# Analyse II

## Résumé: Calcul différentiel des fonctions des plusieurs variables.

## Dérivées partielles et directionnelles.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n) \in E$. On définit la fonction $g(s) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Alors si $g$ est dérivable en $a_k \in \mathbb{R}$, on dit que la $k$-ème dérivée partielle de $f$ existe et est égale à $g'(a_k)$. On écrit
$$\partial_k f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = g'(a_k) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}.$$
Ici $\bar{e}_k$ est le $k$-ème vecteur de la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

2. Si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$ existent en $\bar{a}$, alors on définit le gradient de $f$ en $\bar{a}$ comme le vecteur
$$\nabla f(\bar{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right).$$

3. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots a_n) \in E$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $\bar{v} \neq \bar{0}$. On définit la fonction $g(s) = f(\bar{a} + t\bar{v})$. Alors si $g$ est dérivable en $t = 0$, on dit que la dérivée directionnelle de $f$ en $\bar{a}$ suivant le vecteur $\bar{v}$ existe et est égale à $g'(0)$. On écrit
$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}.$$

4. (Propriétés des dérivées directionnelles)
   (a) Si $\bar{v} = \bar{e}_k$, le $k$-ème vecteur de la base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, alors $Df(\bar{a}, \bar{e}_k) = \partial_k f(\bar{a})$.
   (b) $Df(\bar{a}, \lambda\bar{v}) = \lambda Df(\bar{a}, \bar{v})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\bar{v} \neq \bar{0}$.

## Dérivabilité et la différentielle.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, $\bar{a} \in E$. On dit que $f$ est dérivable au point $\bar{a}$ s'il existe une application linéaire $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et une fonction $r : E \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $\bar{x} \in E$
$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}), \qquad \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{||\bar{x} - \bar{a}||} = 0.$$
L'application linéaire $L_{\bar{a}}$ s'appelle la différentielle de $f$ au point $\bar{a} \in E$.

2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout $\bar{a} \in E$, alors on dit que $f$ est dérivalbe sur $E \subset \mathbb{R}^n$.

3. (Propriétés des fonctions dérivables). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f$ est dérivable en $\bar{a}$ de différentielle $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors:

   (a) $f$ est continue en $\bar{a}$.

   (b) Pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existe et $Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$.

   (c) En particulier, toutes les dérivées partielles existent et $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k)$.

   (d) Le graident de $f$ existe en $\bar{a}$ et $\nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), L_{\bar{a}}(\bar{e}_2), \dots L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$.

   (e) Pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, on a $Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$.

   (f) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, ||\bar{v}|| = 1$, on a $Df(\bar{a}, \bar{v}) \leq ||\nabla f(\bar{a})||$. Le gradient donne la direction de la plus grande pente de $f$ en $\bar{a}$.

4. (Plan tangent). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $(x_0, y_0)$. Alors l'équation du plan tangent au graphique de $f$ en point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

5. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$ existe en tout $\bar{x} \in E$. Si la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à $x_i$ sur $E$, on obtient la dérivée partielle d'ordre 2

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

   On peut définir ainsi les dérivées partielles d'ordre $p \geq 1$.

6. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert et $p \geq 1$ un nombre naturel. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite de classe $C^p$ dans $E$ si toutes les dérivées partielles de $f$ d'ordre $1, 2, \dots p$ existent et sont continues dans $E$.

7. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert, et $p \geq 2$ un nombre naturel. Alors $f \in C^p(E)$ implique $f \in C^k(E)$ pour tout $k = 1, 2, \dots p - 1$.

8. (Condition suffisante pour que la fonction soit dérivalbe à un point). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que toutes les dérivées partielles de $f$ existent dans une boule ouverte de centre $\bar{a}$ et de rayon $\delta$, et qu'elles sont continues en $\bar{a}$. Alors $f$ est dérivalbe en $\bar{a}$. En particulier, $f \in C^1(E)$ implique la dérivabilité de $f$ dans $E$.

9. (Théorème de Schwarz). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in E$, et $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ existent et sont continues au point $\bar{a}$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\bar{a}).$$

   En particulier, $f \in C^2(E)$ implique l'égalité des dérivées partielles secondes mixtes de $f$ dans $E$.

10. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que toutes les dérivée partielle d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\bar{a})$ existent en $\bar{a} \in E$. Alors la matrice hessienne de $f$ en $\bar{a}$ est

$$\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{a}) \end{pmatrix}.$$

11. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors on a:

$$f \in C^\infty(E) \implies f \in C^p(E)\ \forall p \geq 1 \implies f \in C^1(E) \implies f \text{ est derivable dans } E \implies$$

$$\implies \forall \bar{x} \in E, \bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}\ \exists\, Df(\bar{x}, \bar{v}) \implies \forall 1 \leq k \leq n, \bar{x} \in E\ \exists\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}).$$

Aussi, on a

$$f \text{ est derivable dans } E \implies f \text{ est continue dans } E.$$

Aucune implication n'est reversible.

12. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert et $f : E \to \mathbb{R}$. L'existence des dérivées directionnelles $Df(\bar{a}, \bar{v})$ de toutes directions $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$ n'implique ni continuité ni dérivabilité de $f$ au point $\bar{a}$. L'existence de toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}), k = 1, \dots n$ n'implique ni continuité ni dérivabilité de $f$ au point $\bar{a}$.

# Fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et la matrice jacobienne.

1. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert. Alors on peut considerer les applications $\bar{f}(\bar{x}) : E \to \mathbb{R}^m$, où $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots f_m(\bar{x}))^T$. Si $n = m$, alors on dit que $\bar{f}(\bar{x})$ est un champ vectoriel.

2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. Le champ vectoriel $\nabla f(\bar{x})$ est orthogonal aux linges (hypersurfaces) de niveau de la fonction $f(\bar{x})$.

3. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^m$ une fonction. La $k$-eme dérivée partielle de $\bar{f}$ en $\bar{a} \in E$ est

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(\bar{a}) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\bar{a}), \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{a}) \right)^T,$$

si chacune des fonctions $f_1, \dots f_m$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$ au point $\bar{a}$.

4. La fonction $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$ est dérivable en $\bar{a} \in E$ si et seulement si chaque composante $f_i : E \to \mathbb{R}$ est dérivable en $\bar{a}$ pour tout $i = 1 \dots m$.

5. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Si la fonction $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^m$ est dérivable en $\bar{a} \in E$, alors sa matrice Jacobienne est définie par la formule:

$$J_{\bar{f}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) \\ \nabla f_2(\bar{a}) \\ \dots \\ \nabla f_m(\bar{a}) \end{pmatrix},$$

où $\nabla f_i(\bar{a})$ est le gradient de la fonction $f_i$ en $\bar{a}$.

6. Lorsque $m = n$, on définit le déterminant de Jacobi (le Jacobien) de $\bar{f} : E \to \mathbb{R}^n$ en $\bar{a}$ comme le determinant de la matrice Jacobienne.

7. La matrice Jacobienne du gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ est égale à la matrice Hessienne de $f$ :
$$J_{\nabla f}(\bar{a}) = \mathrm{Hess}_f(\bar{a}).$$

8. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$, et les fonctions $\bar{g} : A \to \mathbb{R}^p$, $\bar{f} : B \to \mathbb{R}^q$ telles que (1) $\bar{g}(A) \subset B$, (2) $\bar{g}$ est dérivable en $\bar{a} \in A$, (3) $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{b} = \bar{g}(\bar{a}) \in B$. Alors $\bar{f} \circ \bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$ et on a l'égalité pour les matrices Jacobiennes
$$J_{\bar{f}\circ\bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a}),$$
où $\cdot$ est la multiplication matricielle. Par conséquence, on a aussi
$$\det(J_{\bar{f}\circ\bar{g}}(\bar{a})) = \det(J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a}))) \cdot \det(J_{\bar{g}}(\bar{a})).$$

9. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$. Alors la fonction
$$\Delta f : E \to \mathbb{R}, \qquad \Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$
est appelée le Laplacien de $f$.

10. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\bar{g} : E \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable en $\bar{a} \in E$. Alors $\bar{g}$ est bijective dans un voisinage de $\bar{a}$ si et seulement si $\det(J_{\bar{g}}(\bar{a})) \neq 0$.

11. (Dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre). Soient $g, h : I \to \mathbb{R}$ fonction continûment dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $f(x,t) : J \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue sur $I$. Alors la fonction $F(t) = \int\limits_{h(t)}^{g(t)} f(x,t)\,dx$ est continûment dérivable sur $I$ et on a
$$F'(t) = f(g(t),t)g'(t) - f(h(t),t)h'(t) + \int\limits_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

# Extrema des fonctions de plusieurs variables.

1. On dit que $\bar{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$ est un point stationnaire de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ si $\nabla f(\bar{a}) = 0$.

2. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ admet un maximum (minimum) local au point $\bar{a} \in E$ s'il existe un voisinage $U$ de $\bar{a}$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$ pour tout $\bar{x} \in U$ (respectivement $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$ pour tout $\bar{x} \in U$.)

3. (Condition nécessaire) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local au point $\bar{a} \in E$ et telle que toutes les dérivées partielles de $f$ existent en $\bar{a}$. Alors $\bar{a}$ est un point stationnaire.

4. (Points critiques). $\bar{a} \in E \subset \mathbb{R}^n$ est un point critique de $f : E \to \mathbb{R}$ si (1) $\bar{a}$ est un point stationnaire de $f$, ou (2) au moins une des dérivées partielles de $f$ n'existe pas en $\bar{a}$.

5. (Condition suffisante, cas général) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ au voisinage de point $\bar{a} \in E$, telle que $\nabla f(\bar{a}) = 0$. Alors :
(1) Si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de $f$ sont positives, $\bar{a}$ est un point de minimum local de $f$;
(2) Si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de $f$ sont negatives, $\bar{a}$ est un point de maximum local de $f$;
(3) Si la matrice Hessienne possède des valeurs propres positives et negatives, alors $\bar{a}$ n'est pas un point d'extremum local de $f$.

6. (Condition suffisante, cas $n = 2$). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ au voisinage de point $\bar{a} \in E$, telle que $\nabla f(\bar{a}) = 0$. Alors :
(1) Si $\det(\mathrm{Hess}_f(\bar{a})) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) > 0$, alors $\bar{a}$ est un point de minimum local de $f$;
(2) Si $\det(\mathrm{Hess}_f(\bar{a})) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) < 0$, alors $\bar{a}$ est un point de maximum local de $f$;
(3) Si $\det(\mathrm{Hess}_f(\bar{a})) < 0$, alors $\bar{a}$ est un point selle (n'est pas un point d'extremum local de $f$);

7. (Formule de Taylor). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^{p+1}$ au voisinage de $\bar{a} \in E$. Alors il existe un voisinage $U$ de $\bar{a}$ tel que pour tout $\bar{x} \in U$ il existe un $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 1$ tel que

$$f(\bar{x}) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \ldots + \frac{1}{p!}f^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(t),$$

où $F(t)$ est la fonction $F(t) = f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a}))$.

8. (Formule de Taylor d'ordre 2, cas $n = 2$). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^3$ au voisinage de $(a, b) \in E$. Alors il existe un voisinage $U$ de $(a, b)$ tel que pour tout $(x, y) \in U$

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - b)^2 + \varepsilon((x - a)^2 + (y - b)^2),$$

où $\varepsilon(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$.

9. (Théorème des fonctions implicites). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ au voisinage de $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in E$ telle que $F(\bar{a}) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a}) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $U$ de $\breve{a} = (a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et une fonction implicite $f : U \to \mathbb{R}$ telle que :
(1) $a_n = f(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$;
(2) $F(x_1, x_2, \ldots, f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})) = 0$ pour tout $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) \in U$ ;
(3) De plus, $f$ est de classe $C^1$ dans $U$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1, x_2, \ldots, f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}))}.$$

10. (Théorème des fonctions implicites, cas $n = 2$). Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ et $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ au voisinage de $(a, b) \in E$ telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $U$ de $a \in \mathbb{R}$ et une fonction implicite $f : U \to \mathbb{R}$ telle que :

(1) $b = f(a)$;
(2) $F(x, f(x)) = 0$ pour tout $x \in U$ ;
(3) De plus, $f$ est de classe $C^1$ dans $U$ et on a

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

11. (Théorème des fonctions implicites, cas $n = 3$). Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ et $F : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ au voisinage de $(a, b, c) \in E$ telle que $F(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $U$ de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction implicite $f : U \to \mathbb{R}$ telle que :
(1) $c = f(a, b)$;
(2) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$ ;
(3) De plus, $f$ est de classe $C^1$ dans $U$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}.$$

12. (Multiplicateurs de Lagrange: condition nécessaire pour un extremum sous contraintes). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $m \leq n-1$ et les fonctions $f, g_1, \dots, g_m : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Supposons que $\bar{a} \in E$ est un point d'extremum de $f(\bar{x})$ sous les contraintes $g_1(\bar{x}) = g_2(\bar{x}) = \ldots = 0$. Supposons aussi que les vecteurs $\nabla g_1(\bar{a}), \nabla g_2(\bar{a}), \ldots \nabla g_m(\bar{a})$ sont linéarement indépendents. Alors il existe un vecteur $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{a}).$$

13. (Multiplicateurs de Lagrange: condition nécessaire pour un extremum sous une seule contrainte). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et les fonctions $f, g : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Supposons que $(\bar{a}) \in E$ est un point d'extremum de $f(\bar{x})$ sous la contrainte $g(\bar{x}) = 0$. Supposons aussi que $\nabla g(\bar{a}) \neq \bar{0}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(\bar{a}) = \lambda \nabla g(\bar{a}).$$

14. (Extrema absoluts). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert, $D \subset E$ compact, et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $E$. Une fonction continue sur un ensemble compact atteint son minimum et son maximum. Pour trouver le maximum et le minimum de $f$ sur $D$ il faut :
(1) Trouver les points critiques $\{c_i\}$ de $f$ dans l'intérieur $\mathring{D}$ et calculer les valeurs $\{f(c_i)\}$.
(2) Trouver les points critiques $\{d_j\}$ de $f$ sur la frontière $\partial D$, soit directement, soit par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, et calculer les valeurs $\{f(d_j)\}$.
(3) Choisir le minimum et le maximum de l'ensemble $\{f(c_i), f(d_j)\}$.