Dinámica de sistemas físicos

Antecedentes matemáticos

Dr. Jesús Emmanuel Solís Pérez

jsolisp@unam.mx

Combinaciones lineales

Un sistema no homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3,$

$\vdots \qquad = \vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.$

puede ser representado de forma vectorial como sigue:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{\text{m1}} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{\text{m2}} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{\text{m3}} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{\text{mn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

o equivalentemente como

$x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n = v,$

donde u_1, u_2, $\ldots$, u_n, v son los vectores columnas, respectivamente.

Definición 1. Un vector v es una **combinación lineal** de los vectores u_1, u_2, $\ldots$, u_n si existen escalares a_1, a_2, $\ldots$, a_n tales que

$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots + a_nu_n.$

La ecuación vectorial

$v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + \ldots + x_nu_n,$

tiene una solución cuando los x_1, x_2, $\ldots$, x_n son escalares por determinar.

Ejemplo 1.

Sean $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, y $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Entonces v es una combinación lineal de u_1, u_2 y u_3 dado que el sistema o ecuación vectorial

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o bien

$$2 = x + y + z,$$

$$3 = x + y,$$

$$-4 = x,$$

tiene una solución $x = -4$, $y = 7$, $z = -1$. Es decir

$$v = -4u_1 + 7u_2 - u_3.$$

```
syms x y z

eq1 = x + y + z == 2;
eq2 = x + y == 3;
eq3 = x == -4;

solve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z])
```

```
syms x y z

eq1 = x + y + z == 2;
eq2 = x + y == 3;
eq3 = x == -4;

sol = solve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z])
```

```
sol = struct with fields:
    x: [1×1 sym]
    y: [1×1 sym]
    z: [1×1 sym]
```

```
sol.x
```

ans = -4

```
sol.y
```

ans = 7

```
sol.z
```

ans = -1

Dependencia lineal

Definición 2. Los vectores u_1, u_2, u_3, $\ldots$, $u_n \in \mathbb{R}^n$ son **linealmente dependientes** si existen escalares a_1, a_2, $\ldots$, a_n no todos nulos tales que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots + a_nu_n = 0.$$

La ecuación vectorial

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + \ldots + x_nu_n = 0,$$

tiene una solución no nula donde los escalares x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$, se deben determinar. En otro caso, los vectores son llamados **linealmente independientes**.

Ejemplo 2.

La solución de

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\-5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

o bien

$$x + 2y + z = 0,$$

$$x - y - 5z = 0,$$

$$x + 3y + 3z = 0.$$

¿Cómo llegamos a lo siguiente?

$$x + y + z = 0,$$

$$x + y = 0,$$

$$x = 0,$$

cuya representación queda

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

es la solución no nula $x = y = z = 0$. Por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes.

El sistema de ecuaciones lineales

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\-5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

o bien

$x+2y+z=0,$

$x-y-5z=0,$

$x+3y+3z=0,$

tiene una solución no nula $(x,y,z)=(3,-2,1)$. Por lo tanto, estos tres vectores son linealmente dependientes.

```
eq1 = x + 2*y + z == 0;
eq2 = x - y -5*z == 0;
eq3 = x + 3*y + 3*z == 0;

sol = solve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z])
```

```
sol = struct with fields:
    x: [1×1 sym]
    y: [1×1 sym]
    z: [1×1 sym]
```

```
sol.x
```

ans = 0

```
sol.y
```

ans = 0

```
sol.z
```

ans = 0

Ejemplo 3.

Realice la conversión de la siguiente ecuación vectorial en un sistema de ecuaciones lineales equivalente y resuélvalo

$$\begin{bmatrix}1\\-6\\5\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y+3z\\2x+5y+2z\\3x+8y+3z\end{bmatrix}.$$

Reduciendo el sistema, tenemos

$x+2y+3z=1,$

$2x+5y+2z=-6,$

$3x+8y+3z=5,$

o bien

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-8\\18\end{bmatrix}.$$

Cuya solución única es $(x,y,z)=(-82,28,9)$. En combinación lineal, lo anterior es representado como

$v=-82u_1+28u_2+9u_3,$

donde

$$u=\begin{bmatrix}1\\-8\\18\end{bmatrix}, u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \text{ y } u_3=\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}.$$

```
eq1 = x + 2*y + 3*z == 1;
eq2 = 2*x + 5*y + 2*z == -6;
eq3 = 3*x + 8*y + 3*z == 5;

sol = solve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z])
```

```
sol = struct with fields:
    x: [1×1 sym]
    y: [1×1 sym]
    z: [1×1 sym]
```

```
sol.x
```

ans = -82

```
sol.y
```

ans = 28

```
sol.z
```

ans = 9

Ejemplo 4.

Escriba el vector $v=(1,-2,5)$ como combinación lineal de los vectores $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,2,3)$ y $u_3=(2,-1,1)$.

Ejemplo 5.

Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes o dependientes

- $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(2,-1,3)$ y $u_3=(1,-5,3)$.
- $u_1=(1,-2,-3)$, $u_2=(2,3,-1)$ y $u_3=(3,2,1)$.

Ecuaciones lineales y sus soluciones

Se entiende por ecuación lineal con n incógnitas $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ ,\ x_n$ a una ecuación que puede escribirse de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son constantes reales. Aquí la constante a_k se denomina el **coeficiente** de x_k y b se denomina la **constante** de la ecuación lineal.

Se le llama **conjunto solución, solución general** o simplemente **solución** de la ecuación al conjunto de todas las soluciones denotado como sigue

$$S = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b; \quad a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ejemplo 6.

La ecuación $2x - 5y + 3xz = 4$ no es lineal debido al producto de dos incógnitas.

Ejemplo 7.

La ecuación $x + 2y - 4z + t = 3$ es lineal en las cuatro incógnitas x, y, z, t.

Teorema 1. Consideremos la ecuación lineal $Ax = b$

- Si $a \neq 0$, entonces $x = b/A = A^{-1}b$ es solución única de $Ax = b$.
- Si $a = 0$, pero $b \neq 0$, entonces $Ax = b$ no tiene solución.
- Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces todo escalar k es solución de $Ax = b$.

Una ecuación **degenerada** es una ecuación lineal que tiene la siguiente forma

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b,$$

donde cada coeficiente es igual a cero y su solución está dada como sigue

Teorema 2. Sea la ecuación lineal degenerada $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b$ se tiene

- Si $b \neq 0$ entones la ecuación no tiene solución.
- Si $b = 0$ entonces todo vector $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ es una solución.

Teorema 3. Sea una ecuación lineal no degenerada de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

con primera incógnita x_p.

Dará una solución única cualquier conjunto de valores de las incógnitas x_j con $j \neq p$.

Nota: Las incógnitas x_j se llaman **variables libres** porque pueden tomar cualquier valor.

Ejemplo 8.

Dada la siguiente ecuación

$$2x - 4y + z = 8,$$

encuentre

- Sus soluciones particulares
- Su solución general

Soluciones particulares

- x es la primera incógnita
- dos variables libres y, z

Entonces asignamos valores cualesquiera a las variables libres y, z y despejamos la primera incógnita x. Por ejemplo: para $y = 1$ y $z = 1$ tenemos $x = 11/2$. Por lo tanto, $u = (11/2, 1, 1)$ es una solución particular.

Solución general

Asignamos valores arbitrarios (**parámetros**) a las variables libres.

Por ejemplo: Si sustituimos $y = a$ y $z = b$ en la ecuación, obtenemos el valor de la primera incógnita

$$x = 4 + 2a - \frac{1}{2}b, \quad y = a, \quad z = b.$$

Por lo que la solución general esta dada como sigue

$$S = \left\{u \in \mathbb{R}^3 | u = \left(4 + 2a - \frac{1}{2}b, a, b\right), \quad a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

La solución general de una ecuación lineal no degenerada con dos incógnitas x y y de la forma

$$ax + by = c,$$

donde a, b y c son reales está dada como sigue

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Un sistema de dos ecuaciones lineales no degeneradas con dos incógnitas está dado como sigue

$a_{11}x + a_{12}y = c_1,$

$a_{21}x + a_{22}y = c_2$

donde u_1 y u_2 son números reales que satisfacen ambas ecuaciones y se le conoce como **solución simultánea** y se escribe como $u = (u_1, u_2)$.

Podemos recurrir al método gráfico para encontrar tres casos:

- El sistema tiene exactamente una solución.
- El sistema no tiene soluciones.
- El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 9.

Considere el siguiente sistema

$L_1 : \quad 2x + 5y = 8,$

$L_2 : \quad 3x - 2y = -7.$

Eliminamos x construyendo una ecuación $L = 3L_1 - 2L_2$

- Tenemos $19y = 38$ y por consiguiente $y = 2$
- Sustituyendo en L_1 obtenemos $x = -1$
- La solución única está dada como $u = (-1, 2)$

Matrices escalonadas

Una matriz A se dice que está en **forma escalonada** o se denomina **matriz escalonada** si cumple las siguientes condiciones

- Las filas no nulas están en la parte inferior de la matriz.
- Cada entrada principal no nula está a la derecha de la entrada principal.

Una **matriz aumentada** M de m ecuaciones y n incógnitas está dada como sigue

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} & b_m \end{bmatrix}.$$

La **matriz de coeficientes** A del sistema anterior está dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones dado por

$$x + y - 2z + 4t = 5,$$

$$2x + 2y - 3z + t = 3,$$

$$3x + 3y - 4z - 2t = 1,$$

```
syms x y z t

eq1 = x + y - 2*z +4*t == 5;
eq2 = 2*x + 2*y - 3*z + t == 3;
eq3 = 3*x + 3*y - 4*z - 2*t == 1;

sol = solve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z,t])
```

```
sol = struct with fields:
    x: [1×1 sym]
    y: [1×1 sym]
    z: [1×1 sym]
    t: [1×1 sym]
```

se resuelve reduciendo su matriz aumentada M a la forma escalonada y después a la forma canónica, *i.e.*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general queda como sigue

$$x + y - 10t = -9,$$

$$z - 7t = -7,$$

y el conjunto solución

$$S = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid u = (-9 - y + 10t, y, -7 + 7t, t), \quad y, t \in \mathbb{R}\}.$$

Sistema de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todas las constantes son iguales a cero, es decir

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,$

$\vdots \quad = \quad \vdots$

$a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + a_{m_3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0.$

El sistema anterior tiene una solución llamada solución nula o trivial denotada como n-ada $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$. Entonces el sistema puede reducirse a un sistema equivalente en forma escalonada

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$

$a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n = 0,$

$\vdots \quad = \quad \vdots$

$a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = 0.$

Del sistema anterior tenemos dos posibilidades

- Si $r = n$, entonces el sistema tiene sólo la solución no nula.
- Si $r < n$, entonces el sistema tiene una solución no nula.

Ejemplo 10.

Determine si $u = (8, 1, 2)$ es solución de la siguiente ecuación lineal $x + 2y - 3z = 4$.

```
syms x y z
eq1 = x + 2*y -3*z == 4;

sol = vpasolve(eq1,x)
```

sol = $3.0\,z - 2.0\,y + 4.0$

Ejemplo 11.

Encuentre cada una de las soluciones de la ecuación $2x + y + x - 5 = 2y + 3x + y + 4$.

Ejemplo 12.

Encuentre la solución general de la ecuación lineal $x - 2y + 3z = 4$.

Ejemplo 13.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$x-2y+z=7,$

$2x-y+4z=17,$

$3x-2y+2z=14.$

```
A = [1 -2 1;
     2 -1 4;
     3 -2 2];

b = [7;
    17;
    14]
```

```
b = 3×1
     7
    17
    14
```

```

var = A\b
```

```
var = 3×1
    2.0000
   -1.0000
    3.0000
```

Ejemplo 14.

Determine los valores de k para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$x+y-z=1,$

$2x+3y+kz=3,$

$x+ky+3z=2,$

obtenga

- Una solución única
- Ninguna solución
- Infinitas soluciones

```
syms x y z k

eq1 = x + y - z == 1;
eq2 = 2*x + 3*y + k*z == 3;
eq3 = x + k*y + 3*z == 2;

sol = solve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z])
```

```
sol = struct with fields:
    x: [1×1 sym]
    y: [1×1 sym]
    z: [1×1 sym]
```

```
sol.x
```

ans = 1

```
sol.y
```

ans =

$\frac{1}{k+3}$

```
sol.z
```

ans =

$\frac{1}{k+3}$

Ejemplo 15.

Reduzca la siguiente matriz A a la forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 16.

Resuelva el siguiente sistema utilizando la matriz aumentada

$x + 2y - 3z - 2s + 4t = 1,$

$2x + 5y - 8z - s + 6t = 4,$

$x + 4y - 7z + 2t = 8.$

Ejemplo 17.

Determine si el siguiente sistema homogéneo tiene una solución no nula

$x + 2y - z = 0,$

$2x + 5y + 2z = 0,$

$x + 4y + 7z = 0,$

$x + 3y + 3z = 0.$

Álgebra de matrices

Dadas dos matrices A y B de orden $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{3n} \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{\mathrm{n}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{3n} \\ b_{\mathrm{n}1} & b_{\mathrm{n}2} & \cdots & b_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}$$

podemos sumarlas o multiplicarlas.

La suma de A y B es una matriz $A+B$ de $m \times n$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1}+b_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2}+b_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}}+b_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.$$

El producto de un escalar k y una matriz A es la matriz kA de orden $m \times n$

$$\mathrm{kA} = \begin{bmatrix} \mathrm{ka}_{11} & \mathrm{ka}_{12} & \cdots & \mathrm{ka}_{1n} \\ \mathrm{ka}_{21} & \mathrm{ka}_{22} & \cdots & \mathrm{ka}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{ka}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{ka}_{\mathrm{m}2} & \cdots & \mathrm{ka}_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}.$$

Teorema 4. Sea $M_{mn}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ se tiene

- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $A+0=A$
- $A+(-A)=0$
- $A+B=B+A$
- $a(A+B)=aA+aB$
- $(a+b)A=aA+bA$
- $(ab)A=a(bA)$
- $1 \cdot A = A$ y $0 \cdot A = 0$

El producto de dos matrices A_{mp} y B_{pn} , denotado como AB de $m \times n$ está definido como

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & \cdots & A_1 \cdot B^n \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & \cdots & A_2 \cdot B^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & A_m \cdot B^2 & \cdots & A_m \cdot B^n \end{bmatrix}$$

donde las A_i , con $i = 1, 2, \ldots, m$ son las filas de la matriz A y las B^j con $j = 1, 2, \ldots, n$ son las columnas de la matriz B.

Teorema 5. Sean A, B y C matrices arbitrarias de órdenes compatibles, entonces las operaciones están definidas como sigue con un escalar cualquiera $k \in \mathbb{R}$

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

La **transpuesta** de una matriz A, denotada como A^T se obtiene de escribir las filas de A, por orden, como columnas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{\mathrm{m}1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1\mathrm{n}} & a_{2\mathrm{n}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}$$

Teorema 6. Sean A y B matrices arbitrarias de órdenes compatibles, las operaciones están definidas para un escalar $k \in R$ cualquiera como sigue

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede ser representado de forma equivalente como sigue

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o simplemente $Ax = b$, donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes del sistema, $x = (x_j)$ representa el vector de incógnitas y $b = (b_i)$ el vector de constantes.

La **matriz aumentada** del sistema dado en la expresión anterior está dada como sigue

$$[A|B]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} & b_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo 18.

El siguiente ejemplo representa un sistema de ecuaciones lineales y su ecuación matricial equivalente

$$2x+3y-4z=7,$$

$$x-2y-5z=3,$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Videos de apoyo

- Multiplicación de matrices
- Operaciones matriciales con un escalar
- Dependencia e independencia lineal
- Funciones linealmente independientes
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales (método de sustitución)
- Solución de sistemas de ecuaciones (método de Gauss)

Ecuaciones diferenciales

Definición 3. Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+xy\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+5\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3x=\sin(t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=v.$$

Definición 4. Se define como **ecuación diferencial ordinaria** a una ecuación diferencial que involucra derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una **sola variable** independiente.

En la primer y segunda ecuación, x es la variable independiente en la primera y t lo es en la segunda.

Definición 5. Se define como **ecuación diferencial parcial** a una ecuación diferencial que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a **más de una** variable independiente.

La tercer ecuación es un ejemplo de ecuación diferencial parcial donde las variables independientes son s y t.

Definición 6. El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Definición 7. El **grado** de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Ejemplo 19.

Considere las siguientes ecuaciones diferenciales

- $\dot{y} + by = 0,$
- $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{Q}{C} = 0,$
- $x\dot{y} + y = 3,$
- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z + x\dfrac{\partial z}{\partial y},$
- $(\ddot{y})^2 + (\dot{y})^3 + 3y = x^2.$

Definición 8. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es **lineal** en la variable dependiente y así como en la variable independiente x si está escrita como sigue

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x).$$

Definición 9. Una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n, en la variable dependiente y así como en la variable independiente x si se expresa como sigue

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\dot{y}(x) + a_n(x)y(x) = b(x),$$

donde a_0 no es idénticamente cero y el término $b(x)$ se le llama **término no homogéneo**.

¿Cómo podemos identificar las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales?

- La variable dependiente y y sus derivadas ocurren sólo en el primer grado
- No hay productos de y o cualquiera de sus derivadas
- No hay funciones trascendentales de y o sus derivadas

Ejemplo 20.

Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias son lineales

$$\ddot{y}(x) + 5\dot{y}(x) + 6y(x) = 0,$$

$$y^{iv}(x) + x^2\dddot{y}(x) + x^3\dot{y}(x) = x \cdot \exp(x).$$

Nota. La primer ecuación es homogénea mientras que la segunda es no homogénea.

Ejemplo 21.

Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias son no lineales

- $\ddot{y}(x) + 5\dot{y}(x) + 6y^2(x) = 0,$
- $\ddot{y}(x) + 5(\dot{y}(x))^3 + 6y = 0,$
- $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta \cdot t) = 0,$
- $\ddot{y}(x) + 5y(x)\dot{y}(x) + 6y(x) = 0.$

Una EDO lineal es EDO con **coeficientes constantes** si todos los coeficientes de las variables dependientes y sus derivadas son constantes. Si alguno de los coeficientes es función de la variable independiente se dice entonces que es una EDO lineal con **coeficientes variables**.

Ejemplo 22.

Clasifique cada una de las siguientes ecuaciones como ordinarias, parciales, lineales, no lineales, homogéneas, no homogéneas, con coeficientes constantes o variables así como su grado y orden.

- $\dot{y}(x) + x^2y = x\exp(x)$
- $\dddot{y}(x) + 4\ddot{y}(x) - 5\dot{y}(x) + 3y(x) = \sin(x)$
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- $y^{iv}(x) + 3[\ddot{y}(x)]^5 + 5y(x) = 0$
- $\ddot{y}(x) + y\sin(x) = 0$
- $\ddot{y}(x) + x\sin(y) = 0$
- $x^{vi}(t) + (x^{iv}(t))(\dddot{x}(t)) + x = t$
- $(\dot{r}(s))^3 = \sqrt{\ddot{r}(s) + 1}$

Soluciones

La ecuación

$F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0,$

es una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden y representa una relación entre las $n+2$ variables $x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \dots, y^{(n)}$ que puede ser resuelta para $y^{(n)}$ en términos de las otras variables, *i.e.*

$y^{(n)} = f(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \dots, y^{(n-1)}).$

Definición 10. Sea f una función real definida para toda x, se dice que la función f es una **solución explícita**} si f satisface los siguientes requisitos:

$F\left(x, f, \dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}, \dots, f^{(n)}\right),$

está definida $\forall x \in I$.

$F\left(x, f, \dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}, \dots, f^{(n)}\right) = 0$.

Lo anterior se traduce en que si al sustituir $f(x)$ y sus derivadas por y así como sus correspondientes derivadas, ésta se reduce a una identidad en I.

Definición 11. Una relación de la forma $g(x, y)$ se conoce como **solución implícita** si esta relación define una función real f de la variable x en un intervalo I tal que esta función es una solución explícita.

Ejemplo 23.

La función f está definida $\forall x \in \mathbb{R}$ como sigue

$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x),$

la cual es una solución explícita de la siguiente ED

$\ddot{y}(x) + y(x) = 0,$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 24.

La relación

$x^2 + y^2 - 25 = 0,$

es una solución implícita de la siguiente ED

$x + y(x)\dot{y}(x) = 0,$

en el intervalo $I = (-5, 5)$.

Cuando hablamos de "resolver" una ecuación diferencial debemos considerar que no existen métodos exactos de solución y para ello utilizamos métodos aproximados, por ejemplo:

1. Métodos de integración por series
2. **Métodos numéricos**
3. Métodos gráficos

Ejemplo 25.

Encuentre una solución a la ecuación diferencial

$$\dot{y} = 2x,$$

tal que en $x = 1$ esta solución valga 4.

Problema con valor inicial. Implica que la solución o sus derivadas tomen valores en *un solo valor* de x.

$$\ddot{y}(x) + y(x) = 0, \quad y(1) = 3, \quad \dot{y}(1) = -4.$$

Problema con valores en la frontera. Implica que la solución o sus derivadas tomen valores de *dos valores diferentes* de x.

$$\ddot{y} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = 5.$$

Ejemplo 26.

Resuelva el siguiente problema con valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}, \quad y(3) = 4.$$

La familia de soluciones está determinada por

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Transformada de Laplace

Suponga que f es una función real de la variable $t > 0$ y s un parámetro real, entonces definimos la **transformada de Laplace** de f como

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t,$$

$$F(s) = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Para aplicar la transformada de Laplace a problemas físicos, es necesario invocar la transformada inversa. Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces la **transformada inversa de Laplace** denotada como

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t), \quad t \geq 0,$$

la cual mapea la transformada de Laplace de una función de regreso a la función original.

De las tablas tenemos

$$\mathscr{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = sF(s) - f(0),$$

$$\mathscr{L}\left\{\ddot{f}(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0),$$

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Ejemplo 27.

Muestre que $y = 4\exp(2x) + 2\exp(-3x)$ es la solución al problema con valor inicial

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0, \quad y(0) = 6, \quad \dot{y}(0) = 2.$$

Definición 12. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal si está escrita de la siguiente forma

$$\dot{y}(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Ejemplo 28.

$$x\dot{y} + (x+1)y = x^3 \quad \rightarrow \quad \dot{y} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = x^2$$

con $p(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y $q(x) = x^2$

Ejemplo 29.

Encuentre la solución a los siguientes problemas con valor inicial utilizando Laplace y el método descrito anteriormente

- $\dot{y} - 8y = 0, \quad y(0) = -3.$
- $\dot{y} + 16y = 0, \quad y(0) = 2.$
- $-4\dot{y} - 3y = 0, \quad y(0) = 1.$
- $16\dot{y} + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$
- $\dot{y} + 2y = 1$
- $\dot{y} + 4y = 8x$

- $\dot{y} + 3y = 6x^2$
- $\dot{y} + 3y = 3x^2e^{-3x}$

Videos de apoyo

- Transformada de Laplace
- Ecuación diferencial de primer orden (solución)
- Ecuación diferencial lineal de primer orden (solución)
- Orden y grado de ecuaciones diferenciales
- Solución de ecuaciones diferenciales por Laplace