Dinámica de sistemas físicos

Modelado en el dominio de la frecuencia

Dr. Jesús Emmanuel Solís Pérez

jsolisp@unam.mx

Respuesta en frecuencia

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) cuya función de transferencia es $G(s)$ y la entrada así como la salida se representan por $x(t)$, $y(t)$ respectivamente. Dicha función se puede escribir como el cociente de dos polinomios en s, esto es

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)},$$

o bien

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

La transformada de Laplace de la salida $Y(s)$ es

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s)$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$.

La respuesta en estado estacionario de un sistema estable LTI a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales. Considerando que $Y(s)$ tiene únicamente polos distintos (simples), la ecuación anterior se puede representar en fracciones parciales como sigue:

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega X}{s^2 + \omega^2},$$

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\overline{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s+s_1} + \frac{b_2}{s+s_2} + \ldots + \frac{b_n}{s+s_n}.$$

donde a y $b_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes y $\overline{a}$ es el complejo conjugado de a.

Por tanto, aplicando la transformada inversa de Laplace de la ecuación tenemos

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \overline{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t}, \quad t \geq 0.$$

Función de transferencia propia

Considere la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son dos polinomios con coeficientes reales, entonces tenemos

- Función **impropia** si $\deg N(s) > \deg D(s)$.
- Función **propia** si $\deg N(s) \leq \deg D(s)$.
- Función **estrictamente propia** si $\deg N(s) < \deg D(s)$.
- Función **bipropia** si $\deg N(s) = \deg D(s)$.

Polos y zeros

Considere una función de transferencia racional propia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios con coeficientes reales y $\deg N(s) \leq \deg D(s)$.

Definción 1. Un número complejo o real finito λ es un **polo** de $G(s)$ si $|G(s)| = \infty$, donde $|\cdot|$ denota el valor absoluto. Por otro lado, si $G(\lambda) = 0$ entonces es un **zero** de $G(s)$.

Ejemplo 1

Considere la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2(s^3 + 3s^2 - s - 3)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3},$$

obtenga sus polos y zeros.

Del procedimiento anterior concluimos que $G(s)$ tiene un zero en -3 y tres polos: -2, -1 y -1. Aquí tenemos:

- El polo -2 es llamado polo **simple**.
- El polo -1 es llamado polo **repetido** con multiplicidad 3.

```
% Primera forma
N = [2 6 -2 -6]
ceros = roots(N)

% Segunda forma
syms s
N = 2*s^3 + 6*s^2 - 2*s -6 == 0;

sol = solve(N,s)
sol
```

```
% Tercera forma
s = tf('s');

Ns = 2*s^3 + 6*s^2 -2*s - 6;
Ds = (s-1)*(s+2)*(s+1)^3;

Gs = Ns/Ds

pole(Gs)
zero(Gs)

% Cuarta forma
s = tf('s');

Ns = 2*s^3 + 6*s^2 -2*s - 6;
Ds = (s-1)*(s+2)*(s+1)^3;

Gs = Ns/Ds

pzmap(Gs)

% Simiplificando una expresión
syms s

Ns = 2*s^3 + 6*s^2 -2*s - 6;
Ds = (s-1)*(s+2)*(s+1)^3;

Gs = simplify(Ns/Ds)
Gs
```

Ejemplo 2

Sea $u(t) = 1$ con $t \leq 0$ la respuesta de escalón unitario, calcule la respuesta de estado cero de la siguiente función de transferencia

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)} \cdot U(s).$$

Por lo tanto, la respuesta de estado cero en el dominio del tiempo está dada como sigue:

$$y(t) = \underbrace{4e^{-t} - 3.5e^{-2t}}_{\text{polos de } G(s)} - \underbrace{0.5}_{\text{polo de } U(s)}.$$

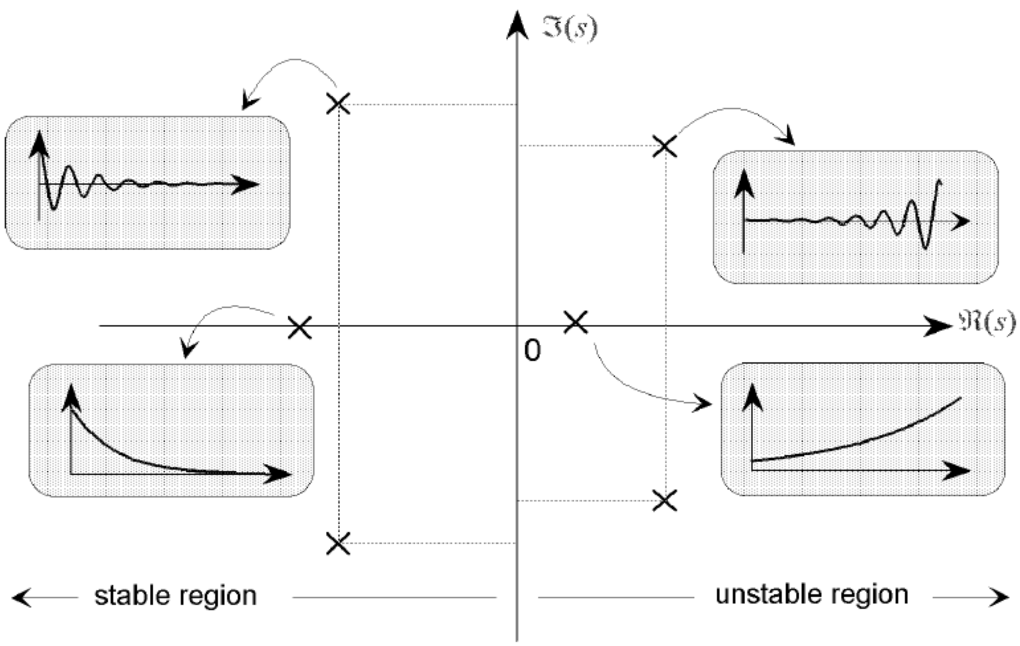
```
s = tf('s');

Gs = (3*s - 1)/((s+1)*(s+2));

pzmap(Gs)
```

Estabilidad de sistemas

- **Sistema Absolutamente Estable:** todos los polos del sistema estén estrictamente en el semi-plano izquierdo, sin importar la multiplicidad.
- **Sistema Marginalmente Estable:** al menos un polo está sobre el eje imaginario con multiplicidad uno y el resto están estrictamente en el semi-plano izquierdo, sin importar la multiplicidad.
- **Sistema Inestable:** al menos un polo está sobre el eje imaginario con multiplicidad mayor a uno o en el semiplano derecho.



Polinomio de Hurwitz

Definición 2. Un polinomio con coeficientes reales es llamado polinomio de **Hurwitz** si todas sus raíces tienen partes reales negativas.

Considere el siguiente polinomio

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0,$$

donde $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales.

Condiciones necesarias

- Si $D(s)$ es Hurwitz, entonces todos los coeficientes de $D(s)$ deben ser positivos.
- Si $D(s)$ tiene un término perdido o un coeficiente cero, entonces no es Hurwitz.

Teorema 1. Un polinomio con coeficientes positivos es un polinomio Hurwitz si y sólo si cada entrada en la tabla Routh es positivo, o equivalentemente, si y sólo si cada entrada en la primer columna de la tabla ($b_{61}, b_{51}, b_{41}, b_{31}, b_{21}, b_{11}, b_{01}$) es positivo.

Table 4.2 The Routh Table

	s^6	$b_{61} := a_6$	$b_{62} := a_4$	$b_{63} := a_2$	$b_{64} := a_0$	
$k_5 = \frac{b_{61}}{b_{51}}$	s^5	$b_{51} := a_5$	$b_{52} := a_3$	$b_{53} := a_1$		(1st row) $-$ k_5(2nd row) $= [b_{40} \quad b_{41} \quad b_{42} \quad b_{43}]$
$k_4 = \frac{b_{51}}{b_{41}}$	s^4	b_{41}	b_{42}	b_{43}		(2nd row) $-$ k_4(3rd row) $= [b_{30} \quad b_{31} \quad b_{32} \quad b]$
$k_3 = \frac{b_{41}}{b_{31}}$	s^3	b_{31}	b_{32}			(3rd row) $-$ k_3(4th row) $= [b_{20} \quad b_{21} \quad b_{22}]$
$k_2 = \frac{b_{31}}{b_{21}}$	s^2	b_{21}	b_{22}			(4th row) $-$ k_2(5th row) $= [b_{10} \quad b_{11}]$
$k_1 = \frac{b_{21}}{b_{11}}$	s^1	b_{11}				(5th row) $-$ k_1(6th row) $= [b_{00} \quad b_{01}]$
	s^0	b_{01}				

Ejemplo 3

Considere el siguiente polinomio

$$2s^4 + s^3 + 5s^2 + 3s + 4.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 4

Considere el siguiente polinomio

$$2s^5 + s^4 + 7s^3 + 3s^2 + 4s + 2.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 5

Considere el siguiente polinomio

$$2s^5 + s^4 + 7s^3 + 3s^2 + 4s + 1.5.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 6

Considere la siguiente función de transferencia

$$G_o(s) = \frac{(2s+1)(s+1)}{s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 14s^2 + 3s + 1}.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando:

- Polos y zeros.
- El método de Routh-Hurwitz.

```
s = tf('s');

num = (2*s + 1)*(s + 1);
den = s^5 + 5*s^4 + 12*s^3 + 14*s^2 + 3*s + 1;

Gs = num/den

pzmap(Gs)
```

Ejemplo 7

Considere la siguiente función de transferencia

```
s = tf('s');
k = 1; % -1/4 < k < 5/4
Gs = (8*k)/((s + 1)*(s^2 + 2*s + 2) + 8*k)

step(Gs)

pzmap(Gs)

pole(Gs)

help step
```

$$G_o(s) = \frac{8k}{(s+1)(s^2 + 2s + 2) + 8k},$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando:

- El método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 8

Determine el intervalo de estabilidad para el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{k(s^2 - 2s + 5)}{s^3 + (5+k)s^2 + (12-2k)s + 5k - 18}.$$

Utilice el criterio de Routh-Hurwitz para resolver este ejercicio.