Formulario Lineales 2

Roberto Navarro Castañeda

Febrero 2024

1. Independencia Lineal de Funciones en el tiempo

- Sea $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ valuadas en $\mathbb{C}$ es **linealmente dependiente** en $[t_1, t_2]$ sobre $\mathbb{C}$ si existen números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos cero tal que:

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{1}$$

De otra manera se dicen **linealmente independientes** en $[t_1, t_2]$.

- **Caso Vectorial:**
- Sean los vectores de $1 \times p$ de funciones del tiempo $\mathbf{f}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ valuadas sobre $\mathbb{C}$. Entonces las $\mathbf{f}_i$ serán **linealmente dependientes** en el intervalo $[t_1, t_2]$ si existen números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos cero tal que:

$$\alpha_1 \mathbf{f_1}(t) + \alpha_2 \mathbf{f_2}(t) + \cdots + \alpha_n \mathbf{f_n}(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{2}$$

$$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_n] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} = \alpha \mathbf{F}(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{3}$$

- **Teorema 5.1**: Sean $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vectores de $1 \times p$ de funciones **continuas** en el tiempo definidas en $[t_1, t_2]$ y valuadas sobre $\mathbb{C}$. Sea $\mathbf{F}$ de $n \times p$ con $\mathbf{f}_i$ como la i-ésima fila. Definiendo:

$$\mathbf{W}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^*(t)\ dt \tag{4}$$

entonces las $\mathbf{f}_i$ son **linealmente independientes** en $[t_1, t_2]$ **sí y solo si** la matriz constante de $n \times n$, $\mathbf{W}(t_1, t_2)$ es no singular.

- **Teorema 5.2:** Suponga que las funciones de $1 \times p$ valuadas sobre $\mathbb{C}$, $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tienen **derivadas continuas** hasta orden $n-1$ en $[t_1, t_2]$. Sea $\mathbf{F}$ la matriz de $n \times p$ con $\mathbf{f}_i$ como la i-ésima fila y sea $\mathbf{F}^{(k)}$ la k-ésima derivada de $\mathbf{F}$. Si existe algún $t_0 \in [t_1, t_2]$ tal que la matriz:

$$\left[\mathbf{F}(t_0) \vdots \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \vdots \mathbf{F}^{(2)}(t_0) \vdots \cdots \vdots \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\right] \tag{5}$$

tenga rango n, entonces las $\mathbf{f}_i$ son **linealmente independientes** en $[t_1, t_2]$ sobre $\mathbb{C}$.

- **Teorema 5.3:** Suponga que para cada i, $\mathbf{f}_i$ es **analítica** en $[t_1, t_2]$. Sea $\mathbf{F}$ la matriz de $n \times p$ con $\mathbf{f}_i$ como la i-ésima fila y sea $\mathbf{F}^{(k)}$ la k-ésima derivada de $\mathbf{F}$. Sea t_0 cualquier tiempo en $[t_1, t_2]$. Entonces las $\mathbf{f}_i$ son **linealmente independientes** en $[t_1, t_2]$ **sí y solo si:**

$$\rho \left[\mathbf{F}(t_0) \vdots \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \vdots \mathbf{F}^{(2)}(t_0) \vdots \cdots \vdots \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0) \vdots \cdots\right] = n \tag{6}$$

- **Corolario 5-3:** Asumiendo que para cada i, $\mathbf{f}_i$ es analítica en $[t_1, t_2]$. Entonces $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ son **linealmente independientes** en $[t_1, t_2]$ **sí y solo si:**

$$\rho \left[\mathbf{F}(t_0) \vdots \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \vdots \mathbf{F}^{(2)}(t_0) \vdots \cdots \vdots \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\right] = n \tag{7}$$

para **casi todo** $t \in [t_1, t_2]$.

2. Controlabilidad de ecuaciones lineales dinámicas

- La ecuación de estado E se dice *controlable* en el tiempo t_0, si existe un tiempo $t_1 > t_0$ tal que para cualquier $\mathbf{x}(t_0)$ en el espacio de estados $\mathbf{\Sigma}$ y cualquier $\mathbf{x}_1$ en $\mathbf{\Sigma}$, existe una entrada $\mathbf{u}_{[t_0,t_1]}$ que transfiera el estado $\mathbf{x}(t_0)$ al estado $\mathbf{x}_1$ en el tiempo t_1. De otra manera se dice que la ecuación es *incontrolable* en el tiempo t_0.

- **Teorema 5-4:** La ecuación dinámica E se dice *controlable* en el tiempo t_0 si para cualquier estado $x(t_0)$ existe un *tiempo finito* $t_1 > t_0$ tal que las n *filas* de la matriz función de $n \times p$ $\mathbf{\Phi}(\cdot, t_0)\mathbf{B}(\cdot)$ son linealmente independientes en $[t_0, t_1]$.

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_0, \tau)\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)\mathbf{\Phi}^*(t_0, \tau)\, d\tau \tag{8}$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^*(t)\mathbf{\Phi}(t_0, t_1)\mathbf{W}^{-1}(t_0, t_1)\left[\mathbf{x}_0 - \mathbf{\Phi}(t_0, t_1)\mathbf{x}_1\right] \tag{9}$$

- **Teorema 5-5:** Asumiendo que las matrices $\mathbf{A}(\cdot)$ y $\mathbf{B}(\cdot)$ en la n-dimensional ecuación dinámica E son $n-1$ veces continuamente diferenciables. Entonces la ecuación dinámica E es controlable en t_0 si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que:

$$\rho\left[\mathbf{M}_0(t_1) \vdots \mathbf{M}_1(t_1) \vdots \cdots \mathbf{M}_{n-1}(t_1)\right] = n \tag{10}$$

  Donde $\mathbf{M}_{k+1}(t) = \mathbf{M}_k(t)\mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_k(t) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
  y $\mathbf{M}_0(t) = \mathbf{B}(t)$.
  $\frac{\partial^k}{\partial t^t}\mathbf{\Phi}(t_0, t)\mathbf{B}(t) = \mathbf{\Phi}(t_0, t)\mathbf{M}_k(t) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- **Definición 5-2:** Una ecuación de estado E se dice que es *diferencialmente* (completamente) *controlable* en el tiempo t_0 si, para cualquier estado $\mathbf{x}(t_0)$ en el espacio de estados $\mathbf{\Sigma}$ y cualquier estado $\mathbf{x}_1(t)$ en $\mathbf{\Sigma}$, existe una entrada $\mathbf{u}$ que transfiera $\mathbf{x}(t_0)$ al estado $\mathbf{x}_1(t)$ en un intervalo de tiempo *arbitrariamente pequeño.*

- **Teorema 5-6:** Si las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son analíticas sobre $(-\infty, \infty)$, entonces la n-dimensional ecuación de estado E se dice *diferencialmente controlable* en todo $t \in (-\infty, \infty)$ **sí y solo si** para algún t_0 fijo en $(-\infty, \infty)$,

$$\rho\left[\mathbf{M}_0(t_0) \vdots \mathbf{M}_1(t_0) \vdots \cdots \mathbf{M}_{n-1}(t_0) \vdots \cdots\right] = n \tag{11}$$

- **Definición 5-3:** La ecuación lineal dinámica E se dice *instantáneamente controlable* en $(-\infty, \infty)$ *sí y solo si:*

$$\rho\left[\mathbf{M}_0(t_0) \vdots \mathbf{M}_1(t_0) \vdots \cdots \mathbf{M}_{n-1}(t_0)\right] = n \tag{12}$$

- **Definición 5-4:** La ecuación dinámica E se dice *uniformemente controlable* en $(-\infty, \infty)$ *sí y solo si* existe un positivo σ_0 y otro positivo α_i que depende de σ_0 tal que:

$$\mathbf{0} < \alpha_1(\sigma_0)\mathrm{I} \leq \mathbf{W}(t, t+\sigma_0) \leq \alpha_2(\sigma_0)\mathrm{I} \tag{13}$$

$$\mathbf{0} < \alpha_3(\sigma_0)\mathrm{I} \leq \cdots$$
$$\cdots \mathbf{\Phi}^*(t, t+\sigma_0)\mathbf{W}(t, t+\sigma_0)\mathbf{\Phi}(t, t+\sigma_0) \leq \alpha_4(\sigma_0)\mathrm{I} \quad \forall t \in (-\infty, \infty) \tag{14}$$

  Para todo t donde $\mathbf{\Phi}(t, \cdot)$ es la *matriz de transición de estado* y $\mathbf{W}(t, \cdot)$ está definido como en el Teorema 5-4.

- **Teorema 5-7:** La ecuación lineal e invariante en el tiempo $n-$ dimensional (22) es controlable *sí y solo si* una de las siguientes ecuaciones equivalentes se satisface:

- Todas las filas de $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ ($e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$) son linealmente independientes en $[0, \infty)$ sobre $\mathbb{C}$.

- Todos las filas de $(s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

- El *Grammiano de controlabilidad* es no singular para alguna $t > 0$

$$\mathbf{W}(t_0, t) \triangleq \int_{t_0=0}^{t} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*\tau}\, d\tau \tag{15}$$

- La $n \times np$ *matriz de controlabilidad* tiene rango n

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \quad (16)$$

- Para todo valor propio λ de $\mathbf{A}$ (y consecuentemente todo valor propio λ en $\mathbb{C}$), la matrix compleja de $n \times (n+p)$:

$$\left[\lambda \mathrm{I} - \mathbf{A} \vdots \mathbf{B}\right] \quad (17)$$

tiene rango n.

3. Observabilidad de ecuaciones lineales dinámicas

- La ecuación dinámica E se dice (de estado completo) *observable* en t_0 si existe un *tiempo finito* $t_1 > t_0$ tal que para todo estado $\mathbf{x}(t_0)$, al tiempo t_0, con solo conocer la entrada $\mathbf{u}_{[t_0,t_1]}$ y la salida $\mathbf{y}_{[t_0,t_1]}$ sobre el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es suficiente para determinar el estado $\mathbf{x}(t_0)$. De otra manera la ecuación dinámica E se dice no observable al tiempo t_0.

$$\mathrm{E}: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (18)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (19)$$

- **Teorema 5.9:** La ecuación dinámica E es observable en el tiempo t_0 *sí y solo sí* existe otro tiempo t_1 (finito), con $t_1 > t_0$ tal que las n columnas de la matriz $\mathbf{C}(\cdot)\mathbf{\Phi}(\cdot, t_0)$, de $q \times n$, son linealmente independientes en $[t_0, t_1]$.

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^*(t, t_0)\mathbf{C}^*(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)\, dt \triangleq \mathbf{V}(t_0, t_1) \quad (20)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{V}^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^*(t, t_0)\mathbf{C}^*(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)\, dt \quad (21)$$

- **Teorema 5.10:** Considerando la ecuación dinámica E (1), (2) y la ecuación dinámica E*:

$$\mathrm{E}^*: \quad \dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}^*(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{C}^*(t)\mathbf{v}(t) \quad (22)$$
$$\gamma = \mathbf{B}^*(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}^*(t)\mathbf{v}(t) \quad (23)$$

Donde $\mathbf{A}^*(t)$, $\mathbf{B}^*(t)$, $\mathbf{C}^*(t)$, $\mathbf{D}^*(t)$ son las matrices transpuestas conjugadas de $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ y $\mathbf{D}(t)$, respectivamente. La ecuación E es controlable (observable) en t_0 *sí y sólo si* la ecuación E* es observable (controlable) en t_0.

- **Teorema 5.11:** Asumiendo que las matrices $\mathbf{A}(\cdot)$ y $\mathbf{C}(\cdot)$ en la n-dimensional ecuación dinámica E son $n-1$ veces continuamente diferenciables. Entonces la ecuación dinámica E es observable en t_0 si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que:

$$\rho \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(t_1) \\ \mathbf{N}_1(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n \quad (24)$$

Donde $\mathbf{N}_{k+1}(t) = \mathbf{N}_k(t)\mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{N}_k(t) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ y $\mathbf{N}_0(t) = \mathbf{C}(t)$.

- **Definición 5-7:** La ecuación dinámica E se dice *diferencialmente observable* en el tiempo t_0 si para algún estado $\mathbf{x}(t_0)$ en el espacio de estados Σ, el conocimiento de la entrada y la salida sobre un *intervalo de tiempo arbitrariamente pequeño* es suficiente para determinar al estado $\mathbf{x}(t_0)$.

- **Teorema 5-12:** Si las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ son analíticas en $(-\infty, \infty)$, entonces la $m-$dimensional ecuación dinámica E es diferencialmente observable para todo t en $(-\infty, \infty)$ *sí y solo si* para algún punto fijo t_0 en $(-\infty, \infty)$

$$\rho \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(t_1) \\ \mathbf{N}_1(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{n-1}(t_1) \\ \vdots \end{bmatrix} = n \tag{25}$$

- **Definición 5-8:** La ecuación dinámica E se dice **instantáneamente observable** en $(-\infty, \infty)$ *sí y solo si*:

$$\rho \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(t_1) \\ \mathbf{N}_1(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} = n \tag{26}$$

donde $\mathbf{N}_i$'s se define como en el Teorema 5-11.

- **Definición 5-9:** La ecuación dinámica E se dice *uniformemente observable* en $(-\infty, \infty)$ *sí y solo si* existe un positivo σ_0 y otro positivo β_i que depende de σ_0 tal que:

$$\mathbf{0} < \beta_1(\sigma_0)\mathrm{I} \leq \mathbf{V}(t, t+\sigma_0) \leq \beta_2(\sigma_0)\mathrm{I} \tag{27}$$

$$\mathbf{0} < \beta_3(\sigma_0)\mathrm{I} \leq \cdots$$
$$\cdots \mathbf{\Phi}^*(t, t+\sigma_0)\mathbf{V}(t, t+\sigma_0)\mathbf{\Phi}(t, t+\sigma_0) \leq \beta_4(\sigma_0)\mathrm{I} \tag{28}$$

Para todo t donde $\mathbf{\Phi}(t, \cdot)$ es la *matriz de transición de estado* y $\mathbf{V}(t, \cdot)$ está definido como en el Teorema 5-9.

- **Teorema 5-13:** La ecuación lineal e invariante en el tiempo $n-$ dimensional (22) es observable *sí y solo si* una de las siguientes ecuaciones equivalentes se satisface:

- Todas las columnas de $\mathbf{C}e^{-\mathbf{A}t}$ ($\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$) son linealmente independientes en $[0, \infty)$ sobre $\mathbb{C}$.

- Todas las columnas de $\mathbf{C}(s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

- El *Grammiano de observabilidad* es no singular para alguna $t > 0$

$$\mathbf{W}(t_0, t) \triangleq \int_{t_0=0}^{t} e^{\mathbf{A}^*\tau}\mathbf{C}^*\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\, d\tau \tag{29}$$

- La $nq \times n$ *matriz de observabilidad* tiene rango n

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{30}$$

- Para todo valor propio λ de $\mathbf{A}$ (y consecuentemente todo valor propio λ en $\mathbb{C}$), la matrix compleja de $(n+q) \times n$:

$$\begin{bmatrix} \lambda\mathrm{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{31}$$

tiene rango n.

4. Espacio de estados y descomposiciones de sistemas multivariable en descripciones matriz-fracción

4.1. Realizaciones directas de funciones de transferencia multivariables

- Sea un sistema lineal multivariable con n estados, m entradas y p salidas, donde $\mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{C}$ son matrices constantes reales, de dimensión: $n \times n$, $n \times m$ y $p \times n$:

$$\Sigma : \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Ahora $H(s)$:

$$H(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$$

- donde $d(s)$ es el *mínimo común múltiplo de los denominadores de las entradas de* $H(s)$:

$$d(s) = s^r + d_1 s^{r-1} + \cdots + d_r \tag{32}$$

Y $N(s)$:

$$N(s) = N_1 s^{r-1} + N_2 s^{r-2} + \cdots + N_r \tag{33}$$

- **Forma bloque controlador:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -d_1\mathbf{I}_m & -d_2\mathbf{I}_m & \cdots & -d_r\mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \mathbf{I}_m & 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_r \end{bmatrix} \tag{36}$$

Donde m es el número de entradas.

- **Forma bloque observador:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -d_1\mathbf{I}_p & \mathbf{I}_p & 0 & \cdots & 0 \\ -d_2\mathbf{I}_p & 0 & \mathbf{I}_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{I}_p \\ -d_r\mathbf{I}_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Donde p es el número de salidas.

5. Realización diagonal de Gilbert

- Esta realización es solo para sistemas donde el polinomio del denominador tiene raíces distintas.

$$d(s) = \prod_1^r (s - \lambda_i), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \tag{40}$$

Entonces $H(s)$ se puede expresar en fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \sum_1^r \frac{R_i}{s - \lambda_i} \tag{41}$$

Ahora sea

$$\rho_i = \text{ el rango de } R_i$$

tal que se puede reescribir

$$R_i = \mathbf{C}_i\mathbf{B}_i \ \ , \ \ \mathbf{C}_i \ \text{ es de } \ p \times \rho_i$$
$$\mathbf{B}_i \ \text{ es de } \ \ \rho_i \times m$$

Entonces es fácil verificar que:

$$A = \text{bloque diag}\{\lambda_i \mathbf{I}_{\rho_i}, i = 1, 2, \ldots, r\}$$
$$\mathbf{B}' = \left[\mathbf{B}_1', \ldots, \mathbf{B}_r'\right], \ \ \mathbf{C}' = \left[\mathbf{C}_1', \ldots, \mathbf{C}_r'\right],$$

Es una realización de $H(s)$. Mas aún, la realización es de orden:

$$n = \sum_1^r \rho_i$$

En general, siempre que $d(s)$ tenga raíces distintas, es cierto que:

$$n_{\min} = \sum_1^r \rho_i$$

- **Clases de sistemas:**
- **Sistemas SIMO:** Cuando $m = 1$ (una entrada) y $p > 1$ (muchas salidas):

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{b_1(s)}{a_1(s)} \\ \vdots \\ \frac{b_p(s)}{a_p(s)} \end{bmatrix}$$

Para lo cual se puede reescribir:

$$H(s) = \frac{\begin{bmatrix} n_1(s) \\ \vdots \\ n_p(s) \end{bmatrix}}{d(s)}$$

Con $d(s)$ el mínimo común múltiplo de los denominadores $a_i(s), i = 1, \ldots, p$

- **Sistemas MISO:** Cuando $p = 1$ (una salida) y $m > 1$ (muchas entradas):

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{b_1(s)}{a_1(s)} & \cdots & \frac{b_p(s)}{a_p(s)} \end{bmatrix}$$

6. Matrices de controlabilidad y observabilidad

- Una realización $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ es de estado observable *sí y solo si* la matriz de $np \times n$ de Observabilidad $\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ tiene rango n

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{42}$$

- Una realización $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ es de estado controlable *sí y solo si* la matriz de $n \times nm$ de controlabilidad $\mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ tiene rango n

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{43}$$

6.1. Soluciones no únicas y Soluciones mínimas

- **Una solición explícita**: tomando el resultado:

$$x(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\ d\tau$$

Por controlabildiad se puede tomar $x(t_1) = 0$

$$x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau)\ d\tau$$

Usando interpolación de Sylvester:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau)\ d\tau$$

- **Definiendo:**

$$\gamma \triangleq \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau)\ d\tau \tag{44}$$

Se llega a que:

$$x(0) = \gamma\, \mathcal{C}(A, B) \tag{45}$$

Obteniendo el conjunto γ podremos determinar una entrada cuando $\mathcal{C}(A, B)$ es de rango n y exista la solución. Una solución está determinada por:

$$\gamma = \mathcal{C}^T (\mathcal{C}\mathcal{C}^T)^{-1} x(t_0)$$

donde $\mathcal{C}^T (\mathcal{C}\mathcal{C}^T)^{-1}$ es una inversa derecha de $\mathcal{C}$. Ya que $\mathcal{C}\left[\mathcal{C}\mathcal{C}^T)^{-1} x(t_0)\right] = x(t_0)$ como solo se toma el cuenta el rango por filas, tiene kernel derecho y la solución *no es única*:

$$\mathcal{C}\theta = 0 \tag{46}$$

Como la solución no es única se toma la solución de *menor longitud*.

$$||\gamma + \theta|| \geq ||\gamma|| \quad \forall \theta \tag{47}$$

7. Soluciones de mínimos cuadrados de ecuaciones inconsistentes

- Sea la ecuación $\mathcal{O}x(t) = \mathcal{Y}(t)$. No tendrá solución *si hay ruido en la medición*. Pero se probará encontrar un vector $\hat{x}$, tal que $\mathcal{O}\hat{x}$ empate con $\mathcal{Y}(t)$, usando mínimos cuadrados:

$$||\mathcal{O}\hat{x}(t) - \mathcal{Y}(t)||^2 = \text{mínimo}$$

Y se muestra que hay un **único** $\hat{x}(t)$ con esta propiedad **si $\mathcal{O}$ tiene rango** n:

$$\hat{x}(t) = (\mathcal{O}^T \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^T \mathcal{Y}(t) \tag{48}$$

Como $\hat{x}(t)$ coincide con la solución cuando existe, y de otra manera da el menor de las soluciones:

$$\mathcal{O}\hat{x}(t) = \hat{\mathcal{Y}}(t)$$

$$\hat{x}(t) = (\mathcal{O}^T \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^T \hat{\mathcal{Y}}(t)$$

porque:

$$\mathcal{Y}(t) - \hat{\mathcal{Y}}(t) \perp \mathcal{R}(\mathcal{O}) \tag{49}$$

8. Realizaciones mínimas

8.1. Transformaciones de similitud y representación de sistemas no controlables-no observables.

- Sean dos representaciones Σ_1 y Σ_2 se dicen similares si existe T no singular tal que:

$$\bar{A} = T^{-1}AT \tag{50}$$
$$\bar{B} = T^{-1}B \tag{51}$$
$$\bar{C} = CT \tag{52}$$
$$x(t) = T\bar{x}(t) \tag{53}$$

Además:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$$

Y se concluye:

$$\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}T$$
$$\bar{\mathcal{C}} = T^{-1}\mathcal{C}$$

- **Teorema 6.2-1**: Sea $\Sigma(A,B,C)$ tal que:

$$\operatorname{rank}\{\mathcal{C}(A,B)\} \leq n \tag{54}$$

Se puede encontrar T:

$$\bar{A} = T^{-1}AT$$
$$\bar{B} = T^{-1}B$$
$$\bar{C} = CT$$

con:

$$\bar{A} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} \bar{A}_c & \vdots & \bar{A}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \bar{A}_{\bar{c}} \end{array}\right] & \begin{array}{c} r \\ \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r & & n-r \end{array} & \end{array}$$

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{c} \bar{B}_c \\ \cdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} r \\ \\ n-r \end{array}$$

$$\bar{C} = \left[\begin{array}{ccc} \bar{C}_c & \vdots & \bar{C}_{\bar{c}} \end{array}\right]$$

- **Teorema 6.2-2**: Sea $\Sigma(A,B,C)$ tal que:

$$\operatorname{rank}\{\mathcal{O}(C,A)\} \leq n \tag{55}$$

Se puede encontrar T:

$$\bar{A} = T^{-1}AT$$
$$\bar{B} = T^{-1}B$$
$$\bar{C} = CT$$

con:

$$\bar{A} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} \bar{A}_o & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{A}_{21} & \vdots & \bar{A}_{\bar{o}} \end{array}\right] & \begin{array}{c} r \\ \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r & & n-r \end{array} & \end{array}$$

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{c} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{array}\right] \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array}$$

$$\bar{C} = \left[\begin{array}{cc} \bar{C}_o & 0 \end{array}\right]$$

8.2. Realizaciones mínimas

- Una realización mínima es aquella que tiene el *menor tamaño* de A para toda representación Σ y satisface:

  $H(s) = C(sI-A)^{-1}B,$ una función de transferencia cualquiera

- Sean dos realizaciones Σ_1, Σ_2. Entonces

$$\dim A_1 > \dim A_2$$
$$C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2$$

- **Teorema 6.2-3:** Una realización $\{A, B, C\}$ es *mínima* **sí y solo si** es controlable y observable.

- **Teorema 6.2-4** Si $\{A_i, B_i, C_i, i = 1, 2\}$ son dos realizaciones mínimas de una función de trasnferencia. Entonces existe una *única* T:

$$A_1 = T^{-1}A_2T \tag{56}$$
$$B_1 = T^{-1}B_2 \tag{57}$$
$$C_2 = C_2T \tag{58}$$
$$\tag{59}$$

Además, T se puede expresar:

$$T = \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2^T(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^T)^{-1} \tag{60}$$
$$T^{-1} = (\mathcal{O}_2^T\mathcal{O}_2)^{-1}\mathcal{O}_2^T\mathcal{O}_1 \tag{61}$$

9. Minimalidad de la realización de Gilbert

- Para verificar la minimalidad de esta realización: Se verifica la controlabilidad y observabilidad:

$$A = \text{ diag } \{\lambda_i \mathbf{I}_{\rho_i}\} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

$$B^T = \left[B_1^T, \ldots, B_r^T\right]$$

Puede ser escrito:

$$\mathcal{C} =$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \lambda_1 \mathbf{I}_m & \cdots & \lambda_1^{n-1}\mathbf{I}_m \\ \vdots & & & \\ \mathbf{I}_m & \lambda_r \mathbf{I}_m & \cdots & \lambda_r^{n-1}\mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

$$= \mathcal{B}\mathcal{V} \tag{62}$$

donde $\mathcal{V}$ es la matriz a bloques de Vandermonde.

- La matriz $\mathcal{C}$ tendrá rango pleno **sí y solo si** $\mathcal{B}$ tiene rango pleno n. Por la construcción de Hilbert:

$$\rho(\mathcal{B}) = \sum_1^r \rho(B_i) = \sum_1^r \rho_i \triangleq n \tag{63}$$

9.1. Prueba PBH para la controlabilidad y observabilidad

- **Teorema 1:** El par $\{A, B\}$ es controlable *sí y solo si* no existe un vector propio *izquierdo* de A que sea ortogonal a todas las columnas de B, *sí y solo si* no existe un q tal que:

$$qA = \lambda q \quad \text{y} \quad qB = 0 \tag{64}$$

- **Teorema 2:** El par $\{C, A\}$ es observable *sí y solo si* no existe un vector propio **derecho** de A que sea ortogonal a todas las filas de C, entonces, *sí y solo si* no existe p tal que:

$$Ap = \lambda p \quad \text{y} \quad Cp = 0 \tag{65}$$

- **Teorema 3:** El par $\{A, B\}$ es controlable *sí y solo si*:

$$\text{rango } [sI - A \;\; B] = n \quad \forall s \tag{66}$$

- **Teorema 4:** El par $\{C, A\}$ es observable *sí y solo si*

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \tag{67}$$

10. Matrix-Fraction Description-MFD

- Para el bloque controlador-controlabilidad, el orden fue: $n = rm$. Para el bloque observador-observabilidad el orden fue $n = rp$.

- Si $H(s)$ se escribe como una matriz-fracción:

$$H(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s)$$

$$D_R(s) = d(s)\mathbf{I}_m$$

$$N_R(s) = N(s)$$

y se define el *grado del denominador* de la matriz como:

$$\text{deg } D_R(s) \triangleq \text{deg det } D_R(s) = rm$$

Similarmente:

$$H(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

$$D_L(s) = d(s)\mathbf{I}_p$$

$$N_L(s) = N(s)$$

y se define el *grado del denominador* de la matriz como:

$$\text{deg } D_L(s) \triangleq \text{deg det } D_L(s) = rp$$

- **Proposición A:** Dada cualquier MFD_R de $H(s)$ siempre es posible obtener una realización de estados *Controlable* de orden:

$$n = \deg\det D_R(s) = \text{ El grado de la MFD}_R \tag{68}$$

- **Proposición B:** Dada cualquier MFD$_L$ de $H(s)$ siempre es posible obtener una realización de estados *Observable* de orden:

$$n = \deg \det D_L(s) = \text{ El grado de la MFD}_L \tag{69}$$

- El mínimo grado de las MFD de $H(s)$ coincidirá con el orden de cualquier realización mínima de $H(s)$.

10.1. Divisores derechos y MFD irreducibles

- Dada una MFD, hay una infinita cantidad se representaciones que se obtienen eligicendo una matriz polinomial no singular $W(s)$ tal que:

$$\bar{N}(s) = N(s)W^{-1}(s) \tag{70}$$

$$\bar{D}(s) = D(s)W^{-1}(s) \tag{71}$$

Son matrices polinomiales, entonces

$$H(s) = N(s)D^{-1}(s) = \bar{N}(s)\bar{D}^{-1}(s) \tag{72}$$

Se dice que $W(s)$ es un *divisor derecho* de $N(s)$ y $D(s)$. Mas aún:

$$\text{deg det } D(s) = \text{deg det } \bar{D}(s) + \text{deg det } W(s) \tag{73}$$

Se tiene que

$$\text{deg det } D(s) \geq \text{deg det } \bar{D}(s) \tag{74}$$

- Se obtendrá el *grado mínimo* quitando el *máximo común divisor de* $N(s)$ y $D(s)$. Se obtendrá el MCM *sí y solo si*:

$$\text{deg det } D(s) = \text{deg det } \bar{D}(s) \tag{75}$$

Para todo divisor derecho no singular.

- **Proposiciones:**

- **Primero:** Dos matrices polinomiales $N(s)$ y $D(s)$ con el mismo número de *columnas* se dicen *primas relativas* (coprimas) derechas si solo tienen divisores derechos comunes, **unimodulares.**

- **Segundo:** una MDF, $H(s) = N(s)D^{-1}(s)$, se dirá irreducible si $N(s)$ y $D(s)$ son *coprimos derechos.*

- **Tercero:** Los MFD's irreducibles no son únicas, porque si $N(s)D^{-1}(s)$ es irreducible, también lo es $N(s)W(s)\left[D^(s)W(s)\right]^{-1}$ para alguna $W(s)$ unimodular.

11. Matrices Unimodulares

- **Lemma 6.3-1** Una matriz polinomial $W(s)$ es unimodular *sí y solo si* su inversa $W^{-1}(s)$ es también polinomial.

$$\det W(s) = \text{ cte } \neq 0 \tag{76}$$

11.1. Forma de Hermite por columnas

- **Teorema:** Cualquier matriz polinomial de $p \times m$ de rango r puede ser reducida por operaciones filas / premultiplicación por matrices unimodulares a una forma cuasitriangular (superior) en la cual:

- 1)- Si $p > r$, las últimas $p - r$ filas son cero.

- 2)- En la columna j, $1 \leq j \leq r$, el elemnto de la diagonal es *mónico* y de mayor grado que cualquier otro elemento de ella.

- 3)- En la columna j, $1 \leq j \leq r$, si el elemento de la diagonal es la unidad, entonces los demas elementos de ella son cero.

- 4)- Si $m > r$, no se puede decir nada de los elementos de las $m - r$ columnas y las primeras r filas.

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \\ p_{3,1} & p_{3,2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{cc} & m-r \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) & \end{array} p-r \tag{77}$$

12. Máximo común divisor de matrices

12.1. MCD- Derecho de dos matrices $\{N(s), D(s)\}$

- Deben tener el mismo número de columnas, su MCD (gcd) es una matriz $R(s)$ con las siguientes propiedades:

- 1)- $R(s)$ es un *divisor derecho* (gcrd) de $N(s)$ y $D(s)$ si existen matrices polinomiales $\bar{N}(s)$ y $\bar{D}(s)$ tal que:

$$N(s) = \bar{N}(s)R(s) \tag{78}$$

$$D(s) = \bar{D}(s)R(s) \tag{79}$$

- 2)- Si $R_1(s)$ es otro divisor derecho de $N(s)$ y $D(s)$, entonces $R_1(s)$ es un divisor derecho de $R(s)$ y entonces existe una matriz unimodular polinomial tal que:

$$R(s) = W(s)R_1(s) \tag{80}$$

- **Lemma 6.3-3 Construcción de un MCD-Derecho (gcrd)**: Dadas dos matrices polinomiales $N(s)$ y $D(s)$ de dimensiones $m \times m$ y $p \times m$ respectivamente. Tomando la matriz $\left[D^T(s)\ N^T(s)\right]^T$ y encontrando operaciones elementales por renglones de manera que al menos p de los renglones inferiores de la parte derecha sean cero:

$$\begin{array}{c} \\ m \\ p \end{array}\!\!\begin{array}{cc} m & p \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \\ m \\ p \end{array} \tag{81}$$

Entonces la matriz cuadrada $R(s)$ será MCD-Derecho (gcrd) de $N(s)$ y $D(s)$.

- Los MCD-Derechos *no son únicos*: Dos MCD-Derechos (gcrd's) $R_1(s)$ y $R_2(s)$ se relacionan:

$$\begin{aligned} R_1(s) &= W_2(s)R_2(s) \\ R_2(s) &= W_1(s)R_1(s) \\ R_1(s) &= W_2(s)W_1(s)R_2(s) \end{aligned}$$

- Si $R_1(s)$ es *no singular*, entonces $\{W_i, i = 1, 2\}$ debe ser unimodular y entonces MCD-Derecho (gcrd) $R_2(s)$ será no singular.

- Si un MCD-Derecho (gcrd) es *unimodular*, entonces todos los MCD-Derechos (gcrd's) serán *unimodulares*.

- **Lemma 6.3-4: MCD-Derechos (gcrd's) no singulares**: Si la matriz $\left[D^T(s)\ N^T(s)\right]^T$ tiene rango pleno por columnas, entonces *todos* los MCD-Derechos (gcrd's) de $\{D(s), N(s)\}$ serán no singulares y diferentes solo por un factor *unimodular* izquierdo.

13. Matrices primas relativas

- Decimos que dos matrices polinomiales con el mismo número de columnas son *primas relativas derechas* (o coprimas derechas) si todos sus MCD-Derechos (gcrd's) son unimodulares.

- **Lemma 6.3-5: Identidad simple de Bezout.** $N(s)$ y $D(s)$ son *coprimas derechas sí y solo si* existen matrices polinomiales $\mathbf{X}(s)$ y $\mathbf{Y}(s)$ tales que:

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I \tag{82}$$

Sustituyendo $N(s)$ y $D(s)$ en la identidad de Bezout y factorizando $R(s)$ se tiene:

$$I = \left[X(s)\bar{N}(s) + Y(s)\bar{D}(s)\right] R(s) \tag{83}$$

Entonces:

$$R^{-1}(s) = X(s)\bar{N}(s) + Y(s)\bar{D}(s) \tag{84}$$

- Que es polinomial, lo que implica que $R(s)$ es *unimodular*, lo que implica que $\{D(s), N(s)\}$ son *coprimas derechas.*

- **Definición:** una matriz polinomial es *irreducible* si es de rango pleno para toda s.

- **Lemma 6.3-6: Criterio del rango para determinar si dos matrices son primas relativas:** $N(s)$ y $D(s)$ son primas relativas (coprimas) *sí y solo si* $\left[D^T(s)\ N^T(s)\right]^T$ tiene ranglo pleno para toda s (esto es, *sí y solo si* $\left[D^T(s)\ N^T(s)\right]^T$ es irreducible).

- Para una matriz polinomial $P(s)$, diremos que $s = \lambda$ es un valor propio de $p(s)$ si la ecuación:
$$P(\lambda)p(\lambda) = 0 \tag{85}$$
se satisface con $p(\lambda) \neq 0$.

- A dicha solución $p(\lambda)$ se le llama *vector latente* de $P(s)$ mientras que a λ se le conoce como *Raíz latente* de $P(s)$.

- **Lemma 6.3-7: Raíces latentes para caracterizar matrices primas relativas**. $N(s)$ y $D(s)$ son primas relativas (coprimas) *sí y solo si* no tienen vectores latentes ni raíces latentes asociadas en común:
$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} p(s) = 0 \iff p(s) = 0 \tag{86}$$

14. MCD-Derechas (Gcrd's) para varias matrices y matrices irreducibles

- Un MCD-Derecho (gcrd) del conjunto de matrices $\{A_i(s), i = 1, \ldots, L\}$ todos con el mismo número de columnas es cualquier matriz $R(s)$ tal que:

- 1)- $R(s)$ es un divisor derecho de $\{A_i(s), i = 1, \ldots, L\}$ si existen matrices polinomiales tales que:
$$A_i(s) = \bar{A}_i(s)R(s) \quad i = 1, \ldots, L \tag{87}$$

- 2)- Si $R_1(s)$ es cualquier otro divisor derecho, entonces $R_1(s)$ *es divisor derecho* de $R(s)$ y entonces:
$$R(s) = W(s)R_1(s) \tag{88}$$

- Una matriz polinomial $P(s)$ de *rango completo por columnas* **es irreducible** si sus renglones son *coprimos derechos.*

- Una matriz cuadrada irreducible es *unimodular.*

15. MFD's irreducibles izquierdas a partir de MFD's derechas

- Para construir un MCD-Derecho (gcrd):
$$\begin{array}{c} \\ m \\ p \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ m \\ p \end{array} \tag{89}$$

- **Lemma 6.3-8 MFD's izquierdas a partir de MFD's Derechas:** Con respecto a (85) cuando $D(s)$ es **no singular**, se cumple que:

- **a)** $U_{22}(s)$ es no singular.

- **b)** $N(s)D^{-1}(s) = -U_{22}(s)U_{21}(s)$

- **c)** $\{U_{21}(s), U_{22}(s)\}$ serán coprimas izquierdas, esto es, $U_{21}(s)\ U_{22}(s)$ serán una *MFD irreducible izquierda.*

- **d)** si $\{N(s), D(s)\}$ son coprimos, entonces:
$$\deg \det D(s) = \deg \det U_{22}(s) \tag{90}$$

  En otras palabras, de una MFD derecha, $N(s)D^{-1}(s)$ se puede obtener una MDF izquierda irreducible en el proceso de encontrar un MCD-Derecho (gcrd) de los elementos de la MFD-Derecha.

- **Lemma 6.3-9. Identidad de Bezout generalizada** Sea $\{N_R(s), D_R(s)\}$ *coprimos derechos*, con $D_R(s)$ *no singular*. Entonces existen matrices polinomiales $\{X(s), Y(s), X^*(s), Y^*(s)\}$ tales que:

$$\begin{bmatrix} -X(s) & Y(s) \\ D_L(s) & N_L(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_R(s) & X^*(s) \\ D_R(s) & Y^*(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{91}$$

Y

$$\begin{bmatrix} -N_R(s) & X^*(s) \\ D_R(s) & Y^*(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X(s) & Y(s) \\ D_L(s) & N_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{92}$$

- Mas aún, los bloques en (87) y (88) serán todos *unimodulares*. Se nombrará a (87) como *forward Bezout identity* y a (88) como *reversed Bezout identity*.

16. Matrices columna reducidad, Fila reducidad y algunas aplicaciones

- Una matriz de transferencia racional $H(s)$ se dice *propia si*:

$$\lim_{s\to\infty} H(s) < \infty \tag{93}$$

- Y es **estrictamente propia** si:

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = 0 \tag{94}$$

- **Lemma 6.3-10. Grados de la columna de una función de transferencia propia:** Si $H(s)$ es una función de transferencia *estricamente propia* y

$$H(s) = N(s)D^{-1}(s)$$

- Entonces toda columna de $N(s)$ tiene grado estrictamente menor que (menor que o igual que) la correspondiente columna de $D(s)$.

- Se asignará el grado:

$$k_i \triangleq \text{ el grado de la i-ésima columna de } D(s) \tag{95}$$

Es fácil de ver que:

$$\text{deg det } D(s) \leq \sum_{1}^{m} k_i \tag{96}$$

La desigualdad se puede deber a posibles cancelaciones, sin embargo, si $D(s)$ es tal que la igualdad permanece, diremos que $D(s)$ es *columna reducida*.

- En general de puede escribir una matriz polinomial como:

$$D(s) = D_{hc}(s) + L(s) \tag{97}$$

un matriz cuya i-ésima columna incluye los coeficientes de s^{k_i} en la i-ésima columna de $D(s)$, donde: $S(s) \triangleq \text{diag}\left\{s^k, i = 1, \ldots, m\right\}$ y D_{hc} = la matriz conteniendo a los coeficientes de los términos de mayor grado de cada columna es llamada la matriz de la columna líder de $D(s)$.

- Finalmente $L(s)$ denota los términos *remanentes* y es una matriz polinomial con los grados de sus columnas estrictamente menores que los de $D(s)$. Entonces:

$$\text{det } D(s) = (\text{det } D_{hc})s^{\Sigma_i k_i} + \text{ términos de manor grado en } s \tag{98}$$

- Una matriz polinomial no singular es columna reducida *sí y solo si* la matriz de coeficientes líder (columna) es *no singular*.

- **Lemma 6.3-11. Propiedades de $N(s)D^{-1}(s)$ cuando $D(s)$ es columna reducida:** Si $D(s)$ es columna reducida, entonces $H(s) = N(s)D^{-1}(s)$ es estrictamente propia *sí y solo si* cada columna de $N(s)$ tiene menor grado que (menor que o igual que) el grado de la correspondiente columna de $D(s)$.
Aplicando regla de Cramer:

$$h_{ij}(s) = \frac{\det D^{ij}(s)}{\det D(s)}$$

Donde $D^{ij}(s)$ es la matriz obtenida reemplazando la j-ésima fila de $D(s)$ por la i-ésima fila de $N(s)$.
$D^{ij}(s)$ puede escribirse:

$$D^{ij}(s) = (D^{ij}_{hc}S(s) + L^{ij}(s))$$
$$\deg\det D(s) = \deg\det S(s) = \sum_{1}^{m} k_i$$
$$\deg\det D^{ij} < \sum_{1}^{m} k_i$$

Es por esto que $h_{ij}(s)$ es estrictamente propio.

- **Ejemplo para obener una matriz columna reducida:**

$$D_3(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2)^2 & -(s+1)^2(s+2) \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

Examinando los términos de mayor orden, se puede hacer:

$$\begin{bmatrix} s^4 & -s^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -s^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$D_3(s)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2s^3 + 8s^2 + 10s + 4 & -(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) \\ s^2 + 2s & s+2 \end{bmatrix}$$

$$D_3(s)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & s^3 + 4s^2 + 5s + 2 \\ s^2 + 4s + 4 & s+2 \end{bmatrix}$$

- **Una equación importante:** Muchos problemas se convierten en preguntar si $H(s)D(s) = N(s)$, donde $N(s)$ y $D(s)$ son matrices polinomiales de $p \times r$ y $m \times r$, con $D(s)$ de rango pleno por columnas $r \leq m$, tiene una solución racional propia $H(s)$. Un criterio puede ser obtenido usando la definición [8]:
Una matriz de rango pleno por columnas se dirá columna reducida si la matriz líder (columna) tiene rango pleno por columnas.

- **Teorema 6.3-12. Soluciones propias de ecuaciones racionales de matrices:** Considerando la ecuación $H(s)D(s) = N(s)$, donde $N(s)$ y $D(s)$ son matrices polinomiales de $p \times r$ y $m \times r$, con $D(s)$ de rango pleno por columnas $r \leq m$. Formando la matriz $F(s) \triangleq \left[D^T(s), N^T(s)\right]^T$ y usando operaciones elementales por columna para transformar la ecuación a: $\bar{F}(s) \triangleq \left[\bar{D}^T(s), \bar{N}^T(s)\right]^T$, donde $\bar{D}(s)$ es columna reducida. Entonces existe una $H(s)$ propia *sí y solo si* cada columna de $\bar{N}(s)$ tiene grado menor o igual que cada columna correspondiente de $\bar{D}(s)$.

- **Teorema 6.3-13. The Predictable-Degree Property of Column-Reduced Matrices:** Sea $D(s)$ una matriz polinomial de rango completo por columnas, y para algún vector polinomial $p(s)$, sea:

$$q(s) = D(s)p(s) \tag{99}$$

Entonces $D(s)$ es columna reducida *sí y solo si*:

$$\deg q(s) = \max_{i:p_i(s)\not\equiv 0}[\deg p_i(s) + k_i] \tag{100}$$

donde $p_i(s)$ es la i-ésimo elemento de $p(s)$ y k_i es el grado de la i-ésima columna de $D(s)$.

- **Invarianza de los grados por columna de la matrices columna reducida:** Sea $D(s)$ y $\bar{D}(s)$ una matriz polinomial columna reducida, con grados de columna en orden, por ejemplo de forma ascendente. Entonces si:

$$D(s) = \bar{D}(s)U(s), \quad U(s) \text{ unimodular} \tag{101}$$

$D(s)$ y $\bar{D}(s)$ tendrán el mismo grado por columnas.

17. Teoremas de División para matrices polinomiales:

- Dadas matrices $\{N(s), D(s)\}$, con $D(s)$ una matriz polinomial **no singular** de $m \times m$. Entonces dada $N(s)$ de $p \times m$, *siempre es posible encontrar* matrices polinomiales $Q(s)$ y $R(s)$ tal que:

$$N(s) = Q(s)D(s) + R(s) \tag{102}$$

Con $R(s)D^{-1}(s)$ *estrictamente propia.*

- Además, de $N(s) = Q(s)D(s) + R(s)$, se tiene que $Q(s)$ y $R(s)$ **son únicos**.

- **Corolario: División por $sI - A$:** Sea:

$$F(s) = F_0 s^n + F_1 s^{n-1} + \cdots F_n \tag{103}$$

Una matriz polinomial y sea:

$$F_r(A) = F_0 A^n + F_1 A^{n-1} + \cdots + F_n I \tag{104}$$

$$F_l(A) = A^n F_0 + A^{n-1} F_1 + \cdots + I F_n \tag{105}$$

- El valor izquierdo y derecho de $F(s)$ en $s = A$:

$$F(s) = Q_r(s)(sI - A) + R_r, \quad R_r \triangleq F_r(A) \tag{106}$$

$$F(s) = (sI - A)Q_l(s) + R_l, \quad R_r \triangleq F_l(A) \tag{107}$$

Donde $Q_r(s) = F_0 s^{n-1} + (F_0 A + F_1)s^{n-2} + \cdots + (F_0 A^{n-1} + \cdots + F_{n-1})$

- **Ejemplo:** Sea

$$F(s) = \begin{pmatrix} s^3 + 2 & 2s + 2 \\ s^2 + s + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

una matriz polinomial y sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Escribir $F(s)$ de la forma: $F(s) = Q_r(s)(sI - A) + R_r$. Entonces, $n = 3$, es el grado mayor de la matriz:

$$F(s) = F_0 s^3 + F_1 s^2 + F_2 s + F_3$$

Expresando $Q_r(s)$, R_r:

$$Q_r(s) = F_0 s^2 + (F_0 A + F_1)s + (F_0 A^2 + F_1 A + F_2)$$

$$R_r \triangleq F_r(A)$$

$$F_r(A) = F_0 A^3 + F_1 A^2 + F_2 A + F_3 I$$

Se tiene como resultado:

$$F(S) = \begin{pmatrix} s^2 + s + 1 & 2s + 8 \\ s + 2 & 2 \end{pmatrix} (sI - A) + \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

18. Forma de Smith

- **Teorema 6.3-16: Forma de Smith.** Para cualquier matriz polinomial $P(s)$ de $p \times m$ podemos encontrar por operaciones elementales de filas y columnas, matrices unimodulares $\{U(s), V(s)\}$ tales que:

$$U(s)P(s)V(s) = \Lambda(s) \tag{108}$$

donde:

$$\Lambda(s) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & \lambda_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & 0 & & \vdots & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ r \\ \\ \\ p - r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad r & \qquad\qquad m - r \end{array} \end{array} \tag{109}$$

- Con r = rango normal de $P(s)$ y $\{\lambda_i(s)\}$ son polinomios mónicos que obedecen la propiedad de la división:

$$\lambda_i(s) | \lambda_{i+1}(s) \quad \forall i = 1, \ldots, r - 1 \tag{110}$$

- Se define $\Delta_i(s)$:= máximo común divisor (gcd) de todos los menores de orden $i \times i$ de $P(s)$ entonces:

$$\lambda_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}, \quad \text{con } \Delta_0(s) = 1 \tag{111}$$

- La matriz $\Lambda(s)$ es llamada la *forma de Smith* de $P(s)$.
- $\{\lambda_i(s)\}$ son los polinomios invariantes de $P(s)$.
- $\{\Delta_i(s)\}$ son los divisores determinantales de $P(s)$. También es el gcd de tosos los menores de orden $i \times i$ de $P(s)$ depende sólo de $P(s)$ y es independiente de las operaciones fila y columna sobre $P(s)$. Por lo que se puede identificar:

$$\Delta_i(s) := \text{ gcd de todos los menores de orden } i \times i \text{ de } \Lambda(s) \tag{112}$$

- La forma de $\Lambda(s)$ muestra que:

$$\Delta_1 = \lambda_1 \ , \ \Delta_2 = \lambda_1 \lambda_2 \ , \ \ldots \ , \ \Delta_i = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i \tag{113}$$

Con $\Delta_0 = 1$ Entonces:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \ \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \ \lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \tag{114}$$

- **Comentario:** Aunque $\Lambda(s)$ es única, las matrices unimodulares $U(s)$, $V(s)$ no son únicas. Se dice que si $P_1(s)$ y $P_2(s)$ tienen la misma forma de Smith:

$$P_1(s) \ \underline{S} \ P_2(s) \tag{115}$$

- Es decir $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son equivalentes bajo operaciones filas y columna.
- De estas relación, se obtiene una relación de equivalencia:

$$P_1(s) \ \underline{S} \ P_2(s) \implies P_2(s) \ \underline{S} \ P_1(s) \tag{116}$$
$$P_1(s) \ \underline{S} \ P_1(s) \tag{117}$$
$$P_1(s) \ \underline{S} \ P_2(s), \ P_2(s) \ \underline{S} \ P_3(s) \implies P_1(s) \ \underline{S} \ P_3(s) \tag{118}$$

- **Lemma 6.3-17: Purueba de la forma de Smith para primos relativos.** $N(s)$ y $D(s)$ son coprimos derechos *sí y solo si* la forma de Smith de $\left[D^T(s) \ N^T(s)\right]^T$ es $[I \ 0]^T$.