Formulario Probabilidad y Procesos Estocásticos Primer Parcial

Roberto Navarro Castañeda

Octubre 2023

1. Capítulo 1 y 2

Inclusión

- $B \subset A$
- $A \subset A$
- $0 \subset A$
- $A \subset S$

Igualdad

- $A = B \quad \leftrightarrow \quad A \subset B \quad y \quad B \subset A$

Suma y unión

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + a = a$
- $a + 0 = a$
- $a + S = S$
- $si \quad B \subset A \quad entonces \quad A + B = A$

Producto (Intersección)

- $AA = A$
- $A0 = 0$
- $AS = S$
- $Si \quad B \subset A \quad entonces \quad AB = B$

Complemento

- $\bar{0} = S$
- $\bar{S} = 0$
- $A + \bar{A} = S$
- $\bar{S} = 0$
- $A\bar{A} = 0$
- $Si \quad B \subset A \quad entonces \quad \bar{A} \subset \bar{B}$

Diferencia

- $A - B = A\bar{B} = A - AB$
- $(A + A) - A = 0$
- $A + (A - A) = 0$
- $A - 0 = A$
- $A - S = 0$
- $A - S = \bar{A}$

Leyes de Morgan

- $\overline{(A + B)} = \overline{A}\ \overline{B}$
- $\overline{(AB)} = \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{(AB + AC)} = \overline{AB}\ \ \overline{AC} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$

1.1. Álgebra, $\sigma - algebra$

- Espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbf{A}, p)$
- $\Omega \in F$
- $A \in F \rightarrow A^c \in F$
- $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in F \rightarrow A_i \in F$
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F \rightarrow A_i$
- $|\mathbf{A}_{max}| = |P_{\Omega}| = 2^{\Omega}$
- $A, B \in F \quad \therefore \quad A \cup B \in F$

1.2. Axiomas, Prob.-Condicional. , Prob.-Disjuntos

- $P(a) \geq 0$ 0
- $P(S) = 1$
- $P(a+b) = P(a)+P(b) \leftrightarrow ab =$
- $P(a|M) = \frac{P(aM)}{P(M)}$

Propiedades de $P(\Omega|M)$

- $p(\Omega|M) = \dfrac{p(\Omega \cap M)}{p(M)} = \dfrac{p(M)}{p(M)} = 1$
- $A \cap B \neq \emptyset \quad \therefore \quad p(A \cup B|M) = p(A) + p(B)$
- $p(\emptyset|M) = \dfrac{p(\emptyset \cap M)}{p(M)} = \dfrac{p(\emptyset)}{p(M)} = 0$
- **If** $A \complement M \complement \Omega$

  $p(A|M) = \dfrac{p(A \cap M)}{p(M)} = \dfrac{p(A)}{p(M)} > p(A)$

1.3. Bayes, Prob.Total e Independientes

- $P(B) = P(B|a_1)P(a_1) + ... + P(B|a_n)P(a_n)$

- Bayes: $P(a_i|B) = \frac{P(B|a_i)P(a_i)}{P(B|a_1)P(a_1)+\cdots+P(B|a_n)P(a_n)}$
- **Eventos Independientes:**
- $P(a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_n}) = P(a_{k_1})P(a_{k_2})\cdots P(a_{k_n})$

- $P(a+b) = P(a) + P(b) - P(ab)$

- $P(a+b+c) = P(a)+P(b)-P(ab)-P(bc)-P(ac)+P(abc)$

- $p\left(A \mid M\right) = p\left(A \mid M_1\right)\dfrac{p\left(M_1\right)}{p\left(M\right)} + \cdots + p\left(A \mid M_n\right)\dfrac{p\left(M_n\right)}{p\left(M\right)}$

- **Eventos Mutuamente Excluyentes:** $a_i a_j = 0 \quad i \neq j$

- $P(a_1 + \cdots + a_n + \cdots) = P(a_1) + \cdots + P(a_n) + \cdots$

2. Capítulo 3

2.1. Ensayos de Bernoulli

- Para N eventos $N_n(k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- **Para eventos binomiales** $N_n(k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

  $p_n(k) = P(\text{a ocurre k veces}) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

- **Bernoulli entre intervalos**:
  $P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P(\text{a ocurre k veces}) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

2.2. Distribución Gaussiana

- $erfx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-y^2}{2}}\,dy$
- $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

- $erf(-x) = -erf(x)$
- $erf\infty = \frac{1}{2}$

- $\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}\ dx = erf(\frac{x_2-b}{a}) - erf(\frac{x_1-b}{a})$

- **Teorema de DeMoivre-Laplace**:
  Si $\quad npq \gg 1 \quad$ y $\quad |np| \gg |k-np|$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

- **Si se tiene que** $P(k_1 \leq k \leq k_2)$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq erf(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}) - erf(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}})$$

2.3. Aprox. de Poisson

Si $\quad n \to \infty \quad , \quad p \to 0 \quad , \quad n \gg k \quad$ y $np = a$

- $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

- Si $P(k_1 \leq k \leq k_2) \to e^{-np} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(np)^k}{k!}$

- Sea un intervalo $T \gg (t_a = t_2 - t_1)$ con T Horizonte de observación. Con $p = \frac{t_a}{T}$, si $n \gg 1$ y, $1 \gg (p = \frac{t_a}{T})$

$$P(\text{k en } t_a) \approx \frac{1}{k!}(np)^k e^{-np} = \frac{1}{k!}(n\frac{t_a}{T})^k e^{-n\frac{t_a}{T}}$$

3. Capítulo 4

3.1. Variable aleatoria

- Álgebra de borel $B(\mathbb{R})$, la menor $\sigma - algebra$ que contiene a todos los intervalos de $\mathbb{R}$
- La medida de Lebesgue se define $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), M)$:

$$M : B(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$$
$$M(a, b) = b - a$$

- Sea un espacio de probabilidad (Ω, A, p) y el espacio $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), M)$. Se dice que X una V.A de Ω en $\mathbb{R}$ si
  - $X : \Omega \to \mathbb{R}$
  - $B \in B(\mathbb{R}) \to X^{-1}(B) \in A$
- Sea un espacio de prob. (Ω, A, p) y X una V.A. la *Función de distribución de probabilidad* F_x se define:

- $F_x : \mathbb{R} \to [0,1]$
- $F_x : P(X^{-1}(-\infty, x])$

Propiedades:

- $0 \leq F_x \leq 1$
- $\lim_{x\to\infty} F_x = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} F_x = 0$
- $F_x(a) \leq F_x(b) \to a<b$

Definición $F_x(x) = P(X \leq x)$ en vez de $P(X^{-1}(-\infty, x])$

Propiedades:

- Es continua por la derecha $F(x^+) = F(x)$
- Si $\mathbf{X}$ es discreta $P(\mathbf{X} = x) = F(x) - F(x^-)$
- $P(\mathbf{X} \leq x_2) = P(\mathbf{X} \leq x_1) + P(x_1<\mathbf{X} \leq x_2)$
- Sea un evento discreto $P(x_1 \leq \mathbf{X} \leq x_2) = P(\mathbf{X} = x_1) + P(x_1<\mathbf{X} \leq x_2)$

Definición $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Propiedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1$

- $f(x) \geq 0$
- Si $\mathbf{X}$ es continua $P(\mathbf{X} = x) = 0$
- $P(x_1<\mathbf{X} \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$

Si se toma un Δx lo suficientemente pequeño
$P(x \leq \mathbf{X} \leq \Delta x) \approx f(x)\Delta x$

La función de densidad se define

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

3.2. Ejemplos de distribuciones y funciones de densidad

Normal $f(x) = Ae^{-\alpha x^2}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$
- $A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$
- Con $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$
- $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

Funcion de densidad normal generalizada

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

Propiedades de la función de densidad normal

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = \frac{1}{2} + erf(\frac{x-\eta}{\sigma})$
- $P(x_1 \leq \mathbf{X} \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = erf(\frac{x_2-\eta}{\sigma}) - erf(\frac{x_1-\eta}{\sigma})$

Poisson

$$f(x) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{n!} \delta(x-k)$$

$$P(X=k) = e^{-a} \frac{a^k}{n!}$$

Binomial

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$f(x) = \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta(x-k)$$

Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & Otros \end{cases}$$

Gamma

$$f(x) = Ax^b e^{-cx} U(x)$$

$$\Gamma(b+1) = \int_0^{\infty} y^b e^{-y} \, dy$$

$$A = \frac{c^{b+1}}{\Gamma(b+1)}$$

Si $b = n$ es un entero, entonces $\Gamma(n+1) = n!$ y la función $f(x)$ es maxima para $x = \frac{b}{c}$

Beta

$$f(x) = \begin{cases} Ax^b(1-x)^c & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & Otros \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^b(1-x)^c \, dx = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b+c+2)}$$

$$A = \frac{\Gamma(b+c+2)}{\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)}$$

$$B(b,c) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}$$

$f(x)$ es máxima para $x = \frac{b}{b+c}$.

Laplace

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{\alpha|x|}$$

Cauchy

$$f(x) = \frac{\frac{\alpha}{\pi}}{\alpha^2 + x^2}$$

Rayleigh

$$f(x) = \frac{x}{\alpha^2} e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} U(x)$$

Maxwell

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha^3\sqrt{\pi}} x^2 e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} U(x)$$

3.3. Distribución condicional y densidades

La distribución condicional de $\mathbf{X}$, asumiendo m es

$$F_x(x|m) = P(\mathbf{X} \leq x|m) = \frac{P(\mathbf{X} \leq x, m)}{P(m)}$$

- $F(\infty|m) = 1$
- $F(-\infty|m) = 0$

$F(x_2|m) - F(x_1|m) = P(x_1 < \mathbf{X} \leq x_2|m) = \frac{P(x_1 < \mathbf{X} \leq x_2, m)}{P(m)}$

Funcion de densidad condicional $f(x|m) = \frac{dF(x|m)}{dx}$

- $f(x|m) = \frac{dF(x|m)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq \mathbf{X} \leq x + \Delta x|m)}{\Delta x}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x|m)\, dx = F(\infty|m) - F(-\infty|m) = 1$

Probabilidad total

$$F(x) = F(x|a_1)P(a_1) + \cdots + F(x|a_n)P(a_n)$$

$P(\mathbf{X} \leq x) = P(\mathbf{X} \leq x|a_1)P(a_1) + \cdots + P(\mathbf{X} \leq x|a_n)P(a_n)$

Sea $m = \mathbf{X} \leq a$ donde a es una cte tal que

$$P(m) = P(\mathbf{X} \leq a) = F(a) \neq 0$$

$$F(x|\mathbf{X} \leq a) = P(\mathbf{X} \leq x|\mathbf{X} \leq a) = \frac{P(\mathbf{X} \leq x, \mathbf{X} \leq a)}{P(\mathbf{X} \leq a)}$$

Teorema de Bayes.
Sea A $P(A) \neq 0$ y $M = (x_1 < \mathbf{X} \leq x_2) \neq 0$ con $x_1 < x_2$ entonces $P(M) = F(x_2) - F(x_1)$

$$P(A|x_1 < \mathbf{X} \leq x_2) = \frac{P(A \cap x_1 < \mathbf{X} \leq x_2)}{P(x_1 < \mathbf{X} \leq x_2)} = \frac{P(A \cap x_1 < \mathbf{X} \leq x_2)}{F(x_2) - F(x_1)}$$

$$P(A|x_1 < \mathbf{X} \leq x_2) = \frac{[F(x_2|A) - F(x_1|A)]P(A)}{F(x_2 - F(x_1))}$$

Para $M = (\mathbf{X} = x)$ se calcula $P(A|\mathbf{X} = x)$

$$P(A|\mathbf{X} = x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(A|x \leq \mathbf{X} \leq x + \Delta x)$$

$$P(A|\mathbf{X} = x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{[F(x + \Delta x|A) - F(x|A)]P(A)}{F(x + \Delta x) - F(x))}$$

$$P(A|\mathbf{X} = x) = \frac{f(x|A)P(A)}{f(x)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(A|\mathbf{X} = x)f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|A)P(A)\ dx$$

Pero: $P(A) \int_{-\infty}^{\infty} f(x|A)P(A)\ dx = P(A)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(A|\mathbf{X} = x)f(x)\ dx = P(A)$$

$$f(x|A) = \frac{P(A|\mathbf{X} = x)f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(A|\mathbf{X} = x)f(x)\ dx}$$

Trucazo

$$(p+q)^n = \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{1}$$

$$(p-q)^n = \sum_{k=k_0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} (-1)^k \tag{2}$$

(1) + (2) = 2P(par)