EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
novembre 2018

Analyse I
Résumé: Limite d'une fonction. Fonctions continues

Définitions et résultats.

1. (Limite d'une fonction, déf.1). Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 (mais pas nécessairement en x_0), admet pour limite le nombre réel l lorsque x tend vers x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \{x \in E,\ 0 < |x - x_0| \leq \delta\}$, on a
$$|f(x) - l| \leq \varepsilon.$$
Notation: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

2. (Limite d'une fonction, déf.2). Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 (mais pas nécessairement en x_0), admet pour limite le nombre réel l lorsque x tend vers x_0, si pour toute suite (a_n) d'éléments de $\{x \in E, x \neq x_0\}$ qui converge vers x_0, la suite $f(a_n)$ converge vers l.

3. Les définitions déf.1 et déf.2 sont équivalentes.

4. Si pour toute suite $(a_n) \in \{x \in E, x \neq x_0\}$, convergente vers x_0, la limite de la suite $f(a_n)$ existe, alors la limite de la fonction $f : E \to F$ lorsque x tend vers x_0 existe.

5. Si elle existe, la limite d'une fonction en un point est unique.

6. (Critère de Cauchy pour les limites des fonctions). La limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe si est seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout couple
$x_1, x_2 \in \{x \in E,\ 0 < |x - x_0| \leq \delta\}$, on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.

7. (Opérations algébriques sur les limites). Si $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ and $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, alors
   (a) $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l_1 + \beta l_2$ pour tout couple $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) g(x)) = l_1 \cdot l_2$
   (c) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{l_1}{l_2}$ si $l_2 \neq 0$.

8. (Théorème de deux gendarmes pour les fonctions). Soient $f, g, h : E \to F$ trois fonctions telles que
   (a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$
   (b) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \{x \in E,\ 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$, on a
   $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

Alors $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

9. (Limite de la composée de deux fonctions). Soit $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions telles que $f(E) \subset G$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$. Supposons aussi qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $0 < |x - x_0| \leq \alpha$ implique $f(x) \neq y_0$. Alors $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l$.

10. (Limite à gauche, limite à droite). Une fonction $f : E \to F$ définie à droite (resp. à gauche) de x_0 admet pour limite à droite (resp. à gauche) au point x_0 le nombre réel l si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $0 < x - x_0 \leq \delta$ (resp. $0 < x_0 - x \leq \delta$), on a $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. Notation: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$).

11. Une fonction $f : E \to F$ est dite continue en un point $x_0 \in E$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

12. (Critère de Cauchy pour les fonctions continues). La fonction $f : E \to F$ est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout couple $x_1, x_2 \in \{x \in E,\ |x - x_0| \leq \delta\}$, on a $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.

13. (Opérations algébriques sur les fonctions continues). Si $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues en x_0, alors

    (a) la fonction $\alpha f(x) + \beta g(x)$ est continue en x_0 pour tout couple $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

    (b) la fonction $f(x)g(x)$ est continue en x_0.

    (c) la fonction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

14. Si $f : E \to F$ est continue en $x_0 \in E$ et $g : G \to H$ est continue en $f(x_0) \in f(E) \subset G$, alors la fonction $(g \circ f)(x) : E \to H$ est continue en x_0.

15. (Prolongement par continuité). Soit $f : E \to F$ une fonction telle que $c \notin E$ et la limite $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ existe. Alors la fonction $\hat{f}_c : E \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}_c(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ l, & x = c \end{cases}$$

    est appelée le prolongement par continuité de la fonction f au point c. Un tel prolongement est unique et la fonction obtenue est continue en c.

16. Soit $f : [a, b] \to F$ une fonction continue sur un intervalle fermé borné non-vide $[a, b]$. Alors f atteint son supremum et son infimum sur $[a, b]$. Autrement dit, si $f : [a, b] \to F$ est continue sur $[a, b]$, alors $\max_{x \in [a,b]} f(x)$ et $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ existent.

17. (Théorème de la valeur intermédiaire). Une fonction continue sur un intervalle fermé borné non-vide atteint son supremum, son infimum et toute valeur comprise entre les deux. Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors

$$f([a, b]) = [\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x)].$$

18. (Corollaire) Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et telle que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

19. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue strictement monotone est un intervalle ouvert.

20. Toute fonction strictement monotone sur un intervalle quelconque est injective.

21. Toute fonction injective et continue sur un intervalle quelconque est strictement monotone.

22. Toute fonction bijective et continue sur un intervalle quelconque admet une fonction réciproque qui est continue et strictement monotone.

Calcul des limites.

1. $\lim_{x\to x_0} x^p = x_0^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Pour tout polynôme $f(x)$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$.

3. Pour toute fonction rationnelle $f(x)$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que x_0 n'est pas la racine du dénominateur de $f(x)$, on a $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

4. $\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

6. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ pour tout $p > 0$.

8. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

9. $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

10. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

11. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.