Dinámica de sistemas físicos

Modelado en el dominio de la frecuencia

Dr. Jesús Emmanuel Solís Pérez

jsolisp@unam.mx

Respuesta en frecuencia

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) cuya función de transferencia es $G(s)$ y la entrada así como la salida se representan por $x(t)$, $y(t)$ respectivamente. Dicha función se puede escribir como el cociente de dos polinomios en s, esto es

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)},$$

o bien

$$G(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

La transformada de Laplace de la salida $Y(s)$ es

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s)$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$.

La respuesta en estado estacionario de un sistema estable LTI a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales. Considerando que $Y(s)$ tiene únicamente polos distintos (simples), la ecuación anterior se puede representar en fracciones parciales como sigue:

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega X}{s^2+\omega^2},$$

$$Y(s) = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+s_1} + \frac{b_2}{s+s_2} + \ldots + \frac{b_n}{s+s_n}.$$

donde a y $b_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes y $\bar{a}$ es el complejo conjugado de a.

Por tanto, aplicando la transformada inversa de Laplace de la ecuación tenemos

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t}, \quad t \geq 0.$$

Función de transferencia propia

Considere la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son dos polinomios con coeficientes reales, entonces tenemos

- Función **impropia** si $\deg N(s) > \deg D(s)$.
- Función **propia** si $\deg N(s) \leq \deg D(s)$.
- Función **estrictamente propia** si $\deg N(s) < \deg D(s)$.
- Función **bipropia** si $\deg N(s) = \deg D(s)$.

Polos y zeros

Considere una función de transferencia racional propia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios con coeficientes reales y $\deg N(s) \leq \deg D(s)$.

Defínción 1. Un número complejo o real finito λ es un **polo** de $G(s)$ si $|G(s)| = \infty$, donde $|\cdot|$ denota el valor absoluto. Por otro lado, si $G(\lambda) = 0$ entonces es un **zero** de $G(s)$.

Ejemplo 1

Considere la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2(s^3 + 3s^2 - s - 3)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3},$$

obtenga sus polos y zeros.

Del procedimiento anterior concluimos que $G(s)$ tiene un zero en -3 y tres polos: -2, -1 y -1. Aquí tenemos:

- El polo -2 es llamado polo **simple**.
- El polo -1 es llamado polo **repetido** con multiplicidad 3.

```
% Primera forma
N = [2 6 -2 -6]
ceros = roots(N)

% Segunda forma
syms s
N = 2*s^3 + 6*s^2 - 2*s -6 == 0;

sol = solve(N,s)
```

```
sol =
```

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
sol
```

sol =

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
% Tercera forma
s = tf('s');

Ns = 2*s^3 + 6*s^2 -2*s - 6;
Ds = (s-1)*(s+2)*(s+1)^3;

Gs = Ns/Ds
```

```
Gs =

         2 s^3 + 6 s^2 - 2 s - 6
  -------------------------------------
  s^5 + 4 s^4 + 4 s^3 - 2 s^2 - 5 s - 2

Continuous-time transfer function.
```

```
pole(Gs)
```

```
ans = 5×1 complex
   1.0000 + 0.0000i
  -2.0000 + 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 + 0.0000i
  -1.0000 - 0.0000i
```

```
zero(Gs)
```

```
ans = 3×1
   -3.0000
    1.0000
   -1.0000
```

```
% Cuarta forma
s = tf('s');

Ns = 2*s^3 + 6*s^2 -2*s - 6;
Ds = (s-1)*(s+2)*(s+1)^3;

Gs = Ns/Ds
```

```
Gs =
```

```
        2 s^3 + 6 s^2 - 2 s - 6
  -------------------------------------
  s^5 + 4 s^4 + 4 s^3 - 2 s^2 - 5 s - 2

Continuous-time transfer function.
```

```
pzmap(Gs)
```


```
% Simiplificando una expresión
syms s

Ns = 2*s^3 + 6*s^2 -2*s - 6;
Ds = (s-1)*(s+2)*(s+1)^3;

Gs = simplify(Ns/Ds)
```

Gs =

$$\frac{2\,s+6}{(s+1)^2\,(s+2)}$$

```
Gs
```

Gs =

$$\frac{2\,s+6}{(s+1)^2\,(s+2)}$$

Ejemplo 2

Sea $u(t) = 1$ con $t \leq 0$ la respuesta de escalón unitario, calcule la respuesta de estado cero de la siguiente función de transferencia

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)} \cdot U(s).$$

Por lo tanto, la respuesta de estado cero en el dominio del tiempo está dada como sigue:

$$y(t) = \underbrace{4e^{-t} - 3.5e^{-2t}}_{\text{polos de } G(s)} - \underbrace{0.5}_{\text{polo de } U(s)}.$$

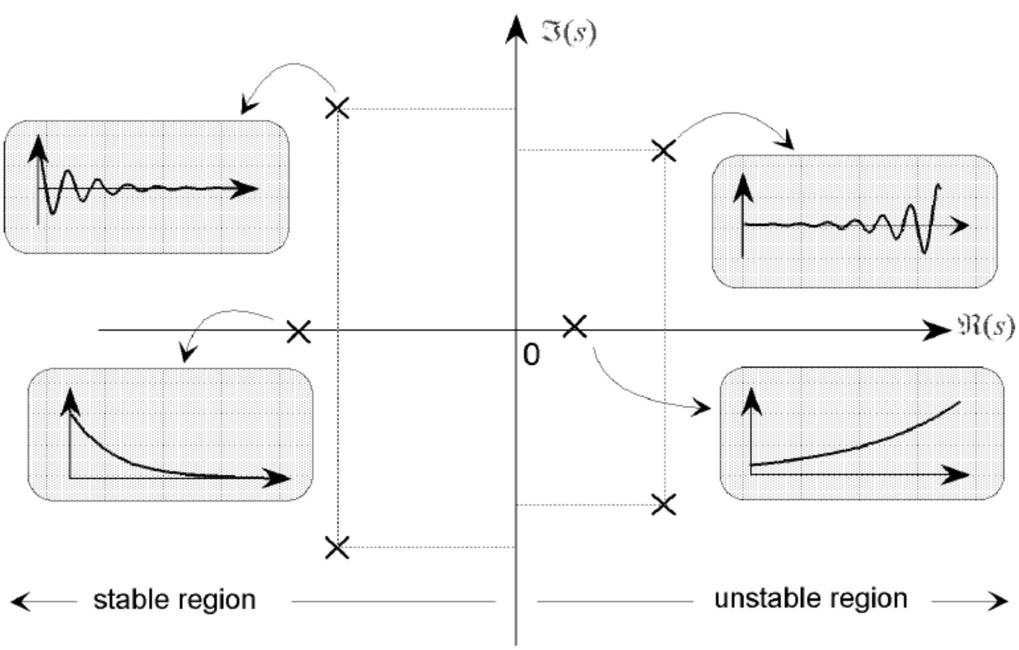
```
s = tf('s');

Gs = (3*s - 1)/((s+1)*(s+2));

pzmap(Gs)
```

Estabilidad de sistemas

- **Sistema Absolutamente Estable:** todos los polos del sistema estén estrictamente en el semi-plano izquierdo, sin importar la multiplicidad.
- **Sistema Marginalmente Estable:** al menos un polo está sobre el eje imaginario con multiplicidad uno y el resto están estrictamente en el semi-plano izquierdo, sin importar la multiplicidad.
- **Sistema Inestable:** al menos un polo está sobre el eje imaginario con multiplicidad mayor a uno o en el semiplano derecho.



Polinomio de Hurwitz

Definición 2. Un polinomio con coeficientes reales es llamado polinomio de **Hurwitz** si todas sus raíces tienen partes reales negativas.

Considere el siguiente polinomio

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0,$$

donde $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales.

Condiciones necesarias

- Si $D(s)$ es Hurwitz, entonces todos los coeficientes de $D(s)$ deben ser positivos.
- Si $D(s)$ tiene un término perdido o un coeficiente cero, entonces no es Hurwitz.

Teorema 1. Un polinomio con coeficientes positivos es un polinomio Hurwitz si y sólo si cada entrada en la tabla Routh es positivo, o equivalentemente, si y sólo si cada entrada en la primer columna de la tabla ($b_{61}, b_{51}, b_{41}, b_{31}, b_{21}, b_{11}, b_{01}$) es positivo.

Table 4.2 The Routh Table

	s^6	$b_{61} := a_6$	$b_{62} := a_4$	$b_{63} := a_2$	$b_{64} := a_0$	
$k_5 = \frac{b_{61}}{b_{51}}$	s^5	$b_{51} := a_5$	$b_{52} := a_3$	$b_{53} := a_1$		(1st row) $-$ k_5(2nd row) $= [b_{40} \quad b_{41} \quad b_{42} \quad b_{43}]$
$k_4 = \frac{b_{51}}{b_{41}}$	s^4	b_{41}	b_{42}	b_{43}		(2nd row) $-$ k_4(3rd row) $= [b_{30} \quad b_{31} \quad b_{32} \quad b]$
$k_3 = \frac{b_{41}}{b_{31}}$	s^3	b_{31}	b_{32}			(3rd row) $-$ k_3(4th row) $= [b_{20} \quad b_{21} \quad b_{22}]$
$k_2 = \frac{b_{31}}{b_{21}}$	s^2	b_{21}	b_{22}			(4th row) $-$ k_2(5th row) $= [b_{10} \quad b_{11}]$
$k_1 = \frac{b_{21}}{b_{11}}$	s^1	b_{11}				(5th row) $-$ k_1(6th row) $= [b_{00} \quad b_{01}]$
	s^0	b_{01}				

Ejemplo 3

Considere el siguiente polinomio

$$2s^4 + s^3 + 5s^2 + 3s + 4.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 4

Considere el siguiente polinomio

$$2s^5 + s^4 + 7s^3 + 3s^2 + 4s + 2.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 5

Considere el siguiente polinomio

$$2s^5 + s^4 + 7s^3 + 3s^2 + 4s + 1.5.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando el método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 6

Considere la siguiente función de transferencia

$$G_o(s) = \frac{(2s+1)(s+1)}{s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 14s^2 + 3s + 1}.$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando:

- Polos y zeros.
- El método de Routh-Hurwitz.

```
s = tf('s');

num = (2*s + 1)*(s + 1);
den = s^5 + 5*s^4 + 12*s^3 + 14*s^2 + 3*s + 1;

Gs = num/den
```

```
Gs =

              2 s^2 + 3 s + 1
  ---------------------------------------
  s^5 + 5 s^4 + 12 s^3 + 14 s^2 + 3 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

```
pzmap(Gs)
```

Ejemplo 7

Considere la siguiente función de transferencia

```
s = tf('s');
k = 1; % -1/4 < k < 5/4
Gs = (8*k)/((s + 1)*(s^2 + 2*s + 2) + 8*k)
```

```
Gs =
 
            8
  ----------------------
  s^3 + 3 s^2 + 4 s + 10
 
Continuous-time transfer function.
```

```
step(Gs)
```


```
pzmap(Gs)

pole(Gs)
```

```
ans = 3×1 complex
  -2.8338 + 0.0000i
  -0.0831 + 1.8767i
  -0.0831 - 1.8767i
```

```
help step
```

```
 step  Step response of dynamic systems.

    [Y,T] = step(SYS) computes the step response Y of the dynamic system SYS.
    The time vector T is expressed in the time units of SYS and the time
    step and final time are chosen automatically. For multi-input systems,
    independent step commands are applied to each input channel. If SYS has
    NY outputs and NU inputs, Y is an array of size [LENGTH(T) NY NU] where
    Y(:,:,j) contains the step response of the j-th input channel.

    For state-space models,
       [Y,T,X] = step(SYS)
    also returns the state trajectory X, an array of size [LENGTH(T) NX NU]
    for a system with NX states and NU inputs.

    For identified models (see IDMODEL),
       [Y,T,X,YSD] = step(SYS)
    also computes the standard deviation YSD of the response Y (YSD is empty
    if SYS does not contain parameter covariance information).
```

```
[Y,...] = step(SYS,TFINAL) simulates the step response from t=0 to the
final time t=TFINAL (expressed in the time units of SYS). For discrete-
time models with unspecified sample time, TFINAL is interpreted as
the number of sampling periods.

[Y,...] = step(SYS,T) specifies the time vector T for simulation (in
the time units of SYS). For discrete-time models, T should be of the
form 0:Ts:Tf where Ts is the sample time. For continuous-time models,
T should be of the form 0:dt:Tf where dt is the sampling period for the
discrete approximation of SYS.

[Y,...] = step(SYS,...,OPTIONS) specifies additional options such as the
step amplitude or input offset. Use stepDataOptions to create the option
set OPTIONS.

When called without output arguments, step(SYS,...) plots the step
response of SYS and is equivalent to STEPPLOT(SYS,...). See STEPPLOT
for additional graphical options for step response plots.

See also stepplot, stepDataOptions, impulse, initial, lsim, ltiview,
DynamicSystem, idlti.
```

$$G_o(s) = \frac{8k}{(s+1)(s^2+2s+2)+8k},$$

Determine si el sistema es estable o no estable utilizando:

- El método de Routh-Hurwitz.

Ejemplo 8

Determine el intervalo de estabilidad para el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{k(s^2-2s+5)}{s^3+(5+k)s^2+(12-2k)s+5k-18}.$$

Utilice el criterio de Routh-Hurwitz para resolver este ejercicio.