



Cinvestav

Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Proyecto Final. Control de contención

Presentado por

Jesús Alejandro Díaz Hernández

Presentado para el curso de
Tópicos avanzados de control 2

Curso impartido por: Héctor Manuel Becerra Fermín
Profesor

Guadalajara, Jalisco

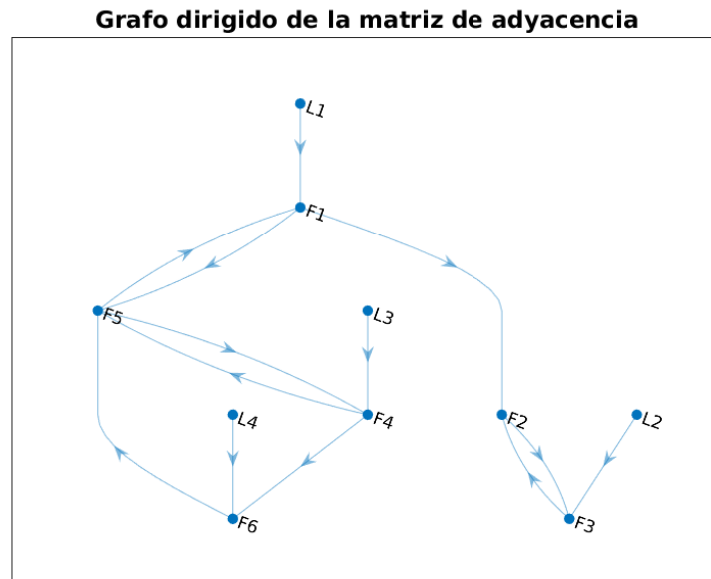
15 de agosto 2024

Proyecto

Implementar el control de contención con convergencia asintótica para topología fija para 2 casos: líderes fijos y líderes dinámicos

Introducción

Para implementar el control de contención utilizaremos como referencia el artículo "Cao, Y., Ren, W., & Egerstedt, M. (2012). Distributed containment control with multiple stationary or dynamic leaders in fixed and switching directed networks. Automatica, 48(8), 1586-1597". Analizaremos dos casos, el primero para líderes fijos, y el siguiente para líderes dinámicos. Para ambos casos consideraremos una topología fija que es la mostrada en la siguiente figura:



Donde los líderes son denotados con la letra L y los seguidores con F . Por lo tanto, consideraremos la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix} \quad (1)$$

La cual es un poco distinta de lo que se propone en el artículo antes mencionado, al agregársele una relación entre el seguidor 1 y el 5.

Líderes fijos

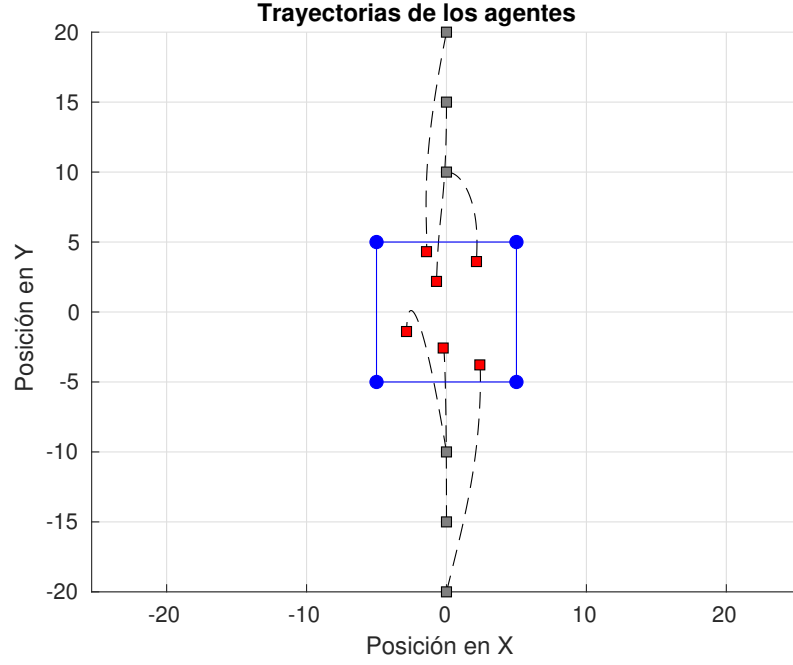
Para el caso de líderes fijos, utilizaremos la ley de control propuesta en el artículo mencionado en la introducción, que corresponde a la ecuación número 3 del mismo. Es decir:

$$u_i = 0, i \in \mathcal{R} \quad (2)$$

$$u_i = - \sum_{i \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} a_{ij}(t)[x_i(t) - x_j(t)], \in \mathcal{F} \quad (3)$$

Donde, \mathcal{R}, \mathcal{F} , hace alusión a los agentes líderes y seguidores respectivamente. a_{ij} es 1 cuando hay relación entre esos agentes y 0 de lo contrario.

Bajo este esquema de control obtenemos los siguientes resultados



Donde los líderes están siempre fijos en las posiciones

$$L1 = [-5, -5]$$

$$L2 = [5, -5]$$

$$L3 = [5, 5]$$

$$L4 = [-5, 5]$$

Formando en Convex Hull o casco convexo marcado con líneas azules en la imagen.

Los seis seguidores tienen posiciones iniciales como

$$F1 = [0, -5]$$

$$F2 = [0, -10]$$

$$F3 = [0, -15]$$

$$F4 = [0, 5]$$

$$F5 = [0, 10]$$

$$F6 = [0, 15]$$

Aunque en principio estas posiciones pueden ser aleatorias se usaron de esta manera para parecerse a las presentadas en el artículo.

Las posiciones iniciales se muestran como un cuadro gris, las finales en un cuadro rojo, y sus trayectorias como líneas negras punteadas.

Líderes dinámicos

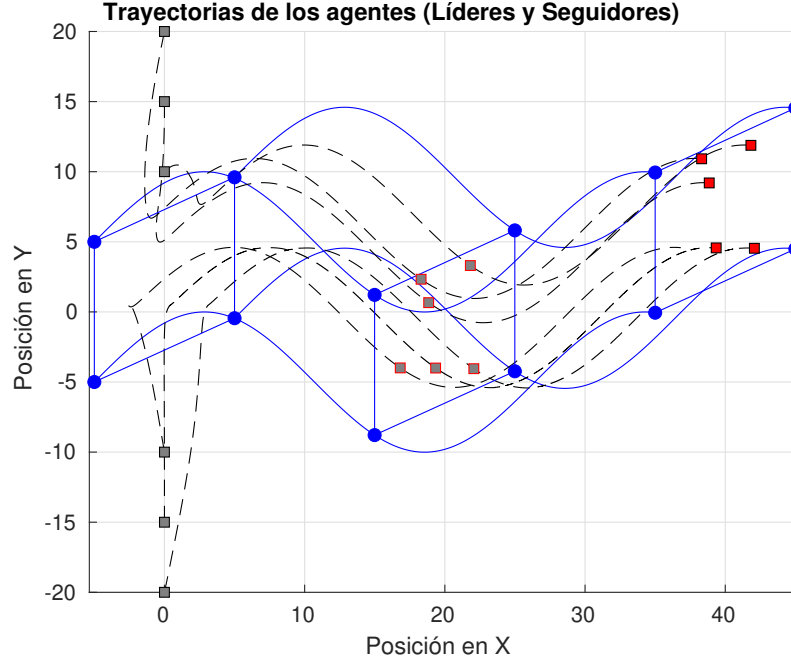
Para el caso de líderes fijos, utilizaremos la ley de control propuesta en el artículo mencionado en la introducción, que corresponde a la ecuación número 13 del mismo. Es decir:

$$u_i = v_i(t), i \in \mathcal{R} \quad (4)$$

$$u_i = -\alpha \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} a_{ij}(t) [x_i(t) - x_j(t)] - \beta \operatorname{sgn} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}} a_{ij}(t) [x_i(t) - x_j(t)] \right\}, i \in \mathcal{F} \quad (5)$$

Donde, \mathcal{R}, \mathcal{F} , hace alusión a los agentes líderes y seguidores respectivamente, a_{ij} es 1 cuando hay relación entre esos agentes y 0 de lo contrario, α y β son escalares positivos, la función sgn es la función signo y v_i es la velocidad de cada líder. Para este caso se considera que todos los líderes tienen la misma velocidad $v_i = [1 \quad \cos(0.2t)]^T$ tanto en x como en y . Estas velocidades se propusieron con la intención de parecerse a los experimentos del artículo, pero no es idéntica, ya que en el mismo no menciona que velocidades utilizan.

Bajo este esquema de control obtenemos los siguientes resultados



Donde los líderes se mueven como ya se mencionó. Sus posiciones iniciales están dadas como

$$\begin{aligned} L1 &= [-5, -5] \\ L2 &= [5, -0.45] \\ L3 &= [5, 9.6] \\ L4 &= [-5, 5] \end{aligned}$$

Formando en Convex Hull o casco convexo marcado con líneas azules en la imagen. Además, hay dos snapshots del casco convexo, uno a los 20 segundos de simulación y otro a los 40 segundos que es el final de la simulación.

Los seis seguidores tienen posiciones iniciales como

$$\begin{aligned} F1 &= [0, -5] \\ F2 &= [0, -10] \\ F3 &= [0, -15] \\ F4 &= [0, 5] \\ F5 &= [0, 10] \\ F6 &= [0, 15] \end{aligned}$$

Nuevamente, las posiciones iniciales se muestran como un cuadro gris, las finales en un cuadro rojo, y sus trayectorias como líneas negras punteadas, pero además se incluye un snapshot de las posiciones de los seguidores a los 20 segundos, la cual se muestra de color gris encerrada en un recuadro rojo.

Conclusiones

Se implementó un control de contención tanto para escenarios con líderes fijos como dinámicos. En ambos casos, se observó que los seguidores convergieron exitosamente al casco convexo formado por los líderes, independientemente de las posiciones iniciales y la forma del casco. Aunque en algunos casos los seguidores se mantuvieron en el perímetro del casco convexo, el control logró cumplir su objetivo en todas las simulaciones. Además, se comprobó que las ganancias de control β y γ juegan un papel importante en el tiempo requerido para alcanzar el consenso entre los agentes.

Cabe mencionar que la topología, aunque es más complicada de definir, es la misma en ambos casos, por lo que solo se define al inicio.

Anexo (Código Usado)

Líderes fijos

```

1  clc
2  clearvars
3  close all
4
5  %Especificar la topologia
6  % Definir la matriz de adyacencia A
7  agentes=10;           %numero agentes
8  lideres=4;            %numero lideres
9  seguidores=agentes-lideres; %numero de seguidores
10 A = zeros(agentes, agentes); %Inicializo la matriz de adyacencia
11
12 % Conexiones de los lideres a los seguidores
13 A(5, 1) = 1; % l1      f1
14 A(7, 2) = 1; % l2      f3
15 A(8, 3) = 1; % l3      f4
16 A(10, 4) = 1; % l4     f6
17
18 % Conexiones entre los seguidores
19 A(6, 7) = 1; % f3      f2
20 A(7, 6) = 1; % f2      f3
21 A(6, 5) = 1; % f1      f2
22 A(5, 9) = 1; % f5      f1
23 A(9, 8) = 1; % f4      f5
24 A(9, 10) = 1; % f6     f5
25 A(8, 9) = 1; % f5      f4
26 A(10, 8) = 1; % f4     f6
27 A(9,5)=1;      %agregue esta para mejor consenso f1      f5
28

```

```

29 %Datos para simulacion
30 Dt=0.01;
31 tiempo=7; %segundos
32 iteraciones=tiempo/Dt;
33
34 %Inicializo datos
35 %posiciones de los lideres en x;y
36 ConvexHull=[-5;-5; %L1
37             5;-5; %L2
38             5;5; %L3
39             -5;5];%L4
40 %posiciones iniciales de seguidores x;y
41 Followers=[0;-10; %F1
42            0;-15; %F2
43            0;-20; %F3
44            0;10; %F4
45            0;15; %F5
46            0;20;]; %F6
47 xInit=[ConvexHull;Followers];
48
49 %Inicializar las posiciones
50 x=zeros(20,iteraciones);
51 x(:,1)=xInit;
52
53 % Inicializar la matriz de control u
54 u = zeros(20, iteraciones); % 20 porque hay 10 agentes, y cada uno
    tiene 2 coordenadas (x, y)
55
56 %Simulacion
57 for k=1:iteraciones
58     % Definir la ley de control para los seguidores
59     for i = 1:seguidores
60         idx_i = 2*(i+lideres)-1:2*(i+lideres); % Indice del
            seguidor i en las coordenadas x,y
61         u(idx_i,k) = 0; % Inicializar el control del seguidor i
62
63         for j = 1:agentes
64             if A(i+lideres, j) ~= 0 % Verificar si hay una
                conexion
65                 idx_j = 2*j-1:2*j; % Indice del agente j en las
                    coordenadas x,y
66                 u(idx_i,k) = u(idx_i,k) - A(i+lideres, j) * (x(
                    idx_i, k) - x(idx_j, k));
67             end
68         end
69     end
70     %aproximacion de Euler de los estados
71     x(:,k+1)=x(:,k)+Dt*(u(:,k));
72 end
73
74 %% Graficas
75 % Crear la figura
76 figure;
77 hold on;
78
79 % Graficar las trayectorias de los seguidores
80 for i = 1:seguidores

```



```

81     idx = 2*(i+lideres)-1:2*(i+lideres); % Indice del seguidor i
      en las coordenadas x,y
82     plot(x[idx(1), :], x[idx(2), :], 'k--'); % Graficar las
      trayectorias de los seguidores
83 end
84
85 % Graficar los lideres como circulos azules y conectarlos para
      formar el convex hull
86 plot(x(1, 1), x(2, 1), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b'); % L1
87 plot(x(3, 1), x(4, 1), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b'); % L2
88 plot(x(5, 1), x(6, 1), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b'); % L3
89 plot(x(7, 1), x(8, 1), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b'); % L4
90
91 % Conectar los lideres con lineas para formar el convex hull
92 plot([x(1,1) x(3,1)], [x(2,1) x(4,1)], 'b-');
93 plot([x(3,1) x(5,1)], [x(4,1) x(6,1)], 'b-');
94 plot([x(5,1) x(7,1)], [x(6,1) x(8,1)], 'b-');
95 plot([x(7,1) x(1,1)], [x(8,1) x(2,1)], 'b-');
96
97 % Graficar las posiciones iniciales de los seguidores como
      cuadrados de un color
98 for i = 1:seguidores
99     idx = 2*(i+lideres)-1:2*(i+lideres);
100     plot(x[idx(1), 1], x[idx(2), 1], 's', 'MarkerFaceColor', [0.5
      0.5 0.5], 'MarkerEdgeColor', 'k'); % Color gris
101 end
102
103 % Graficar las posiciones finales de los seguidores como cuadrados
      rojos
104 for i = 1:seguidores
105     idx = 2*(i+lideres)-1:2*(i+lideres);
106     plot(x[idx(1), end], x[idx(2), end], 's', 'MarkerFaceColor', 'r
      ', 'MarkerEdgeColor', 'k'); % Color rojo
107 end
108
109 % Etiquetas y ajustes
110 xlabel('Posicion en X');
111 ylabel('Posicion en Y');
112 title('Trayectorias de los agentes');
113 axis equal
114 grid on;
115 hold off;
116
117
118
119 % Crear el objeto digraph
120 G = digraph(A');
121
122 % Etiquetas para los nodos (lideres y seguidores)
123 nombres_nodos = {'L1', 'L2', 'L3', 'L4', 'F1', 'F2', 'F3', 'F4', '
      F5', 'F6'};
124
125 % Graficar el grafo dirigido
126 figure;
127 plot(G, 'Layout', 'layered', 'NodeLabel', nombres_nodos, 'ArrowSize
      ', 12);
128 title('Grafo dirigido de la matriz de adyacencia');

```

Líderes dinámicos

```
1      clc
2      clearvars
3      close all
4
5      % Especificar la topología
6      % Definir la matriz de adyacencia A
7      agentes = 10; % número de agentes
8      lideres = 4; % número de líderes
9      seguidores = agentes - lideres; % número de seguidores
10     A = zeros(agentes, agentes); % Inicializo la matriz de adyacencia
11
12     % Conexiones de los líderes a los seguidores
13     A(5, 1) = 1; % L1 f1
14     A(7, 2) = 1; % L2 f3
15     A(8, 3) = 1; % L3 f4
16     A(10, 4) = 1; % L4 f6
17
18     % Conexiones entre los seguidores
19     A(6, 7) = 1; % f3 f2
20     A(7, 6) = 1; % f2 f3
21     A(6, 5) = 1; % f1 f2
22     A(5, 9) = 1; % f5 f1
23     A(9, 8) = 1; % f4 f5
24     A(9, 10) = 1; % f6 f5
25     A(8, 9) = 1; % f5 f4
26     A(10, 8) = 1; % f4 f6
27     A(9,5)=1;%agregue esta para mejor consenso f1 f5
28
29     % Datos para simulación
30     Dt = 0.01;
31     tiempo = 40; % segundos
32     iteraciones = tiempo / Dt;
33
34     % Inicializar posiciones de los líderes y seguidores
35     ConvexHull = [-5;-5; % L1
36                  5;-0.45; % L2
37                  5;9.6; % L3
38                  -5;5]; % L4
39
40     Followers = [0;-10; % F1
41                  0;-15; % F2
42                  0;-20; % F3
43                  0;10; % F4
44                  0;15; % F5
45                  0;20; % F6];
46
47     xInit = [ConvexHull; Followers];
48
49     % Inicializar las posiciones
50     x = zeros(20, iteraciones);
```

```

51 x(:, 1) = xInit;
52
53 % Inicializar la matriz de control u
54 u = zeros(20, iteraciones);
55
56 % Par metros de control
57 alpha = 5; % Escalar positivo para el control
58 beta = 1; % Escalar positivo para el término de signo
59
60 % Simulación
61 for k = 1:iteraciones
62     % Definir la ley de control para los líderes (velocidad constante)
63     for i = 1:lideres
64         idx_i = 2*i-1:2*i; % índice del líder i en las
65                             % coordenadas x,y
66         u(idx_i, k) = [1; cos(.2*Dt*k)];
67         % u(idx_i, k) = [cos(Dt*k); sin(Dt*k)]; % Velocidad
68         % definida para líderes
69     end
70
71     % Definir la ley de control para los seguidores
72     for i = 1:seguidores
73         idx_i = 2*(i+lideres)-1:2*(i+lideres); % índice del
74         % seguidor i en las coordenadas x,y
75         u(idx_i, k) = 0; % Inicializar el control del seguidor i
76
77         for j = 1:agentes
78             if A(i+lideres, j) ~= 0 % Verificar si hay una
79                                     % conexión
80                 idx_j = 2*j-1:2*j; % índice del agente j en las
81                                     % coordenadas x,y
82                 control_term = A(i+lideres, j) * (x(idx_i, k) - x(
83                     idx_j, k));
84                 u(idx_i, k) = u(idx_i, k) - alpha * control_term -
85                     beta * sign(control_term);
86             end
87         end
88     end
89
90     % Aproximación de Euler de los estados
91     x(:, k+1) = x(:, k) + Dt * (u(:, k));
92 end
93
94 %% Gráficas
95 % Crear la figura
96 figure;
97 hold on;
98
99 % Graficar las trayectorias de todos los agentes
100 for i = 1:agentes
101     idx = 2*i-1:2*i; % índice del agente i en las coordenadas x,y
102     if i<5
103         plot(x(idx(1), :), x(idx(2), :), 'b-'); % Graficar las
104             % trayectorias
105     else
106         plot(x(idx(1), :), x(idx(2), :), 'k--');
107     end
108 end

```

```

99     end
100 end
101
102 % Graficar los l deres como c rculos azules y conectarlos para
    formar el convex hull
103 for i = 1:lideres
104     idx = 2*i-1:2*i;
105     plot(x(idx(1), 1), x(idx(2), 1), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b');
        %Inicio
106     plot(x(idx(1), 2000), x(idx(2), 2000), 'bo', 'MarkerFaceColor',
        'b'); %20 segundos
107     plot(x(idx(1), 4001), x(idx(2), 4001), 'bo', 'MarkerFaceColor',
        'b'); %final
108 end
109
110 % Conectar los l deres con l neas para formar el convex hull
    inicial
111 plot([x(1,1) x(3,1)], [x(2,1) x(4,1)], 'b-');
112 plot([x(3,1) x(5,1)], [x(4,1) x(6,1)], 'b-');
113 plot([x(5,1) x(7,1)], [x(6,1) x(8,1)], 'b-');
114 plot([x(7,1) x(1,1)], [x(8,1) x(2,1)], 'b-');
115 % Conectar los l deres con l neas para formar el convex hull a
    los 20
116 % segundos
117 plot([x(1,4001) x(3,4001)], [x(2,4001) x(4,4001)], 'b-');
118 plot([x(3,4001) x(5,4001)], [x(4,4001) x(6,4001)], 'b-');
119 plot([x(5,4001) x(7,4001)], [x(6,4001) x(8,4001)], 'b-');
120 plot([x(7,4001) x(1,4001)], [x(8,4001) x(2,4001)], 'b-');
121
122 % Conectar los l deres con l neas para formar el convex hull a
    los 40
123 % segundos
124 plot([x(1,2000) x(3,2000)], [x(2,2000) x(4,2000)], 'b-');
125 plot([x(3,2000) x(5,2000)], [x(4,2000) x(6,2000)], 'b-');
126 plot([x(5,2000) x(7,2000)], [x(6,2000) x(8,2000)], 'b-');
127 plot([x(7,2000) x(1,2000)], [x(8,2000) x(2,2000)], 'b-');
128
129 % Graficar las posiciones iniciales de los seguidores como
    cuadrados de color gris
130 for i = 1:seguidores
131     idx = 2*(i+lideres)-1:2*(i+lideres);
132     plot(x(idx(1), 1), x(idx(2), 1), 's', 'MarkerFaceColor', [0.5
        0.5 0.5], 'MarkerEdgeColor', 'k'); %Inicio
133     plot(x(idx(1), 2000), x(idx(2), 2000), 's', 'MarkerFaceColor',
        [0.5 0.5 0.5], 'MarkerEdgeColor', 'r'); %20 segundos
134 end
135
136 % Graficar las posiciones finales de todos los agentes como
    cuadrados rojos
137 for i = 1:agentes
138     idx = 2*i-1:2*i;
139     if i>5
140         plot(x(idx(1), end), x(idx(2), end), 's', 'MarkerFaceColor'
            , 'r', 'MarkerEdgeColor', 'k');
141     end
142 end
143

```

```
144 % Etiquetas y ajustes
145 xlabel('Posici n en X');
146 ylabel('Posici n en Y');
147 title('Trayectorias de los agentes (L deres y Seguidores)');
148 axis equal
149 grid on;
150 hold off;
```