Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Tarea 1. Consenso lineal

Presentado por

Jesús Alejandro Díaz Hernández

Presentado para el curso de

Tópicos avanzados de control 2

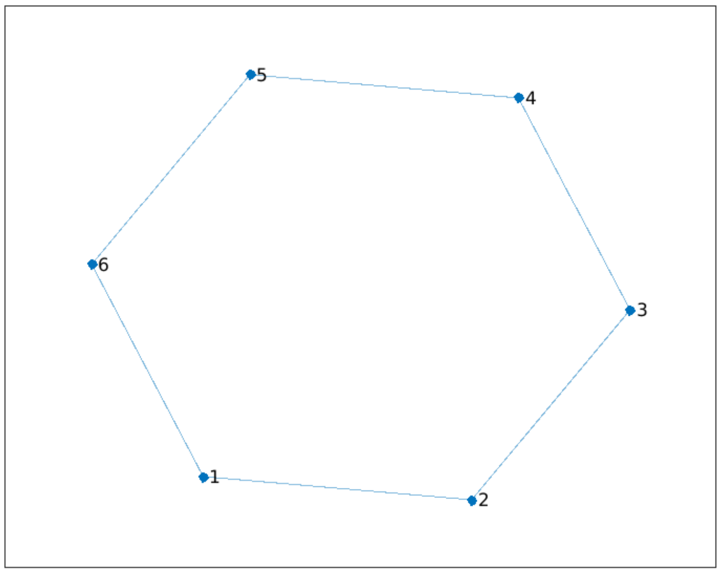
Curso impartido por: Héctor Manuel Becerra Fermín
Profesor

Guadalajara, Jalisco

20 de mayo 2024

Pregunta 1.-

El grafo utilizado es el mostrado a continuación:



a)

De acuerdo con su conectividad el grafo es **No dirigido**

b)

De acuerdo a su forma el grafo es un **ciclo**, pero también podría nombrarse **2-regular** porque todos sus nodos tienen dos conexiones

c)

La matriz de grado del grafo es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

d)

La matriz de adyacencia del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e)

La matriz de Laplaciana del grafo es

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

f)

La matriz de valores propios del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y la de vectores propios es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Nótese que el primer vector está en el span de $\vec{1}$. Tiene una conectividad algebraica de: $\lambda_2 = 1$.

g)

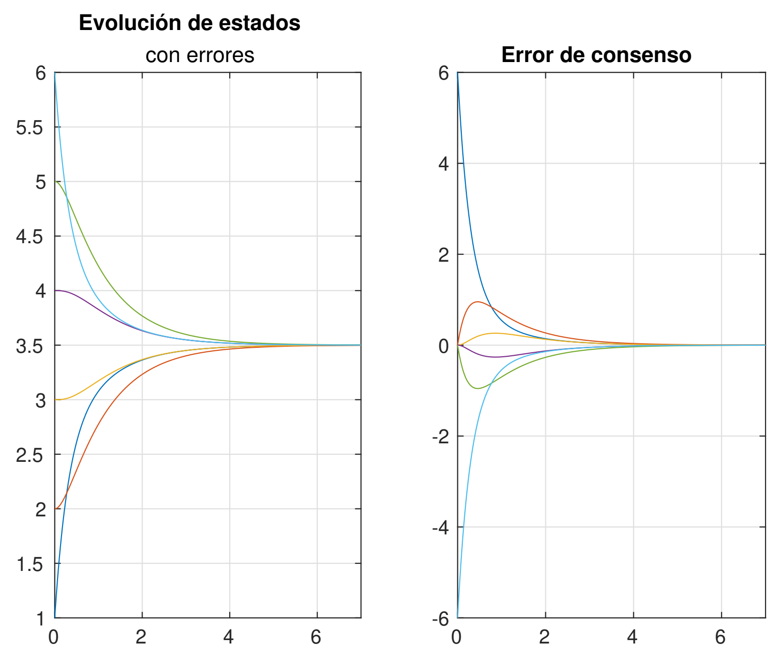
Considerando cada nodo como $\dot{x} = u$, y definiendo las entradas de control como el negativo del error de consenso para cada agente. Se calcula el error mediante

$$e_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t))$$

Usando un ciclo "for" en un script de MATLAB

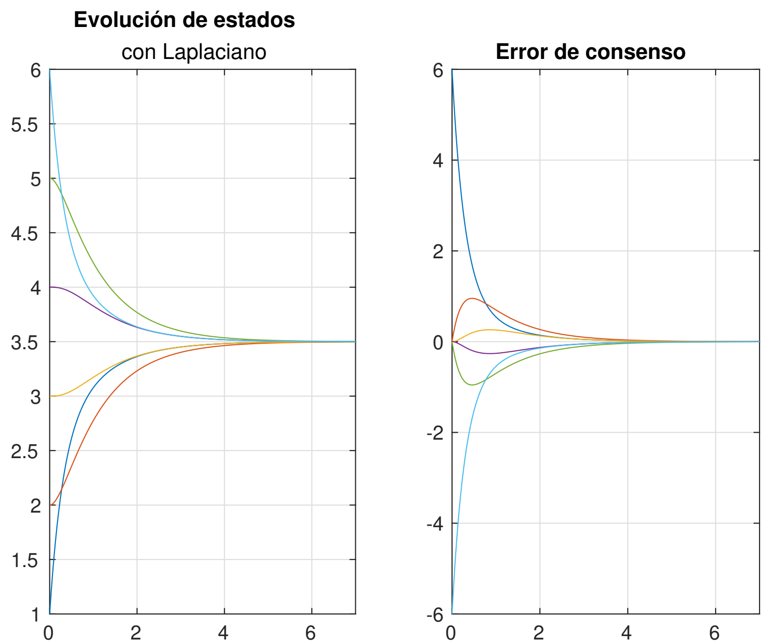
h)

resolviendo la ecuación diferencial con la aproximación de Euler obtenemos la siguiente gráfica de evolución en el tiempo:



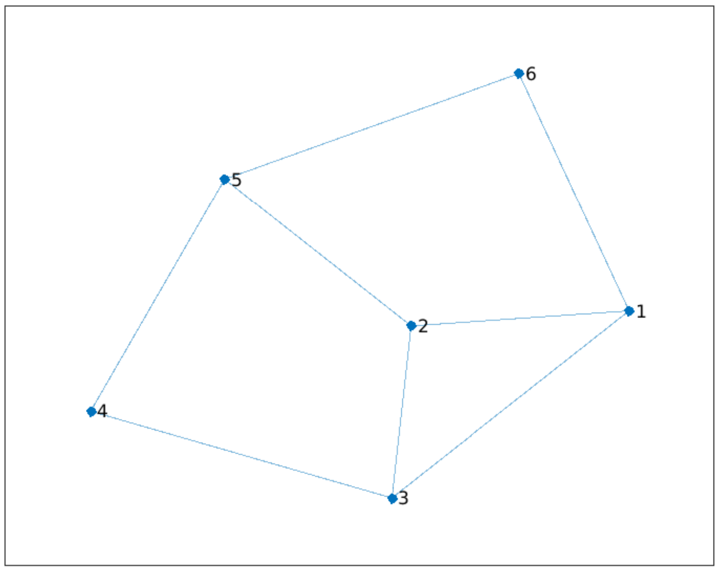
i)

Haciendo lo mismo, pero con el Laplaciano obtenemos


Evolución de estados
con Laplaciano
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
2
4
6
Error de consenso
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
2
4
6

2.-

Se incluyeron las siguientes aristas en el grafo



a)

La matriz Laplaciana del grafo es

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

La matriz de valores propios (escritos como decimales) del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5857 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.4121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

y la de vectores propios es

$$\begin{bmatrix} 0.4082 & 0.2705 & -0.4082 & 0.2886 & -0.6532 & -0.2886 \\ 0.4082 & 0 & -0.4082 & -0.5773 & 0 & 0.5773 \\ 0.4082 & -0.2705 & -0.4082 & 0.2886 & 0.6532 & -0.2886 \\ 0.4082 & -0.6532 & 0.4082 & 0.2886 & -0.2705 & 0.2886 \\ 0.4082 & 0 & 0.4082 & -0.5773 & 0 & -0.5773 \\ 0.4082 & 0.6532 & 0.4082 & 0.2886 & 0.2705 & 0.2886 \end{bmatrix}$$

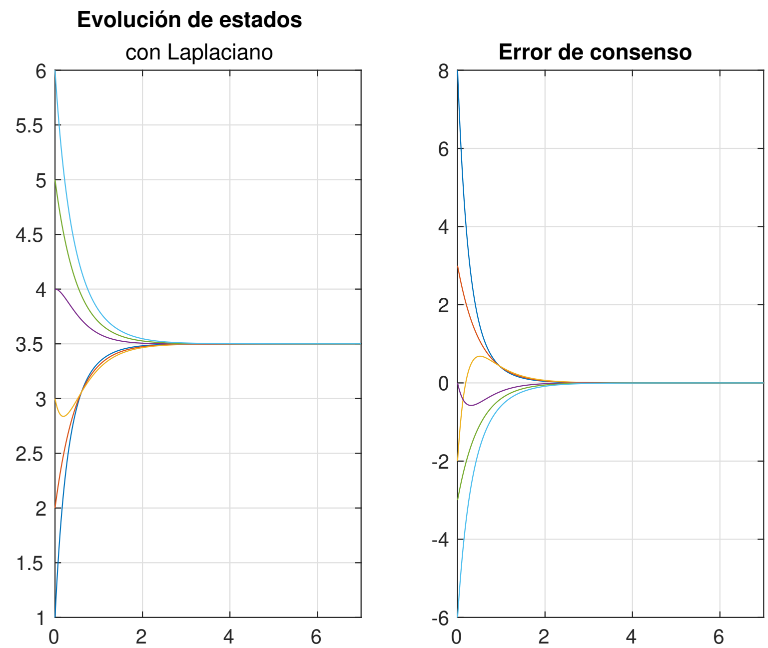
Nótese que el primer vector está en el span de $\vec{1}$

c)

Nuevamente considerando el modelo de cada nodo como en el punto anterior e implementando el control de consenso con la matriz Laplaciana

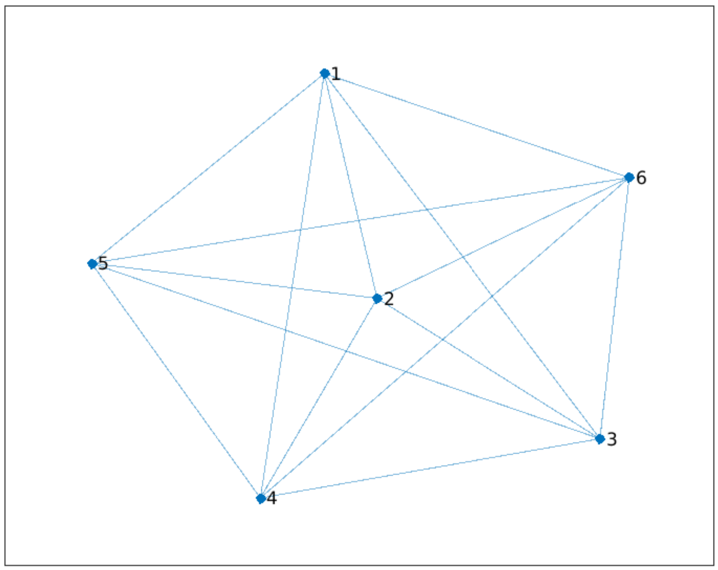
$$x_{k+1} = x_k + \Delta t(-Lx_k)$$

obtenemos la evolución de estados del siguiente inciso d)


Evolución de estados
con Laplaciano
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
2
4
6
Error de consenso
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
2
4
6

3.-

Agregando aristas de forma que quede el siguiente grafo completo:



a)

La matriz Laplaciana del grafo es

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

b)

La matriz de valores propios del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

y la de vectores propios es

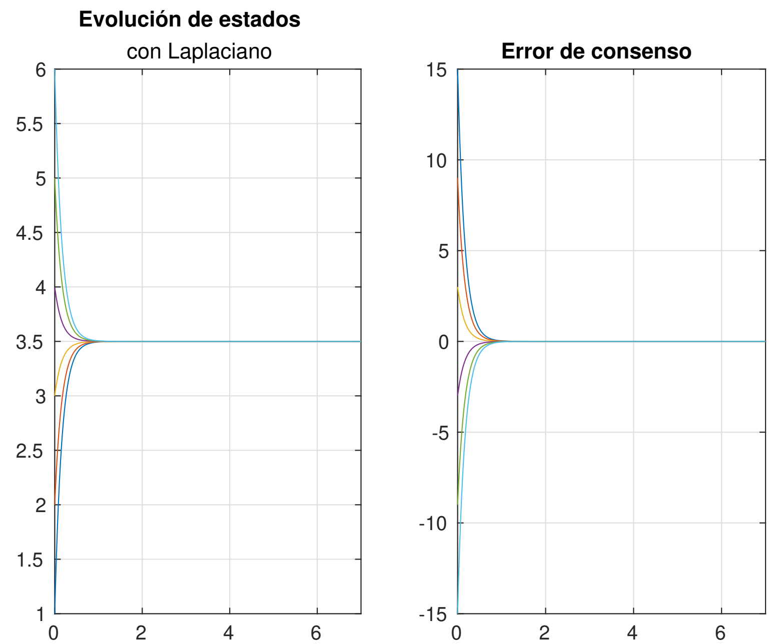
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Nótese que el primer vector está en el span de $\vec{1}$

c)

Volvemos a modelar el sistema como en los puntos anteriores y obtenemos la evolución del siguiente inciso

d)



4.-

Si calculamos el valor en estado estacionario mediante

$$\frac{1}{n}\vec{1}\vec{1}^T x(0)$$

podremos observar que este valor es un promedio de los valores iniciales, en mi caso como los valores iniciales fueron arbitrariamente elegidos como $x(0) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ Este promedio corresponde a 3.5.

Como podemos observar a partir de las gráficas en el primer punto, calcular la acción de control en lazo cerrado utilizando los negativos de los errores o bien el Laplaciano nos resulta en lo mismo. Esto se puede apreciar comparando las gráficas del punto h) y del i). Además, comparando las gráficas de los tres puntos, podemos ver que el valor en estado estacionario (el valor de consenso) es el mismo para todos los grafos. Debido a que todos tienen las mismas condiciones iniciales, sin embargo, mientras más conectado está el sistema, más rápido converge a este valor.