

Individuālais pētnieciskais darbs

Trīs ķermeņu problēma astronomijā

Rauls Polš

Latvijas Universitāte

Rīga, 25.05.2025

1. Teorētiskais pamatojums

N-ķermeņu problēma ir uzdevums klasiskajā mehānikā, kurā ķermeņi ar punktveida masām iedarbojas viens uz otru saskaņā ar Nūtona mehānikas likumiem. Šo problēmu var aplūkot kā kvantu mehānikā, gan elektrodinamikā, taču šajā darbā tieši tiks aplūkota trīs ķermeņu problēma no astronomijas perspektīvas, neietverot tajā kvantu un relatīvistiskos elementus.

Vispirms aplūko divu ķermeņu problēmu divās dimensijās, kur ķermeņus definē ar masām m_1, m_2 . No vienas puses, pirmā ķermeņa paātrinājumu a_1 nosaka 2. Nūtona likums

$$\vec{F}_1 = m_1 a_1$$

No otras puses, ja pirmā ķermeņa tuvumā pieliek vēl otru ķermenī, tad šis pirmais ķermenis izjutīs spēku F :

$$\vec{F}_1 = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

kur r ir rādiusvektors, kuru definē kā $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ un G ir universālā gravitācijas konstante, kuras vērtība ir aptuveni $6.67 * 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$, taču šajā darbā vienkāršības labad pieņemsim par 1, un visus lielumus uzskatīsim par bezdimensionāliem. Pirmās daļīņas potenciālo energiju definē kā

$$V_1 = \frac{G m_1}{r},$$

bet ātrums v nosaka kinētisko energiju, kuru var sadalīt x un y komponentēs:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2)}{2}$$

Atrisinājumus nosaka, cik liela ir kinētiskā energija T , salīdzinājumā ar potenciālo energiju V . Pieņemot, ka viena ķermeņa masa ir daudzreiz mazāka par otrā ķermeņa

masu, divu ķermeņu problēmas atrisinājumi ir būtībā otrs kārtas līnijas – elipse (un tās speciālgadījums riņķa līnija) ($T < V$), parabola ($T = V$) un hiperbola ($T > V$). Kad $T \geq V$, tad daļiņa izklūst no otras daļiņas gravitācijas ietekmes un tās trajektorija ir valēja.

Trīs ķermeņu problēmā tiek doti ķermeņi $i=1,2,3$ ar attiecīgajām masām m_1, m_2, m_3 . Uzskatāmības labad vispirms aplūkosim katru ķermenī atsevišķi. Saskaņā ar 2. Nūtona likumu uz apskatāmo ķermenī iedarbojas divi pārējie ķermeņi ar spēku \vec{F}_1 :

$$\vec{F}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{1,2}|^3}\vec{r}_{1,2} - \frac{Gm_1m_3}{|\vec{r}_{1,3}|^3}\vec{r}_{1,3}$$

un šo gravitācijas mijiedarbības spēki summējas ar noteiktu kopējo paātrinājumu a_1 .

Sadalot paātrinājumu plaknes x un y komponentēs, iegūst

$$a_{1x} = -\left(\frac{Gm_2}{|r_{1,2}|^3}x_{1,2} + \frac{Gm_3}{|r_{1,3}|^3}x_{1,3}\right) \text{ un } a_{1y} = -\left(\frac{Gm_2}{|r_{1,2}|^3}y_{1,2} + \frac{Gm_3}{|r_{1,3}|^3}y_{1,3}\right),$$

kur r nosaka pēc vektora garuma formulas $r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$

Analoģiski iegūst arī paātrinājumu izteiksmes pārējiem diviem ķermeņiem.

Trīs ķermeņu problēmas formulējums būtībā balstās uz divpadsmit diferenciālvienādojumu sistēmu, kas nosaka, kā mainās visu 3 ķermeņu x un y koordinātes laikā t. Šie vienādojumi ir:

$$\begin{cases} v'_{i,x} = a_{i,x} \\ x'_i = v_{i,x} \\ v'_{i,y} = a_{i,y} \\ y'_i = v_{i,y} \end{cases}, i=1,2,3$$

Šo diferenciālvienādojumu sākumnosacījumus uzdod kā $x_i(0), y_i(0), v_{xi}(0), v_{yi}(0)$.

Vienas daļiņas potenciālo enerģiju aprēķina kā

$$V_1 = -\left(\frac{Gm_2}{r_{12}} + \frac{Gm_3}{r_{13}}\right)$$

bet kinētisko enerģiju rēķina tāpat kā divu ķermeņu problēmā. Teorētiski, ja ķermenim izpildās, ka $T \geq V$, tam teorētiski vajadzētu nozīmēt, ka ķermenis izklūst no pārējo divu ķermeņu gravitācijas ietekmes un aizlido prom, tātad tā trajektorija nebūs slēgta, bet valēja.

Uzdevumam par trīs ķermeniem nav vispārīgā analītiskā atrisinājuma, jo lielākai daļai sākumnosacījumu nelielas to izmaiņas var novest pie pavisam citādiem atrisinājumiem, kas klasiskajā mehānikā zināms kā determinītiskais haoss. Taču šo uzdevumu var atrisināt, pielietojot skaitliskās metodes.

2. Metodes

Darbā tika izmantotas Eilera-Kromera un Verlē metode. Nevektorizētā veidolā tās ir vienkārši ieviest un tās ir stabilas, kas nozīmē, ka enerģija skaitliskās risināšanas gaitā neuzkrājas un skaitliskie efekti tiek pēc iespējas minimizēti. Eilera-Kromera metode tika lietota pamatā stabilām orbitām, taču dažu nestabilu trajektoriju gadījumā tika vēl izmantota Verlē metode, ietverot ātruma aprēķinu, lai papildus pārbaudītu risinājuma konvergenci.

Eilera-Kromera metodes pamatā tiek vispirms aprēķināts paātrinājums, tad attiecīgā ķermenē komponentes ātrums nākamajā solī un tad atbilstošā koordinātē nākamajā solī:

$$v_{1x,n+1} = v_{1x,n} - a_{1x,n} * x_n * \Delta t$$

$$x_{1x,n+1} = x_n + v_{1x,n+1} * \Delta t$$

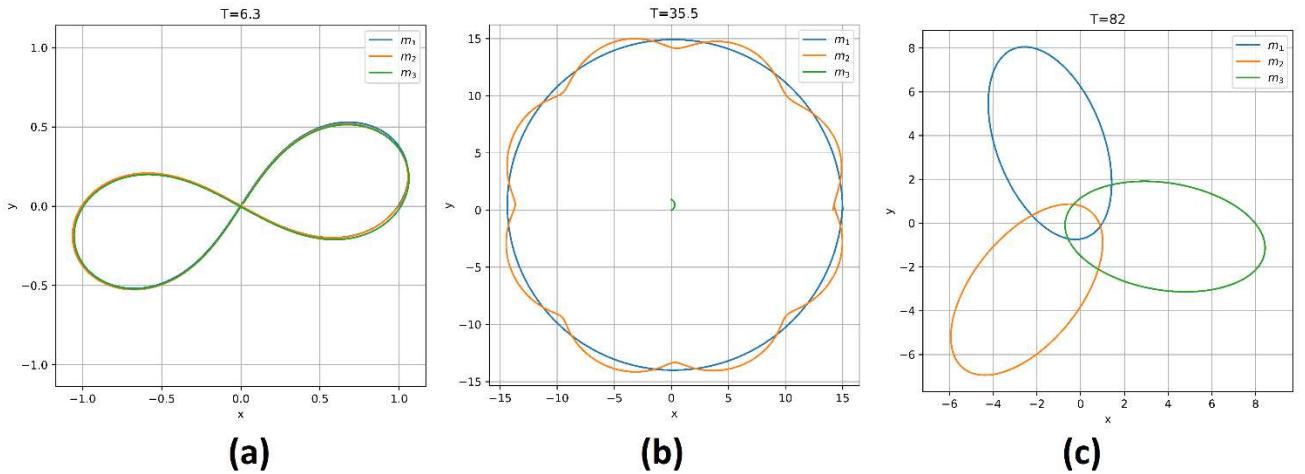
Verlē ātruma metodē vispirms tiek rēķināts paātrinājums, tad atbilstošā ķermenē koordinātē nākamajā solī, zinot tās paātrinājuma komponenti un ātrumu iepriekšējā solī, un tad tiek rēķināts ātrums nākamajā solī:

$$x_{1n+1} = x_{1n} + v_{x1n} * \Delta t + \frac{a_{x1n} * (\Delta t)^2}{2}$$

$$v_{1x,n+1} = v_{x,1,n} + \frac{a_{1x,n} + a_{1x,n+1}}{2} \Delta t, \Delta t - \text{laika solis}$$

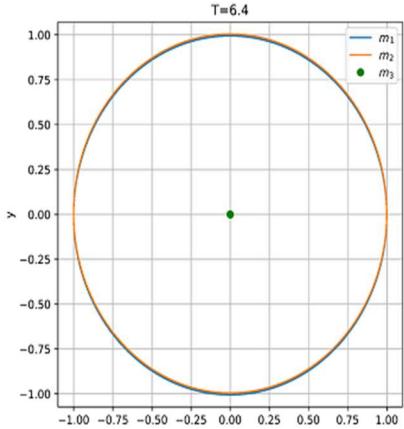
3. Rezultāti

Ar iegūtu kodu tika pārbaudīti un ar dažādu attēlu un animāciju (gif formātā) veidolā iegūti daži vienkāršākie orbītu un trajektoriju tipi, kā arī daži sarežģītāki trajektoriju tipi, kas prasīja ilgāku risināšanas laiku. Enerģijas noteikšanai tika izmantotas vai nu vidējās (slēgtā tipa orbitām), vai vērtības tuvu risināšanas laika beigām (vaļējām trajektorijām). Visu apskatīto risinājumu parametru vērtības un gif animācijas skatīt Pielikumā.

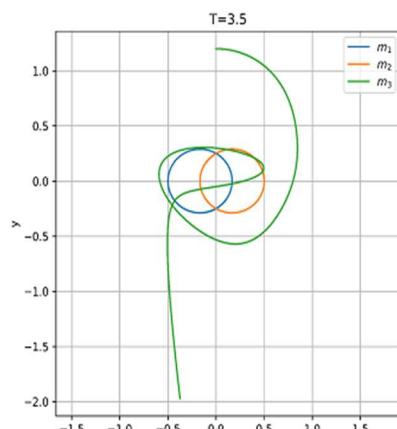


1.attēls. Dažādas iegūtās stabilās orbītas (a) Astonieka orbīta (b) Planēta ar pavadoni aprīņķo zvaigzni (c) Trīs vienādas masas zvaigznes aprīņķo kopējo masas centru.

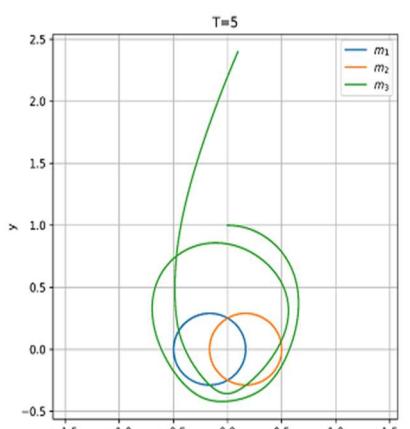
Iegūtais atrisinājums 1. attēlā (a) sakrīt ar risinājumu, kuru 2000. gadā ieguva Ričarda Montgomerija komanda [1][2]. Atrisinājuma (b) fizikālā interpretācija varētu būt kā Saule-Zeme-Mēness sistēma, kas attēlā ir kā m_3, m_1, m_2 , kur Mēness aprīņķo Zemi, bet Zeme aprīņķo Sauli. Pieņemot, ka pavadoņa gravitācijas ietekme uz planētu ir ļoti maza, to var arī reducēt uz planētas-zvaigznes divu ķermeņu problēmu. (a) atrisinājums aptuveni atbilst intuitīvajam priekšstatam par debess mehāniku. Atrisinājuma (c) fizikālā interpretācija ir kā trīs zvaigžņu sistēma, kuras sākumā novietotas tā, ka tie savstarpēji veido vienādmalu trīsstūri un tādējādi sistēmas masas centrs atrodas trīsstūra smaguma centrā. Tika pārbaudīts, vai vidējā kopējā mehāniskā enerģija ir negatīva visiem trim ķermeniem (t.i. $T < V$), un 1. attēla gadījumos tas izpildās, tātad saskaņā arī ar skaitliskajiem aprēķiniem orbītas ir stabīlas un slēgtas.



(d)



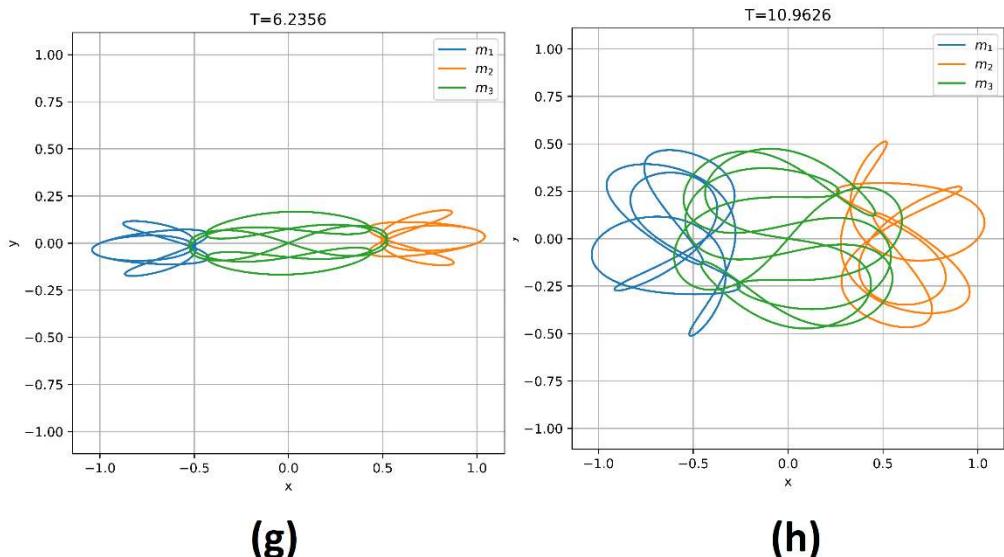
(e)



(f)

2. attēls Dažādi iegūtie skaitliskie risinājumi (d) Divi mazi ķermenī aprīnķo centrālo ķermenī pa vienu orbītu. (e), (f) Viena ļoti maza ķermenē mijiedarbība ar dubultķermenē orbītu pie attiecīgās sākuma pozīcijas $x_{03}=1.2$, $x_{03}=1$

2.attēlā atrisinājuma (d) fizikālā interpretācija ir kā divas mazas planētas, kas riņķo pa to pašu orbītu ap zvaigzni, tikai ar 180 grādu fāzu nobīdi. Vēsturiska analogija šim varētu būt kādreizējā hipotēze, ka ap Zemes orbītu riņķo t.s. ‘dvīņu planēta’ aiz Saules[3]. Atrisinājumi (e) un (f) atspoguļo to, ka trīs ķermenē problēmas atrisinājums ir ļoti jutīgs pret sākuma nosacījumiem un nelielas to izmaiņas var novest pie citāda atrisinājuma. Šeit ar enerģijas pārbaudi veicās dažādi, ja (d) gadījumā kopējā mehāniskā enerģija bija tikai nedaudz zem 0 (kas nozīmē, ka abu divu orbītas ir uz stabilitātes robežas), tad (e) un (f) gadījumos, tā kā 3. ķermenē trajektorija ir nestabila, tad izpildījās, ka laika beigās kinētiskā enerģija kļūst lielāka, un tas aizlido prom. Dubultās sistēmas ķermeniem gan enerģija palika negatīva, kas apstiprina to, ka to orbītas ir stabilas un slēgtas.



3. attēls. Dažādi iegūtie risinājumi pēc M. Šuvakov, V. Dmitrašinovič iegūtajām parametru vērtībām. (g) – tauriņa orbita, (h) – “in-jaņ orbīta” [4].

3.attēlā tika mēģināts iegūt divas orbītas saskaņā ar M. Šuvakova un V. Dimitrašinoviča pētījumā iegūtajām parametru vērtībām. Šeit lielu nozīmi izšķīra laika risināšanas solis, kas rezultējās ļoti ilgā risināšanas laikā - (g) gadījumā 30 minūtes, bet (h) gadījumā pat pusotra stunda, tiesa, lielāko daļu laika aizņēma tieši animāciju veidošana. Abos divos gadījumos kopējā mehāniskā enerģija kopumā visiem ķermeņiem saglabājas negatīva, kas nozīmē, ka to orbītas paliek slēgtas risināšanas laikā.

4. Secinājumi

1. Trīs ķermeņu problēmai piemīt ārkārtīgi daudz atrisinājumu, ka tos īsti nevar aptvert nelielā pētnieciskajā darbā. Lai arī dažiem atrisinājumiem, piemēram, 1. attēlā (b), (c), 2. attēlā (d), var intuitīvi izprast fizikālo interpretāciju un šos risinājumus var ātri izskaitīt, tad pastāv vesels lērums dažādu risinājumu, kuri ir ārkārtīgi jutīgi pret laika sola izvēli: 3. attēla (g), (h), un parametru vērtībām: 2.,3.attēla (e), (f), (g), (h).

2. Izņemot (h), pārējie risinājumi nav skaitliski efekti, jo risinājumi ir pietiekami konverģējuši atkarībā no laika sola izvēles un izpildījās, ka $T < V$ pie stabilām orbītām un $V > T$ pie valējām ķermēņu trajektorijām. Bija svarīgi, lai ne tikai parametri būtu bijuši pietiekami precīzi definēti, bet arī laika solis būtu bijis pietiekami smalks, citādāk iegūtie risinājumi būtu bijuši valējas trajektorijas, kas īpaši svarīgi bija 3. attēlā (g) un

(h). Ar (h) bija ārkārtīgi sarežģīti pārliecināties, vai risinājums ir nokonverģējis, jo laika solis bija tik smalks, ka autora dators bija teju uz ‘izdegšanas’ robežas lielo ātrumu, koordinātu matricu izmēru, kā arī animāciju veidošanas dēļ. Šī un (g) orbīta bija vienkāršākie risinājumi no Šuvakova un Dmitrašinoviča pētījuma datiem, tāpēc citu risinājumu iegūšanai derētu izmantot augstākas veiktspējas datoru vai pāriet uz HPC. Tāpat smalkāku risinājumu skaitlošanai derētu tomēr kodu vektorizēt un/vai nepieciešamības gadījumā pāriet uz augstākas kārtas metodēm, piemēram, Runge-Kutta-4 metodi.

3. Šo problēmu ir iespējams tālāk izvērst N-ķermeņu problēmas risināšanā, tikai tad risināmo diferenciālvienādojumu skaits kļūtu vēl lielāks, kas paģērētu vēl vairāk skaitlošanas resursu.

5. Pielikums

1.tabula. Orbitālie parametri dažādām iegūtajām trajektorijām un orbītām

	m_1, m_2, m_3	x_1, y_1	x_2, y_2	x_3, y_3	$v_{0x,1}, v_{0y,1}$	$v_{0x,2}, v_{0y,2}$	$v_{0x,3}, v_{0y,3}$	T	dt
a [2]	1,1,1	-1;0	1;0	0;0	0.347111; 0.532728	0.347111; 0.532728	-2*v _{0x1} ; -2*v _{0y1}	6.3	0.01
b	1;0.0001; 100	15;0	14.2;0	0;0	0;2.58	0;1.5	0;0	35.5	0.001
c	1;1;1	1;0	-0.5; $\sqrt{3}/2$	0.5; $\sqrt{3}/2$	-0.5; $\sqrt{3}/2$	1; 0	0.5; $\sqrt{3}/2$	82	0.01
d	0.0001; 0.0001; 1	1;0	-1;0	0;0	1;0	-1;0	0;0	6.4	0.001
e	1;1;0.001	-0.5; 0	0.5; 0	0;1.2	0;-0.5	0;0.5	1;0	3.5	0.001
f	1;1;0.001	-0.5; 0	0.5;0	0;1	0;-0.5	0;0.5	1;0	5	0.001
g [4]	1;1;1	-1;0	1;0	0;0	0.30689; 0.12551	v _{0x1} ; v _{0y1}	-2v _{0x1} ; -2v _{0y1}	6.2356	0.000002
h [4]	1;1;1	-1;0	1;0	0;0	0.28270; 0.32721	v _{0x1} ; v _{0y1}	-2v _{0x1} ; -2v _{0y1}	10.9626	0.000001

Gif animācijas, attēli un kods:

<https://github.com/RaulsPols/Three-body-problem>

6. Izmantotā literatūra

1. <https://news.ucsc.edu/2019/08/three-body-problem/> [skatīts 25.05.2025.]
2. Ramos, F. P. Stable Closed Orbits – Figure-8,
https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~ateckent/vacation_reports/Report_Faustino.pdf [skatīts 25.05.2025.]
3. <https://phys.org/news/2015-02-planet-sun.html> [skatīts 25.05.2025.]
4. Šuvakov, M., Dmitrašinović, V. Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits, <https://arxiv.org/abs/1303.0181> [skatīts 25.05.2025.]