DFT / FFT

Correction : i & j are 0-indexed

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & | & \\ — & \omega^{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$b_i = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij} \cdot a_j = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{ij} a_j + \sum_{j=\frac{n}{2}}^{n-1} \omega^{ij} \cdot a_j$$

$$\sum_{j=\frac{n}{2}}^{n-1} \omega^{ij} a_j = \sum_{j'=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{i(j'+\frac{n}{2})} \cdot a_{j'+\frac{n}{2}}$$

$$= \omega^{\frac{n}{2}i} \sum_{j'=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{i \cdot j'} \cdot a_{j'+\frac{n}{2}}$$

$$b_i = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{ij} \cdot a_j + \omega^{\frac{n}{2}i} \cdot \sum_{j'=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{ij'} \cdot a_{j'+\frac{n}{2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{ij} \cdot a_j + (-1)^i \cdot \sum_{j'=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega^{i \cdot j'} \cdot a_{j'+\frac{n}{2}}$$

If i is even : Say $i = 2p$

$$b_i = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (\omega^2)^{p \cdot j} \cdot a_j + \sum_{j'=0}^{\frac{n}{2}-1} (\omega^2)^{p \cdot j'} \cdot a_{j' + \frac{n}{2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (\omega^2)^{pj} \left(a_j + a_{j+\frac{n}{2}}\right)$$

Else $i = 2p+1$

$$b_i = \left(\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (\omega^2)^{pj} \cdot a_j \, \omega^j \right) - \left(\sum_{j''=0}^{\frac{n}{2}-1} (\omega^2)^{pj''} \cdot a_{j''+\frac{n}{2}} \cdot \omega^{j''} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} (\omega^2)^{pj} \cdot \omega^j \cdot \left(a_j - a_{j+\frac{n}{2}}\right)$$

$$v_e = \begin{bmatrix} a_0 + a_{\frac{n}{2}} \\ a_1 + a_{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ a_{\frac{n}{2}-1} + a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad v_o = \begin{bmatrix} (a_0 - a_{\frac{n}{2}}) \\ \omega\,(a_1 - a_{\frac{n}{2}+1}) \\ \vdots \\ \omega^{\frac{n}{2}-1}\left(a_{\frac{n}{2}-1} - a_{n-1}\right) \end{bmatrix}$$

Therefore,

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow & \begin{bmatrix} b_0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \end{bmatrix} = DFT_{\frac{n}{2}}(v_e) \\ \\ \searrow & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = DFT_{\frac{n}{2}}(v_o) \end{matrix}$$