EPFL
Sections IN, SC

Anna Lachowska
mai 2019

Analyse II

Résumé: Calcul intégral des fonctions des plusieurs variables.

Définitions et résultats.

1. Un pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^n$ est un produit cartésien de n intervalles fermés bornés
$$P = [a_1, b_1,] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

2. Une subdivision $D(\sigma)$ d'un pavé fermé P est un decomposition de P en pavés plus petits engendrée par la subdivision de chaque intervalle $[a_i, b_i]$ en sous-intervalles.

3. (Sommes de Darboux). Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit $D(\sigma)$ une subdivision de P. On pose
$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)|Q|, \qquad \overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)|Q|,$$
où $m(Q)$ est l'infimum et $M(Q)$ le supremum de f sur le pavé Q, et $|Q|$ est le volume de Q. Alors on définit les sommes de Darboux de f comme
$$\underline{S}(f) = \sup(\underline{S}_\sigma(f)), \qquad \overline{S}(f) = \inf(\overline{S}_\sigma(f))$$
où le supremum et l'infimum sont calculés par rapport aux toutes les subdivisions de P.

4. (Intégrale de Riemann). Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur P. Alors f est intégrable sur P si et seulement si $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$. Dans ce cas l'intégrale de f sur P est définie par
$$\int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} = \underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

5. (Théorème de Fubini pour les pavés). Soit $P = [a_1, b_1,] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur P et on a
$$\int_P f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\bar{x})\, dx_1 \right) \ldots dx_{n-1} \right) dx_n \right).$$

6. (Théorème de Fubini pour les pavés, cas $n = 2$). Soit $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur P et on a
$$\int_P f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

7. (Intégrale sur un sous-ensemble borné). Soit $E \subset P \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble borné. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et posons

$$\hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \bar{x} \in E \\ 0 & \bar{x} \in P \setminus E \end{cases}$$

La fonction f est intégrable sur E si $\hat{f}$ est intégrable sur P et on pose

$$\int\limits_E f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int\limits_P \hat{f}(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

8. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble compact telle que la frontière ∂E est assez régulière (de mesure nulle), et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction borné et continue sur E. Alors f est intégrable sur E.

9. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers verticaux, cas $n = 2$). Soit $[a, b] \in \mathbb{R}$ un intervalle fermé, et $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$. Alors pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ on a

$$\int\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

10. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliers horizontaux, cas $n = 2$). Soit $[c, d] \in \mathbb{R}$ un intervalle fermé, et $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pour tout $y \in]c, d[$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$. Alors pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ on a

$$\int\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

11. (Théorème de Fubini pour les domaines réguliès, cas $n = 3$). Soit $[a, b] \in \mathbb{R}$ un intervalle fermé, et $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$. Soient $G, H : \overline{D} \to \mathbb{R}$ continues, telles que $G(x, y) < H(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, G(x, y) < z < H(x, y)\}$. Alors pour toute fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ on a

$$\int\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int\limits_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Selon la géometrie du domaine, on peut appliquer le Théorème de Fubini en changeant l'ordre des variables.

12. (Additivité de l'intégrale). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine compact à frontière réguliére, et $\{D_i\}_{i=1}^k$ une famille finie des domaines réguliers disjoints tels que $D = \cup_i D_i$. Alors pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ on a

$$\int\limits_D f(\bar{x})\, d\bar{x} = \sum_{i=1}^k \int\limits_{D_i} f(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

13. (Linéarité de l'intégrale). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier, et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors pour tout couple des nombres réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\int\limits_D (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x}))\, d\bar{x} = \alpha \int\limits_D f(\bar{x})\, d\bar{x} + \beta \int\limits_D g(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

14. (Bornes pour une intégrale). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier, et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $0 \leq m \leq f(\bar{x}) \leq M$ pour tout $\bar{x} \in D$. Alors on a les inégalités :

$$m|D| = m \int\limits_D d\bar{x} \leq \int\limits_D f(\bar{x})\, d\bar{x} \leq M \int\limits_D d\bar{x} = M|D|,$$

où $|D|$ est le volume du domaine D.

15. (Changement des variables). Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier et $G : E \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que $G : E \to G(E)$ est bijective et $J_G(\bar{x})$ inversible pour $\bar{x} \in E$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $D = G(E)$. Alors on a

$$\int\limits_D f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int\limits_E f(G(\bar{u}))\, |\det(J_G(\bar{u}))|\, d\bar{u}.$$

16. (Changement des variables, coordonnées polaires). Soit $G(r, \varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$. Alors pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ sur un domaine régulier $D \subset \mathbb{R}^2$ on a

$$\int\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{G^{-1}(D)} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) r\, dr\, d\varphi.$$

17. (Coordonnées sphériques). Soit

$$G(r, \vartheta, \varphi) = \left\{ \begin{array}{lcl} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & = & x \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) & = & y \\ r\cos(\vartheta) & = & z \end{array} \right.$$

Alors $|\det(J_G(r, \vartheta, \varphi)| = r^2 \sin(\vartheta)$.

18. (Coordonnées cylindriques). Soit

$$G(r, \varphi, z) = \left\{ \begin{array}{lcl} r\cos(\varphi) & = & x \\ r\sin(\varphi) & = & y \\ z & = & z \end{array} \right.$$

Alors $|\det(J_G(r, \varphi, z)| = r$.