Métodos Numéricos Computacionais - P1 ①

Arthur Francisco Ramos - RA: 201025401

① a) $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ representa o erro absoluto, logo a distância entre um resultado e um resultado anterior.

b) $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{máx(|x_{k+1}|, 1)} < \varepsilon$ representa, em casos onde x_{k+1} é maior que 1, o erro relativo, logo a distância entre dois resultados, porém em relação a um deles, nesse caso o x_{k+1}. Quando x_{k+1} é menor que 1, a desigualdade representa o erro absoluto entre os dois resultados.

② $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{(x+h)^3 - 10 - [(x-h)^3 - 10]}{2h}$

h	$f'(x)$	$\lvert f'_k(x) - f'_{k-1}(x)\rvert$
1	$(3+1)^3 - 10 - [(3-1)^3 - 10]/2 = 28$	
0,5	$(3+0,5)^3 - 10 - [3-0,5)^3 - 10]/2 = 27,25$	0,75
0,25	$(3+0,25)^3 - 10 - [3-0,25)^3 - 10]/2 = 27,0625$	0,1875
0,125	$(3+0,125)^3 - 10 - [3-0,125)^3 - 10]/2 = 27,0156$	0,0469

Como $0,0469 < \varepsilon$, 27.0156 é uma boa aproximação para $f'(3)$.

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2} =$$ (2)

$$= \frac{(x+2h)^3 - 10 - 2(x^3-10) + (x-2h)^3 - 10}{4h^2}$$

h	$f''(x)$
1	$\frac{(3+2)^3 - 10 - 2(27-10) + (3-2)^3 - 10}{4} = 18$
0,5	$\frac{(3+1)^3 - 44 + (3-1)^3 - 10}{1} = 18$

Como $|f''_k - f''_{k-1}| = |18 - 18| = 0 < \varepsilon$, 18 é uma boa aproximação para $f''(3)$.

(3) $f(x) = x_1^2 + 5x_2 \quad x^* = (1,1) \quad \varepsilon = 0,1 \quad h = 1$

$$f'_{x_1} = \frac{(1+h)^2 + 5 - [(1-h)^2 + 5]}{2h}$$

$$f'_{x_2} = \frac{1 + 5(1+h) - [1 + 5(1-h)]}{2h}$$

f'_{x_1}:

h	f'_{x_1}
1	$(1+1)^2 + 5 - [(1-1)^2 + 5]/2 = 2$
0,5	$(1+0,5)^2 + 5 - [(1-0,5)^2 + 5]/1 = 2$

$\Big\}$ $0 < \varepsilon$, 2 é boa aprox. de $f'_{x_1}(1,1)$.

f'_{x_2}

h	f'_{x_2}
1	$1+5(1+1) - [1+5(1-1)]/2 = 5$
0,5	$1+5(1+0,5) - [1+5(1-0,5)]/1 = 5$

$\}$ $0 < \varepsilon$, 5 é boa aprox. de $f'_{x_2}(1,1)$//

$\therefore$ O vetor gradiente de $f(1,1) =$

i	$f'_i(1,1)$
1	2
2	5

Onde $f'_{x_1}(1,1) = 2$ e $f'_{x_2}(1,1) = 5$.

4) $f(x) = x^3 - 9x + 3$ $\quad \Delta = 0,5$

x	$f(x)$
-4	$(-4)^3 - 9.(-4) + 3 = -25$
-3,5	$(-3,5)^3 - 9.(-3,5) + 3 = -8,375$
-3	$(-3)^3 - 9(-3) + 3 = 3$
-2,5	$(-2,5)^3 - 9(-2,5) + 3 = 9,875$
-2	$(-2)^3 - 9(-2) + 3 = 13$
-1,5	$(-1,5)^3 - 9(-1,5) + 3 = 13,125$
-1	$(-1)^3 - 9(-1) + 3 = 11$
-0,5	$(-0,5)^3 - 9.(-0,5) + 3 = 7,375$
0	$0^3 - 9.0 + 3 = 3$
0,5	$0,5^3 - 9.0,5 + 3 = -1,375$
1	$1^3 - 9.1 + 3 = -5$

1,5	$1{,}5^3 - 9 \cdot 1{,}5 + 3 = -7{,}125$
2	$2^3 - 9 \cdot 2 + 3 = -7$
2,5	$2{,}5^3 - 9 \cdot 2{,}5 + 3 = -3{,}875$
3	$3^3 - 9 \cdot 3 + 3 = 3$
3,5	$3{,}5^3 - 9 \cdot 3{,}5 + 3 = 14{,}375$
4	$4^3 - 9 \cdot 4 + 3 = 31$

$\Rightarrow$ Existem raízes nos intervalos:

- $[-3{,}5; -3]$ (1)
- $[0; 0{,}5]$ (2)
- $[2{,}5; 3]$ (3)

5

X	f(x)
-3,5	$(-3{,}5)^3 - 9 \cdot (-3{,}5) + 3 = -8{,}375$
-3,4	$(-3{,}4)^3 - 9(-3{,}4) + 3 = -5{,}704$
-3,3	$(-3{,}3)^3 - 9 \cdot (-3{,}3) + 3 = -3{,}237$
-3,2	$(-3{,}2)^3 - 9(-3{,}2) + 3 = -0{,}968$
-3,1	$(-3{,}1)^3 - 9(-3{,}1) + 3 = 1{,}109$
-3	$(-3)^3 - 9(-3) + 3 = 3$

A raiz está no intervalo $[-3{,}2; -3{,}1]$, logo uma boa aproximação é: $-3{,}15$

$$\frac{(-3{,}1) + (-3{,}2)}{2} = \frac{-6{,}3}{2} = -3{,}15$$

6) $f(x) = x^3 - 10$ $[1,3]$ $\varepsilon = 0,1$

a	p	b	f(a)	f(p)
1	1,5	3	-9	-6,625
1,5	2,25	3	-6,625	1,390
1,5	1,875	2,25	-6,625	-3,408
1,875	2,0625	2,25	-3,408	-1,226
2,0625	2,15625	2,25	-1,226	0,025
2,0625	—	2,15625	—	—

Como $2,15625 - 2,0625 < 0,1$, 2,15625 é uma boa aprotimação para a raiz de f(x) em [1,3] com f(2,15625) = 0,025.

7) $f(x) = x^3 - 10$ $[1,3]$ $\varepsilon = 0,1$

a	p	b	f(a)	f(p)
1	1,6923	3	-9	-5,1535
1,6923	1,9965	3	-5,1535	-2,0419
1,9965	2,10411	3	-2,0419	-0,68451
2,10411	2,13879	3	-0,68451	-0,21627
2,13879	2,14961	3	-0,21627	-0,06703

Ao longo de algumas iterações 'b' se mantem constante, porem $|f(p)| < 0,1$, logo p é uma boa aprox. da raiz, ∴ 2,14961.

8 $f(x) = x^3 - 10 \quad [1,3] \quad \varepsilon = 0,1$

$f'(x) = 3x^2 \qquad p = a(1)$

p	q	$f(x)$	$f'(x)$	$\lvert p - q \rvert$
1	—	-9	3	—
4	1	54	48	3
2,875	4	13,7637	24,7968	1,125
2,3199	2,875	2,4855	16,1458	0,5551
2,16595	2,3199	0,16120	14,07401	0,15395
2,15449	2,16595	-0,00048	13,92431	0,01146

Como $\lvert p - q \rvert < 0,1$, p é uma boa aproximação para a raiz de $f(x)$ no intervalo $[1,3]$, logo: 2,15449