CONTROL DE CONTENCIÓN

CAO, Y., REN, W., & EGERSTEDT, M. (2012). DISTRIBUTED CONTAINMENT CONTROL WITH MULTIPLE STATIONARY OR DYNAMIC LEADERS IN FIXED AND SWITCHING DIRECTED NETWORKS. *AUTOMATICA*, *48*(8), 1586-1597.

¿DE QUÉ TRATA?

- Control de contención de un grupo de agentes móviles autónomos, con lideres estacionarios y dinámicos, bajo topologías cambiantes y fijas.
- Cuando la topología es fija, proponen condiciones en la en la red y las ganancias de control para garantizar que los seguidores converjan a un casco convexo **(convex hull)** dinámico.
- Cuando es cambiante proponen condiciones, para que los seguidores converjan al mínimo hiperrectángulo que contiene los lideres dinámicos.
- Muestra que en general es imposible encontrar un algoritmo control de contención distribuido sin mediciones de velocidad

DEFINICIONES ÚTILES

Definición 1.-

Para un sistema de n agentes, un agente se llama **líder** si no tiene vecinos.
Un agente se llama **seguidor** si tiene al menos un vecino.
Supongamos que hay m líderes, donde $m < n$, y $n - m$ seguidores.
Usamos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{F}$ para denotar, respectivamente, el conjunto de líderes y el conjunto de seguidores.

Condición 1.- Para cada seguidor, existe al menos un líder que tiene un camino dirigido al seguidor

Definición 2.-

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto en un espacio vectorial real $V \subseteq \mathbb{R}^p$.
El conjunto $\mathcal{C}$ se llama convexo si, para cualesquiera x y y en $\mathcal{C}$, el punto $(1-z)x + zy$ está en $\mathcal{C}$ para cualquier $z \in [0,1]$.
El casco convexo para un conjunto de puntos $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en V es el conjunto convexo mínimo que contiene todos los puntos en X.
Usamos $\mathrm{Co}\{X\}$ para denotar el casco convexo de X.
En particular, $\mathrm{Co}\{X\} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R} \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}$.
Cuando $V \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Co}\{X\} = \{x \mid x \in [\min_i x_i, \max_i x_i]\}$.

Definición 3.-

Una matriz real $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama una M-matriz si puede escribirse como $B = sI_n - C$, donde $s > 0$ y $C \in \mathbb{R}^{n \times n} \geq 0$ satisface $\rho(C) \leq s,$ donde $\rho(C)$ es el radio espectral de la matriz C.

La matriz B se llama una M-matriz no singular si $\rho(C) < s$.

Lema 1.-

(Alefeld y Schneider (1982)). Defina $Z_{n \times n} := \{B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid b_{ij} \leq 0,\ i \neq j\}$. Una matriz $B \in Z_{n \times n}$ es una M-matriz no singular si y solo si B^{-1} existe y $B^{-1} \geq 0$.

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD CON MÚLTIPLES LIDERES ESTACIONARIOS

Considerando un sistema de integrador simple

$$\dot{x}_i^0(t) = u_i^0(t), i = 1, \ldots, n.$$

Se usa la ley de control, para conseguir convergencia

$$u_i^0(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)[x_i^0(t) - x_j^0(t)], i = 1, \cdots, n$$

Segunda ley de control.-

Supongamos que hay m líderes estacionarios, con $m < n$, y $n - m$ seguidores.
La ley de control se convierte en
$u_i^0(t) = 0, i \in \mathcal{R}$
$u_i^0(t) = -\sum_{j \in R} a_{ij}(t)[x_{0i}(t) - x_{0j}(t)], i \in \mathcal{F}$

TOPOLOGÍA FIJA

El sistema en lazo cerrado está escrito como

$$\dot{x}^0(t) = -(\mathcal{L} \otimes I_p)x^0(t)$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que los agentes
1 a $n-m$, $m<n$, son seguidores y los agentes $n-m+1$ a n son líderes.
En consecuencia, L puede ser particionado como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ 0_{m\times(n-m)} & 0_{m\times m} \end{bmatrix}$$

Teorema 1: Supongamos que la topología de la red dirigida está fija. Usando la segunda ley de control para el sistema de integrador simple, todos los seguidores convergerán al casco convexo estacionario formado por los líderes estacionarios para condiciones iniciales arbitrarias si y solo si la Condición 1 está satisfecha en el grafo dirigido $\mathcal{G}$. Además, las posiciones finales de los seguidores están dadas por $-(\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2 \otimes I_p)x_L$.

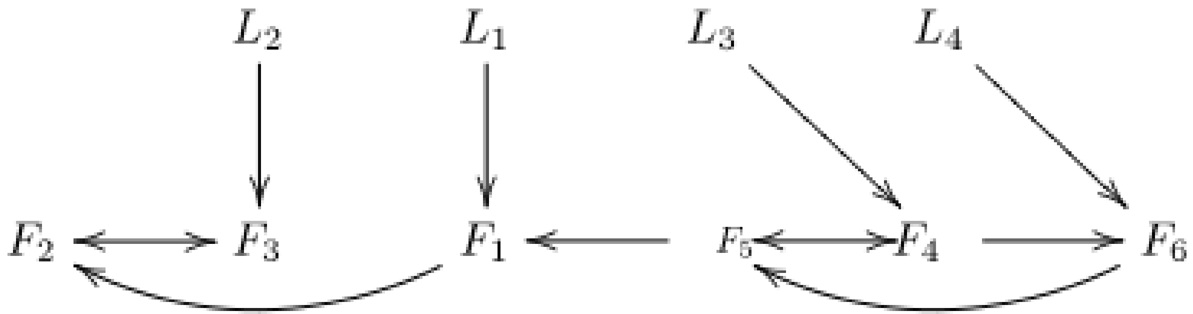
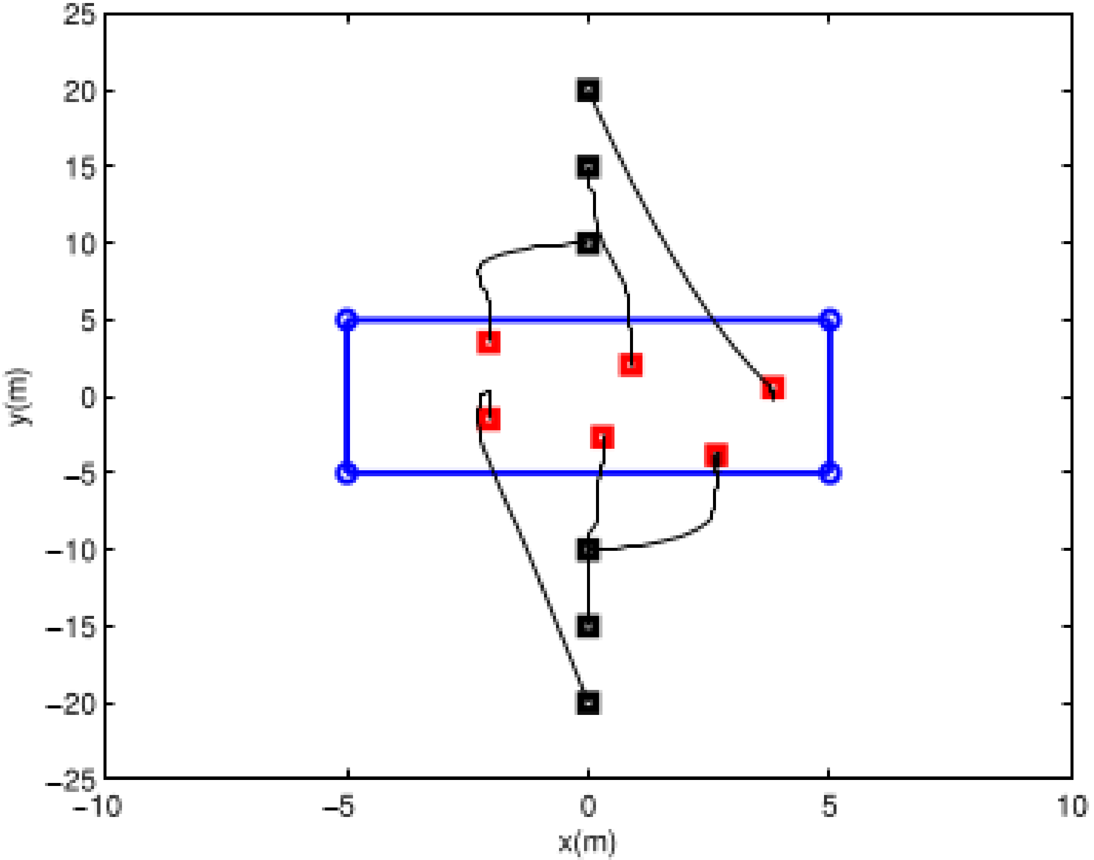


FIG. 1.- Topología fija usada para la simulación de la derecha

FIG. 2.- Trayectorias de los agentes usando la segunda ley de control. Los lideres están representados por los círculos azules



TOPOLOGÍA CAMBIANTE

Lema 2.-

Dado n puntos fijos $x_i \in \mathbb{R}^p, i = 1, \ldots, n,$ relativos al sistema de coordenadas inerciales $\mathcal{C}_0$.
El casco convexo formado por los n puntos es equivalente a la intersección de todos los hiperrectángulos mínimos que contienen a los n puntos.

Lema 3.-

Usando la segunda ley de control para un sistema de integrador simple, todos los seguidores siempre convergerán al hiperrectángulo mínimo que contiene a los líderes estacionarios y
cada uno de cuyos hiperplanos es normal a un eje de $\mathcal{C}_0$,
para condiciones iniciales arbitrarias $x_i^0(0), i \in \mathcal{F}$,
si y solo si existe N_2 tal que la Condición 1 se cumple en la unión de $\mathcal{G}_i, i = N_1, \ldots, N_1 + N_2$,
para cualquier N_1 finito.

Teorema 2: Usando la segunda ley de control para el sistema a consideración, todos los seguidores siempre convergerán al casco convexo estacionario formado por los líderes estacionarios para condiciones iniciales arbitrarias $x_i^0(0), i \in \mathcal{F}$, si y solo si existe N_2 tal que la Condición 1 se cumple en la unión de $\mathcal{G}_i, i = N_1, \ldots, N_1 + N_2$, para cualquier N_1 finito.

OBSERVACIONES IMPORTANTES

- Cada seguidor puede tener su propio marco inercial de coordenadas y se puede implementar el algoritmo de acuerdo con él. Esto implica que, si cada agente tiene su propio marco inercial de coordenadas, el consenso se puede logar si el grafo dirigido tiene un spannig tree directo.
- Se asumió que cada líder no tiene vecinos. Sin embargo, para algunas topologías, es posible ver un subgrupo de agentes como un líder.
- Para el algoritmo de consenso en tiempo discreto la convergencia funciona igual que en el teorema 2

FIG. 3.- Topología especial donde los agentes 1 y 2 (respectivamente 5 y 6) pueden llegar a consenso sin importar el estado de los otros agentes

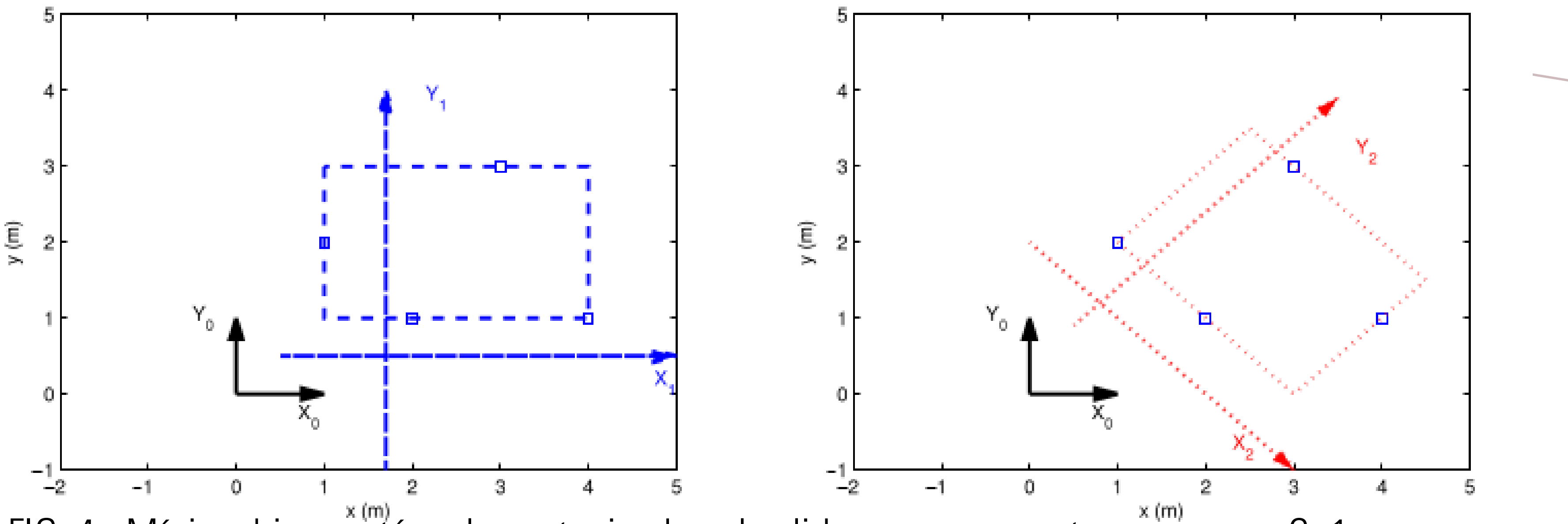


FIG. 4.- Mínimo hiperrectángulo conteniendo a los lideres con respecto a un marco C_1 y un marco C_2

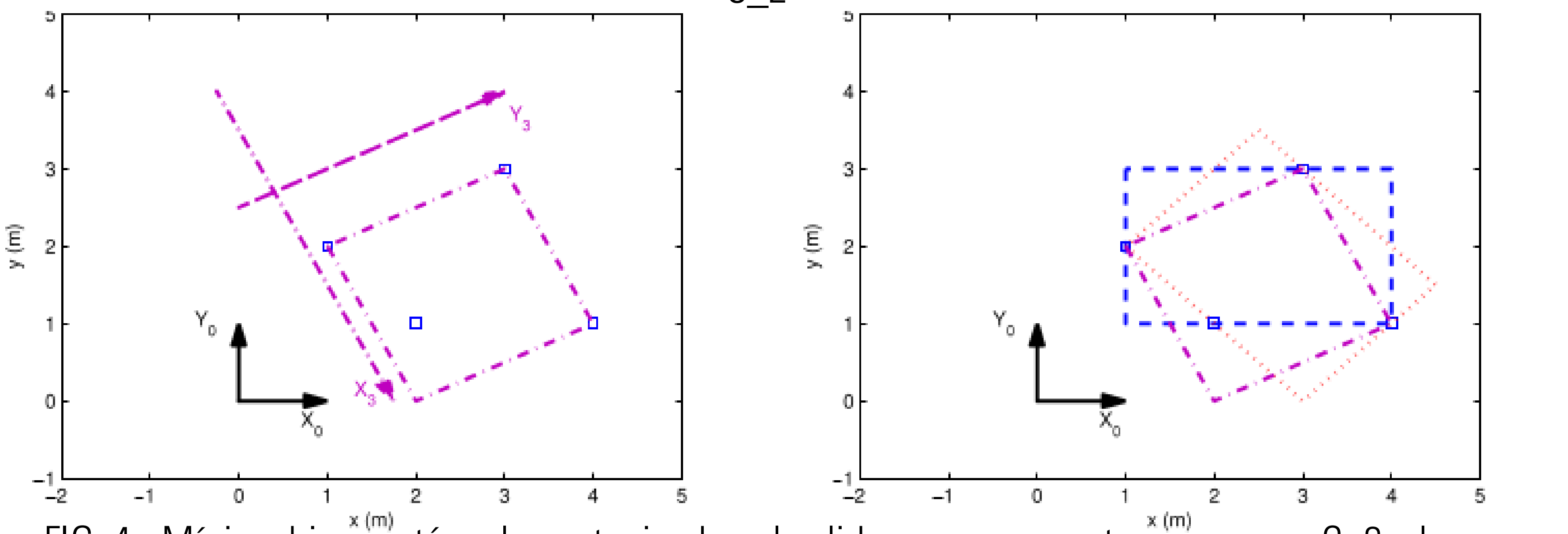


FIG. 4.- Mínimo hiperrectángulo conteniendo a los lideres con respecto a un marco C_3 y la intersección de estos es el casco convexo formado por lo cuatro lideres

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD CON MÚLTIPLES LIDERES DINÁMICOS

Tercera ley de control.-

Cuando existen $m, m < n,$ líderes dinámicos y $n - m$ seguidores proponen la siguietne ley de control sin mediciones de velocidad como

$$u_i(t) = v_i(t), i \in \mathcal{R}$$

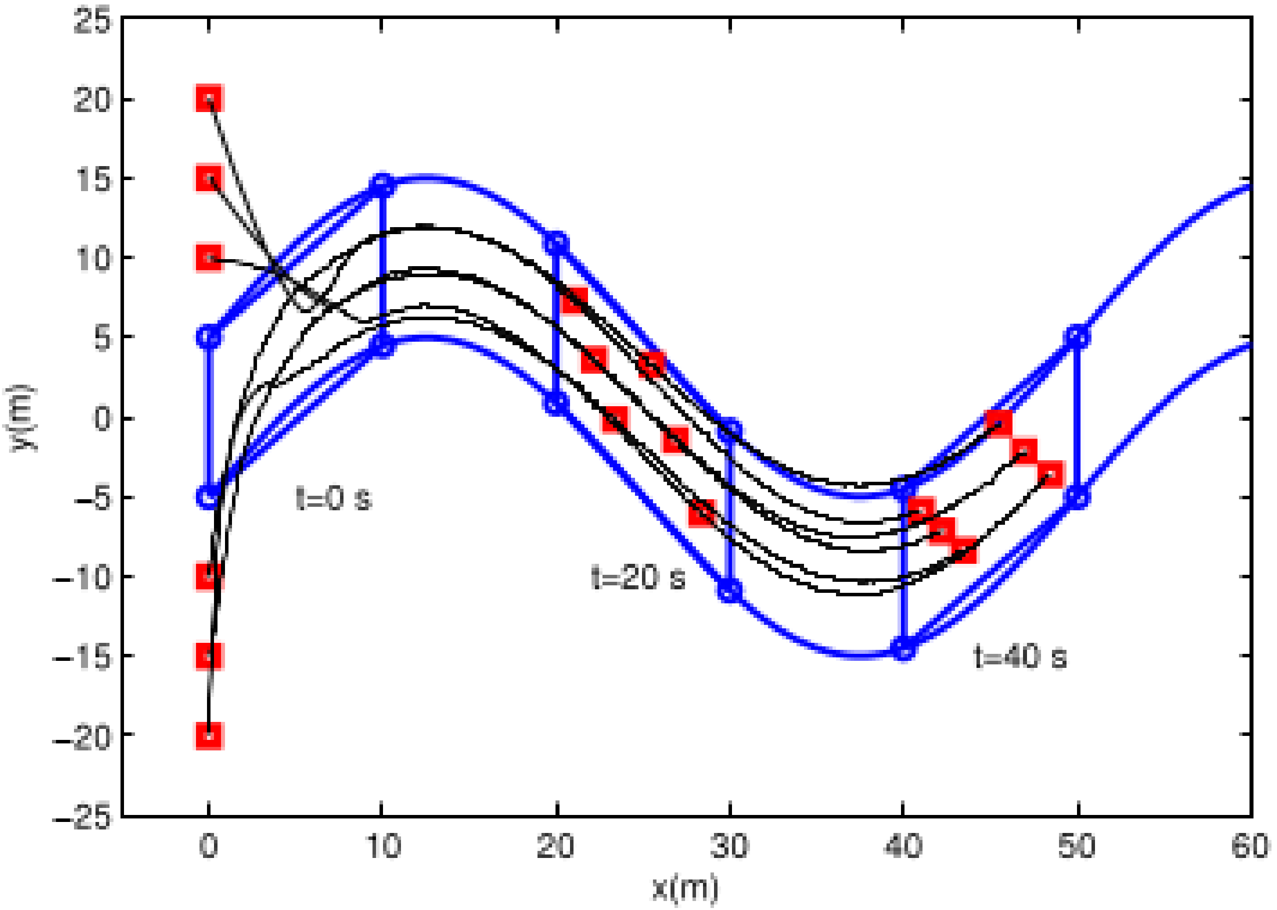
$$u_i(t) = -\alpha \sum_{j \in \mathcal{F} \bigcup \mathcal{R}} a_{ij}(t) \left[x_i(t) - x_j(t)\right]$$

$$-\beta sgn \left\{ \sum_{j \in \mathcal{F} \bigcup \mathcal{R}} a_{ij}(t) \left[x_i(t) - x_j(t)\right] \right\}, i \in \mathcal{F}$$

TOPOLOGÍA FIJA

Teorema 3: Supongamos que la topología de la red dirigida está fija, $\alpha > 0$, y $\beta \geq \gamma_l$, donde $\gamma_l = \sup_{i \in R} \|v_i(t)\|$.
Usando la tercera ley de control para el sistema de integrador simple, todos los seguidores siempre convergerán al casco convexo dinámico
$\mathrm{Co}\{x_j(t), j \in R\}$ cuando $t \to \infty$ para condiciones iniciales arbitrarias $x_i(0), i \in \mathcal{F}$,
si y solo si la Condición 1 se cumple en el grafo dirigido $\mathcal{G}$.
En particular, las posiciones finales de los seguidores están dadas por $-\left(\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2 \otimes I_p\right) x_L(t)$,
donde x_L es el vector columna de las posiciones de los líderes, y $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ están dados en

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ 0_{m\times(n-m)} & 0_{m\times n} \end{bmatrix}$$



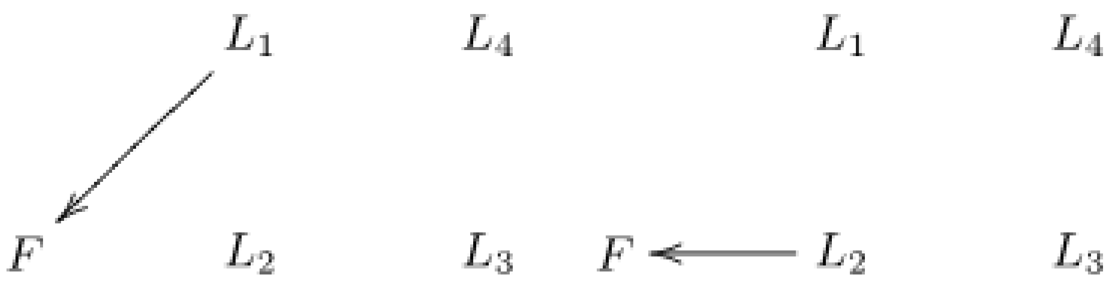
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
y(m)
0
10
20
30
40
50
60
x(m)
t=0 s
t=20 s
t=40 s

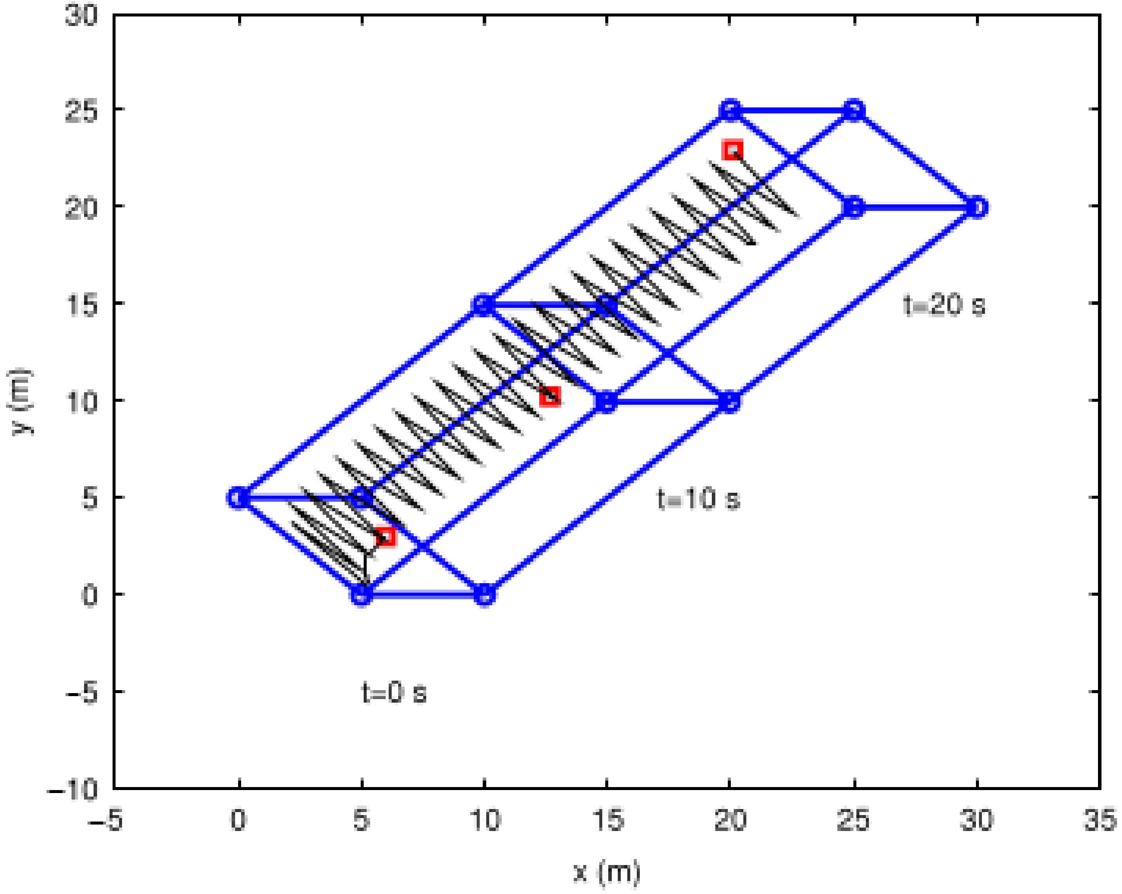
TOPOLOGÍA CAMBIANTE

Teoreme 4: Supongamos que $\beta > \gamma_l,$ donde γ_l está definido en el Teorema3.
Usando le tercer ley de control para el sistema considerado, todos los seguidores siempre convergerán al hiperrectángulo mínimo dinámico que contiene a los líderes dinámicos y cada uno de cuyos hiperplanos es normal a un eje de C_0 cuando $t \to \infty$, para condiciones iniciales arbitrarias $x_i(0), i \in \mathcal{F},$ si la Condición 1 se cumple en el grafo dirigido $\mathcal{G}(t)$ en cada intervalo de tiempo de la forma $\left[\sum_{j=1}^{k} \Delta_j, \sum_{j=1}^{k+1} \Delta_j\right)$.

OBSERVACIONES IMPORTANTES

- Para ilustrar que todos los seguidores podrían no converger al casco convexo dinámico formado por los líderes dinámicos, excepto en el caso 1-D bajo una topología de red dirigida cambiante, presentan el siguiente contraejemplo. Consideremos un grupo de cinco agentes con cuatro líderes y un seguidor donde los líderes tienen la misma velocidad. La topología de la red cambia de la figura mostrada en esta diapositiva cada 0.4 s y el proceso se repite.





t=0 s
t=10 s
t=20 s
x (m)
y (m)

- En el control de contención distribuido sin mediciones de velocidad, es generalmente imposible garantizar que todos los seguidores converjan al casco convexo dinámico formado por líderes dinámicos en un espacio de alta dimensión bajo una topología de red cambiante. En un espacio unidimensional, la función signo puede llevar a todos los seguidores al casco convexo dinámico si se cumplen ciertas condiciones. Sin embargo, en espacios de alta dimensión, se necesita más información (como mediciones de velocidad y detalles de la topología) para lograrlo.

CONCLUSIONES

- Este artículo estudió el problema del control de contención distribuido de agentes autónomos móviles con múltiples líderes estacionarios o dinámicos bajo topologías de red dirigidas fijas y cambiantes.
- Para líderes estacionarios, se mostraron condiciones necesarias y suficientes en la topología de la red dirigida para garantizar el control de contención distribuido en un espacio de cualquier dimensión finita.
- Para líderes dinámicos, se propuso un algoritmo de control de seguimiento distribuido sin mediciones de velocidad y se estudió la condición en la topología de la red dirigida y las ganancias de control para garantizar el control de contención distribuido.

CONCLUSIONES

- Se mostraron contraejemplos que demuestran que es generalmente imposible encontrar algoritmos de control de contención distribuido sin mediciones de velocidad que garanticen el control de contención en un espacio de alta dimensión cuando la topología de la red es cambiante
- Trabajo futuro incluirá el estudio del control de contención con líderes dinámicos en un espacio de alta dimensión con interacción cambiante.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN