

DFT / FFT

Correction: i & j are 0-indexed

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \omega^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$b_i = \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{ij} \cdot a_j = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^{ij} a_j + \sum_{j=\frac{m}{2}}^{m-1} \omega^{ij} \cdot a_j$$

$$\sum_{j=\frac{m}{2}}^{m-1} \omega^{ij} a_j = \sum_{j'=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^{i(j'+\frac{m}{2})} \cdot a_{j'+\frac{m}{2}}$$

$$= \omega^{\frac{m}{2}i} \sum_{j'=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^{ij'} \cdot a_{j'+\frac{m}{2}}$$

$$b_i = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^{ij} \cdot a_j + \omega^{\frac{m}{2}i} \cdot \sum_{j'=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^{ij'} \cdot a_{j'+\frac{m}{2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^{ij} \cdot a_j + (-1)^i \sum_{j'=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^{ij'} \cdot a_{j'+\frac{m}{2}}$$

If i is even : Say $i = 2p$

$$b_i = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^2)^{pj} \cdot a_j + \sum_{j'=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^2)^{pj'} \cdot a_{j'+\frac{m}{2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^2)^{pj} (a_j + a_{j+\frac{m}{2}})$$

Else $i = 2p+1$

$$b_i = \left(\sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^2)^{pj} \cdot a_j \cdot \omega^j \right) - \left(\sum_{j'=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^2)^{pj'} \cdot a_{j'+\frac{m}{2}} \cdot \omega^{j'} \right)$$

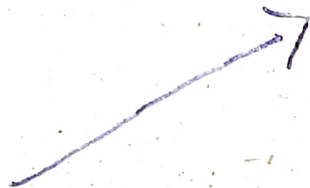
$$= \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^2)^{pj} \cdot \omega^j \cdot (a_j - a_{j+\frac{m}{2}})$$

$$V_e = \begin{bmatrix} a_0 + a_{\frac{m}{2}} \\ a_1 + a_{\frac{m}{2}+1} \\ \vdots \\ a_{\frac{m}{2}-1} + a_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$V_o = \begin{bmatrix} (a_0 - a_{\frac{m}{2}}) \\ \omega (a_1 - a_{\frac{m}{2}+1}) \\ \vdots \\ \omega^{\frac{m}{2}-1} (a_{\frac{m}{2}-1} - a_{m-1}) \end{bmatrix}$$

Therefore,

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-2} \end{bmatrix} = \text{DFT}_{\frac{m}{2}}(v_e)$$



$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix} = \text{DFT}_{\frac{m}{2}}(v_o)$$