Anna Lachowska

Analyse II

Résumé: Courbes paramétrées de $\mathbb{R}^n$.

Définitions et résultats.

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non-vide. Alors une *courbe paramétrée* est une application $\bar{f} : I \to \mathbb{R}^n$
$$\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots f_n(t))$$
telle que les f_i sont des fonctions continues sur I.

2. La courbe $\bar{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est *dérivable* en $t_0 \in I$ s'il existe un vecteur $\bar{f}'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\lim_{t \to t_0} || \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} - \bar{f}'(t_0)|| = 0.$$
Alors $\bar{f}'(t_0)$ est appelé le *vecteur tangent* de $\bar{f}$ en $t_0 \in I$. *La vitesse* est définie comme $||\bar{f}'(t_0)||$.

3. La courbe $\bar{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si chaque composante $f_i : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en $t_0 \in I$. En particulière, on a $\bar{f}'(t_0) = (f_1'(t_0,), f_2'(t_0), \dots f_n'(t_0))$.

4. La courbe $\bar{f}(t)$ est de classe C^k sur I si toutes les dérivées $f_j^{(m)}(t)$, $m = 1, \dots k$, $j = 1, \dots n$ existent et sont continues sur I.

5. Soit $\bar{f}(t)$ une courbe de classe C^1 sur I. On dit que $\bar{x} \in \bar{f}(I)$ est un *point singulier* si $\bar{f}(t_0) = \bar{x}$ et $\bar{f}'(t_0) = 0$. Sinon, $\bar{x} \in \bar{f}(I)$ est un *point régulier.* Si $\bar{f}'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, alors $\bar{f}(t)$ est une courbe *régulière.*

6. Un point $\bar{x} \in \bar{f}(I)$ est *simple* si l'ensemble $\{t \in I : \bar{f}(t) = \bar{x}\}$ contient un seul élément. Si $\bar{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est injective, la courbe est simple.

7. Soit une courbe $\bar{f} : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, et $[a, b] \subset I$, $a < b$. *La longueur* de l'arc de la courbe $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est définie par
$$L_{[a,b]}(\bar{f}) = \int_a^b ||\bar{f}'(t)|| \, dt.$$