Résumé du cours de physique générale I: Mécanique

1. Sensibilisation aux objectifs de la mécanique
   - balistique, oscillateur harmonique
2. Cinématique et dynamique du point matériel
   - référentiels, repères, vitesse, accélération, coordonnées cylindriques et sphériques, rotations, contraintes
3. Travail, énergie (potentielle), forces (non-)conservatives
4. Gravitation, moment cinétique
5. Systèmes de points matériels, lois de conservation
   - centre de masse, collisions, chocs
6. Cinématique et dynamique du solide indéformable
   - effets gyroscopiques, tenseur l'inertie, rotations des solides
7. Mouvement relatif et changement de référentiel

Ressorts et oscillateur harmonique

- Force de rappel d'un ressort élastique: $\boxed{\vec F = -k\,\vec{\Delta x}}$ Loi de Hooke
  - Si position d'équilibre en x=0
    - Loi de Hooke: $F = -kx$
    - $2^{\text{ème}}$ loi de Newton: $F = ma$ → $\boxed{m\ddot x = -kx}$ équation différentielle

k = constante élastique du ressort
$\vec{\Delta x}$ = vecteur de déplacement relativement à la longueur à vide

Equation différentielle de l'oscillateur harmonique $\ddot x + \omega_0^2 x = 0$:
Solution générale: $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ou $x(t) = C\sin(\omega_0 t + D)$
Deux constantes d'intégration à déterminer par les conditions initiales:
$A = x_0$ et $B = v_0/\omega_0$, ou $C^2 = x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2$ et $\mathrm{tg}(D) = \omega_0 x_0/v_0$

Pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ Période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$ Fréquence $\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$

- Oscillateur harmonique amorti:

$$\boxed{\ddot x + 2\gamma\dot x + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ (+ solutions)}$$

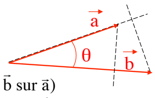
- Oscillateur harmonique amorti + forcé:

$$\boxed{\ddot x + 2\gamma\dot x + \omega_0^2 x = \alpha_0\sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{b}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \frac{f}{m}} \text{ (+ solutions)}$$

Produit scalaire

- Définition d'un scalaire (nombre):

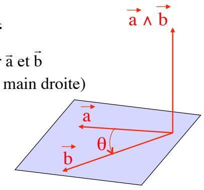
$\vec a\cdot\vec b = |\vec a|\,|\vec b|\cos\theta$
$= (\text{norme de } \vec a) \times (\text{norme de la projection de } \vec b \text{ sur } \vec a)$
$= (\text{norme de } \vec b) \times (\text{norme de la projection de } \vec a \text{ sur } \vec b)$



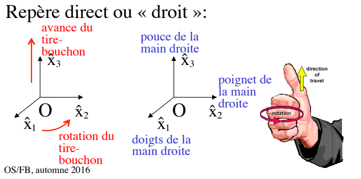
Produit vectoriel

- Définition d'un « vecteur »:

direction de $\vec a \wedge \vec b$ = normale au plan défini par $\vec a$ et $\vec b$
sens de $\vec a \wedge \vec b$ = conventionnel (règle de la main droite)
norme de $\vec a \wedge \vec b = |\vec a|\,|\vec b|\sin\theta$



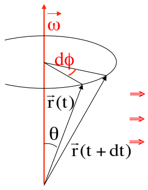
Repère direct ou « droit »:

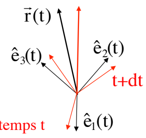


$(\vec a\wedge\vec b)\cdot\vec c = (\vec c\wedge\vec a)\cdot\vec b$
$(\vec a\wedge\vec b)\cdot\vec c = 0 \Leftrightarrow \vec a, \vec b$ et $\vec c$ coplanaires
$\vec a\wedge(\vec b\wedge\vec c) = (\vec a\cdot\vec c)\vec b - (\vec a\cdot\vec b)\vec c$
$\vec a\wedge(\vec b\wedge\vec c) + \vec b\wedge(\vec c\wedge\vec a) + \vec c\wedge(\vec a\wedge\vec b) = \vec 0$

Repère en rotation et mouvement circulaire uniforme

Vecteur en rotation: $\frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega\wedge\vec r$ $\boxed{\frac{d\hat e_i}{dt} = \vec\omega\wedge\hat e_i}$ Formule de Poisson



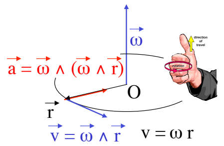


⇒ la direction de $\vec\omega$ définit l'axe de rotation au temps t
⇒ sens de $\vec\omega$ = sens de rotation (règle main droite)
⇒ la norme de $\vec\omega$ est la vitesse angulaire de rotation $\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$

Cas particulier: $\vec\omega$ = constante

$$\boxed{\begin{aligned}\vec v &= \frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega\wedge\vec r\\ \vec a &= \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec\omega\wedge\vec r) = \vec\omega\wedge\frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec r)\end{aligned}}$$

mouvement circulaire uniforme

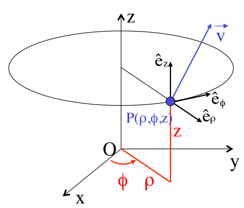


$v = \omega r$
$\vec a = -\omega^2\vec r$

Norme de l'accélération centripète: $a = v^2/r = \omega^2 r$

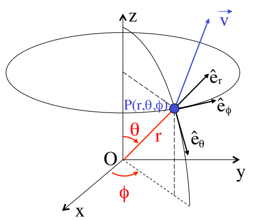
Coordonnées cylindriques

$$\boxed{\begin{aligned}\vec r &= \rho\hat e_\rho + z\hat e_z\\ \vec v &= \dot\rho\hat e_\rho + \rho\dot\varphi\hat e_\varphi + \dot z\hat e_z\\ \vec a &= (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\hat e_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\hat e_\varphi + \ddot z\hat e_z\end{aligned}}$$



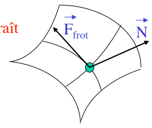
Coordonnées sphériques

$$\boxed{\begin{aligned}\vec r &= r\,\hat e_r\\ \vec v &= \dot r\,\hat e_r + r\dot\theta\,\hat e_\theta + r\dot\varphi\sin\theta\,\hat e_\varphi\\ \vec a &= (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\theta)\,\hat e_r\\ &+ (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\,\hat e_\theta\\ &+ (r\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot r\dot\varphi\sin\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)\,\hat e_\varphi\end{aligned}}$$



Forces de liaison et forces de frottement

- Force de liaison pour respecter une contrainte géométrique
  - toujours perpendiculaire à la courbe ou à la surface
  - la force de liaison devient nulle ⇔ la contrainte disparaît



- Force de frottement sec
  - opposée au mouvement réel ou possible
  - toujours tangente à la courbe ou à la surface

Lois de Coulomb

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{si } v = 0: \quad F_{\text{frot}} \le F^{\max}_{\text{frot}} = \mu_s N\\ &\text{si } v \ne 0: \quad \vec F_{\text{frot}} = -\mu_c N\frac{\vec v}{v}\end{aligned}}$$

μ_s = coefficient de frottement statique
μ_c = coefficient de frottement cinétique

- Force de frottement fluide
  - opposée au mouvement $\boxed{\vec F^{\text{laminaire}}_{\text{frot}} = -b\,\vec v, \quad \vec F^{\text{turbulent}}_{\text{frot}} = -cv^2\,\hat v, \quad \ldots}$

Travail et énergie cinétique

Travail d'une force : $\delta W = \vec F\cdot d\vec r \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 \vec F\cdot d\vec r$

Energie cinétique : $K = \frac{1}{2}m\vec v^2$

$\boxed{\text{La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux de toutes les forces}}$ Théorème de l'énergie cinétique

- Pour un point matériel:

$\boxed{K_2 - K_1 = W_{12} \Leftrightarrow \frac{dK}{dt} = P = \vec F\cdot\vec v}$ P = puissance de la résultante des forces

- Pour un système de points matériels:

$\boxed{K_2^{\text{tot}} - K_1^{\text{tot}} = W_{12}^{\text{tot, ext}} + W_{12}^{\text{tot, int}} \Leftrightarrow \frac{dK^{\text{tot}}}{dt} = P^{\text{tot, ext}} + P^{\text{tot, int}}}$

- Attention: les forces internes peuvent travailler !

Energie potentielle et théorème de l'énergie

- Forces conservatives:
  - forces dont le travail ne dépend que des points de départ et d'arrivée

Exemple de force :		Energie potentielle associée:
Ressort	$\vec F = -k\vec x$	$V = \frac{1}{2}kx^2 + C$
Pesanteur	$\vec F = m\vec g = -mg\hat e_z$	$V = mgz + C$
Gravitation	$\vec F = -(GMm/r^2)\hat e_r$	$V = -GMm/r + C$
Centrale	$\vec F = F(r)\hat e_r$	$V = -\int F(r')dr' + C$
Frottement	$\vec F = -f(v)\hat v$	aucune, force non conservative

- Energie potentielle dont dérive une force conservative:

$V(\vec r) = \int_{\text{position du point matériel}}^{\text{position de référence}} \vec F\cdot d\vec r \Rightarrow F_x = -\partial V/dx,\ F_y = -\partial V/dy,\ F_z = \ldots$

- Energie mécanique: $E = K + V(\vec r) = \frac{1}{2}m\vec v^2 + \sum_k V_k(\vec r)$

Théorème de l'énergie $\boxed{E_2 - E_1 = W_{12}^{NC} \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = P^{NC} = \vec F^{NC}\cdot\vec v}$

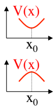
La variation (dérivée) de l'énergie mécanique est égale au travail (à la puissance) des forces non-conservatives

- Si seules des forces conservatives travaillent: $\boxed{E = \text{constante}}$ **Conservation de l'énergie mécanique**

Equilibre et petites oscillations

- L'étude de la fonction énergie potentielle totale permet de déterminer les points d'équilibre du système, ainsi que les fréquences des petites oscillations autour des points d'équilibre stables
- Cas à une dimension x:

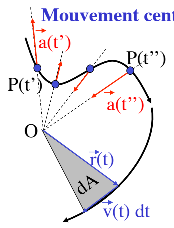
$$F(x_0)=0 \;\Leftrightarrow\; -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x_0}=0 \;\Leftrightarrow\; x_0 \text{ est un point d'équilibre}$$



$$k(x_0)=\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0}>0 \begin{cases}\text{équilibre stable, garanti par une force de rappel}\\ \Rightarrow \text{petites oscillations harmoniques autour de } x_0\\ \text{de pulsation } \omega=\sqrt{k(x_0)/m}\end{cases}$$

$$k(x_0)=\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0}<0 \begin{cases}\text{équilibre instable: si le point matériel ne se}\\ \text{trouve pas exactement en } x_0\text{, il part loin de } x_0\end{cases}$$

Mouvement central et loi des aires



Mouvement central $\Leftrightarrow$ $\vec{r}(t)=\overrightarrow{OP}$ reste toujours parallèle à $\vec{a}(t)$

Le vecteur **moment cinétique** par rapport au point O reste **constant** et le mouvement est plan: $\vec{L}_O=\vec{r}\wedge\vec{p}=\vec{r}\wedge m\vec{v}$

Mouvement central $\Leftrightarrow$ **Moment cinétique constant** $\Leftrightarrow$ **Loi des aires + mouvement dans un plan**

par rapport à un certain point O fixe (origine de la force)

Lois de Kepler

- 2ème loi (loi des aires) : Le rayon-vecteur du Soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux.
- 1ère loi : Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- 3ème loi : Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels au cube des grands axes: $\dfrac{(\text{période})^2}{(\text{grand axe})^3}=\text{constante}$

Système de points matériels

y compris solide indéformable

O: point quelconque du référentiel
P_α: points du système (α=1, ..., N)
G: centre de masse du système

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha\overrightarrow{OP_\alpha} \quad \text{où } M=\sum_\alpha m_\alpha = \text{masse totale}$$

$$\vec{p}=\sum_\alpha m_\alpha\vec{v}_\alpha=M\vec{v}_G=\text{quantité de mouvement totale}$$

$$\vec{L}_O=\sum_\alpha\overrightarrow{OP_\alpha}\wedge m_\alpha\vec{v}_\alpha=\text{moment cinétique total par rapport à O}$$

Forces internes (action-réaction): $\vec{F}^{\beta\to\alpha}+\vec{F}^{\alpha\to\beta}=0$, $\vec{M}_O^{\beta\to\alpha}+\vec{M}_O^{\alpha\to\beta}=0$

Théorème du centre de masse: $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}_\alpha^{ext}$

Théorème du moment cinétique: $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum\vec{M}_{O,\alpha}^{ext}=\sum\vec{r}_\alpha\wedge\vec{F}_\alpha^{ext}$

Conditions d'équilibre d'un système au repos (statique), pour tout O: $0=\sum\vec{F}_\alpha^{ext}$, $0=\sum\vec{M}_{O,\alpha}^{ext}$

$\vec{L}_Q=\vec{L}_O+\overrightarrow{QO}\wedge M\vec{v}_G$ — Théorème du transfert

Théorème du moment cinétique par rapport à un point Q absolument quelconque:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt}=\sum\vec{M}_{Q,\alpha}^{ext}-\underbrace{\vec{v}_Q\wedge M\vec{v}_G}_{\substack{=0 \text{ si et seulement si } \vec{v}_Q\,//\,\vec{v}_G\text{, en particulier}\\ \text{si } Q=G \text{ ou } \vec{v}_Q=0}}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt}=\sum\vec{M}_{G,\alpha}^{ext}$$

Système de points matériels

- Pour un système isolé:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}_\alpha^{ext}=0 \Rightarrow \vec{p}=\text{constante}$$
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\sum\vec{M}_{O,\alpha}^{ext}=0 \Rightarrow \vec{L}_O=\text{constante}$$

Conservation de la quantité de mouvement totale
Conservation du moment cinétique total par rapport à n'importe quel point O

- Pour un système partiellement isolé selon une direction û:

$$\sum\vec{F}_\alpha^{ext}\cdot\hat{u}=0 \Rightarrow \vec{p}\cdot\hat{u}=\text{constante}$$
$$\sum\vec{M}_{O,\alpha}^{ext}\cdot\hat{u}=0 \Rightarrow \vec{L}_O\cdot\hat{u}=\text{constante}$$

- Système de deux points matériels (« problème à deux corps »):

Equation du mouvement relatif: $\vec{F}_{2\to1}=\mu\ddot{\vec{r}}$ où $\mu=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

μ = masse réduite: $\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}$

- Collisions ou chocs (conservation de p et L si système isolé)
  - Choc élastique: énergie cinétique conservée
  - Choc inélastique: énergie cinétique non conservée
  - Choc mou: choc inélastique avec vitesse relative finale nulle

Solide indéformable

- Relation entre les vitesses de deux points A et P d'un solide:

$\vec{v}_P=\vec{v}_A+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}$ où $\vec{\omega}$ = vitesse instantanée de rotation

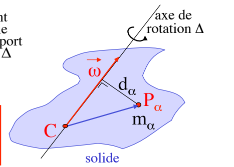
- Moment cinétique par rapport à un point A du solide:

$$\vec{L}_A=\underbrace{\overrightarrow{AG}\wedge M\vec{v}_A}_{=0 \text{ si } A=G \text{ ou si } v_A=0}+\tilde{I}_A\cdot\vec{\omega}$$

Tenseur d'inertie au point A: $(\tilde{I}_A)_{ij}=\sum_\alpha m_\alpha\left[\overrightarrow{AP}_\alpha^2\delta_{ij}-(\overrightarrow{AP}_\alpha)_i(\overrightarrow{AP}_\alpha)_j\right]$

- Moment cinétique par rapport à un point C sur l'axe de rotation Δ:

$\vec{L}_C=\tilde{I}_C\cdot\vec{\omega}$; $L_\Delta=I_\Delta\omega$ (Projection de $\vec{L}_C$ sur Δ) ; $I_\Delta=\sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2$ Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ



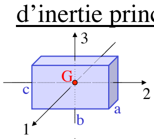
En général L_C n'est pas parallèle à ω !

$$\vec{L}_C=I_\Delta\vec{\omega} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = \text{axe principal d'inertie}\\ I_\Delta=\text{moment d'inertie principal}\end{cases}$$

Axes et moments d'inertie principaux

de solides homogènes de masse M

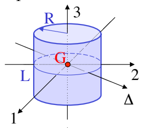
Tenseur au point G dans le repère 123: $\tilde{I}_G=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix}$



- Parallélépipède rectangle plein (plaque rectangulaire si a, b ou c → 0):

seulement trois axes principaux par G

$I_1=\frac{1}{12}M(b^2+c^2)$
$I_2=\frac{1}{12}M(c^2+a^2)$
$I_3=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$

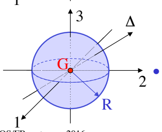


- Cylindre de révolution (tige si R → 0, disque si L → 0):

tout axe Δ par G dans le plan 12 est principal

plein: $I_1=I_2=I_\Delta=\frac{1}{4}MR^2+\frac{1}{12}ML^2$, $I_3=\frac{1}{2}MR^2$
vide: $I_1=I_2=I_\Delta=\frac{1}{2}MR^2+\frac{1}{12}ML^2$, $I_3=MR^2$

sans masse sur les bases circulaires



- Sphère:

tout axe Δ par G est principal

pleine: $I_1=I_2=I_3=I_\Delta=\frac{2}{5}MR^2$
vide: $I_1=I_2=I_3=I_\Delta=\frac{2}{3}MR^2$

Théorème de Steiner

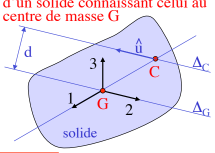
- Par rapport à un point A du solide:

$$(\tilde{I}_A)_{ij}=(\tilde{I}_G)_{ij}+\underbrace{M\left[\overrightarrow{AG}^2\delta_{ij}-(\overrightarrow{AG})_i(\overrightarrow{AG})_j\right]}_{=\text{ tenseur d'inertie au point A d'une masse M au point G}}$$

permet de calculer le tenseur d'inertie au point A quelconque d'un solide connaissant celui au centre de masse G

- Par rapport à un axe Δ_C :

$$I_{\Delta_C}=I_{\Delta_G}+\underbrace{M\,d^2}_{=\text{ moment d'inertie d'une masse M à une distance d de } \Delta_C}$$



Si les axes Δ_G et CG sont des axes principaux d'inertie au point G alors les axes Δ_C et CG sont des axes principaux d'inertie au point C

Energie cinétique d'un solide

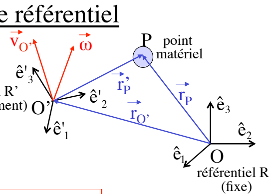
$$E_{cin}=\tfrac{1}{2}M\vec{v}_A^2+\underbrace{M\vec{v}_A\cdot\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AG}\right)}_{\substack{=0 \text{ si } A=G \text{ (centre de masse)}\\ \text{ou si } v_A=0 \text{ (point fixe)}}}+\tfrac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\tilde{I}_A\cdot\vec{\omega}\right)$$

Si rotation selon axe principal d'inertie Δ par un point fixe: $E_{cin}=\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$

Changement de référentiel

Transformation des vitesses:

$$\underbrace{\vec{v}_P}_{\text{vitesse de P par rapport à R (absolue)}}=\underbrace{\vec{v}'_P}_{\text{vitesse de P par rapport à R' (relative)}}+\underbrace{\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}}_{\text{vitesse d'entraînement}}$$



Transformation des accélérations:

$$\vec{a}_P=\vec{a}'_P+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P+\vec{a}_{O'}+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P})+\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}$$

accélération d'entraînement: $\vec{a}_{O'}+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P})+\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}$
accélération centripète: $\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P})$
accélération de Coriolis: $2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P$
accélération de P par rapport à R' (relative): $\vec{a}'_P$
accélération de P par rapport à R (absolue): $\vec{a}_P$

$$\sum\vec{F}^{ext}\underbrace{-2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P-m\vec{a}_{O'}-m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P})-m\dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{O'P}}_{\sum\vec{F}^{inertie}}=m\vec{a}'_P$$

force de Coriolis: $-2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}'_P$
force centrifuge: $-m\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P})$