Exemplos resolvidos de parte do conteúdo da segunda prova **Leia recado importante no final do texto**

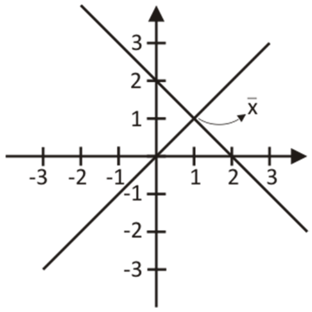
[1] Dado o sistema de equações lineares ao lado, desenhe suas equações, resolva o sistema por qualquer método e interprete a solução.

$$\begin{cases} 1.x_1 + 1.x_2 = 2 \\ 1.x_1 - 1.x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) desenhe
Definindo 2 pontos para cada equação para traçar as retas:

Equação 1
x_1=0, x_2 = 2. x_2=0, x_1=2.

Equação 2
x_1=0, x_2 = 0. x_2=1, x_1=1.



(b) resolva
Somando as duas equações:

$2.x_1 + 0.x_2 = 2$

Então $x_1 = 1$

Aplicando x_1 = 1 na primeira equação, x_2 = 1.

(c) interprete
A solução $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é o ponto que satisfaz as duas equações simultaneamente, ou seja, é a solução do sistema ou, ainda, é a raiz do sistema.

Perceberam que a solução tem 3 partes? Não há necessidade de ser infantil e escrever (a) desenhe, (b) resolva e (c) interprete, mas é necessário fazer 3 partes para resolver o que foi solicitado na questão.

[2] Considere o Método de Gauss que transforma o sistema de equações lineares em um sistema equivalente triangular superior e resolva o sistema ao lado.

$$\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 12 \\ 1.x_1 - 3.x_2 - 1.x_3 = -3 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \boxed{1} & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{1}{2}$, $L_2 = L_2 - m.L_1$

```
 1-1/2. 2= 0
-3-1/2. 4=-5
-1-1/2. 6=-4
-3-1/2.12=-9
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -4 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{2}{2} = 1$, $L_3 = L_3 - m.L_1$

```
2-1. 2= 0
1-1. 4=-3
1-1. 6=-5
4-1.12=-8
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & \boxed{-3} & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$, $L_3 = L_3 - m.L_2$

```
 0-3/5. 0= 0
-3-3/5.-5= 0
-5-3/5.-4=-13/5
-8-3/5.-9=-13/5
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -13/15 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -13/15 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{\frac{-13}{5}}{\frac{-13}{5}} = 1$$

$$x_2 = \frac{-9 - (-4.1)}{-5} = 1$$

$$x_1 = \frac{12 - 4.1 - 6.1}{2} = 1$$

[3] Considere o Método de Gauss que transforma o sistema de equações lineares em um sistema equivalente triangular superior e resolva o sistema ao lado. Se não for possível, informe o motivo.

$$\begin{cases} 2.x_1 + 4.x_2 + 6.x_3 = 12 \\ 1.x_1 + 2.x_2 - 1.x_3 = 2 \\ 4.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \boxed{1} & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{1}{2}$, $L_2 = L_2 - m.L_1$

```
 1-1/2. 2= 0
 2-1/2. 4= 0
-1-1/2. 6=-4
 2-1/2.12=-4
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ \boxed{4} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{2}{2} = 2$, $L_3 = L_3 - m.L_1$

```
4-2. 2=  0
1-2. 4= -7
1-2. 6=-13
6-2.12=-18
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{-7} & -13 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{-7}{0}$, Impossível

O pivô a_{22} é nulo.

Portanto o multiplicador m não pode ser definido.

É fácil ver que a solução é x_1=1, x_2=2 e x_3=1, mas o determinante da matriz do sistema é nulo e não é possível a solução com este método.

[4] Resolva o problema anterior pelo Método de Gauss com Pivotamento Parcial, com trocas de linhas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

O pivô natural da coluna 1 é a_{11}=2. Porém, deve ser o maior elemento em módulo a coluna 1 a partir da diagonal. máx {2, 1, 4} = 4. Então, troca-se a linha 1 com a linha 3.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{1}{4}$, $L_2 = L_2 - m.L_1$

```
 1-1/4.4= 0
 2-1/4.1= 7/4
-1-1/4.1=-5/4
 2-1/4.6= 2/4
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7/4 & -5/4 \\ \boxed{2} & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2/4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $L_3 = L_3 - m.L_1$

```
 2-1/2.4= 0
 4-1/2.1= 7/2
 6-1/2.1=11/2
12-1/2.6=18/2
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7/4 & -5/4 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2/4 \\ 18/2 \end{pmatrix}$$

O pivô natural da coluna 2 é a_{22}=7/4. Porém, deve ser o maior elemento em módulo a coluna 2 a partir da diagonal. máx {7/4, 7/2} = 7/2. Então, troca-se a linha 2 com a linha 3.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & \boxed{7/4} & -5/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 18/2 \\ 2/4 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{7/4}{7/2} = 1/2$, $L_3 = L_3 - m.L_2$

```
 0  -1/2. 0  = 0
 7/4-1/2. 7/2= 0
-5/4-1/2.11/2=-16/4
 2/4-1/2.18/2=-16/4
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & -16/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 18/2 \\ -16/4 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{\frac{-16}{4}}{\frac{-16}{4}} = 1$$

$$x_2 = \frac{\frac{18}{2} - \frac{11}{2}.1}{\frac{7}{2}} = 1$$

$$x_1 = \frac{6 - 1.1 - 1.1}{4} = 1$$

A solução do sistema é

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[5] Considere o sistema de equações lineares A.x=b, com $A \in R^{n\times n}$, $x \in R^n$ e $b \in R^n$. Considere a decomposição L.U com L triangular inferior e U triangular superior e as substituições L.U.x=b, y=U.x, L.y=b e U.x=y, que resolvem o sistema. Com este método, resolva o sistema que segue e calcule o determinante da matriz A.

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 = 2 \\ 1.x_1 + 10.x_2 + 2.x_3 = 13 \\ -1.x_1 + 2.x_2 + 4.x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando 1ª linha de U

$a_{11} = 1.u_{11} + 0.0 + 0.0 \qquad u_{11} = a_{11} = 2$

$a_{12} = 1.u_{12} + 0.u_{22} + 0.0 \qquad u_{12} = a_{12} = 1$

$a_{13} = 1.u_{13} + 0.u_{23} + 0.u_{33} \qquad u_{13} = a_{13} = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando 1ª coluna de L

$a_{21} = l_{21}.2 + 1.0 + 0.0 \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{2} = \frac{1}{2}$

$a_{31} = l_{31}.2 + l_{32}.0 + 0.0 \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando 2ª linha de U

$a_{22} = \frac{1}{2}.1 + 1.u_{22} + 0.0 \qquad u_{22} = a_{22} - \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$

$a_{23} = \frac{1}{2}.(-1) + 1.u_{23} + 0.u_{33} \qquad u_{23} = a_{23} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 19/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando 2ª coluna de L

$a_{32} = -\frac{1}{2}.1 + l_{32}.\frac{19}{2} + 1.0 \qquad l_{32} = \frac{a_{32} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{19}{2}} = \frac{5}{19}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 5/19 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 19/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando 3ª linha de U

$a_{33} = -\frac{1}{2}.(-1) + \frac{5}{19}.\frac{5}{2} + 1.u_{33} \qquad u_{33} = a_{33} - \left(-\frac{1}{2}.-1\right) - \frac{5}{19}.\frac{5}{2} = \frac{54}{19}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 5/19 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 19/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 54/19 \end{bmatrix}$$

Após a decomposição A=L.U resolve-se:

- L.y=b, obtendo-se y
- U.x=y, obtendo-se x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 5/19 & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 2 / 1 = 2$

$y_2 = (13 - 1 / 2.2) / 1 = 12$

$y_3 = (5 - (-1 / 2.2) - 5 / 9.12) / 1 = 54 / 19$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 19/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 54/19 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 54/19 \end{pmatrix}$$

$x_3 = (54 / 19) / (54 / 19) = 1$

$x_2 = (12 - 5 / 2.1) / (19 / 2) = 1$

$x_1 = (2 - 1.1 - (-1.1)) / 2 = 1$

[6] Considere o sistema de equações lineares A.x=b. Considere A=D+R, onde Dé a matriz formada pela diagonal de A, com todos os outros elementos nulos e D seja formada pelos elementos restantes, com a diagonal nula. Desenvolva o método proposto por Jacobi e escreva o algoritmo.

(a) desenvolvimento

A.x = b, A = D+R.

Então (D+R).x = b, D.x + R.x = b, D.x = b - R.x, $x = D^{-1}.(b - R.x)$.

Iterativamente, $x^{k+1} = D^{-1}.(b - R.x^k)$.

Para cada linha do sistema, tem-se

$$x^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}.\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}.x_j^k\right), i = 1,2,\ldots,n.$$

Como o método é iterativo, a solução será aceita quando $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon$.

Além disto, o número de iterações deve ser controlado.

(b) algoritmo

```
Dados n, A, b, xInicial, ε, LimiteIteracao
// Iterações do Método
// A solução será x e, a cada iteração, xInicial
// recebe x calculado e calcula-se um novo x
Iteracao = 0
Repetir indefinidamente
  Incrementar Iteracao
  Se Iteracao > LimiteIteracao
    informar e sair do procedimento
  Para i = 1, ..., n faça
    soma = 0
    Para j = 1, ..., n faça
      Se j ≠ i então
        soma = soma+aij.xInicialj
    xi = (bi-soma)/aii
  Norma = 0
  Para k = 1, ..., n faça
    Norma = Norma+(xi-xIniciali)²
  Norma = RaizQuadrada(Norma)
  Se Norma < ε então
    interromper repetição // solução foi encontrada
  Para i = 1, ..., n faça
    xIniciali = xi
Apresentar solução x
```

[7] Resolva o sistema de equações lineares ao lado, utilizando o Método de Gauss-Seidel, partindo da estimativa de solução $x^T = (0\ 0\ 0)$, com precisão $\varepsilon = 10^{-2}$ e, com no máximo, 3 iterações.

$$\begin{cases} 5.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 = 4 \\ 1.x_1 + 6.x_2 + 2.x_3 = 19 \\ -1.x_1 + 2.x_2 + 4.x_3 = 15 \end{cases}$$

Reescrevendo-se o sistema, tem-se:

$x_1 = (\ 4 - 1.x_2 + 1.x_3)\ /\ 5$

$x_2 = (19 - 1.x_1 - 2.x_3)\ /\ 6$

$x_3 = (15 + 1.x_1 - 2.x_2)\ /\ 4$

No Método de Gauss-Seidel, inicia-se com o valor inicial de x e, para cada nova linha, o vetor já é atualizado com x_i já calculado. Então, calcula-se x_1 com x_2 e x_3 inicial. A seguir, calcula-se x_2 com x_1 atualizado e x_3 inicial. Finalmente, calcula-se x_3 com x_1 e x_2 atualizados.

	X^0	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6	X^7
$x_1 = (\ 4 - 1.x_2 + 1.x_3)\ /\ 5$	0	0,8	0,68	0,911333	0,971022	0,990795	0,997062	0,999063
$x_2 = (19 - 1.x_1 - 2.x_3)\ /\ 6$	0	3,033333	2,242222	2,081815	2,025854	2,008258	2,002633	2,00084
$x_3 = (15 + 1.x_1 - 2.x_2)\ /\ 4$	0	2,433333	2,798889	2,936926	2,979828	2,99357	2,997949	2,999346

Norma $\|\| X^{k+1}-X^k \|\|$		3,970166523	0,879708846	0,313528102	0,092384859	0,029822915	0,009492173	0,003028292
				3 iterações			Norma < ε	

A solução com 3 iterações é $X = (0{,}911333\ \ 2{,}081815\ \ 2{,}936926)^T$. Com muitas iterações chega-se ao valor correto $X = (1\ 2\ 3)^T$.

[8] Calcule a matriz inversa da matriz A que segue.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando o Método de decomposição de Gauss, para 3 vetores b simultaneamente, onde cada vetor b, pela ordem, é uma coluna da matriz identidade. Assim, as 3 soluções do sistema formarão as 3 colunas da inversa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{1}{2}$, $L_2 = L_2 - m.L_1$

```
1-1/2.2 =  0
1-1/2.0 =  1
0-1/2.1 = -1/2
0-1/2.1 = -1/2
1-1/2.0 =  1
0-1/2.0 =  0
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{1}{2}$, $L_3 = L_3 - m.L_1$

```
1-1/2.2 =  0
0-1/2.0 =  0
1-1/2.1 =  1/2
0-1/2.1 = -1/2
0-1/2.0 =  0
1-1/2.0 =  1
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & \boxed{0} & 1/2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$m = \frac{0}{1} = 0$, $L_3 = L_3 - m.L_2$

```
 0  +0. 0   =  0
 0  +0. 1   =  0
 1/2+0.-1/2 =  1/2
-1/2+0.-1/2 = -1/2
 0  +0. 1   =  0
 1  +0. 0   =  1
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com o sistema triangular superior, podem-se obter 3 soluções para os 3 vetores b.

Na última iteração, a_{32} já era zero e, portanto, m = 0. Ninguém deve gastar tempo para fazer um pivotamento desnecessário ao resolver o problema manualmente.

$$x_3 = \frac{-1/2}{1/2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-1/2 - (-1/2.-1)}{1} = -1$$

$$x_1 = \frac{1 - (0.-1) - (1.-1)}{2} = 1$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{0}{1/2} = 0$$

$$x_2 = \frac{1 - (-1/2.0)}{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{0 - 0.1/2 - 1.0}{2} = 0$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$x_2 = \frac{0 - (-1/2.2)}{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{0 - 0.1 - 1.2}{2} = -1$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Apenas como verificação, pode-se fazer $A.A^{-1}$ e, se estiver correto, obtém-se a matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ATENÇÃO

Estes exemplos foram feitos para ajudá-lo a estudar.

Espera-se que você reproduza os exemplos, refazendo todos os cálculos.

Se encontrar algum erro de cálculo, basta corrigir e, caso queira, me informe.

É possível que existam erros de cálculo, pois fiz todos mentalmente, enquanto digitava o texto.

Note que escrevi todas as equações exatamente para não utilizar calculadora ao desenvolver o texto.

Em resumo, foi feito para ajudar e se estiver atrapalhando, interrompa a leitura e não utilize este texto.