Formulario Probabilidad y Procesos Estocásticos Segundo Parcial

Roberto Navarro Castañeda

Noviembre 2023

1. Function of One Random Variable

1.1. Determinacion de la Distribución y Densidad

- Dado $\mathbf{Y}$, se demona I_y al conjunto de reales x tales que $g(x) \leq y$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}) \tag{1}$$

- $x \in I_y$ sí y solo si $g(x) \leq y$. Se define la función de distribución de y:

$$\mathbf{F_y}(y) = P(\mathbf{y} \leq y) = P(g(\mathbf{x}) \leq y) \tag{2}$$

- Para determinar $F_y(y)$ para un valor y dado, se debrá encontrar una I_y y la probabilidad de los valores de la V.A X que esté en I_y.
- La densidad de $\mathbf{y}$ se define:

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \frac{dF_{\mathbf{y}}(y)}{dy} \tag{3}$$

1.2. Determnation of the distribution and density of $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$

- Para una función de variable aleatoria dada como una recta:

$$\mathbf{y} = a\mathbf{x} + b \tag{4}$$

- Se condisera $a > 0$, entonces

$$ax + b \leq y \quad \text{para} \quad x \leq \frac{y-b}{a} \tag{5}$$

- y el conjunto I_y es el eje x de $-\infty$ a $\frac{(y-b)}{a}$, es por eso que:

$$F_{\mathbf{y}}(y) = P(\mathbf{y} \leq y) = P(\mathbf{x} \leq \frac{y-b}{a}) = F_{\mathbf{x}}(\frac{y-b}{a}) \quad a > 0 \tag{6}$$

- Si $a<0$, entonces

$$ax + b \leq y \quad \text{para} \quad x \geq \frac{y-b}{a} \tag{7}$$

- y se concluye

$$F_{\mathbf{y}}(y) = P(\mathbf{y} \leq y) = P(\mathbf{x} \geq \frac{y-b}{a}) = 1 - F_{\mathbf{x}}(\frac{y-b}{a}) \quad a<0 \tag{8}$$

1.3. Teorema fundamental

- Sea la V.A $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ para encontrar $f_{\mathbf{y}}(y)$ para un valor dado y se debe resolver

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \tag{9}$$

- Encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación. Sean las soluciones $x_1, ..., x_n$:

$$y = g(x_1) = \cdots = g(x_n) \tag{10}$$

- entonces:

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \frac{f_{\mathbf{x}}(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_{\mathbf{x}}(x_n)}{|g'(x_n)|} \tag{11}$$

- donde $g'(x_i) = \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_i}$
- Ejemplo:
- Así sea la V.A $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) = a\mathbf{X} + b$

$$x = \frac{y-b}{a} \tag{12}$$

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = a \tag{13}$$

$$\left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=\frac{y-b}{a}} = a \tag{14}$$

- Sustituyendo

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \frac{1}{|a|} f_{\mathbf{x}}(\frac{y-b}{a}) \tag{15}$$

- Ejemplo 2:
- Sea la V.A $\mathbf{X}$ uniformemente distribuidad den $[x_1, x_2]$ y $a>0$

$$f_{\mathbf{x}}(\frac{y-b}{a}) = \begin{cases} \frac{1}{x_2-x_1} & x_1 \leq \frac{y-b}{a} \leq x_2 \\ 0 & Otros \end{cases}$$

- Para $b + ax_1 < y < b + ax_2$ por tanto

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{|a|}\frac{1}{x_2-x_1} & b + ax_1 < y < b + ax_2 \\ 0 & Otros \end{cases}$$

1.4. Densidad Condicional de $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$

- Para determinar $f_{\mathbf{y}}(y|m)$ es suficiente con encontrar $f_{\mathbf{x}}(x|m)$

$$f_{\mathbf{y}}(y|m) = \frac{f_{\mathbf{x}}(x_1|m)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_{\mathbf{x}}(x_n|m)}{|g'(x_n)|} + \ldots \tag{16}$$

- Ejemplo:
- La V.A $\mathbf{y}$ está dada por

$$\mathbf{y} = a\mathbf{x}^2 \quad a>0 \tag{17}$$

- La densidad condicional asumiendo $x \geq 0$

$$f_{\mathbf{x}}(x|\mathbf{x} \geq 0) = \frac{f_{\mathbf{x}}(x)}{1 - F_{\mathbf{x}}(0)} U(x) \tag{18}$$

1.5. Esperanza matemática

- El valor esperado o *mean* de una V.A real $\mathbf{X}$ se define:

$$E(\mathbf{X}) = \eta = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \tag{19}$$

- Donde $f(x)$ es la densidad de $\mathbf{X}$. Ahora, si $\mathbf{X}$ es una V.A discreta:

$$E(\mathbf{X}) = \sum_n x_n P(\mathbf{x} = x_n) = \sum_n x_n p_n \tag{20}$$

1.6. Propiedades de la esperanza matemática

- Multiplicación por una constante

$$E(c\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} cxf(x)\, dx = c\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx = cE(\mathbf{X}) \tag{21}$$

- Si $f(x)$ es par, entonces $f(x) = f(-x)$ y

$$E(\mathbf{X}) = 0 \tag{22}$$

- Si $f(x)$ es simétrica alrededor de $x = a$ entonces

$$E(\mathbf{X}) = a \tag{23}$$

- La esperanza es *lineal*

$$E(a\mathbf{X} + b) = aE(\mathbf{X}) + b \tag{24}$$

- La esperanza condicional

$$E(\mathbf{X}|m) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|m)\, dx \tag{25}$$

- Ejemplo:

$$E(\mathbf{X}|\mathbf{X} \geq a) = \frac{\int_a^{\infty} xf(x)\, dx}{\int_a^{\infty} f(x)\, dx} \tag{26}$$

- Para el caso discreto

$$E(\mathbf{X}|m) = \sum_n x_n P(\mathbf{x} = x_n|m) \tag{27}$$

- Para eventos $a_1, \dots, a_n$ mutuamente excluyentes y la suma de estos es igual al evento cierto S:

$$E(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}|a_1)P(a_1) + \cdots + E(\mathbf{X}|a_n)P(a_n) \tag{28}$$

- La esperanza de $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$

$$E(\mathbf{Y}) = E(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\mathbf{X}}(x)\ dx \tag{29}$$

- Si $\mathbf{X}$ es una V.A discreta

$$E(\mathbf{Y}) = E(g(\mathbf{X})) = \sum_k g(x_k) P(\mathbf{x} = x_k) \tag{30}$$

- Adtividad: $\mathbf{Y} = g(x) = g_1(x) + \cdots + g_n(x)$

$$E(\mathbf{Y}) = E(g(\mathbf{x})) = E(g_1(\mathbf{x})) + \cdots + E(g_n(\mathbf{x})) \tag{31}$$

- Caso particular

$$P(y < \mathbf{Y} < y + dy) = p(x \leq \mathbf{X} \leq x + dx) \tag{32}$$

$$f_{\mathbf{Y}}(y) dy = f_{\mathbf{x}}(x) dx \tag{33}$$

$$\mathbf{Y} f_{\mathbf{Y}}(y) dy = g(x) f_{\mathbf{x}}(x) dx \tag{34}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y f_{\mathbf{Y}}(y)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\mathbf{x}}(x)\ dx \tag{35}$$

1.7. El valor más probable de X y la mediana de X

- El valor más probable de $\mathbf{X}$ es el valor $\mathbf{X} = x_1$ donde $f(x_1)$ es máximo.
- La mediana de $\mathbf{X}$ es el valor de $\mathbf{X} = x_m$ donde $P(\mathbf{X} \leq x_m) = F(x_m) = \frac{1}{2}$.

1.8. Varianza

- La *varianza* o *dispersión* se define:

$$\sigma^2 = E((\mathbf{X} - \eta)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \eta)^2 f(x)\ dx \tag{36}$$

- Para el caso discreto:

$$\sigma^2 = \sum_n (x_n - \eta)^2 P(\mathbf{x} = x_n) \tag{37}$$

- Propiedad de la *varianza*:

$$\sigma^2 = E(\mathbf{X}^2) - E^2(\mathbf{X}) \tag{38}$$

$$\sigma^2 = E(\mathbf{X}^2) - \eta^2 \tag{39}$$

- La **desviación estandar** se define como la **raíz cuadrada de** σ^2
- **Esperanza y varianza de una densidad normal**

$$f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2b^2}} \tag{40}$$

- Como la densidad es simétrica respecto a $x = a$:

$$\eta = E(\mathbf{X}) = a \tag{41}$$

- Y su *varianza* σ^2

$$E((\mathbf{X} - a)^2) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{\frac{-(x-a)^2}{2b^2}}\ dx = b^2 \tag{42}$$

- **La esperanza y densidad de Poisson-distribución**

$$P(\mathbf{X} = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!} \qquad k = 0, 1, ... \tag{43}$$

$$E(\mathbf{X}) = a \qquad \sigma^2_{\mathbf{X}} = a \tag{44}$$

1.9. Momentos

- El k-ésimo momento de una V.A $\mathbf{X}$ se define

$$m_k = E(\mathbf{X}^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\ dx \tag{45}$$

- Es claro que:

$$m_0 = E(\mathbf{X}^0) = 1 \qquad m_1 = \eta = E(\mathbf{X}) \tag{46}$$

- Se define el **k-ésimo momento central** de una V.A $\mathbf{X}$

$$\mu_k = E((\mathbf{X}-\eta)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\eta)^k f(x)\ dx \tag{47}$$

- La **varianza** σ^2 es el segundo momento cenral $\mu_2 = \sigma^2$
- El **k-ésimo momento absoluto generalizado** de una V.A $\mathbf{X}$ se define:

$$M_k = E(|\mathbf{X}|^k) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)\ dx \tag{48}$$

- Los **k-ésimos momentos generalizados** de una V.A aleatoria

$$m_{k,a} = E((\mathbf{X}-a)^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k f(x)\ dx \tag{49}$$

- Los **k-ésimos momentos absolutos generalizados** de una V.A aleatoria

$$M_{k,a} = E(|\mathbf{X}-a|^k) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a|^k f(x)\ dx \tag{50}$$

- Los momentos, media y varianza de una V.A $\mathbf{X}$ uniformemente distribuida en el intervalo $[-c, c]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & x \in [-c, c] \\ 0 & Otros \end{cases}$$

Por (22) $f(x) = 0$ para potencias pares:

$$\int_{-c}^{c} x^{2n} f(x)\ dx = \int_{-c}^{c} x^{2n} \frac{1}{2c}\ dx \tag{51}$$

$$= \frac{2}{2c} \int_{-c}^{c} x^n\ dx \tag{52}$$

$$= \frac{c^{2n}}{2n+1} \tag{53}$$

$$n = 1 \implies \sigma^2 = \frac{c^2}{3} \tag{54}$$

1.10. Momentos de una V.A normal

- Suponiendo una V.A $\mathbf{X}$ con media cero

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{55}$$

- Los momentos se definen:

$$E(x^n) = \begin{cases} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)]\sigma^{2k} & n\ par \\ 0 & n\ impar \end{cases}$$

- Y los momentos absolutos generalizados

$$E|x|^n = \begin{cases} [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)]\sigma^{2k} & para\ n = 2k \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k! \sigma^{2k+1} & para\ n = 2k+1 \end{cases}$$

1.11. Momentos de una V.A con densidad gamma

- Como $\mathbf{X}$ es gamma

$$f(x) = \frac{c^{b+1}}{\Gamma(b+1)} x^b e^{-cx} U(x) \tag{56}$$

- Se define al n-ésimo momento:

$$E(\mathbf{X}^n) = \frac{\Gamma(n+b+1)}{c^n \Gamma(b+1)} = \frac{(n+b)\cdots(2+b)(1+b)}{c^n} \tag{57}$$

- De aquí

$$\eta = E(\mathbf{X}) = \frac{b+1}{c} \tag{58}$$

$$E(\mathbf{X}^2) = \frac{(b+1)(b+2)}{c^2} \tag{59}$$

$$\sigma^2 = E(\mathbf{X}^2) - \eta^2 = \frac{b+1}{c^2} \tag{60}$$

1.12. Desigualdad de Tchebycheff

- Suponiendo una V.A $\mathbf{X}$ con densidad arbitraria $f(x)$ y varianza finita σ^2:

$$P(|\mathbf{X}-\eta_x| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}\ con\ \eta_x = E(\mathbf{X}) \tag{61}$$

- Con la media y varianza se da una aproximación de la probabilidad. Significa que la probabilidad de que la distancia de las $\mathbf{X}$ estén alrededor de la media, sea mayor que k-veces σ, es menor que $\frac{1}{k^2}$

1.13. Desigualdad de Bienaymé

- Lema: Sea $\mathbf{Y}>0$ una V.A tal que $f_y = 0$ para $y<0$ y sea $\alpha>0$ una cte. entonces:

$$P(\mathbf{Y} \geq \alpha) \leq \frac{E(\mathbf{Y})}{\alpha} \tag{62}$$

- **Desigualdad de Bienaymé**: Sea $\mathbf{Y} = |\mathbf{X} - a|^n$ la cual es obviamente positiva. Usando el lema anterior con esta $\mathbf{Y}$ y $\alpha = \epsilon^n$ se tiene que:

$$P(|\mathbf{X} - a|^n > \epsilon^n) \leq \frac{E(|\mathbf{X} - a|^n)}{\epsilon^n} \tag{63}$$

- De aquí:

$$P(|\mathbf{X} - a| > \epsilon) \leq \frac{E(|\mathbf{X} - a|^n)}{\epsilon^n} \tag{64}$$

1.14. Evaluación aproximada de la media y la varianza de $g(\mathbf{X})$

- Si g(x) es suave para valores alrededor de $E(\mathbf{X}) = \eta$, entonces tiene que:

$$E(g(\mathbf{X})) \approx g(\eta) \tag{65}$$

$$E(g(\mathbf{X})) \approx g(\eta) + \frac{\sigma^2}{2!} g''(\eta) \tag{66}$$

- Ahora

$$\sigma^2_{g(\mathbf{X})} = \sigma^2 g'(\eta)^2 \tag{67}$$

1.15. Función Característica

- La función característica se define:

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = E(e^{j\omega\mathbf{X}}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f(x)\, dx \tag{68}$$

- Si $\mathbf{X}$ es del tipo discreto:

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = \sum_n e^{j\omega x_k} P(\mathbf{X} = x_k) \tag{69}$$

- La *Segunda función característica* se define:

$$\Psi_{\mathbf{X}}(\omega) = \ln \Phi_{\mathbf{X}}(\omega) \tag{70}$$

- **Propiedades**:

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega 0} f(x)\, dx = 1 \implies \Psi(0) = 0 \tag{71}$$

- **Ejemplo**: Calcular $\Phi_{\mathbf{Y}}$ para $\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(\omega) = E(e^{j\omega y}) = E(e^{j\omega(a\mathbf{X}+b)}) = e^{j\omega b} E(e^{j\omega a\mathbf{X}}) \tag{72}$$

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(\omega) = e^{j\omega b} \Phi_{\mathbf{X}}(a\omega) \tag{73}$$

- **Ejemplo**: Calcular $\Phi_{\mathbf{Y}}$ para $f_{\mathbf{X}}(x) = \alpha e^{-\alpha} U(x)$ $\alpha>0$

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = E(e^{j\omega\mathbf{X}}) = \int_0^{\infty} e^{j\omega x} \alpha e^{-\alpha x}\, dx \tag{74}$$

$$\int_0^{\infty} e^{j\omega x} \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha - j\omega} \tag{75}$$

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha - j\omega} \tag{76}$$

- **Función caracterísitca de una V.A X con densidad Γ**

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha - j\omega)^{n+1}} \tag{77}$$

- **Función caracterísitca de una V.A X con distribución binomial**

$$P(\mathbf{X} = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{78}$$

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = (e^{j\omega} p + q)^n \tag{79}$$

- **Función caracterísitca de una V.A X con distribución de Poisson**

$$P(\mathbf{X} = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!} \tag{80}$$

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = e^{a(e^{j\omega} - 1)} \tag{81}$$

- **Fórmula de inversión**

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\mathbf{X}} e^{-jx\omega}\ d\omega \qquad (82)$$

- **Distribución expresada en términos de** $\Phi(x)$

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx \qquad (83)$$

- Sustituyendo

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\frac{e^{-j\omega x_2} - e^{-j\omega x_1}}{-j\omega}\Phi(\omega)\ d\omega \qquad (84)$$

$$P(x_1 \leq \mathbf{X} \leq x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\frac{e^{-j\omega x_2} - e^{-j\omega x_1}}{-j\omega}\Phi(\omega)\ d\omega \qquad (85)$$

- Determinación de la densidad de $g(x) = y$

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(\omega) = E(e^{j\omega g(x)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega g(x)} f(x)_{\mathbf{X}}\ dx \qquad (86)$$

1.16. Teorema del momento

- Las derivadas de la función caracterísitca de una V.A $\mathbf{X}$ están relacionadas con sus momentos de la siguiente forma:

$$\left.\frac{d^n\Phi(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} = j^n m_n \qquad (87)$$

- Donde $m_n = E(\mathbf{X}^n)$

- Ejemplo: Sea una V.A $\mathbf{X}$ con distribución. $\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = (pe^{j\omega} + q)^n \quad con \quad p + q = 1$ calcular m_1, m_2 y σ^2

$$\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = n(pe^{j\omega} + q)jpe^{j\omega} \qquad (88)$$

$$\frac{d^2\Phi(\omega)}{d\omega^2} = jnp[j(pe^{j\omega}+1)^{n-1}e^{j\omega}+e^{j\omega}(n-1)(pe^{j\omega}+q)^{n-2}+jpe^{j\omega}] \qquad (89)$$

$$\left.\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = n(p+q)^{n-1}jp = jnp \qquad (90)$$

$$\left.\frac{d^2\Phi(\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} = jnp[j+(n-1)jp] = (npq+n^2p^2)j^2 \qquad (91)$$

$$jm_1 = jnp \implies m_1 = np = E(\mathbf{X}) \qquad (92)$$

$$j^2m_2 = j^2(npq+n^2p^2) \implies m_2 = npq+n^2p^2 = E(\mathbf{X}^2) \qquad (93)$$

$$\sigma^2 = E(\mathbf{X}^2) - (E(\mathbf{X}))^2 = npq+n^2p^2-n^2p^2 = npq \qquad (94)$$

1.17. Teorema de convolución

- Si $\Phi_1(\omega)$ y $\Phi_2(\omega)$ son las funciones características de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ entonces

$$\Phi_R(\omega) = \Phi_1(\omega)\Phi_2(\omega) \qquad (95)$$

1.18. Función característica de una V.A normal

- Si $\mathbf{X}$ es una V.A normal con *varianza* σ^2 y *esperanza* η definida: (η, σ^2) su función característica $\implies$

$$\Phi(\omega) = e^{j\eta\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \qquad (96)$$

2. Variables aleatorias conjuntas

2.1. Función de Distribución y densidad conjunto

- La función de distribución conjunta de las variables aleatorias $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ se define como:

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y) = P(\mathbf{X} \le x, \mathbf{Y} \le y) \tag{97}$$

- **Propiedades**

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\infty,\infty) = P(\mathbf{X} \le \infty, \mathbf{Y} \le \infty) = 1 \tag{98}$$

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,-\infty) = P(\mathbf{X} \le x, \mathbf{Y} \le -\infty) = P(\emptyset) = 0\ ; \tag{99}$$

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(-\infty,y) = P(\mathbf{X} \le -\infty, \mathbf{Y} \le y) = P(\emptyset) = 0\ ; \tag{100}$$

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,\infty) = P(\mathbf{X} \le x, \mathbf{Y} \le \infty) = P(\mathbf{X} \le x) = F_{\mathbf{X}}\ ; \tag{101}$$

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\infty,y) = P(\mathbf{X} \le \infty, \mathbf{Y} \le y) = P(\mathbf{Y} \le y) = F_{\mathbf{Y}} \tag{102}$$

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(-\infty,-\infty) = P(\mathbf{X} \le -\infty, \mathbf{Y} \le -\infty) = P(\emptyset) = 0 \tag{103}$$

$$P(x_1 < \mathbf{X} x_2, \mathbf{Y} \le y) = F_{\mathbf{XY}}(x_2,y) - F_{\mathbf{XY}}(x_1,y) \tag{104}$$

2.2. La función densidad conjunta

- Se define:

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{105}$$

- Si se tiene que $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ están en una **REGIÓN del plano**

$$P((\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in D) = \int\int_D f(x,y)\ dxdy \tag{106}$$

- Si se tiene que $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ están en un **SEGMENTO del plano**

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\ dxdy \tag{107}$$

- **Propiedades:**

$$F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\infty,\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dxdy \tag{108}$$

$$F_{\mathbf{X}}(x) = F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,\infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\, dxdy \tag{109}$$

$$F_{\mathbf{y}}(y) = F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\infty,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dydx \tag{110}$$

- derivando respecto a x y en (111) respecto a y

$$\frac{\partial F_{\mathbf{X}}(x)}{\partial x} = f_{\mathbf{X}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\, dy \tag{111}$$

$$\frac{\partial F_{\mathbf{Y}}(y)}{\partial y} = f_{\mathbf{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\, dx \tag{112}$$

- Para el caso discreto:

$$P(\mathbf{X} = x_k) = \sum_n P(\mathbf{X} = x_k, \mathbf{Y} = y_n) \tag{113}$$

$$P(\mathbf{Y} = y_n) = \sum_k P(\mathbf{X} = x_k, \mathbf{Y} = y_n) \tag{114}$$

2.3. Distribuciones y densidades condicionales

- La distribución condicional se define:

$$F_{\mathbf{Y}}(y|M) = P(\mathbf{Y} \le y|M) = \frac{P(\mathbf{Y} \le y, M)}{P(M)} \tag{115}$$

- 1 - Sea $M = (X \le x)$ con $\mathbf{X}$ tal que:

$$P(M) = P(\mathbf{X} \le x) = F_{\mathbf{X}}(x) \ne 0 \tag{116}$$

- Entonces:

$$F_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}\leq x)=\frac{P(\mathbf{Y}\leq y,\mathbf{X}\leq x)}{P(\mathbf{X}\leq x)} \quad (117)$$

$$F_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}\leq x)=\frac{F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)}{F_{X}(x)} \quad (118)$$

- La densidad condicional se encuentra derivando:

$$f_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}\leq x)=\frac{\frac{\partial}{\partial y}F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)}{F_{\mathbf{X}}(x)} \quad (119)$$

$$f_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}\leq x)=\frac{\int_{-\infty}^{x}f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\ dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\ dxdy} \quad (120)$$

- 2 - Suponiendo $M=(x_1<\mathbf{X}\leq x_2)\implies P(M)=F_{\mathbf{x}}(x_2)-F_{\mathbf{x}}(x_1)$

$$F_{\mathbf{Y}}(y|x_1<\mathbf{X}\leq x_2)=\frac{P(x_1<\mathbf{X}\leq x_2,\mathbf{Y}\leq y)}{P(x_1<\mathbf{X}\leq x_2)} \quad (121)$$

$$F_{\mathbf{Y}}(y|x_1<\mathbf{X}\leq x_2)=\frac{F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x_2,y)-F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x_1,y)}{F_{\mathbf{X}}(x_2)-F_{\mathbf{X}}(x_1)} \quad (122)$$

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(y|x_1<\mathbf{X}\leq x_2)=\frac{\int_{x_1}^{x_2}f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\ dy}{F_{\mathbf{X}}(x_2)-F_{\mathbf{X}}(x_1)} \quad (123)$$

- 3 - Suponiendo $M(\mathbf{X}=x)$ y $f_{\mathbf{X}}(x)\neq 0$

$$F_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y}f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\ dy}{f_{\mathbf{X}}(x)} \quad (124)$$

$$f_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}=x)=\frac{f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)}{f_{\mathbf{X}}(x)} \quad (125)$$

$$F_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y}=y)=\frac{\int_{-\infty}^{x}f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\ dx}{f_{\mathbf{Y}}(y)} \quad (126)$$

$$f_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y}=y)=\frac{f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)}{f_{\mathbf{Y}}(y)} \quad (127)$$

- **Propabilidad Total**

$$f_{y}(y|\mathbf{X}=x)=\frac{f_{\mathbf{XY}}(x,y)}{f_{\mathbf{X}}(x)}=\frac{f_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y}=y)f_{\mathbf{Y}}(y)}{f_{\mathbf{X}}(x)} \quad (128)$$

- 3 - Sea $M(\mathbf{X}\leq a,\mathbf{Y}\leq b)$

$$F_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}\leq a,\mathbf{Y}\leq b)=\frac{P(\mathbf{Y}\leq y,\mathbf{X}\leq a,\mathbf{Y}\leq b)}{P(\mathbf{X}\leq a,\mathbf{Y}\leq b)} \quad (129)$$

$$\begin{cases}1 & y\geq b\\ \frac{F_{\mathbf{XY}}(a,y)}{F_{\mathbf{XY}}(a,b)} & si \quad y<b\end{cases} \quad (130)$$

2.4. Esperanza Condicional

- La esperanza condicional se define:

$$E(g(\mathbf{Y})|M)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)f_{\mathbf{Y}}(y|M)\ dy \quad (131)$$

- Sea $M=(\mathbf{X}=x)$

$$E(g(\mathbf{Y})|\mathbf{X}=x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}g(y)f_{\mathbf{XY}}(x,y)\ dy}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathbf{XY}}(x,y)\ dy} \quad (132)$$

- $E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x)$ es un **número** $E(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ es una V.A. Si se toma $\mathbf{X}$ entero, está abierta porque no se le ha asignado un valor.

$$E(E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}))=E(\mathbf{Y}) \quad (133)$$

- **Ejemplo:** Sea un circuito con una fuente de voltaje constante y una resistencia en serie. Se tiene que $e=10$volts y $\mathbf{r}=1,000\Omega\pm10\,\%$ una V.A uniformemente distribuida entre 900 Ω y 1,000 Ω:

- Se desea determinar la media y varianza de la corriente $\mathbf{i}=\frac{e}{\mathbf{r}}$:

$$E(\mathbf{r})=\eta=1,000\implies\sigma^2=\frac{100^2}{3} \quad (134)$$

- con $g(\mathbf{r})=\frac{e}{\mathbf{r}}$

$$g(\eta)=\frac{e}{\eta}=10^{-2}\implies g'(\eta)=-\frac{e}{\eta^2}=-10^{-5} \quad (135)$$

$$g''(\eta)=\frac{2e}{\eta^3}=2\times10^{-3} \quad (136)$$

- Entonces

$$E(\mathbf{i})\simeq10^{-2}+\frac{10^{-4}}{3}=10^{-2}(1+\frac{1}{300});\quad\sigma_i^2\simeq\frac{10^{-6}}{3} \quad (137)$$

2.5. Variables aleatorias independientes

- Dos variables aleatorias se dicen independientes para cualquier x, y:

$$P(\mathbf{X} \leq x, \mathbf{Y} \leq y) = P(\mathbf{X} \leq x)P(\mathbf{Y} \leq y) \tag{138}$$

$$F_{\mathbf{XY}}(x,y) = F_{\mathbf{X}}(x)F_{\mathbf{Y}}(y) \tag{139}$$

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y) = f_{\mathbf{X}}(x)f_{\mathbf{Y}}(y) \tag{140}$$

- Además, si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son independientes:

$$f_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X}=x) = f_{\mathbf{Y}}(y) \tag{141}$$

$$f_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y}=y) = f_{\mathbf{X}}(x) \tag{142}$$

- Y

$$E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x) = E(\mathbf{Y}) \tag{143}$$

2.6. Variables aleatorias conjuntamente normales

- Dos V.A $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son conjuntamente normales si su densidad es de la forma:

$$f_{\mathbf{XY}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}[\frac{(x-\eta_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\eta_1)(y-\eta_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\eta_2)^2}{\sigma_2^2}]} \tag{144}$$

$$f_{\mathbf{XY}} = Be^{-\frac{1}{2(1-r^2)}[\frac{(x-\eta_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\eta_1)(y-\eta_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\eta_2)^2}{\sigma_2^2}]} \tag{145}$$

- Donde $\sigma_1^2 > 0$, $\sigma_2^2 > 0$ y $|r| < 1$ se le llama *coeficiente de correlación.*

- De lo anterior se obtiene:

$$E(x) = \eta_1 \ ; \ E(y) = \eta_2 \tag{146}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_1^2 \ ; \ \sigma_y^2 = \sigma_2^2 \tag{147}$$

- **Teorema** : Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son conjuntamente nroamles entonces las densidades de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son normales ($f_{\mathbf{XY}}$normales $\Longrightarrow$ f_x y f_y normales). Pero el inverso no es cierto.

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\eta_2)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{148}$$

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta_1)^2}{2\sigma_1^2}} \tag{149}$$

- Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son conjuntamente normales, entonces $f(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x)$ es normal:

$$f(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}[y-(\eta_2+\frac{\sigma_2(x-\eta_1)}{\sigma_1})]} \tag{150}$$

- Por lo que la media condicional queda:

$$\eta_{y|x} = E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x) = \eta_2 + \frac{\sigma_2 r(x-\eta_1)}{\sigma_1} \tag{151}$$

- Y la varianza condicional:

$$\sigma_{y|x}^2 = (1-r^2)\sigma_2^2 \tag{152}$$

3. Funciones de dos variables aleatorias

- Sea la V.A z:

$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \tag{153}$$

- La función de distribución de Z viene dad por:
$$F_{\mathbf{Z}}(z) = P(\mathbf{Z} \leq z) \tag{154}$$

- Para un valor dado z, se denota por D_z la región del plano xy tal que $g(x,y) \leq z$ entonces:
$$F_{\mathbf{Z}}(z) = P(\mathbf{Z} \leq z) = P((\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in D_z) \tag{155}$$

- Para determinar $F_{\mathbf{Z}}(z)$ para un valor z dado, se deberá encontrar la región D_z y la prob. de que los valores de la V.A x, y estén en ella:
$$F_{\mathbf{Z}}(z) = P(\mathbf{Z} \leq z) = P((\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in D_{\mathbf{Z}}) = \int\int_{D_{\mathbf{Z}}} f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x,y)\, dxdy \tag{156}$$

3.1. Teorema de convolución

- Si las V.A de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son **independientes**, entonces la densidad de su suma $\mathbf{Z} = \mathbf{X}+\mathbf{Y}$ es igual a la convolucón de sus densidades:
$$f_{\mathbf{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y) f_y(y)\ dy \tag{157}$$

3.2. Dos funciones de dos variables aleatorias

- Dadas dos funciones $g(x,y)$ y $h(x,y)$ de dos variables reales x e y y dos V.A $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, se forman las V.A:
$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \qquad \mathbf{W} = h(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \tag{158}$$

- La densidad y distribución conjunta se define:
$$F_{\mathbf{Z},\mathbf{W}}(z,w) \qquad f_{\mathbf{Z},\mathbf{W}}(z,w) \tag{159}$$

- Para determinar $f_{\mathbf{Z},\mathbf{W}}(z,w)$:
$$f_{\mathbf{Z},\mathbf{W}}(z,w) = \frac{f_{\mathbf{Z},\mathbf{W}}(z_1,w_1)}{|J(x_1,y_1)|} + \cdots + \frac{f_{\mathbf{Z},\mathbf{W}}(z_n,w_n)}{|J(x_n,y_n)|} + \ldots \tag{160}$$

- Donde:
$$J(x,y) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{161}$$

3.3. Variable auxiliar

- La determinación de la densidad **una función**:
$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \tag{162}$$

- de dos V.A aleatorias $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ es a veceses facilitado introduciendo una variable auxiliar
$$\mathbf{W} = \mathbf{X} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{W} = \mathbf{Y} \tag{163}$$

- Se detemina primero con la densidad conjunta de Z y W. Y la densidad desconocida z se encuentra integrando:
$$f_{\mathbf{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{ZW}}(z,w)\ dw \tag{164}$$

- **Ejemplo:**

- Encontrar la densidad $\mathbf{Z} = \mathbf{X}+\mathbf{Y}$ usando la variable auxiliar $\mathbf{W} = \mathbf{Y}$:
$$z = x + y \quad ; \quad w = y \quad \Downarrow \tag{165}$$
$$x = z - w \quad ; \quad y = w \quad \Downarrow \tag{166}$$
$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Downarrow \tag{167}$$
$$\therefore f_{\mathbf{ZW}}(z,w) = f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(z-w,w) \quad \Downarrow \tag{168}$$
$$\therefore f_{\mathbf{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{XY}}(z-w,w)\ dw \tag{169}$$

- **Ejemplo 2:**
- Determinar la densidad de $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + a\cos\mathbf{\Phi}$:
Con $\mathbf{W} = \mathbf{\Phi}$:

$$x + a\cos\phi = z \qquad \phi = w \qquad \Downarrow \tag{170}$$

$$x = z - a\cos w \qquad \phi = w \qquad \Downarrow \tag{171}$$

$$\therefore \qquad J = 1 \implies f_{\mathbf{ZW}}(z,w) = f_{\mathbf{X\Phi}}(z - a\cos w, w) \tag{172}$$

$$\therefore \qquad f_{\mathbf{Z}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X\Phi}}(z - a\cos w, w)\ dw \tag{173}$$

3.4. Funciones de variables aleatorias independientes

- Asumiento $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ independientes y se tiene que $\mathbf{Z}$ es solo función de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{W}$ es solo función de $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}) \qquad \mathbf{W} = h(\mathbf{Y}) \tag{174}$$

- Se concluye que $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{W}$ son independientes.

3.5. Valor esperado/Esperanza

- El valor esperado de una función de dos V.A $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \tag{175}$$

- es:

$$E(\mathbf{Z}) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_{\mathbf{Z}}(z)\ dz \tag{176}$$

- Para calcular $E(\mathbf{Z})$ en términos de la densidad conjunta $f(x,y)$ se toma:

$$E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\ dxdy \tag{177}$$

- Para el caso discreto:

$$E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \sum_{k,n} g(x_k, y_n) p_{kn} \tag{178}$$

- donde $P(\mathbf{X} = x_k, \mathbf{Y} = y_n) = p_{kn}$
- **Teorema importante**

$$E(g_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \cdots + g_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = E(g_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) + \cdots + E(g_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \tag{179}$$

3.6. Esperanza condicional

- La esperanza condicional se define:

$$E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|M) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y|M)\ dxdy \tag{180}$$

- Para calular $E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{X} = x)$

$$E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{X} = x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\ dy}{f_{\mathbf{X}}(x)} \quad \Downarrow \tag{181}$$

$$\therefore \quad E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{X} = x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(y|\mathbf{X} = x)\ dy \tag{182}$$

- **Caso particualar**
- Si $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g_1(\mathbf{X}) g_2(\mathbf{Y})$:

$$E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{X} = x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\mathbf{X}) g_2(\mathbf{Y}) f(y|\mathbf{X} = x)\ dy \tag{183}$$

$$E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{X} = x) = g_1(\mathbf{X}) \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\mathbf{Y}) f(y|\mathbf{X} = x)\ dy \tag{184}$$

$$E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{X} = x) = g_1(\mathbf{X}) E(g_2(\mathbf{Y})|\mathbf{X} = x) \ \square \tag{185}$$

- **Teorema**

$$E(E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{X})) = E(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \tag{186}$$

- **Corolario**

$$E(g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{Y})) = E(E(g_1(\mathbf{X}) g_2(\mathbf{Y})|\mathbf{X})) \tag{187}$$

$$E(g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{Y})) = E(g_1(\mathbf{X}) E(g_2(\mathbf{Y})|\mathbf{X})) \ \square \tag{188}$$

3.7. Momentos conjuntos

- Definición de momento conjunto m_{kr}

$$m_{kr} = E(\mathbf{X}^k\mathbf{Y}^r) \quad (189)$$

$$m_{kr} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r f(x,y)\ dxdy \quad (190)$$

- donde $k + r = n$ se denomida el **orden** de los momentos y la **Correlación** de las V.A **XY**

$$R_{\mathbf{XY}} = E(\mathbf{XY}) = m_{11} \quad (191)$$

- **Ejemplo:**

$$m_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\ dxdy \quad (192)$$

$$m_{20} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\ dxdy \quad (193)$$

$$m_{02} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\ dxdy \quad (194)$$

- Los momentos de primer orden:

$$m_{10} = \eta_x \qquad m_{01} = \eta_y \quad (195)$$

- **Momentos centrtales conjuntos**:
- Se define μ_{kr} el momento central conjunto de dos V.A **X** e **Y**:

$$\mu_{kr} = E((\mathbf{X}-\eta_x)^k(\mathbf{Y}-\eta_y)^r) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\eta_x)^k(y-\eta_y)^r f(x,y)\ dxdy \quad (196)$$

- El segundo momento central μ_{11} es llamado la **covarianza** de **X** e **Y** notado como $C_{\mathbf{XY}}$

$$C_{XY} = E((\mathbf{X}-\eta_x)(\mathbf{Y}-\eta_y)) = \mu_{11} \quad (197)$$

$$C_{XY} = E(\mathbf{XY}) - E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y}) \quad (198)$$

- La varianza marginal σ_x^2 y σ_y^2 bajo este contexto se define:

$$\mu_{20} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\eta_x)^2 f(x,y)\ dxdy = \sigma_x^2 \quad (199)$$

$$\mu_{20} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\eta_x)^2\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dxdy = \sigma_x^2 \quad (200)$$

$$\mu_{20} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\eta_x)^2 f(x)\ dxdy = \sigma_x^2 \quad (201)$$

- Ahora la varianza σ_y^2

$$\mu_{02} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\eta_y)^2 f(x,y)\ dxdy = \sigma_y^2 \quad (202)$$

$$\mu_{02} = \int_{-\infty}^{\infty}(y-\eta_y)^2\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dxdy = \sigma_y^2 \quad (203)$$

$$\mu_{02} = \int_{-\infty}^{\infty}(y-\eta_y)^2 f(y)\ dxdy = \sigma_y^2 \quad (204)$$

- **Los momentos absolutos y generalizados** se definen de manera similar.
- El **coeficiente de correlación**

$$r = \frac{E((\mathbf{X}-\eta_x)(\mathbf{Y}-\eta_y))}{\sqrt{(E(\mathbf{X}-\eta_x)^2)(E(\mathbf{Y}-\eta_y)^2)}} \quad (205)$$

$$r = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x\sigma_y} \quad (206)$$

$$C_{\mathbf{XY}} = r\sigma_x\sigma_y \quad (207)$$

- **Inecuaciones importantes**

$$r = \frac{|\mu_{11}|}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} \quad (208)$$

$$m_{11}^2 \leq m_{20}m_{02} \Downarrow \quad (209)$$

$$E^2(\mathbf{XY}) \leq E(\mathbf{X}^2)E(\mathbf{Y}^2) \Uparrow \quad (210)$$

$$\mu_{11}^2 \leq \mu_{20}\mu_{02} \Downarrow \quad (211)$$

$$E^2((\mathbf{X}-\eta_x)(\mathbf{Y}-\eta_y)) \leq E((\mathbf{X}-\eta_x)^2)E((\mathbf{Y}-\eta_y)^2) \Uparrow \quad (212)$$

- Dos V.A se dicen **Descorrelacionadas** si:

$$E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y}) \tag{213}$$

- Dos V.A se dicen **Ortogonales** si:

$$E(\mathbf{XY}) = 0 \tag{214}$$

- Dos V.A se dicen **Independientes** si:

$$f(x,y) = f_{\mathbf{X}}(x)f_{\mathbf{y}}(y) \tag{215}$$

- **Teorema**: Si **X** e **Y** son independientes, entonces son descorrelacionadas.

$$E(\mathbf{XY}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(xy)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_y(y)\,dy = E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y}) \tag{216}$$

- **Teorema**: Si **X** e **Y** son independientes, entonces **g(X)** y **h(Y)** son **independientes**:

$$E(g(\mathbf{X})h(\mathbf{Y})) = E(g(\mathbf{X}))E(h(\mathbf{Y})) \tag{217}$$

- **Nota:** si dos V.A **X** e **Y** son **descorrelacionadas** entonces su **covarianza** y **correlación** es cero:

$$E((\mathbf{X}-\eta_x)(\mathbf{Y}-\eta_y)) = 0 \tag{218}$$

$$r = 0 \tag{219}$$

- Entonces como $E((\mathbf{X}-\eta_x)(\mathbf{Y}-\eta_y)) = 0$ **por definición** $(\mathbf{X}-\eta_x)$ y $(\mathbf{Y}-\eta_y)$ son **ortogonales**:

$$E([(\mathbf{X}-\eta_x)+(\mathbf{Y}-\eta_y)]^2) = E((\mathbf{X}-\eta_x)^2)+E((\mathbf{Y}-\eta_y)^2) \tag{220}$$

- Lo que es lo mismo:

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \tag{221}$$

- **Teorema:** Si la V.A **X** e **Y** son **Descorrelacionadas**, entonces **la varianza de su suma es igual a la suma de sus varianzas**
- **Teorema:** Si **X** e **Y** son **Ortogonales**:

$$E((\mathbf{X}+\mathbf{Y})^2) = E(\mathbf{X}^2) + E(\mathbf{Y}^2) \tag{222}$$

3.8. Función característisitica conjunta

- La función característisitca conjunta de dos V.A **X** y **Y** se define:

$$\Phi_{\mathbf{XY}}(\omega_1,\omega_2) = E(e^{j(\omega_1\mathbf{X}+\omega_2\mathbf{Y})}) \tag{223}$$

$$\Phi_{\mathbf{XY}}(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1\mathbf{X}+\omega_2\mathbf{Y})} f_{\mathbf{XY}}(x,y)\,dxdy \tag{224}$$

- Y su logaritmo:

$$\Psi_{\mathbf{XY}}(\omega_1,\omega_2) = \ln \Phi_{\mathbf{XY}}(\omega_1,\omega_2) \tag{225}$$

- La fórmula de inversión:

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1\mathbf{X}+\omega_2\mathbf{Y})}\Phi_{\mathbf{XY}}(\omega_1,\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_2 \tag{226}$$

- **Función característisitca marginal**:

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\omega) = E(e^{j\omega\mathbf{X}}) = \Phi_{\mathbf{XY}}(\omega,0) \tag{227}$$

$$\Phi_{\mathbf{Y}}(\omega) = E(e^{j\omega\mathbf{Y}}) = \Phi_{\mathbf{XY}}(0,\omega) \tag{228}$$

- **Variables aleatorias independientes**
- Si **X** e **Y** son independientes:

$$e^{j(\omega_1\mathbf{X}+\omega_2\mathbf{Y})} = e^{j(\omega_1\mathbf{X})}e^{j(\omega_2\mathbf{Y})} \tag{229}$$

$$\Phi_{\mathbf{XY}}(\omega_1,\omega_2) = \Phi_{\mathbf{X}}(\omega_1)\Phi_{\mathbf{Y}}(\omega_2) \tag{230}$$

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\mathbf{X}}(\omega_1)e^{-j\omega_1 x}\,dx\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{\mathbf{Y}}(\omega_2)e^{-j\omega_2 y}\,dy \tag{231}$$

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y)=f_{\mathbf{X}}(x)f_{\mathbf{Y}}(y) \tag{232}$$

- Si la V.A $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes y $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$

$$\Phi_{\mathbf{Z}}(\omega)=\Phi_{\mathbf{X}}(\omega)\Phi_{\mathbf{Y}}(\omega) \tag{233}$$

$$\Psi_Z(\omega)=\Psi_X(\omega)+\Psi_Y(\omega) \tag{234}$$

$$f_{\mathbf{Z}}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\mathbf{X}}(z-y)f_{\mathbf{Y}}(y)\,dy \tag{235}$$

- **Ejemplo**: La V.A $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes y con distribución de Poisson con parámetros a y b respectivamente. Su suma $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ también es de Poisson con parámetros $a+b$:

$$\Psi_{\mathbf{X}}(\omega)=a(e^{j\omega}-1) \tag{236}$$

$$\Psi_{\mathbf{Y}}(\omega)=b(e^{j\omega}-1) \tag{237}$$

$$\therefore\,\Psi_{\mathbf{Z}}(\omega)=(a+b)(e^{j\omega}-1) \tag{238}$$

- **Teorema:** Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son **independientes** y su suma $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ es de Poisson-distribuida, entonces $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son de Poisson-distribuida.
- **Teorema del momento**

$$\frac{\partial^k\partial^r\Phi(0,0)}{\partial\omega_1^k\partial\omega_2^r}=j^{k+r}m_{kr} \tag{239}$$

- **Función característica conjunta de variables aleatorias normales**
- Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ V.A conjuntamente normales de **media cero**, entonces su **función característica conjunta** es de la forma:

$$\Phi(\omega_1,\omega_2)=E(e^{j(\omega_1\mathbf{X}+\omega_2\mathbf{Y})}) \tag{240}$$

$$\Phi(\omega_1,\omega_2)=e^{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2\omega_1^2+2r\sigma_x\sigma_y\omega_1\omega_2+\sigma_y^2\omega_2^2)} \tag{241}$$

$$\Phi(\omega_1,\omega_2)=e^{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2\omega_1^2+\sigma_y^2\omega_2^2+2\mu_{11}\omega_1\omega_2)} \tag{242}$$

$$E(e^{j\omega_2 y}|x)=e^{\frac{jr\sigma_y x\omega_2}{\sigma_x}}e^{-\frac{1}{2}\sigma_y^2(1-r^2)\omega_2^2} \tag{243}$$

- Suponiendo que las variables tienen media η_x,η_y entonces haciendo $\bar{X}=X+\eta_x$ y $\bar{Y}=Y+\eta_y$, donde X e Y son definidas como anteriormente. Notar que $\bar{X}$ es $n(\eta_x,\sigma_x^2)$ y $\bar{Y}=n(\eta_y,\sigma^2 y)$ entonces:

$$\Phi(\omega_1,\omega_2)=e^{j(\omega_1\eta_x+\omega_2\eta_y)}e^{-\frac{1}{2}(\sigma_x^2\omega_1^2+2\mu_{11}\omega_1\omega_2+\omega_2^2\sigma_y^2)} \tag{244}$$

- **Teorema:** Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ V.A independientes. Sea $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ entonces $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son normales ssi $\mathbf{Z}$ es normal.

$$\Phi_X(\omega)=e^{j\eta_x\omega-\frac{1}{2}\sigma_x^2\omega^2} \tag{245}$$

$$\Phi_Y(\omega)=e^{j\eta_y\omega-\frac{1}{2}\sigma_y^2\omega^2} \tag{246}$$

$$\Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)=e^{j(\eta_x+\eta_y)\omega-\frac{1}{2}(\sigma_x^2+\sigma_y^2)\omega^2}=\Phi_z(\omega) \tag{247}$$

- **Teorema** Sean $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ V.A conjuntamente normales, entonces $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ es normal

$$\Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)=e^{j(\omega_1\eta_x+\omega_2\eta_y)-\frac{1}{2}(\omega_1^2\sigma_x^2+\omega_1\omega_2\mu_{11}+\omega_2^2\sigma_y^2)} \tag{248}$$

- Con $\mu_{11}=E((x-\eta_x)(y-\eta_y))$. Haciendo $\omega_1=\omega_2$:

$$\Phi_Z(\omega)=\Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)=e^{j\omega(\eta_x+\eta_y)-\frac{1}{2}\omega^2(\sigma_x^2+\mu_{11}+\sigma_y^2)} \tag{249}$$

- Se llega a que $\mathbf{Z}$ tiene una función característica normal con media $(\eta_x+\eta_y)$ y varianza $(\sigma_x^2+\mu_{11}+\sigma_y^2)$
- **Nota:** Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son normales pero independientes, entonces $\mathbf{Z}$ puede no ser normal.
- Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ conjuntamente normales de media cero entonces, el segundo momento de su producto es:

$$E((\mathbf{XY})^2)=E(\mathbf{X}^2\mathbf{Y}^2)=E(\mathbf{X}^2)E(\mathbf{Y}^2)+2E^2(\mathbf{XY}) \tag{250}$$