ldots, \mathbf{Y}(t'_m)$$

- Para alguna $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m$
- La **correlación cruzada $\mathbf{R_{xy}}$** de los *procesos estocásticos* $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ se define como:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1)\mathbf{Y}(t_2)\} \tag{110}$$

- La **Covarianza cruzada** C_{xy} de los *procesos estocásticos* $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ se define como:

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E\{[\mathbf{X}(t_1) - \eta_x(t_1)][\mathbf{Y}(t_2) - \eta_y(t_2)]\} \tag{111}$$

- Donde $\eta_x(t_1) = E\{\mathbf{X}(t_1)\}$ y $\eta_y(t_2) = E\{\mathbf{Y}(t_2)\}$
- El *proceso estocástico* es un *proceso estocástico* con **incrementos descorrelacionados (independientes) (ortogonales)** si para intervalos disjuntos de tiempo:

$$\mathbf{Y}_i = \{\mathbf{X}(t_i) - \mathbf{X}(t_{i+1})\} \tag{112}$$

- **Ejemplo:** un proceso estocástico con incrementos independientes es la Caminata Aleatoria, también esta es un proceso estocástico con incrementos ortogonales. Otros ejemplos de este tipo son el proceso estocástico de **Wiener** y el de **Poisson**.
- Es una sucesión de V.A descorrelacionadas (independientes) (ortogonales).
- **Def:** Dos procesos estocásticos $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ son **independientes** ssi: $\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_n)$ son **independientes** de $\mathbf{Y}(t'_1), \ldots, \mathbf{Y}(t'_n)$ $\forall n$ y $\forall t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n$
- **Def:** Dos procesos estocástiso $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Y}(t)$ son **descorrelacionados** si para alguna t_1 y t_2 se tiene:

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = \eta_{\mathbf{x}}(t_1)\eta_{\mathbf{y}}(t_2) \tag{113}$$

- O, lo que es equivalente:

$$C_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0 \tag{114}$$

- Se dicen **ortogonales** si:

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = 0 \tag{115}$$

Procesos Normales

- Un proceso $\mathbf{X}(t)$ se dice *normal* si las V.A:

$$\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_n) \tag{116}$$

- Son conjuntamente normales para alguna $t_1, \ldots, t_n$.
- Un proceso estocástico normal *queda definido* si se conoce su media $\eta(t)$ y su correlación $R(t_1, t_2)$.
- La *densidad* de primer orden está dada por:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(t,t)}} e^{-\frac{(x-\eta(t))^2}{2C(t,t)}} \tag{117}$$

- Con $\eta(t) = E\{\mathbf{X}(t)\}$ y $C(t,t) = \sigma_x^2$

Procesos estacionarios

- **Def:** Se dice que un proceso estacionario es **Estacionario en sentido estricto** si sus características estadísticcas *no se ven afectas por traslaciones en tiempo.*

$$\mathbf{x}(t) \;\text{ y }\; \mathbf{x}(t+\epsilon)$$

- Un procreso $\mathbf{x}(t)$ es estacionario en sentido estrico ssi:

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) =$$

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau) \;\; \forall\tau \quad (118)$$

- En particular:

$$f(x;t) = f(x;t+\tau) \;\; \forall t, \forall\tau \qquad (119)$$

- Esto implica que $f(x;t)$ no es función del tiempo.

- Además si $t_1 = t$ y $t_2 = t+\tau$:

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = f(x_1,x_2;t,t+\tau)$$

$$= f(x_1,x_2;t+\tau,t+2\tau) \qquad (120)$$

- La función de densidad conjunta de segundo orden es función solamente de τ:

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = f(x_1,x_2;\tau) \qquad (121)$$

- Puesto que la función de densidad de primer orden es constante:

$$E\{\mathbf{X}(t)\} = \eta = \text{constante} \qquad (122)$$

- Como la densidad des segundo orden es función de τ:

$$R(t_1,t_2) = R(\tau) \qquad (123)$$

- **Def:** Se dice que un proceso $\mathbf{x}(t)$ **es estacionario de orden k** si (88) se cumple, no para alguna n, solo para $n \leq k$.

- **Def:** Se dice que un proceso estocástico es **débilmente estacionario (estacionario en sentido amplio)** si:

$$E\{\mathbf{X}(t)\} = \eta \;\text{ constante} \qquad (124)$$

$$R(t_1,t_2) = R(\tau) \;\text{ con }\; t_2 - t_1 = \tau \qquad (125)$$

- **Def:** Dos procesos $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ se difen **descorrelacionados** si para alguna t_1, t_2:

$$R_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(t_1,t_2) = \eta_x(t_1)\eta_y(t_2) \qquad (126)$$

- Esto es:

$$C_{xy}(t_1,t_2) = 0 \qquad (127)$$

- Y se dicen ortogonales:

$$R_{xy}(t_1,t_2) = 0 \qquad (128)$$

Sistemas invariantes sin memoria

- Sea g un operador determinista y la señal $\mathbf{x}(t)$ un proceso estocástico estacionario. Se asume una salida $\mathbf{y}(t)$ de un sistema relacionada con la entrada:

$$\mathbf{x}(t) = g[\mathbf{x}(t)] \qquad (129)$$

- Donde $g(x)$ no es una función de t. Ahora, si la salida del sistema para $\mathbf{x}(t+\epsilon)$ es:

$$\mathbf{y}(t+\epsilon) = g[\mathbf{x}(t+\epsilon)] \qquad (130)$$

- Se dice que el sistema es **invariante en el tiempo**.

- La esperanza de $\mathbf{y}(t)$ se define:

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x;t)\, dx \qquad (131)$$

- Sean dos salidas $\mathbf{y}(t_1)$ y $\mathbf{y}(t_2)$, la esperanza de ambos/ **Autocorrelación** $R_{yy}(t_1,t_2)$:

$$E\{\mathbf{y}(t_1),\mathbf{y}(t_2)\}$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1)g(x_2)f_x(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1 dx_2 \qquad (132)$$

- **Teorema:** Si la entrada $\mathbf{x}(t)$ es estaconaria en sentido estrico (orden k), la salida $\mathbf{y}(t)$ es también estacionaria en sentido estricto (orden k).

- La **densidad conjunta** de las va. $\mathbf{y}(t_1), \ldots, \mathbf{y}(t_n)$ puede ser encontrar con las correspondientes densidades de las v.a $\mathbf{x}(t_1), \ldots, \mathbf{x}(t_n)$

Sistemas Lineales

- Se define una transformación lineal:

$$\mathbf{y}(t) = L[\mathbf{x}(t)] \tag{133}$$

- Y se dice que es una transformación lineal si:

$$L[a_1\mathbf{x}_1(t)+a_2\mathbf{x}_2(t)] = a_1L[\mathbf{x}_1(t)]+a_2L[\mathbf{x}_2(t)] \tag{134}$$

- Para todas constantes escalares a_1, a_2 y vectores x_1, x_2.

- Se dice que L es *invariante en el tiempo* si:

$$\mathbf{y}(t+\epsilon) = L[\mathbf{x}(t+\epsilon)] \tag{135}$$

- **Teorema fundamental**: En una transformación lineal (sistema) se tiene que:

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = L[E\{\mathbf{x}(t)\}] \tag{136}$$

- **Teorema:** Se puede expresar la autocorrelación $R_{yy}(t_1, t_2)$ de $\mathbf{y}(t)$ en términos de la autocorrelación $R_{xx}(t_1, t_2)$ de $\mathbf{x}(t)$.

$$R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2) = L_{t_2}[R_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2)] \tag{137}$$

$$R_{\mathbf{yy}}(t_1, t_2) = L_{t_1}[R_{\mathbf{xy}}(t_1, t_2)] \tag{138}$$

Continuidad estocástica

- El proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es continuo en t_1 con probabilidad 1:

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\mathbf{x}(t+\epsilon)] = \mathbf{x}(t) \tag{139}$$

- El proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es continuo en t, en **media cuadrática** (M.C) si:

$$E\left\{[\mathbf{x}(t+\tau)-\mathbf{x}(t)]^2\right\} \to 0 \quad \tau \to 0 \tag{140}$$

- Con $R(t_1, t_2)$ la autocorrelación de $\mathbf{x}(t)$:

$$E\left\{[\mathbf{x}(t+\tau)-\mathbf{x}(t)]^2\right\}$$

$$= R(t+\tau, t+\tau) - R(t, t+\tau) - R(t+\tau, t) + R(t, t) \tag{141}$$

- El proceso $\mathbf{x}(t)$ es continuo en M.C para todo t si $R(t_1, t_2)$ es continua en $t_1 = t_2 = t$.

- Si $\mathbf{x}(t)$ es continuo en M.C entonces su **media es continua**.

$$E\{\mathbf{x}(t+\tau)\} \to E\{\mathbf{x}(t)\} \tag{142}$$

$$\tau \to 0$$

- La esperanza y el límite **se pueden intercambiar**:

$$\lim_{\tau\to 0} E\{\mathbf{x}(t+\tau)\} = E\left\{\lim_{\tau\to 0}\mathbf{x}(t+\tau)\right\} \tag{143}$$

- **Teorema:** Un proceso $\mathbf{X}(t)$ **estacionario** es continuo en M.C *sí y solo si* su **autocorrelación** $R(\tau)$ es continua para $\tau = 0$.

- Del teorema se puede ver que, suponiendo una *autocorrelación:*

$$R(\tau) = E\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}(t)\} \tag{144}$$

$$E\left\{[\mathbf{x}(t+\tau)-\mathbf{x}(t)]^2\right\} = 2\{R(0) - R(\tau)\} \tag{145}$$

Derivación Estocástica

- La *derivada* de un proceso estocástico $\mathbf{x}$ (t) puede ser definida como el límite:

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathbf{x}(t+\epsilon)-\mathbf{x}(t)}{\epsilon} \tag{146}$$

- Si el límite existe en *media cuadrática (M.C)* y el proceso estocástico es *continua en media cuadrática* en t, se dice que $\mathbf{x}(t)$ tiene derivada en este sentido y se puede encontrar otro proceso $\mathbf{x}'(t)$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left\{\left[\frac{\mathbf{x}(t+\epsilon)-\mathbf{x}(t)}{\epsilon}-\mathbf{x}'(t)\right]^2\right\}=0 \tag{147}$$

- O bien, si el límite $\mathbf{x}'(t)$ **no está en el conjunto**, se puede usar el *criterio de Cauchy* y asumiendo que $\mathbf{x}(t)$ es **estacionario:**

$$\lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0} E\left\{\left[\frac{\mathbf{x}(t+\epsilon_1)-\mathbf{x}(t)}{\epsilon_1}-\frac{\mathbf{x}(t+\epsilon_2)-\mathbf{x}(t)}{\epsilon_2}\right]^2\right\} = 0 \tag{148}$$

- **Teorema:** Un proceso estocástico **estacionario** $\mathbf{x}(t)$ es diferenciable/derivable en *media cuadrática* si su autocorrelación $R(\tau)$ tiene *segunda derivada*. Obviamente $R'(0)$ tiene que existir y, como $R(\tau)$ **es par**:

$$R'(0)=0 \qquad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{R(\epsilon)-R(0)}{\epsilon^2}=\frac{R''(0)}{2} \tag{149}$$

- El teorema inverso es cierto: **si $\mathbf{x}'(t)$ existe en media cuadrática**, entonces $\mathbf{R}''(0)$ **tiene que esxistir**.

- Similarmente, si se tiene un proceso estásctico $\mathbf{x}(t)$ que es **no estacionario**, es *derviable si:*

$$\frac{\partial^2 R(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \tag{150}$$

- **Teorema:** Si la derivada en media cuadrática existe:

$$E\{\mathbf{x}'(t)\}=\frac{dE\{\mathbf{x}(t)\}}{dt} \tag{151}$$

- La **autocorrelación** de $\mathbf{x}'(t)$ está dada por:

$$R_{\mathbf{x}',\mathbf{x}'}(t_1,t_2)=E\{\mathbf{x}'(t_1)\mathbf{x}'(t_2)\} \tag{152}$$

$$R_{\mathbf{x}',\mathbf{x}'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 R_{x,\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \tag{153}$$

- **Corolario:**

$$R_{\mathbf{x},\mathbf{x}'}(t_1,t_2)=\frac{\partial R_{\mathbf{x},\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\partial t_2}=E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}'(t_2)\} \tag{154}$$

$$R_{\mathbf{x}',\mathbf{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial R_{\mathbf{x},\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=E\{\mathbf{x}'(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} \tag{155}$$

- Si el proceso $\mathbf{x}(t)$ es estacionario, entonces con $t_1-t_2=\tau$:

$$E\left\{[\mathbf{x}'(t)]^2\right\}=R_{\mathbf{x}',\mathbf{x}'}(0)=-\frac{d^2R_{\mathbf{x},\mathbf{x}}(0)}{d\tau^2} \tag{156}$$

- **Corolario:** La deriva de n-ésima orden de $\mathbf{x}(t)$ existe, si existe:

$$\frac{\partial^{2n}R_{\mathbf{x},\mathbf{x}}(t_1,t_2)}{\partial t_1^n\partial t_2^n} \tag{157}$$

- Además:

$$E\left\{\frac{d^n\mathbf{x}(t)}{dt^n}\right\}=\frac{dE\{\mathbf{x}(t)\}}{dt^n} \tag{158}$$

$$R_{\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{y}^{(m)}}(t_1,t_2)=E\left\{\frac{d^n\mathbf{x}(t_1)}{dt^n}\frac{d^m\mathbf{y}(t_2)}{dt^m}\right\} \tag{159}$$

$$R_{\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{y}^{(m)}}(t_1,t_2)=\frac{\partial^{n+m}R_{\mathbf{xy}(t_1,t_2)}}{\partial t_1^n\partial t_2^m} \tag{160}$$

- Si los procesos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ son conjuntamente estacionarios:

$$R_{\mathbf{x}^{(n)},\mathbf{y}^{(m)}}(\tau)=(-1)^m\frac{d^{n+m}R_{\mathbf{xy}}(\tau)}{d\tau^{n+m}} \tag{161}$$

Ecuaciones diferenciales estocásticas

- Una ecuación diferencial estocástica es de la forma:

$$a_n\mathbf{y}^n(t)+a_{n-1}\mathbf{y}^{n-1}(t)+\cdots+a_0\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t) \tag{162}$$

- **Determinación de la media de $\mathbf{y}(t)$**

$$E\left\{a_n\mathbf{y}^n(t)+a_{n-1}\mathbf{y}^{n-1}(t)+\cdots+a_0\mathbf{y}(t)\right\}=E\left\{\mathbf{x}(t)\right\} \tag{163}$$

$$a_n\frac{d^n}{dt}E\left\{\mathbf{y}(t)\right\}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt}E\left\{\mathbf{y}\right\}(t)+\cdots+a_0E\left\{\mathbf{y}(t)\right\}=E\left\{\mathbf{x}(t)\right\} \tag{164}$$

- Aplicando la igualdad $\eta_{\mathbf{x}}(t)=E\left\{\mathbf{x}(t)\right\}$ y $\eta_{\mathbf{y}}(t)=E\left\{\mathbf{y}(t)\right\}$

$$a_n\eta_y^{(n)}(t)+a_{n-1}\eta_y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0\eta_y(t)=\eta_x(t) \tag{165}$$

- con: $\eta_y(0)=\eta_y'(0)=\cdots=\eta_y^{(n-1)}(0)=0$

- La autocorrelación $R_{\mathbf{yy}}(t_1,t_2)$ de $\mathbf{y}(t)$ es fácil de determinarla a partir de la **correlación cruzada** $R_{\mathbf{xy}}(t_1,t_2)$ entre la entrada $\mathbf{x}(t)$ y la salida $\mathbf{y}(t)$.

- La **correlación cruzada** $R_{\mathbf{xy}}$ satisface la ecuación diferencial:

$$a_n\frac{\partial^n R_{\mathbf{xy}}(t_1,t_2)}{\partial t_n^2}+\cdots+a_0R_{\mathbf{xy}}(t_1,t_2)=R_{\mathbf{xx}}(t_1,t_2) \tag{166}$$

- La **autocorrelación** $R_{\mathbf{yy}}$ de la salida $\mathbf{y}(t)$, similarmente satisface:

$$a_n\frac{\partial^n R_{\mathbf{yy}}(t_1,t_2)}{\partial t_n^2}+\cdots+a_0R_{\mathbf{yy}}(t_1,t_2)=R_{\mathbf{yx}}(t_1,t_2) \tag{167}$$

Integral Estocástica

- Dado un proceso estocástico *real* $\mathbf{x}(t)$, se define la integral:

$$\mathbf{s}=\int_a^b\mathbf{x}(t)\ dt \tag{168}$$

- Donde $\mathbf{s}$ es una **variable aleatoria**. Se dice que la integral estocástica **existe en media cuadrática** si:

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}E\left\{\left[S-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}(t_i)\Delta t_i\right]^2\right\}=0 \tag{169}$$

- Y la **media de la integral estocástica s** se define.

$$E\left\{\mathbf{S}\right\}=\int_a^b E\left\{\mathbf{x}(t)\right\}\ dt=\int_a^b\eta(t)\ dt \tag{170}$$

- El cuadrado de $\mathbf{s}$ puede ser escrito:

$$\mathbf{s}^2=\int_a^b\int_a^b\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\ dt_1dt_2 \tag{171}$$

- Y su **segundo momento**:

$$E\left\{\mathbf{s}^2\right\}=\int_a^b\int_a^b E\left\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\right\}\ dt_1dt_2=\int_a^b\int_a^b R(t_1,t_2)\ dt_1dt_2 \tag{172}$$

- Y tomando la igualdad $C(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-\eta(t_1)\eta(t_2)$ se define la varianza:

$$\sigma_{\mathbf{s}}^2=\int_a^b\int_a^b\left[R(t_1,t_2)-\eta(t_1)\eta(t_2)\right]\ dt_1dt_2=\int_a^b\int_a^b C(t_1,t_2)\ dt_1dt_2 \tag{173}$$

Ergocidad

- Se defice un **proceso estocástico** $\mathbf{x}(t)$ si sus parámetros estadísticos se pueden determinar a partir de una sola realización gracias al uso de medias temporales $\to$ $\mathbf{x}(t)$ es ergódico si las medias temporales coinciden con las medias probabilísticas.

- **Ergocidad de la media**:

$$\mathbf{n_T}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathbf{x}(t)\ dt \tag{174}$$

- $\mathbf{n_T}$ es una variable aleatoria y como $E\left\{\mathbf{x}(t)\right\}$ es una constante:

$$E\left\{\mathbf{n_T}\right\}=E\left\{\mathbf{x}(t)\right\}=\eta \tag{175}$$

- La **varianza de $\mathbf{n_T}$** está dada por:

$$\sigma_{\mathbf{n_T}}^2=\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\left[R(\tau)-\eta^2\right]\ d\tau \tag{176}$$

- **Teorema:**

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbf{x}(t)\, dt = E\{\mathbf{x}(t)\} = \eta \quad (177)$$

- **Si y sólo sí:**

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \left[R(\tau) - \eta^2\right] \, d\tau = 0 \quad (178)$$

- Si se una $\mathbf{n_T}$ como un estimado de $E\{\mathbf{x}(t)\}$ para $T < \infty$, la probabilidad de que el error de estimación sea menor a ϵ se puede calcular usando:

$$P\{\mathbf{n_T} - E\{\mathbf{x}(t)\}\ < \epsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2_{\mathbf{n_T}}}{\epsilon^2} \quad (179)$$

- **Nota:** la ergocidad de la media es la versión temporal de la ley de los grandes números.

Correlación y espectro de potencia del proceso estacionario

- **Correlación:** La autoccorelación de un proceso estocástico *complejo*:

$$R_x(\tau) = E\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^*(t)\} \quad (180)$$

- Conjugando:

$$R^*_x(\tau) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^*(t+\tau)\} = R_x(-\tau) \quad (181)$$

$$\therefore R(-\tau) = R^*(\tau) \quad (182)$$

- En particular, si $\mathbf{x}(t)$ es real, entonces $R(\tau)$ **es par y real**:

$$R(-\tau) = R(\tau) \quad (183)$$

- Si además $\mathbf{x}(t)$ **es escalar** $\implies$ La **correlación** es una función **par real**.

- Para los procesos $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ la **corralción cruzada** R_{xy} se define:

$$R_{xy}(\tau) = E\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{y}^*(t)\} = R^*_{yx}(-\tau) \quad (184)$$

- La correlación de la suma de la suma de dos procesos estocásticos reales:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t) \quad (185)$$

$$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau)+R_{xy}(\tau)+R_{yx}(\tau)+R_{yy}(\tau) \quad (186)$$

- La corración del producto de dos procesos estocásticos escalares **independientes** $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) \quad (187)$$

$$R_{ww}(\tau) = R_{xx}(\tau)R_{yy}(\tau) \quad (188)$$

- La **autcovarianza** se define:

$$C(\tau) = E\{[\mathbf{x}(t+\tau) - \eta]\,[\mathbf{x}^*(t) - \eta^*]\} = R(\tau) - |\eta|^2 \quad (189)$$

- Y la **covarianza cruzada:**

$$C_{xy}(\tau) = E\left\{[\mathbf{x}(t+\tau) - \eta_x]\left[\mathbf{y}^*(t) - \eta^*_y\right]\right\} = R_{xy}(\tau) - \eta_x\eta^*_y \quad (190)$$

- **Prpoiedad de la correlación del proceso estocástico** $\mathbf{x}(t)$:

$$R(0) = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^*(t)\} = E\left\{|\mathbf{x}(t)|^2\right\} \geq 0 \quad (191)$$

- Ahora suponiendo que $\mathbf{x}(t)$ **es real**:

$$E\left\{[\mathbf{x}(t+\tau) \pm \mathbf{x}(t)]^2\right\} = 2\,[R(0) \pm R(\tau)] \quad (192)$$

$$R(0) \pm R(\tau)\ >\ 0 \quad (193)$$

$$\therefore R(0) \geq |R(\tau)| \quad (194)$$

- Corolario:

$$R_{\mathbf{xx}}(0) + R_{\mathbf{yy}}(0) \geq 2|R_{\mathbf{xy}}(\tau)| \quad (195)$$

Espectro de potencia

- El **espectro de potencia** $S(\omega)$ o $S_{\mathbf{x}}(\omega)$ o $S_{\mathbf{xx}}(\omega)$ de un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es la transformada de fourier de su *autocorrelación*:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R(\tau)\, d\tau \quad (196)$$

- Como $R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)$ se concluye que $S(\omega)$ es una **función real**.
- Usando la transformada de fourier se tiene que:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{x}}(\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega \tag{197}$$

- Si $\tau = 0$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) = E\left\{|x(t)|^2\right\} \geq 0 \tag{198}$$

- Si el proceso $\mathbf{x}(t)$ es real, entonces $R(\tau)$ es **real y par**. Es por esto que $S(\omega)$ es también **par**:

$$S(-\omega) = S(\omega) \tag{199}$$

- El **espectro cruzado de potencia** $S_{xy}(\omega)$ de dos procesos $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ es la transformada de fourier de la correlación cruzada:

$$S_{\mathbf{xy}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathbf{xy}}(\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau = S_{\mathbf{yx}}^*(\omega) \tag{200}$$

- De la transformada inversa de (170):

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{xy}}(\omega) e^{j\omega\tau} \, d\omega \tag{201}$$

- Con $\tau = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathbf{xy}}(\omega) \, d\omega = R_{\mathbf{xy}}(0) = E\left\{\mathbf{x}(t)\mathbf{y}^*(t)\right\} \tag{202}$$

- Sean dos procesos $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ **ortogonales**:

$$R_{\mathbf{xy}}(\tau) = E\left\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{y}^*(t)\right\} = 0 \tag{203}$$

$$S_{\mathbf{xy}}(\omega) = 0 \tag{204}$$

- **Ejemplo:** Sea $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{Y}(t)$:

$$R_{\mathbf{zz}}(\tau) = R_{(\mathbf{x}+\mathbf{y})}(\tau) = R_{\mathbf{x}}(\tau) + R_{\mathbf{y}}(\tau) \tag{205}$$

$$S_{\mathbf{zz}}(\tau) = S_{(\mathbf{x}+\mathbf{y})}(\tau) = S_{\mathbf{x}}(\tau) + S_{\mathbf{y}}(\tau) \tag{206}$$

Ruido Blanco

- Un proceso **estacionario en sentido amplio** cuyo *espectro de potencia* $S(\omega)$ es constante, se llama **ruido blanco**:

$$S(\omega) = \text{constante} \tag{207}$$

- **Corolario**: $S(\omega)$ es no negativo:

$$S(\omega) \geq 0 \tag{208}$$

Secuencias de Markoff

- Una secuencia $\mathbf{x}_n$ de una V.A es llamada *secuencia de Markoff* si para alguna n se tiene:

$$F(x_n|x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1) = F(x_n|x_{n-1}) \tag{209}$$

- Si la V.A es continua:

$$f(x_n|x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1) = f(x_n|x_{n-1}) \tag{210}$$

- **Corolario:**

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_n|x_{n-1}) f(x_{n-1}|x_{n-2}) \ldots f(x_2|x_1) f(x_1) \tag{211}$$