Dinámica de sistemas físicos

Modelado en el dominio de la frecuencia

Dr. Jesús Emmanuel Solís Pérez

jsolisp@unam.mx

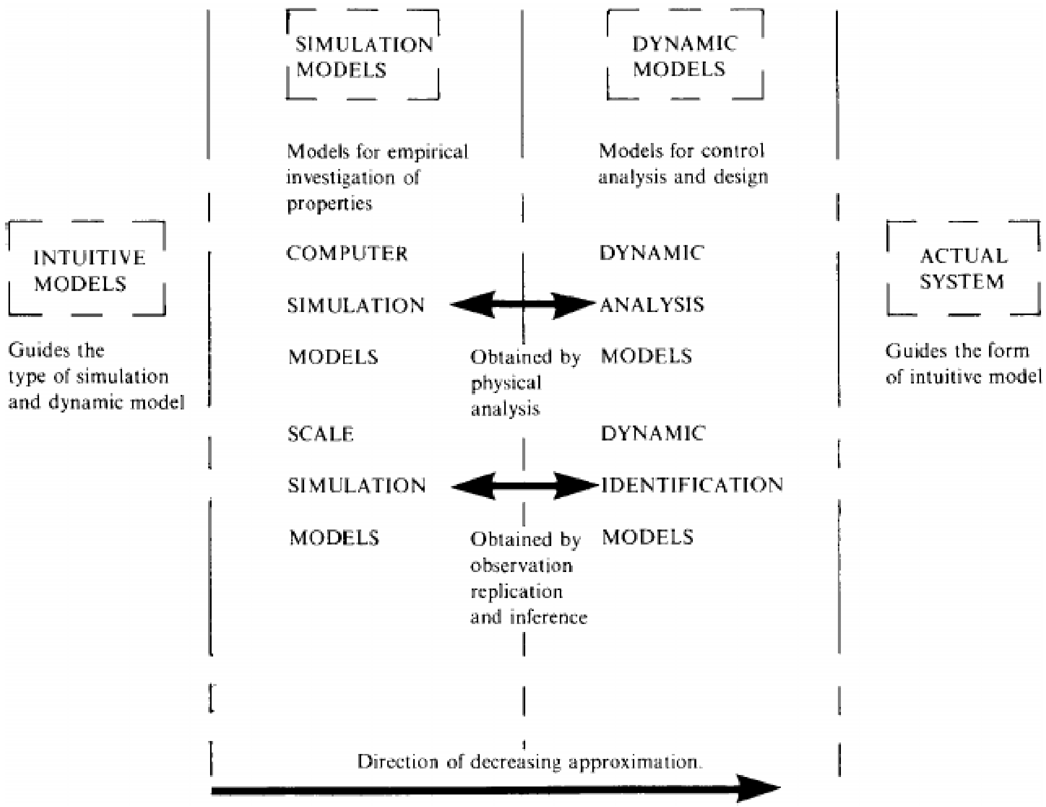


Figure 1.1. The relationships between various types of model.

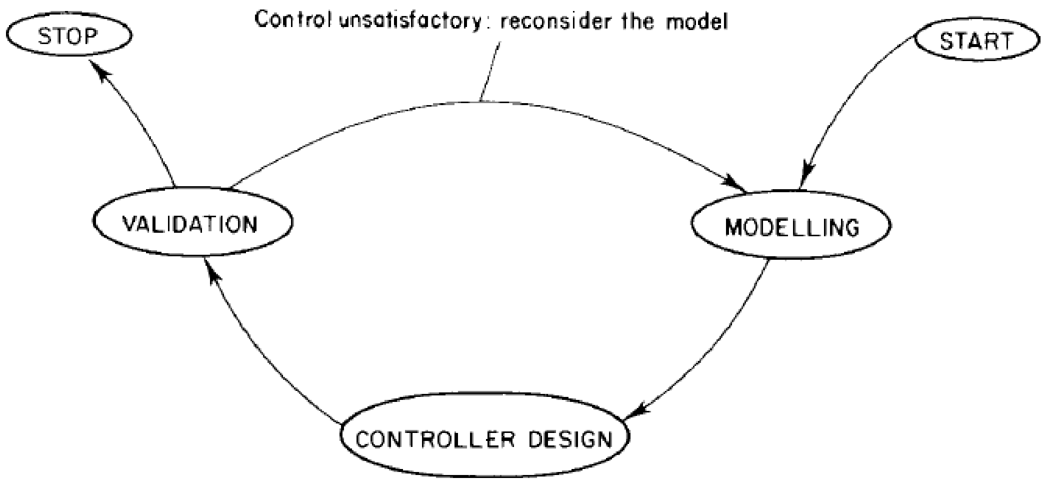


Figure 1.2. The iterative nature of the modelling process.

Imágenes recuperadas de Wellstead (1979).

Modelado de sistemas mecánicos

Movimiento de traslación

Masa. Propiedad de un elemento de almacenar energía cinética del movimiento de traslación (Kuo, 1996).

Ley de movimiento de Newton. La suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido dada una dirección es igual al producto de la masa del cuerpo en cuestión por su aceleración en la misma dirección (Kuo, 1996):

$$\sum F = m \cdot a.$$

La ecuación de la fuerza está dada como sigue:

$$f(t) = M \cdot a(t).$$

Si denotamos a $y(t)$ como la posición de una partícula a lo largo del tiempo, tenemos:

$$f(t) = M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} \equiv M \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t},$$

donde $v(t)$ denota la velocidad.

Resorte lineal. Elemento que almacena energía potencial.

Si la deformación es pequeña, podemos aproximar su comportamiento por la siguiente relación:

$$f(t) = Ky(t),$$

donde Kes la **constante del resorte** (rigidez).

Si el resorte es precargado con una tensión T, tenemos:

$$f(t) - T = Ky(t).$$

Las fuerzas de fricción se encuentran en sistemas físicos cuando existe movimiento entre dos elementos físicos. En su mayoría son de naturaleza no lineal y tenemos tres tipos:

1. Fricción viscosa. Representa una fuerza como una relación lineal entre la fuerza aplicada y la velocidad. Este tipo se representa como un amortiguador y su expresión es la siguiente:

$$f(t) = B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \equiv B\dot{y}(t),$$

donde B es el coeficiente de fricción viscosa con unidades $N/m/s$.

2. Fricción estática. Representa una fuerza que tiende a prevenir el movimiento desde el comienzo. Su ecuación es:

$$f(t) = \pm(F_s)\big|_{\dot{y}=0}.$$

3. Fricción de Coulomb. Es una fuerza que tiene una amplitud constante con respecto al cambio de velocidad. La ecuación que la representa está dada como sigue:

$$f(t) = F_c\frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|},$$

donde $F_c$es el coeficiente de la fricción de Coulomb.

Movimiento de rotación

Se define como el movimiento alrededor de un eje fijo. Nos dice que está la suma de los momentos o pares alrededor de un eje fijo es igual al producto de la inercia por la aceleración angular.

$$\sum F = J \cdot \alpha,$$

donde J denota la inercia, α la aceleración angular. Otras variables utilizadas para el movimento rotacional son: par (τ), velocidad angular (ω) y desplazamiento angular (θ).

Inercia. Propiedad de un elemento de almacenar energía cinética del movimento de rotación. Depende de la composición geométrica al rededor del eje de rotación.

La ecucación que describe el par aplicado a un cuerpo con inercia J, está dada como sigue:

$$\tau(t) = J \cdot \alpha(t) \equiv J\dot{w}(t) \equiv J\ddot{\theta}(t),$$

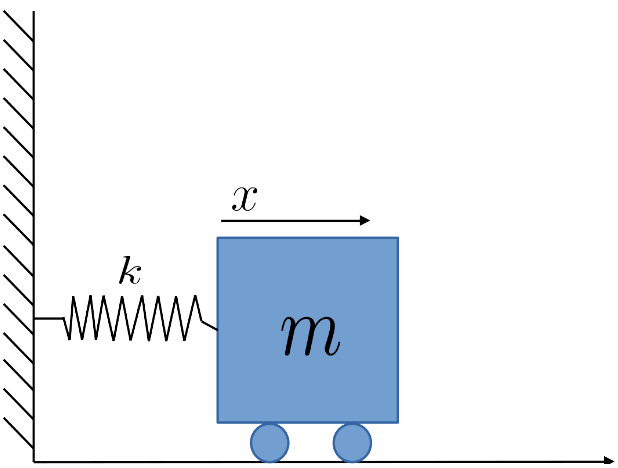
donde $\theta(t)$ es el desplazamiento angular, $\omega(t)$ la velocidad angular y $\alpha(t)$ la aceleración angular.

Segunda ley de Newton para los sistemas de traslación

Segunda ley de Newton para los sistemas de rotación

Ejemplo 1

Modelo de un sistema masa resorte



Retomando la segunda Ley de Newton para el caso de la masa

$$F_m = m \cdot a_m.$$

Retomando la Ley de Hooke

$$F_k = k \cdot x.$$

Tenemos

$$\sum F_x = 0.$$

Considerando las dos fuerzas, tenemos:

$$m \cdot a_m + k \cdot x = 0,$$

donde a_m puede ser representada como:

$$a_m = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{x},$$

sustituyendo tenemos:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0,$$

donde m es la masa y k la constante del resorte (rigidez).

Para obtener una representación en función de transferencia, aplicamos la transformada de Laplace *i.e.*

$$\mathscr{L}\{m \cdot \ddot{x} + k \cdot x\} = 0,$$

teniendo como resultado la siguiente representación:

$$X(s) = \frac{m \cdot x_0 \cdot s}{m \cdot s^2 + k} = \frac{x_0 \cdot s}{s^2 + \frac{k}{m}}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, obtenemos:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{x_0 \cdot s}{s^2 + \frac{k}{m}}\right\} = x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right),$$

que corresponde a la ecuación de la posición:

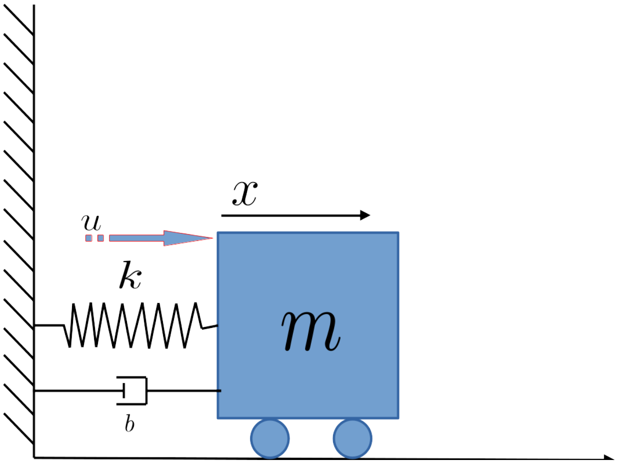
$$x(t) = x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right),$$

derivando la ecuación anterior, obtenemos la ecuación de la velocidad *i.e.*

$$\dot{x}(t) = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right).$$

Ejemplo 2

Modelo de un carrito con resorte y amortiguador



Retomando

$$\sum F_x = 0,$$

tenemos la presencia de una fuerza externa denotada como u. Por consiguiente, las fuerzas que se oponen a u están dadas como sigue:

$$F_m = m \cdot a_m,$$

$$F_k = k \cdot x,$$

$$F_b = b \cdot v.$$

Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos:

$$u - F_m - F_k - F_b = 0,$$

$$u - m \cdot a_m - k \cdot x - b \cdot v = 0,$$

recordando que a_m se puede representar como sigue:

$$a_m = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{x},$$

tenemos finalmente:

$$u - m\ddot{x} - b\dot{x} - kx = 0,$$

o bien

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = u,$$

donde u es la fuerza externa, m la masa del objeto, b el coeficiente de fricción viscosa y k la constante del resorte.

Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación anterior para obtener una representación en función de transferencia, teniendo como resultado:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}.$$

Estabilidad del sistema

Analizamos las raíces del polinomio del denominador

$$s_1 = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m},$$

$$s_2 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m},$$

$b^2 - 4km < 0 \rightarrow$ raices complejas

Enfoque Euler-Lagrange

Analogía de movilidad

- velocidad es análogo a esfuerzo
- fuerza es análogo a flujo

Masa traslacional

Una masa traslacional pura es un objeto rígido el cual se mueve a través de un entorno no disipativo. De acuerdo con la segunda Ley de Newton, el momento p de la masa está linealmente relacionado a la velocidad del objeto como se da a continuación:

$$p = mv,$$

donde m es la masa Newtoniana del objeto. El momento p, está definido por:

$$p = \int_{t_0}^{t} F \, \mathrm{d}t + p(t_0), \quad F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

donde Fdenota fuerza.

De acuerdo con la analogía de movilidad, la cantidad de momento es formalmente análoga a la acumulación de flujo. Por lo tanto, una masa pura translacional puede ser clasificada como un almacenamiento de flujo.

La masa Newtoniana, tiene una relación constitutiva lineal intríseca, por consiguiente, la energía almacenada U (**energía cinética**) es igual:

$$U = \frac{1}{2} mv^2.$$

Resorte traslacional

Un resorte traslacional es un objeto mecánico que cuando está sujeto a una fuerza se comprime o alarga sin aceleración significativa de sus componentes, o pérdida de energía debido a la fricción o falta de la deformación. El mecanismo de almacenamiento de energía de un resorte puro es el desplazamiento neto del resorte desde su estado de reposo. Por lo tanto, la variable desplazamiento se define como:

$$x == \int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t + x(t_0), \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Un resorte lineal ideal obedece la ley de Hooke y tiene una relación constitutiva:

$$x = \frac{1}{k}F,$$

donde k se conoce como la rigidez del resorte.

De acuerdo con la analogía de movilidad, un resorte es un almacén de esfuerzo, ya que el desplazamiento x representa una acumulación de la variable esfuerzo (velocidad). Por lo tanto, la energía almacenada en un resorte es T (**energía potencial**) y puede ser evaluada por la siguiente relación constitutiva:

$$T = \frac{1}{2k}F^2.$$

Disipación traslacional

Un disipador puro es aquel en el que los fenómenos de almacenamiento de energía cinética y potencial están ausentes. Por lo tanto, un objeto rígido y liviano que se mueve a través de un fluido viscoso o se desliza sobre una superficie rugosa tendrá una relación constitutiva que relaciona estáticamente la fuerza aplicada y la velocidad relativa del objeto.

La potencia absorbida por un disipador es el producto de las variables esfuerzo y caudal, y se obtiene de la relación constitutiva como la suma del contenido y cocontenido del disipador. La relación constitutiva de un disipador lineal está dada como sigue:

$$J = G = \frac{1}{2}bv^2.$$

Ecuaciones de Lagrange

Cualquier sustema debe satisfacer las ecuaciones de Lagrange dadas por:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = f_0,$$

donde $L(q, \dot{q})$ está definido como:

$$L(q, \dot{q}) = U^*(\dot{q}) - T(q).$$

Además:

- U^*, representa la coenergía total en las reservas de flujo del sistema expresada como una función de las coordenadas de esfuerzo generalizado.
- T, la energía total en los almacenes de esfuerzo del sistema expresada como una función de las coordenadas de acumulación de esfuerzo generalizadas.
- J, el co-contenido total en los disipadores del sistema expresado como una función de las coordenadas de esfuerzo generalizado.

Para un sistema mecánico **no conservativo**, las ecuaciones de Lagrange están dadas como sigue:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_j} = F_j, \quad j = 1, \dots, l.$$

Además,F_j son las fuerzas generalizadas y q es la coordenada generalizada. Dicha coordenada es la que será utilizada para describir el comportamiento del sistema a partir de esta variable.

***Nota**. En este contexto conservativo significa libre de disipación y entradas de fuerzas externas.*

Principio D'Alembert's

La energía co-cinética del sistema puede ser escrita como:

$$U^*(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m) = \sum_{j=1}^{m} U^*_j(\dot{q}_j).$$

Metodología

Definimos la coordenada generalizada. En este caso, nos interesa el desplazamiento denotado como x, por consiguiente tenemos:

$$q = x, \quad \dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}.$$

Definimos como fuerza generalizada a u, *i.e.*

$$F_i = u.$$

La energía co-cinética del sistema está dada por:

$$U^* = \frac{1}{2}mv^2 \equiv \frac{1}{2}m\dot{q}^2.$$

La energía potencial del sistema por:

$$T = \frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}kq^2.$$

El Lagrangiano del sistema entonces como:

$$L = U^* - T,$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} kq^2.$$

Obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -kq,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] = m\ddot{q},$$

$$\frac{\partial J}{\partial q} = b\dot{q}.$$

Sustituyendo, tenemos:

$$m\ddot{q} - (-kq) + b\dot{q} = 0,$$

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = 0.$$

Ejemplo 3

Masas en movimiento

Ejemplo 4

Sistema de suspensión de un automóvil

Ejemplo 5

Péndulo simple

Ejemplo 6

Péndulo con restricción

Ejemplo 7

Bola y viga

Referencias

Kuo, B. C. (1996). *Sistemas de control automático*. Pearson Educación.

Wellstead, P. E. (1979). *Introduction to physical system modelling* (Vol. 4). London: Academic Press.