Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara

Tarea 2. Consenso grafo dirigido

Presentado por

Jesús Alejandro Díaz Hernández

Presentado para el curso de

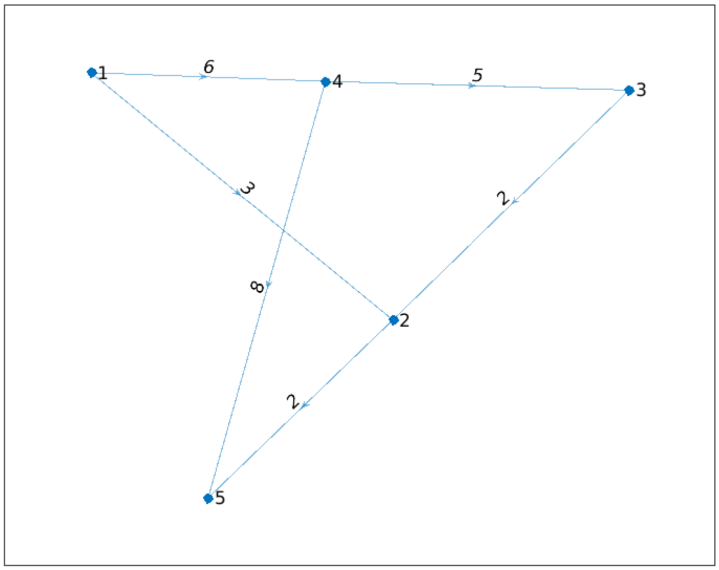
Tópicos avanzados de control 2

Curso impartido por: Héctor Manuel Becerra Fermín
Profesor

Guadalajara, Jalisco, 22 de mayo del 2024

Pregunta 1.-

El grafo de la diapositiva 13 es el siguiente para referencia:



a)

La matriz de grado del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

b)

La matriz de adyacencia del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

Por lo tanto, la matriz Laplaciana está correcta y es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

d)

La matriz de valores propios del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2771 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5416 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.0029 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.3316 \end{bmatrix}$$

y la de vectores propios es

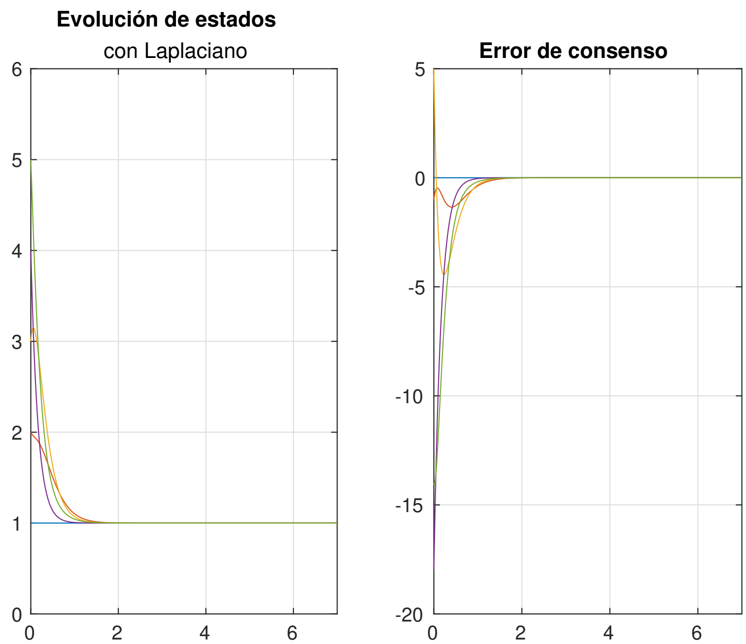
$$\begin{bmatrix} 0.4472 & -0.4237 & 0.3768 & -0.6656 & 0.1880 \\ 0.4472 & -0.4673 & -0.7328 & 0.1381 & -0.1590 \\ 0.4472 & 0.7664 & -0.3036 & -0.3249 & 0.1218 \\ 0.4472 & 0.1205 & 0.4043 & 0.2404 & -0.7510 \\ 0.4472 & 0.0041 & 0.2553 & 0.6119 & 0.6002 \end{bmatrix}$$

e)

Son reales positivos (salvo el primero que es cero), lo que significa que, en retroalimentación negativa en un sistema en lazo cerrado, están del lado izquierdo del plano complejo, implicando estabilidad. Van en orden ascendente $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$. La conectividad algebraica es igual a 5.2771.

f)

Considerando cada nodo como $\dot{x} = u$, y definiendo las entradas de control como el negativo del Laplaciano mediante la aproximación de Euler, obtenemos la gráfica del siguiente inciso

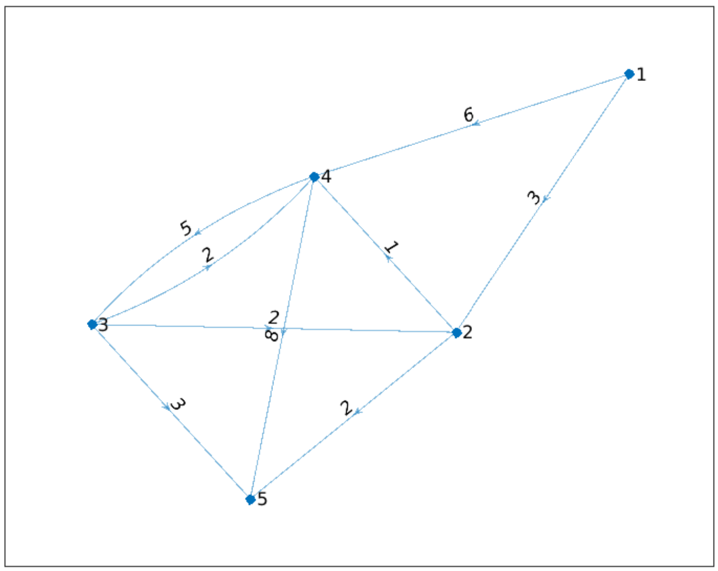


h)

El sistema converge a 1 según la simulación. Además, si calculamos la convergencia mediante $\lim_{t\to\infty} = (p_1 q_1)x_0$ y considerando que $p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que son respectivamente los eigenvectores derechos e izquierdo asociado al eigenvalor nulo, nótese que $p_1^T q_1 = 1$. En mi caso, usando los valores iniciales como $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$ precisamente coincide con el valor de 1.

Pregunta 2.-

Para que sigan conservando las condiciones para lograr el consenso se requiere que el grafo contenga una ramificación enraizada, es decir, que $Rank(L) = n-1$ en este caso que sea igual a 4. Por lo que agregue las siguientes aristas, de modo que el Laplaciano mantuviera ese rango, de la siguiente manera:



a)

Por lo tanto, la nueva matriz Laplaciana es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ -6 & -1 & -2 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -8 & 13 \end{bmatrix}$$

b)

La matriz de valores propios del grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.4586 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.8630 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.9139 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16.8117 \end{bmatrix}$$

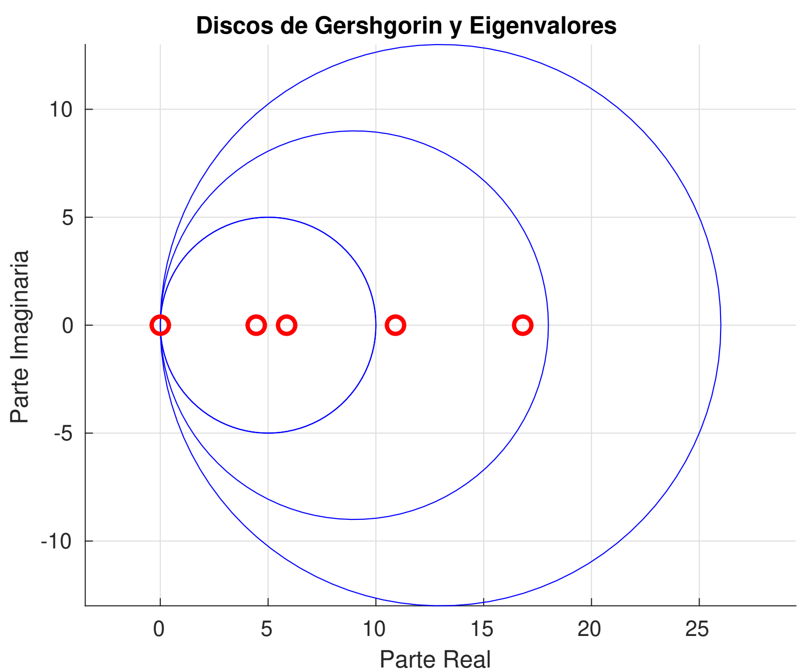
y la de vectores propios es **este tendría que ser V no U**

$$\begin{bmatrix} 0.4472 & -0.6799 & 0.3192 & -0.4581 & 0.1607 \\ 0.4472 & -0.0966 & -0.8814 & -0.0676 & -0.0951 \\ 0.4472 & 0.7131 & 0.1918 & -0.5029 & -0.0420 \\ 0.4472 & -0.0625 & 0.2736 & 0.4723 & -0.7057 \\ 0.4472 & 0.1260 & 0.0967 & 0.5563 & 0.6821 \end{bmatrix}$$

La conectividad algebraica es de 4.45

c)

Trazando los discos de Greshgorin de la matriz Laplaciana el inciso a), obtenemos la siguiente figura:

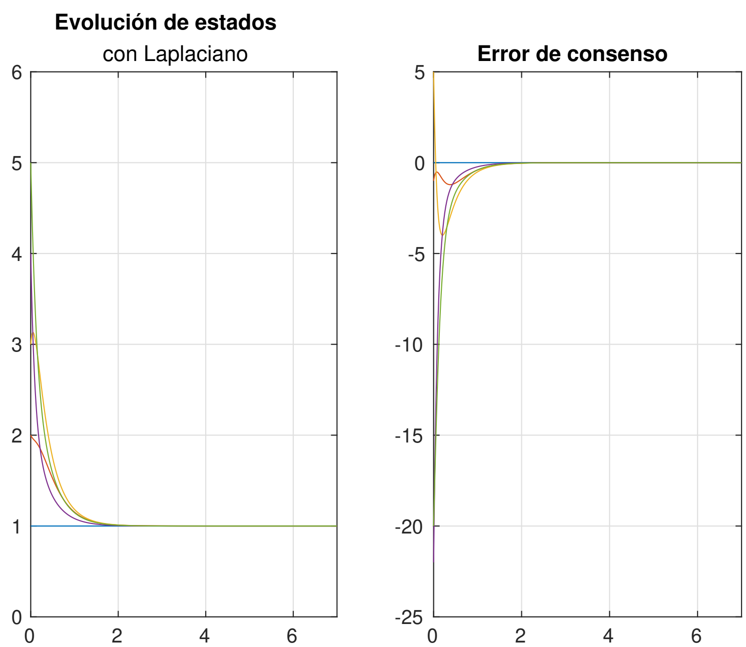


Los eigenvalores, que se pueden ver en el inciso b), están marcados en rojo y los discos de Greshgorin en azul. Se puede observar que al retroalimentar negativamente el sistema en lazo cerrado, estos valores se desplazarán hacia la parte izquierda del plano complejo, lo que implica estabilidad.

d)

Considerando cada nodo como $\dot{x} = u$, y definiendo las entradas de control como el negativo del Laplaciano mediante la aproximación de Euler, obtenemos la gráfica del siguiente inciso

e)



f)

Nuevamente, el valor de consenso en simulación es igual a 1. A pesar de que altere los eigenvalores y eigenvectores, aquellos que están asociados con el eigenvalor nulo siguen siendo lo mismo, es decir, p_1 y q_1. Esto hace que, utilizando las mismas condiciones iniciales, el valor de consenso coincida con 1.

Pregunta 3.-

Aunque en las imágenes presentadas no se alcance a apreciar correctamente, el segundo sistema es un poco más lento en converger que el original. El original converge en 1.94 segundos y el segundo (con las aristas agregadas) en 2.39 segundos. Esto se puede predecir gracias al valor del segundo eigenvalor. Se puede apreciar que, aun cuando se le agregaron aristas, no incrementó la velocidad de convergencia como en el caso del grafo no dirigido. Es decir, los pesos de las nuevas aristas y su posición influyen en la conectividad.

Como conclusión, cuando se trata de grafos dirigidos, hay que considerar muchas más cosas que con los grafos no dirigidos. Sin embargo, una manera muy útil de verificar la estabilidad en un sistema, no solo este, sino cualquier otro, es utilizando el teorema de Gershgorin. Sin embargo, este teorema no nos brinda información sobre qué tan rápido convergerá el sistema ni en qué punto. Aun con dicho teorema, es necesario utilizar herramientas como la descomposición en valores singulares para obtener una comprensión más completa del comportamiento del mismo.