EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
octobre 2017

Analyse I
Résumé: Nombres complexes.

Définitions et résultats.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est constitué de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des nombres réels munis des deux opérations, addition et multiplication:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), \qquad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ y_1x_2 + x_1y_2).$$

En particulier, $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ a la propriété $i^2 = -1$. L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de ces deux opérations est un corps.

2. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ a une unique représentation sous la forme *cartésienne* :

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

où $x = \mathrm{Re}(z)$ est la partie réelle et $y = \mathrm{Im}(z)$ la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$.

3. Tout nombre complexe $z \neq 0$ a une unique représentation sous la forme *polaire*:

$$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi},$$

où $\rho > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ est défini à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$. Ici $\rho = |z|$ est le module, et $\phi = \arg(z)$ l'argument de z.

4. Si $z = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}$, alors $z = x + iy$, où

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi.$$

5. Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tel que $z \neq 0$, alors $z = \rho e^{i\phi}$, où $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et

$$\phi = \begin{cases} \mathrm{Arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \mathrm{Arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

6. (Le nombre réciproque). Si $z = x + iy = \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, alors le nombre réciproque de z est le nombre complexe $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\phi}$.

7. (Le nombre conjugué). Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le conjugué de z est par définition le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$. Si $z = \rho e^{i\phi} \neq 0$, alors $\overline{z} = \rho e^{-i\phi}$.

8. (Formule de Moivre). Pour tout $\rho > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(\rho(\cos\phi + i\sin\phi))^n = \rho^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$
$$\left(\rho e^{i\phi}\right)^n = \rho^n e^{in\phi}.$$

9. (Racines des nombres complexes). Si $w = se^{i\phi} \in \mathbb{C}^*$ est un nombre complexe différent de zéro, alors

$$\{z \in \mathbb{C}^* \ : \ z^n = w\} = \{\sqrt[n]{s}\, e^{i\,\frac{\phi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.\}$$

10. (Théorème fondamental de l'algèbre). Tout polynôme complexe de degré n a n racines complexes (comptées avec les multiplicités). Autrement dit, tout polynôme complexe $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, tel que $a_n \neq 0$, s'écrit sous la forme:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n),$$

où $z_1, \ldots z_n$ sont des nombres complexes (pas nécessairement distincts).

11. (Polynômes à coefficients réels). Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme $P(z)$ à coefficients réels, alors $\overline{z}$ l'est aussi. Tout polynôme non-constant à coefficients réels peut être factorisé en polynômes à coefficients réels de degrés 1 et 2. En particulier, si $w, \overline{w} \notin \mathbb{R}$ sont des racines complexes conjuguée d'un polynôme $P(z)$ à coefficients réels, alors le polynôme à coefficients réels

$$(z - w)(z - \overline{w}) = z^2 - (2\mathrm{Re}(w))z + |w|^2$$

divise $P(z)$.

Formules utiles.

1. $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
2. $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.
3. Soient $z = \rho e^{i\phi}$, $z_1 = \rho_1 e^{i\phi_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\phi_2}$ trois nombres complexes différents de zéro. Alors

$$(a)\ \ z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)} \qquad (b)\ \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$
$$(c)\ \ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad (d)\ \ z\overline{z} = |z|^2.$$

4. Soient $z, w \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes. Alors on a
   (a) $\overline{(z \pm w)} = \overline{z} \pm \overline{w}$.
   (b) $\overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
   (c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, si $w \neq 0$.
   (d) $|\overline{z}| = |z|$.
   (e) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.
5. Soit $\phi \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \qquad \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}.$$