Individuālais pētnieciskais darbs

Trīs ķermeņu problēma astronomijā

Rauls Poļs
Latvijas Universitāte
Rīga, 25.05.2025

1. Teorētiskais pamatojums

N-ķermeņu problēma ir uzdevums klasiskajā mehānikā, kurā ķermeņi ar punktveida masām iedarbojas viens uz otru saskaņā ar Ņūtona mehānikas likumiem. Šo problēmu var aplūkot kā kvantu mehānikā, gan elektrodinamikā, taču šajā darbā tieši tiks aplūkota trīs ķermeņu problēma no astronomijas perspektīvas, neietverot tajā kvantu un relatīvistiskos elementus.

Vispirms aplūko divu ķermeņu problēmu divās dimensijās, kur ķermeņus definē ar masām m_1,m_2. No vienas puses, ķermeņa paātrinājumu nosaka 2. Ņūtona likums

$\vec{F}_1$=m_1a_1

No otras puses, ja pirmā ķermeņa tuvumā pieliek vēl otru ķermeni, tad šis pirmais ķermenis izjutīs spēku F:

$$\vec{F}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

kur r ir rādiusvektors, kuru definē kā $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ un G ir universālā gravitācijas konstante, kuras vērtība ir aptuveni 6.67 * 10^{-11} m^3*kg*s^{-2}, taču šajā darbā vienkāršības labad pieņemsim par 1, un visus lielumus uzskatīsim par bezdimensionāliem. Pirmās daļiņas potenciālo enerģiju definē kā

$$V = \frac{Gm_1}{r},$$

bet ātrums v nosaka kinētisko enerģiju, kuru var sadalīt x un y komponentēs:

$$T = \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2)}{2}$$

Atrisinājumus nosaka, cik liela ir kinētiskā enerģija T, salīdzinājumā ar potenciālo enerģiju V. Pieņemot, ka viena ķermeņa masa ir daudzreiz mazāka par otrā ķermeņa masu, divu ķermeņu problēmas atrisinājumi ir būtībā otrās kārtas līnijas – elipse (un tās speciālgadījums riņķa līnija) (T<V), parabola (T=V) un hiperbola(T>V). Kad T≥V, tad daļiņa izkļūst no otras daļiņas gravitācijas ietekmes.

Trīs ķermeņu problēmā tiek doti ķermeņi i=1,2,3 ar attiecīgajām masā m_1,m_2,m_3. Uzskatāmības labad vispirms aplūkosim katru ķermeni atsevišķi. Saskaņā ar 2. Ņūtona likumu uz apskatāmo ķermeni iedarbojas divi pārējie ķermeņi ar spēku $\overrightarrow{F_1}$:

$$\overrightarrow{F_1} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{1,2}|^3}\vec{r}_{1,2} - \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_{1,3}|^3}\vec{r}_{1,3}$$

un šo gravitācijas mijiedarbības spēki summējas ar noteiktu kopējo paātrinājumu a_1. Sadalot paātrinājumu plaknes x un y komponentēs, iegūst

a_{1x}=$-(\frac{Gm_2}{|r_{1,2}|^3}x_{1,2} + \frac{Gm_3}{|r_{1,3}|^3}x_{1,3})$ un a_{1y}=$-(\frac{Gm_2}{|r_{1,2}|^3}y_{1,2} + \frac{Gm_3}{|r_{1,3}|^3}y_{1,3})$,

kur r nosaka pēc vektora garuma formulas $r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

Analoģiski iegūst arī paātrinājumu izteiksmes pārējiem diviem ķermeņiem.

Trīs ķermeņu problēmas formulējums būtībā balstās uz divpadsmit diferenciālvienādojumu sistēmu, kas nosaka, kā mainās visu 3 ķermeņu x un y koordinātes laikā t. Šie vienādojumi ir:

$$\begin{cases} v'_{i,1}=a_{i,x} \\ x'_i=v_{i,x} \\ v'_{i,y}=a_{i,y} \\ y'_i=v_{i,y} \end{cases},\text{i=1,2,3}$$

Šo diferenciālvienādojumu sākumnosacījumus uzdod kā $x_i(0)$, $y_i(0)$, $v_{xi}(0)$, $v_{yi}(0)$.

Vienas daļiņas potenciālo enerģiju aprēķina kā

$$V = -(\frac{Gm_2}{r_{12}} + \frac{Gm_3}{r_{13}})$$

bet kinētisko enerģiju rēķina tāpat kā divu ķermeņu problēmā.

Uzdevumam par trīs ķermeņiem nav vispārīgā analītiskā atrisinājuma, jo lielākai daļai sākumnosacījumu nelielas to izmaiņas var novest pie pavisam citādiem atrisinājumiem, kas klasiskajā mehānikā zināms kā determīnitiskais haoss. Taču šo uzdevumu var atrisināt, pielietojot skaitliskās metodes.

2. Metodes

Darbā tika izmantotas Eilera-Kromera un Verlē metode. Nevektorizētā veidolā tās ir vienkārši ieviest un tās ir stabilas, kas nozīmē, ka enerģija skaitliskās risināšanas gaitā neuzkrājas un skaitliskie efekti tiek pēc iespējas minimizēti. Eilera-Kromera metode tika lietota pamatā stabilām orbītām, taču dažu nestabilu trajektoriju gadījumā tika vēl izmantota Verlē metode, ietverot ātruma aprēķinu, lai papildus pārbaudītu risinājuma konverģenci.

Eilera-Kromera metodes pamatā tiek vispirms aprēķināts paātrinājums, tad attiecīgā ķermeņa komponentes ātrums nākamajā solī un tad atbilstošā koordināte nākamajā solī:

$v_{1xn+1}=v_{1xn} - a_{1xn}*x_n*\Delta t$

$x_{1xn+1}=x_n+ v_{1xn+1}*\Delta t$

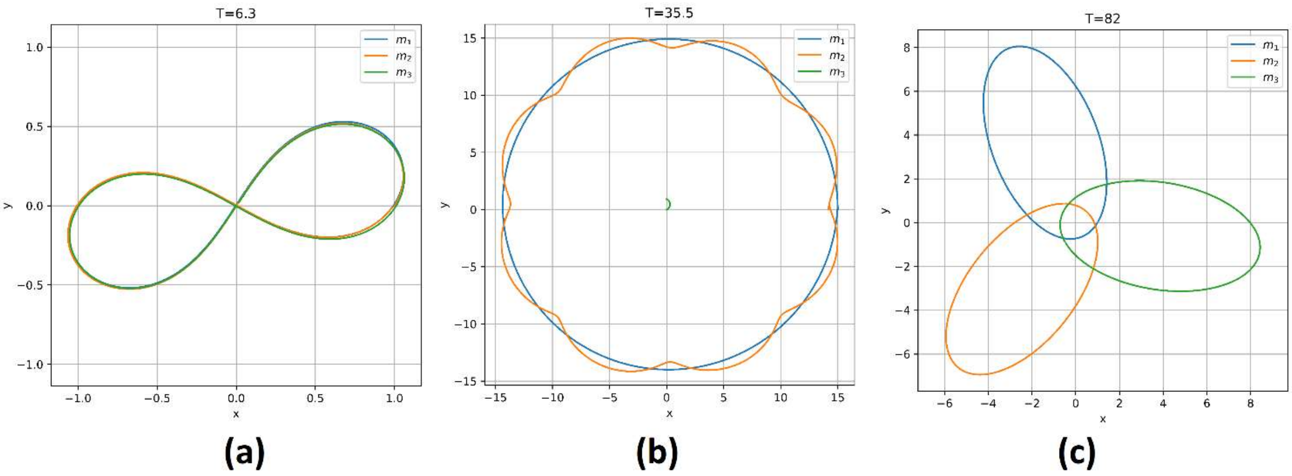
Verlē ātruma metodē vispirms tiek rēķināts paātrinājums, tad atbilstošā ķermeņa koordināte nākamajā solī, zinot tās paātrinājuma komponenti un ātrumu iepriekšējā solī, un tad tiek rēķināts ātrums nākamajā solī:

$x_{1n+1}=x_{1n}+v_{x1n}*\ \Delta t+\frac{a_{x1n}*(\Delta t)^2}{2}$

$v_{1x,n+1}=v_{x,1,n}+\frac{a_{1,x,n}+a_{1,x,n+1}}{2}\Delta t$, Δt – laika solis

3. Rezultāti

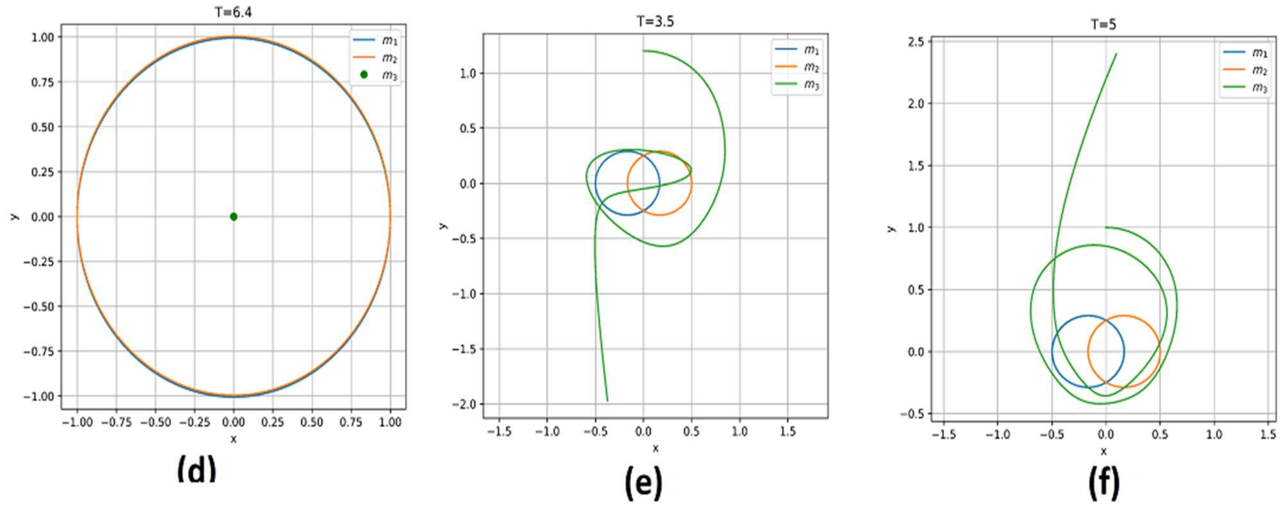
Ar iegūtu kodu tika pārbaudīti un ar dažādu attēlu un animāciju (gif formātā) veidolā iegūti daži vienkāršākie orbītu un trajektoriju tipi, kā arī daži sarežģītāki trajektoriju tipi, kas prasīja ilgāku risināšanas laiku. Visu apskatīto risinājumu parametru vērtības un gif animācijas skatīt Pielikumā.



1.attēls. **Dažādas iegūtās stabilās orbītas (a) Astoņnieka orbīta (b) Planēta ar pavadoni apriņķo zvaigzni (c) Trīs vienādas masas zvaigznes apriņķo kopējo masas centru.**

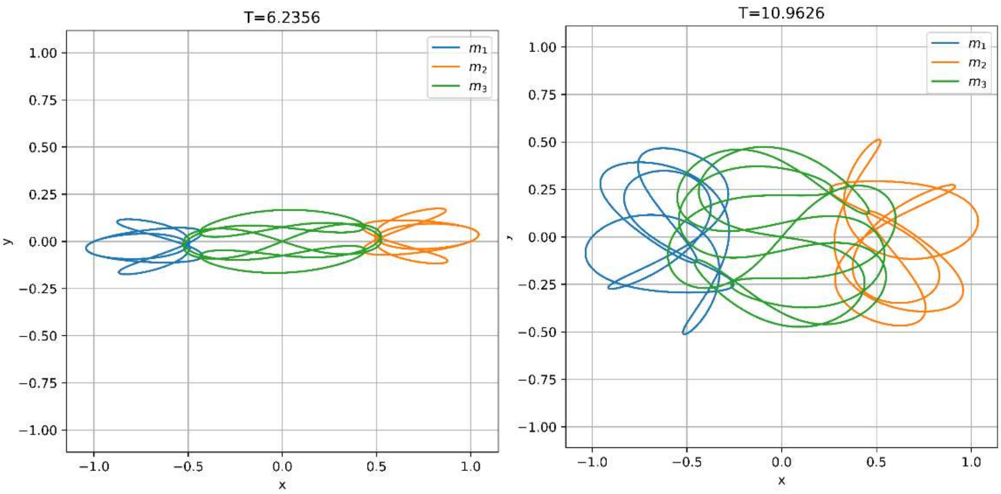
Iegūtais atrisinājums 1. attēlā (a) sakrīt ar risinājumu, kuru 2000. gadā ieguva Ričarda Montgomerija komanda [1][2]. Atrisinājuma (b) fizikālā interpretācija varētu būt kā Saule-Zeme-Mēness sistēma, kas attēlā ir kā m_3,m_1,m_2, kur Mēness apriņķo

Zemi, bet Zeme apriņķo Sauli. Pieņemot, ka pavadoņa gravitācijas ietekme uz planētu ir ļoti maza, to var arī reducēt uz planētas-zvaigznes divu ķermeņu problēmu. (a) atrisinājums aptuveni atbilst intuitīvajam priekšstatam par debess mehāniku. Atrisinājuma (c) fizikālā interpretācija ir kā trīs zvaigžņu sistēma, kuras sākumā novietotas tā, ka tie savstarpēji veido vienādmalu trīsstūri un tādējādi sistēmas masas centrs atrodas trīsstūra smaguma centrā.



2. attēls **Dažādi iegūtie skaitliskie risinājumi (d) Divi mazi ķermeņi apriņķo centrālo ķermeni pa vienu orbītu. (e), (f) Viena ļoti maza ķermeņa mijiedarbība ar dubultķermeņa orbītu pie attiecīgās sākuma pozīcijas x_{03}=1.2, x_{03}=1**

2.attēlā atrisinājuma (d) fizikālā interpretācija ir kā divas mazas planētas, kas riņķo pa to pašu orbītu ap zvaigzni, tikai ar 180 grādu fāzu nobīdi. Vēsturiska analoģija šim varētu būt kādreizējā hipotēze, ka ap Zemes orbītu riņķo t.s. ‘dvīņu planēta’ aiz Saules[3]. Atrisinājumi (e) un (f) atspoguļo to, ka trīs ķermeņu problēmas atrisinājums ir ļoti jutīgs pret sākuma nosacījumiem un nelielas to izmaiņas var novest pie citāda atrisinājuma.



(g) **(h)**

3. attēls. **Dažādi iegūtie risinājumi pēc M. Šuvakov, V. Dmitrašinović iegūtajām parametru vērtībām. (g) – tauriņa orbīta, (h) – "iņ-jaņ orbīta" [4].**

3.attēlā tika mēģināts iegūt divas orbītas saskaņā ar M. Šuvakova un V. Dimitrašinoviča pētījumā iegūtajām parametru vērtībām. Šeit lielu nozīmi izšķīra laika risināšanas solis, kas rezultējās ļoti ilgā risināšanas laikā - (g) gadījumā 30 minūtes, bet (h) gadījumā pat pusotra stunda, tiesa, lielāko daļu laika aizņēma tieši animāciju veidošana.

4. Secinājumi

1. Trīs ķermeņu problēmai piemīt ārkārtīgi daudz atrisinājumu, ka tos īsti nevar aptvert nelielā pētnieciskajā darbā. Lai arī dažiem atrisinājumiem, piemēram, (b), (c), (d), var intuitīvi izprast fizikālo interpretāciju un šos risinājumus var ātri izskaitļot, tad pastāv vesels lērums dažādu risinājumu, kuri ir ārkārtīgi jutīgi pret laika soļa izvēli (g), (h) un parametru vērtībām (e), (f).

2. Izņemot (h), pārējie risinājumi nav skaitliski efekti, jo risinājumi ir pietiekami konverģējuši atkarībā no laika soļa izvēles. Bija svarīgi, lai ne tikai parametri būtu bijuši pietiekami precīzi definēti, bet arī laika solis būtu bijis pietiekami smalks, citādāk iegūtās orbītas varēja būt nestabilas, kas īpaši svarīgi bija (g) un (h). Ar (h) bija ārkārtīgi sarežģīti pārliecināties, vai risinājums ir nokonverģējis, jo laika solis bija tik smalks, ka autora dators bija teju uz 'izdegšanas' robežas lielo ātrumu, koordinātu matricu izmēru, kā arī animāciju veidošanas dēļ. Šī un (g) orbīta bija vienkāršākie risinājumi no

Šuvakova un Dmitrašinoviča pētījuma datiem, tāpēc citu risinājumu iegūšanai derētu izmantot augstākas veiktspējas datoru vai pāriet uz HPC. Tāpat smalkāku risinājumu skaitļošanai derētu tomēr kodu vektorizēt un/vai nepieciešamības gadījumā pāriet uz augstākas kārtas metodēm, piemēram, Runge-Kutta-4 metodi.

3. Šo problēmu ir iespējams tālāk izvērst N-ķermeņu problēmas risināšanā, tikai tad risināmo diferenciālvienādojumu skaits kļūtu vēl lielāks, kas paģērētu vēl vairāk skaitļošanas resursu.

5. Pielikums

1.tabula. **Orbitālie parametri dažādām iegūtajām trajektorijām un orbītām**

	m_1,m_2,m_3	x_1,y_1	x_2,y_2	x_3,y_3	$v_{0x,1},v_{0y,1}$	$v_{0x,2},v_{0y,2}$	$v_{0x,3},v_{0y,3}$	T	dt
a [2]	1,1,1	-1;0	1;0	0;0	0.347111; 0.532728	0.347111; 0.532728	$-2*v0_{x1}$; $-2*v0_{y1}$	6.3	0.01
b	1;0.0001; 100	15;0	14.2;0	0;0	0;2.58	0;1.5	0;0	35.5	0.001
c	1;1;1	1;0	-0.5; $\sqrt{3}/2$	0.5; $\sqrt{3}/2$	-0.5; $\sqrt{3}/2$	1; 0	0.5; $\sqrt{3}/2$	82	0.01
d	0.0001; 0.0001; 1	1;0	-1;0	0;0	1;0	-1;0	0;0	6.4	0.001
e	1;1;0.001	-0.5; 0	0.5; 0	0;1.2	0;-0.5	0;0.5	1;0	3.5	0.001
f	1;1;0.001	-0.5; 0	0.5;0	0;1	0;-0.5	0;0.5	1;0	5	0.001
g [4]	1;1;1	-1;0	1;0	0;0	0.30689; 0.12551	v_{0x1}; v_{0y1}	$-2v_{0x1}$; $-2v_{0y1}$	6.2356	0.000002
h [4]	1;1;1	-1;0	1;0	0;0	0.28270; 0.32721	v_{0x1}; v_{0y1}	$-2v_{0x1}$; $-2v_{0y1}$	10.9626	0.000001

Gif animācijas, attēli un kods:
https://github.com/RaulsPols/Three-body-problem

6. Izmantotā literatūra

1. https://news.ucsc.edu/2019/08/three-body-problem/ [skatīts 25.05.2025.]
2. Ramos, F. P. Stable Closed Orbits – Figure-8, https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~ateckent/vacation_reports/Report_Faustino.pdf [skatīts 25.05.2025.]
3. https://phys.org/news/2015-02-planet-sun.html [skatīts 25.05.2025.]

4. Šuvakov, M., Dmitrašinović, V. Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits, https://arxiv.org/abs/1303.0181 [skatīts 25.05.2025.]