Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Tarea 3. Consenso en sistemas de alto orden

Presentado por

Jesús Alejandro Díaz Hernández

Presentado para el curso de

Tópicos avanzados de control 2

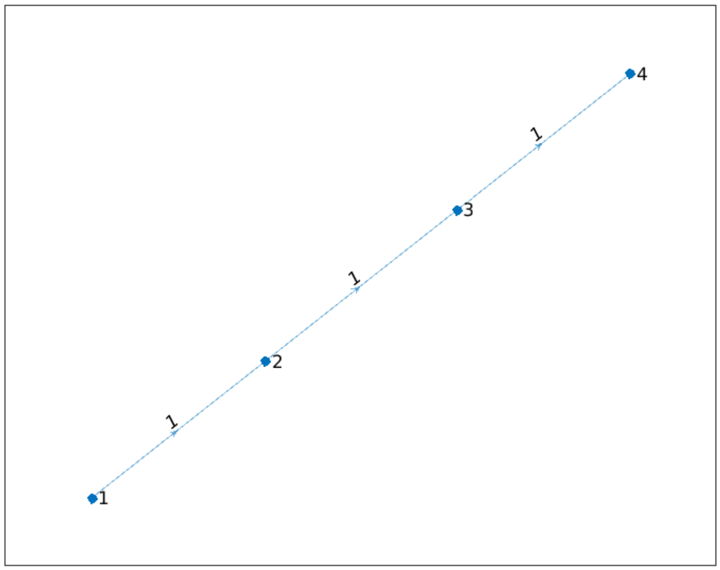
Curso impartido por: Héctor Manuel Becerra Fermín
Profesor

Guadalajara, Jalisco

29 de mayo de 2024

Pregunta 1.-

Inciso a)



Inciso b)

Según la proposición 2.9 que dice (traducido al español): considerando el grafo $\mathcal{G}$ con n vértices y $n-1$ aristas, entonces $detL_v = 1$ si solo si $\mathcal{G}$ es un árbol de expansión.

Como esta proposición se cumple, es decir, $detL_v = 1$, sabemos que el grafo no solo tiene un árbol de expansión, sino que es un árbol de expansión.

Inciso c)

Los valores propios de la matriz Laplaciana **negativa** son

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Inciso d)

Utilizando la ecuación 6 del paper, se puede inferir que proponiendo donde se quiera tener las raíces se puede usar la forma en monomios como

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 1)$$

cuyas raíces son las deseadas $\begin{bmatrix}-2 & i & -i\end{bmatrix}$ al extender la operación queda como

$$\lambda^3 + 2\lambda + \lambda + 2$$

y entonces de allí podemos observar que las ganancias γ corresponderían a $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

Inciso e)

Con estas ganancias γ no se consigue consenso como se muestra a continuación

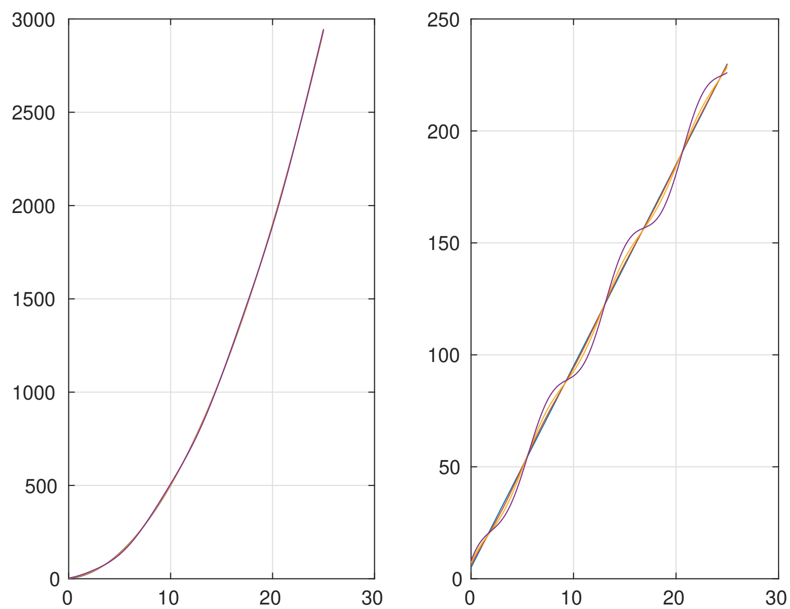


Figure 1: Posición (izquierda), Velocidad (derecha)

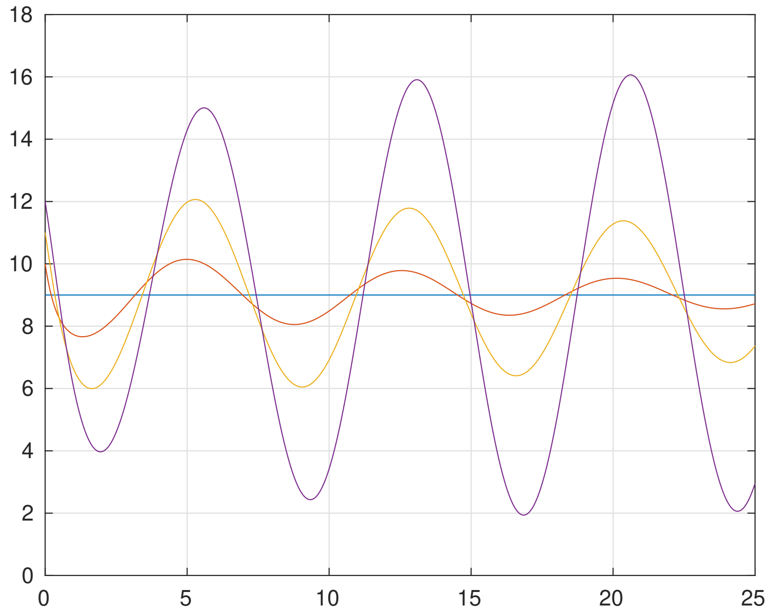


Figure 2: Aceleración

Inciso f)

Las ganancias para alcanzar los valores del caso dos son $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Inciso g)

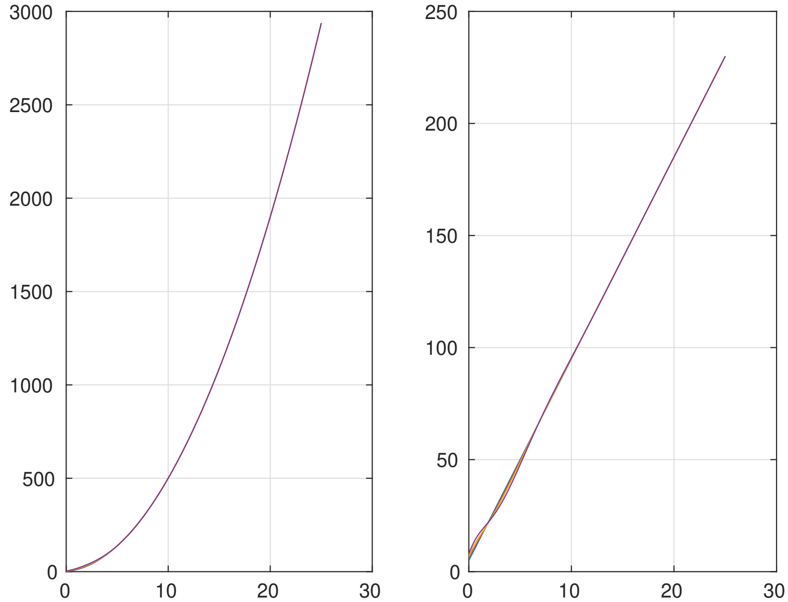


Figure 3: Posición (izquierda), Velocidad (derecha)

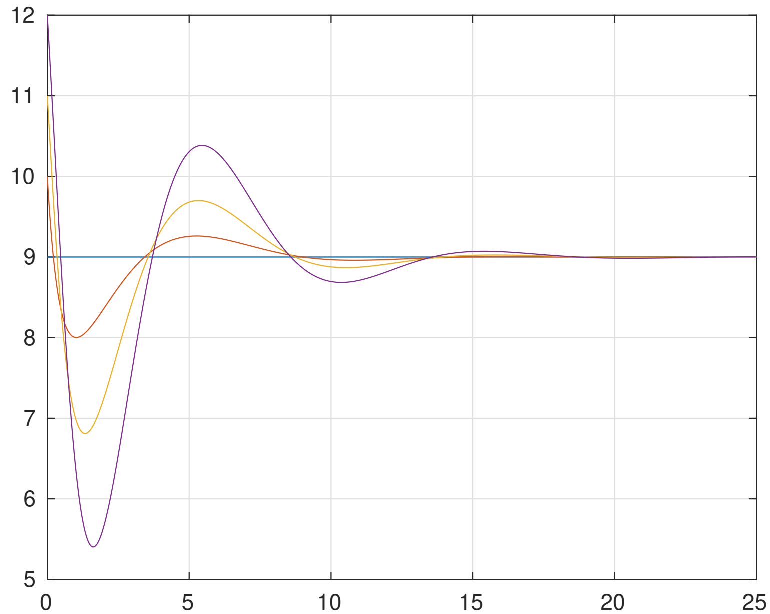


Figure 4: Aceleración

Inciso h)

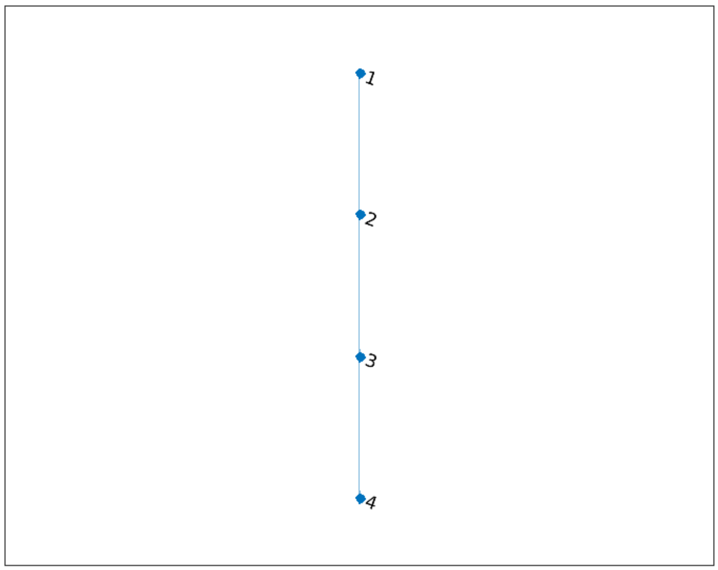
Para calcular los valores de consenso para largos valores de t los términos dominantes en $e^{\Gamma t}$ son

$$\begin{bmatrix} 1p^T & t1p^T & \frac{1}{2}t^2 1p^T \\ 0 & 1p^T & t1p^T \\ 0 & 0 & 1p^T \end{bmatrix}$$

considerando que $p^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y que elegí las condiciones iniciales como números consecutivos del 1 al 12, podemos calcular los valores de consenso como $\frac{9t^2}{2} + 5t + 1$ para posición, $9t + 5$ para velocidad y 9 para aceleración, los cuales sí coinciden con los observados en la simulación. **Nota:** originalmente probé con valores aleatorios como condiciones iniciales, pero el cálculo de valores de consenso se volvía muy complicado debido a valores fraccionarios, así que utilice estos valores para mayor facilidad de lectura.

Pregunta 2.-

El grafo no dirigido es



a)

La matriz Laplaciana del grafo modificado es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

Los valores propios de la matriz Laplaciana negativa son

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -.5858 \\ -2 \\ -3.4142 \end{bmatrix}$$

c)

Tomando en consideración la ecuación $\lambda^3 - \gamma_2\mu\lambda^2 - \gamma_1\mu\lambda - \gamma_0\mu = 0$ al realizar el análisis bajo el criterio de Routh-Hurtwitz y como μ son los eigenvalores de $-L$ obtenemos la siguiente tabla

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & \gamma_1\mu \\ s^2 & \gamma_2\mu & \gamma_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \end{array}$$

Donde

$$b_1 = -\frac{\gamma_0 - \gamma_2\gamma_1\mu^2}{\gamma_2\mu}$$

La tabla la podríamos continuar, pero de aquí podemos establecer la condición una condición para estabilidad como $\gamma_0 < \gamma_2\gamma_1\mu^2$, por lo que puedo elegir las ganancias como $\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y cumplir con ella.

d)

Implementando el control con las ganancias mencionadas en el punto anterior obtenemos

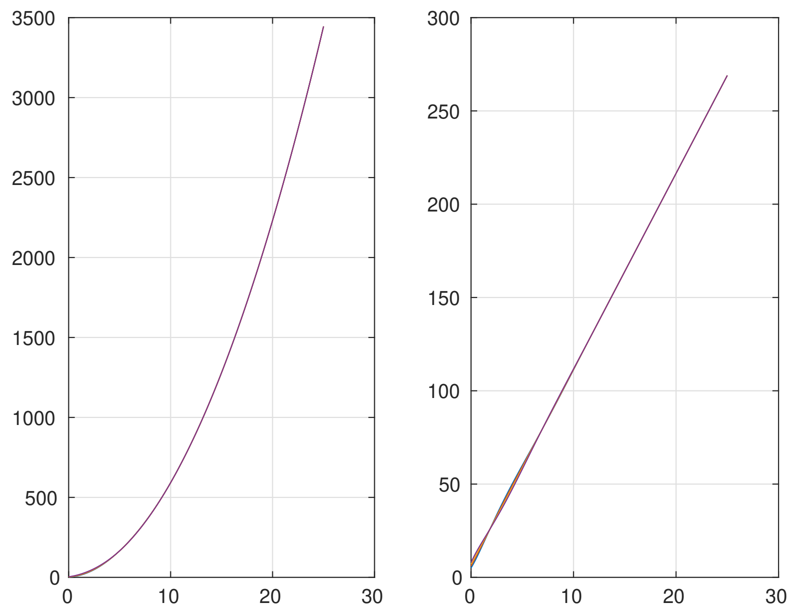


Figure 5: Posición (izquierda), Velocidad (derecha)

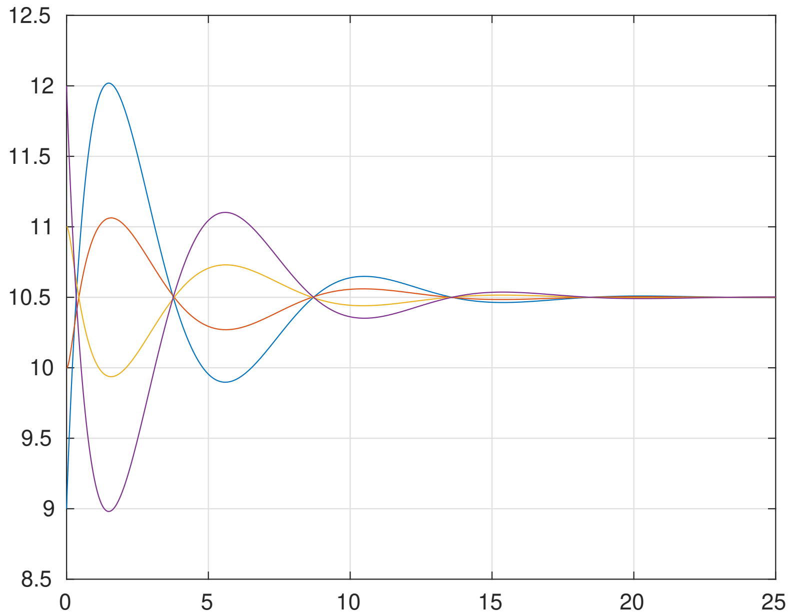


Figure 6: Aceleración

e)

No es posible utilizar ganancias arbitrarias debido a que como ya vimos en el inciso c, existe la condición $\gamma_0 < \gamma_2\gamma_1\mu^2$, además se puede observar por la ecuación de solución $e^{\Gamma}t$ y Γ se ve afectada por la selección de las ganancias γ es decir se podría elegir algunas tales que la exponencial sea creciente.

f)

Nuevamente el vector $p^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculando los valores de consenso con las mismas condiciones iniciales que en la pregunta 1 obtenemos los valores de consenso como $\frac{9t^2}{2} + 5t + 1$ para posición, $9t + 5$ para velocidad y 9 para aceleración, los cuales sí coinciden con los observados en la simulación.

Pregunta 3.-

Podemos concluir que la elección de ganancias influye directamente en la estabilidad del sistema, afectando su capacidad para alcanzar el consenso. Además, la diferencia entre el grafo dirigido y el no dirigido no es significativa en este contexto. Sin embargo, si se incrementaran las conexiones en el grafo no dirigido, se obtendría una conectividad algebraica mayor, lo que resultaría en un consenso más rápido.

Anexo (código usado)

```
clc
clearvars
close all

%Matriz de grado
%Primer punto
D=[0 0 0 0;
   0 1 0 0;
   0 0 1 0;
   0 0 0 1;];
%Segundo punto
% D=[1 0 0 0;
%    0 2 0 0;
%    0 0 2 0;
%    0 0 0 1;];


%Matriz de adyacencia
%Primer punto
A=[0 0 0 0;
   1 0 0 0;
   0 1 0 0;
   0 0 1 0;];
%Segundo punto
% A=[0 1 0 0;
%    1 0 1 0;
%    0 1 0 1;
%    0 0 1 0;];


%hago el objeto grafo, pero aun no lo ploteo
G=digraph(A');
% G=graph(A);

%Nodos
n=size(A,1);

%Laplaciano
L=D-A

%Calculo de los eigenvalores
eig(-L)

```

```
%Formo la matriz Gama
n=size(L,1);
l=3; %Posicion, velocidad, aceleracion
gammas=[1 2 3];%defino mis valores de gamma

Gamma=zeros(l*n,l*n); %Inicializo la matriz Gamma
I=eye(n);

%relleno la matriz Gamma
for i = 1:l-1
    Gamma((i-1)*n+1:i*n, i*n+1:(i+1)*n) = I;
end

% Rellenar la ultima fila de bloques de Gamma
Gamma((l-1)*n+1:l*n, :) = [-gammas(1)*L, -gammas(2)*L, -gammas(3)*L];


%Hago el producto Kronecker
m=1; %dimensiones que estoy considerando
Im=eye(m);
Gamma_kron= kron(Gamma,Im);

% Esta parte es para la simulacion del sistema
%Valores iniciales
xi0=[1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12];%Guardo los valores iniciales para referencia
% xi0=rand(size(Gamma_kron,1),1);%Guardo los valores iniciales para referencia
xi=xi0;%Uso estos valores en la aproximacion de Euler

%periodo de muestreo
Dt=0.01;
tiempo=25; %segundos
iteraciones=tiempo/Dt;

%Simulo el sistema
for k=1:iteraciones

%Aproximacion de Euler con Gammakron
    xi(:,k+1)=xi(:,k)+Dt*(Gamma_kron*xi(:,k));


end

%Calculo de consensos
syms t;
Uno=ones(n,1);
Cero=zeros(n,n);
p=[1;0;0;0];
egamma=[Uno*p' t*Uno*p' (1/2)*(t^2)*Uno*p';
        Cero   Uno*p'   t*Uno*p';
        Cero   Cero     Uno*p'];
Consenso=egamma*xi0

%Vectores de tiempo para graficar
t=linspace(0,tiempo,iteraciones+1);
```

```
te=linspace(0,tiempo,iteraciones);

figure
subplot(1,2,1)
plot(t,xi(1:4,:))
grid on

subplot(1,2,2)
plot(t,xi(5:8,:))
grid on


figure
plot(t,xi(9:12,:))
grid on

figure
% plot(G, 'Layout', 'force', 'EdgeLabel', G.Edges.Weight);
plot(G);
```