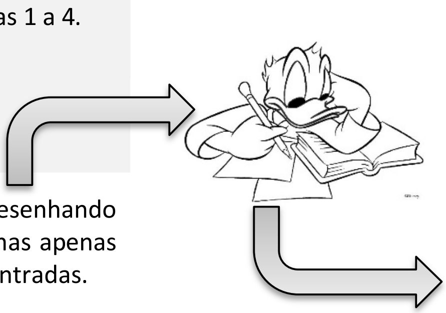
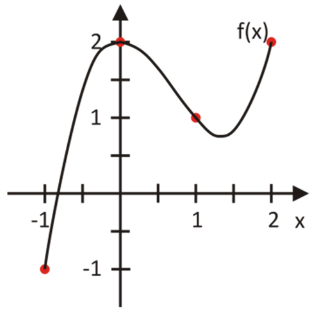
Exemplos resolvidos de parte do conteúdo da terceira prova **Leia recado importante no final do texto**

Considere a série de dados tabelada a seguir para os problemas 1 a 4.

x	-1	0	1	2
f(x)	-1	2	1	2





Um aluno esperto fez um gráfico, marcando os 4 pontos e desenhando uma curva sem se preocupar em fazer uma figura perfeita, mas apenas para ter ideia do formato da curva e conferir as soluções encontradas.

[1] Desenvolva o polinômio interpolador por Sistema Linear e determine o valor de f(-0,5), f(0,5) e f(1,5).

A solução é dada pelo sistema

$$\begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Com os valores dados fica

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

m = 1/1 = 1, $L_2 = L_2 - m.L_1$

m = 1/1 = 1, $L_3 = L_3 - m.L_1$

m = 1/1 = 1, $L_4 = L_4 - m.L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

m = 2/1 = 2, $L_3 = L_3 - m.L_2$

m = 3/1 = 3, $L_4 = L_4 - m.L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

m = 6/2 = 3, $L_4 = L_4 - m.L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Por retrosubstituição calcula-se x_4, x_3, x_2 e x_1 que serão a_3, a_2, a_1, a_0

$$a_3 = \frac{6}{6} = 1$$

$$a_2 = \frac{-4 - (-0.1)}{2} = -2$$

$$a_1 = \frac{3 + 2.(-2) - 1.1}{1} = 0$$

$$a_0 = \frac{-1 - (-1).0 - 1.(-2) - (-1).1}{1} = 2$$

$p_3(x)=a_0+a_1.x+a_2.x^2+a_3.x^3$

$p_3(x)=2+0.x-2.x^2+1.x^3$

$p_3(-0,5) = 2+0.(-0,5)-2.(-0,5)^2+1.(-0,5)^3 = 1,375$

$p_3(0,5) = 2+0.0,5-2.0,5^2+1.0,5^3 = 1,625$

$p_3(1,5) = 2+0.1,5-2.1,5^2+1.1,5^3 = 0,875$

[2] Desenvolva o polinômio interpolador de Newton e determine o valor de f(-0,5), f(0,5) e f(1,5).

A solução é dada pelos coeficientes $\Delta^k y_0$ da tabela das diferenças divididas

i	k	0	1	2	3
	x_i	$y_i = \Delta^0 y_i$	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	-1	-1			
			3		
1	0	2		-2	
			-1		1
2	1	1		1	
			1		
3	2	2			

Os coeficientes $\Delta^k y_0$ são -1, 3, -2, 1

$p_3(x) = y_0 + \Delta^1 y_0 .(x-x_0) + \Delta^2 y_0 .(x-x_0).(x-x_1) + \Delta^3 y_0 .(x-x_0).(x-x_1).(x-x_2)$

ou, colocando os termos (x_k-x_0) em evidência, tem-se

$p_3(x) = y_0+(x-x_0).\{\Delta^1 y_0 +(x-x_1).\{\Delta^2 y_0 +(x-x_2).\Delta^3 y_0\}\}$

$p_3(x) = -1+(x+1).\{3+(x-0).\{-2+(x-1).1\}\}$

$p_3(-0,5) = -1+(-0,5+1).\{3+(-0,5-0).\{-2+(-0,5-1).1\}\} = 1,375$

$p_3(0,5) = -1+(0,5+1).\{3+(0,5-0).\{-2+(0,5-1).1\}\} = 1,625$

$p_3(1,5) = -1+(1,5+1).\{3+(1,5-0).\{-2+(1,5-1).1\}\} = 0,875$

[3] Desenvolva o polinômio interpolador de Newton-Gregory e determine o valor de f(-0,5), f(0,5) e f(1,5).

A solução é dada pelos coeficientes $\Delta^k y_0$ da tabela das diferenças finitas

i	k	0	1	2	3
	x_i	$y_i = \Delta^0 y_i$	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	-1	-1			
			3		
1	0	2		-4	
			-1		6
2	1	1		2	
			1		
3	2	2			

Os coeficientes $\Delta^k y_0$ são -1, 3, -4, 6 e o espaçamento entre os pontos é h = 1

$$p_3(x) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!.h}.(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!.h^2}.(x-x_0).(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!.h^3}.(x-x_0).(x-x_1).(x-x_2)$$

ou, colocando os termos (x_k-x_0) em evidência, tem-se

$$p_3(x) = y_0+(x-x_0).\left\{\frac{\Delta^1 y_0}{1!.h} +(x-x_1).\left\{\frac{\Delta^2 y_0}{2!.h^2} +(x-x_2).\frac{\Delta^3 y_0}{3!.h^3}\right\}\right\}$$

$$p_3(x) = -1+(x+1).\left\{\frac{3}{1.1} +(x-0).\left\{\frac{-4}{2.1} +(x-1).\frac{6}{6.1}\right\}\right\}$$

$$-1+(x+1).\{\ 3\ +(x-0).\{\ -2\ +(x-1).\ \ 1\ \}\}$$

$p_3(-0,5) = -1+(-0,5+1).\{3+(-0,5-0).\{-2+(-0,5-1).1\}\} = 1,375$

$p_3(0,5) = -1+(0,5+1).\{3+(0,5-0).\{-2+(0,5-1).1\}\} = 1,625$

$p_3(1,5) = -1+(1,5+1).\{3+(1,5-0).\{-2+(1,5-1).1\}\} = 0,875$

[4] Compare os resultados obtidos e comente a respeito.

Os resultados são idênticos.

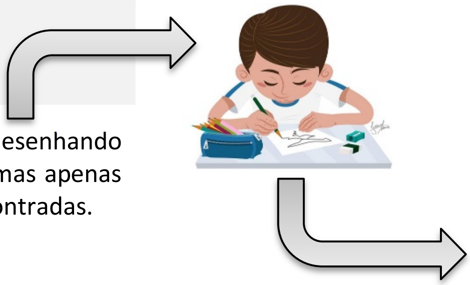
O polinômio desenvolvido por sistema linear e o polinômio de Newton são idênticos, escritos com expressões equivalentes. Basta desenvolver a expressão do polinômio de Newton que se encontra o polinômio obtido por sistema linear.

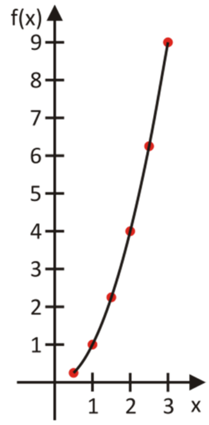
O polinômio de Newton e o Newton-Gregory são idênticos, pois o espaçamento entre os pontos é constante. Caso contrário, nem seria possível utilizar Newton-Gregory.

Considere a série de dados tabelada a seguir para os problemas 5 a 9.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Um aluno esperto fez um gráfico, marcando os 6 pontos e desenhando uma curva sem se preocupar em fazer uma figura perfeita, mas apenas para ter ideia do formato da curva e conferir as soluções encontradas.





[5] Ajuste uma reta a esta nuvem de pontos, determinando a equação f(x) = a+b.x.

$$\hat{y} = a + b.x \Rightarrow \hat{y} = a_0 + a_1.x$$

							∑
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	10,5
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9	22,75
x²	0,25	1	2,25	4	6,25	9	22,75
x.y	0,125	1	3,375	8	15,625	27	55,125

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum x.y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 10,5 \\ 10,5 & 22,75 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,75 \\ 55,125 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 10,5 \\ 10,5 & 22,75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 22,75 \\ 55,125 \end{pmatrix}$$

m = 10,5/6 = 1,75; $L_2 = L_2 - m.L_1$

$$\begin{bmatrix} 6 & 10,5 \\ 0 & 4,375 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 22,75 \\ 15,3125 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 3,5$; $a_0 = -2,33333$

$$\hat{y} = -2,333333 + 3,5.x$$

Calculando R^2 para este ajuste

							∑
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9	22,75
y²	0,0625	1	5,0625	16	39,0625	81	142,1875
ŷ	-0,583333333	1,166666667	2,916666667	4,666666667	6,416666667	8,166666667	
e	0,833333333	-0,166666667	-0,666666667	-0,666666667	-0,166666667	0,833333333	
e²	0,694444444	0,027777778	0,444444444	0,444444444	0,027777778	0,694444444	2,333333333

$$R^2 = 1 - \left(\frac{n.\sum e^2}{n.\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2} \right) \quad R^2 = 1 - \left(\frac{6.2,33333}{6.142,1875 - 22,75^2} \right) = 0,958279009$$

[6] Ajuste uma exponencial a esta nuvem de pontos, determinando a equação $f(x) = a.b^x$.

$$\hat{y} = a.b^x \Rightarrow \ln \hat{y} = \ln a.b^x \Rightarrow \ln \hat{y} = \ln a + \ln b^x \Rightarrow \ln \hat{y} = \ln a + x.\ln b \Rightarrow \underbrace{\ln \hat{y}}_{\hat{Y}} = \underbrace{\ln a}_{A} + \underbrace{\ln b}_{B}.x \Rightarrow \hat{Y} = A + B.x \Rightarrow \hat{Y} = A_0 + A_1.x$$

							∑
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	10,5
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9	---
Y	-1,386294361	0	0,810930216	1,386294361	1,832581464	2,197224577	4,840736257
x²	0,25	1	2,25	4	6,25	9	22,75
x.Y	-0,693147181	0	1,216395324	2,772588722	4,581453659	6,591673732	14,46896426

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum x.Y \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 10,5 \\ 10,5 & 22,75 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,840736 \\ 14,468964 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 10,5 \\ 10,5 & 22,75 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4,840736 \\ 14,468964 \end{pmatrix}$$

m = 10,5/6 = 1,75; $L_2 = L_2 - m.L_1$

$$\begin{bmatrix} 6 & 10,5 \\ 0 & 4,375 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4,840736 \\ 5,997676 \end{pmatrix}$$

$A_1 = 1,370897$; $A_0 = -1,592281$

$a_1 = e^{A1} = 3,938884$;

$a_0 = e^{A0} = 0,203461$

$$\hat{y} = 0,203461.3,938884^x$$

Calculando R^2 para este ajuste

							∑
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9	22,75
y²	0,0625	1	5,0625	16	39,0625	81	142,1875
ŷ	0,403801329	0,801409185	1,590526422	3,156657479	6,264898404	12,43370631	
E	-0,153801329	0,198590815	0,659473578	0,843342521	-0,014898404	-3,433706307	
e²	0,023654849	0,039438312	0,4349054	0,711226607	0,000221962	11,790339	12,99978613

$$R^2 = 1 - \left(\frac{n.\sum e^2}{n.\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2} \right)$$

$$R^2 = 1 - \left(\frac{6.12,999786}{6.142,1875 - 22,75^2} \right)$$

$$R^2 = 0,767558303$$

[7] Ajuste uma exponencial a esta nuvem de pontos, determinando a equação $f(x) = a.x^b$.

$$\hat{y} = a.x^b \Rightarrow \ln \hat{y} = \ln a.x^b \Rightarrow \ln \hat{y} = \ln a + \ln x^b \Rightarrow \ln \hat{y} = \ln a + b.\ln x \Rightarrow \underbrace{\ln \hat{y}}_{\hat{Y}} = \underbrace{\ln a}_{A} + b.\underbrace{\ln x}_{X} \Rightarrow \hat{Y} = A + b.X \Rightarrow \hat{Y} = A_0 + a_1.X$$

							∑
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	---
X	-0,693147181	0	0,405465108	0,693147181	0,916290732	1,098612289	2,420368129
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9	---
Y	-1,386294361	0	0,810930216	1,386294361	1,832581464	2,197224577	4,840736257
X^2	0,480453014	0	0,164401954	0,480453014	0,839588705	1,206948961	3,171845648
X.Y	0,960906028	0	0,328803908	0,960906028	1,679177411	2,413897922	6,343691296

$$\begin{bmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} A_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum X.Y \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 2,420368 \\ 2,420368 & 3,171846 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} A_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,840736 \\ 6,343691 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2,420368 \\ 2,420368 & 3,171846 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4,840736 \\ 6,343691 \end{pmatrix}$$

m = 2,420368/6 = 0,403395;

$L_2 = L_2 - m.L_1$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2,420368 \\ 0 & 2,195482 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4,840736 \\ 4,390964 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 2$; $A_0 = 0$

$a_0 = e^{A0} = 1$

$\hat{y} = 1.x^2$

Calculando R^2 para este ajuste

							∑
X	0,5	1	1,5	2	2,5	3	
Y	0,25	1	2,25	4	6,25	9	22,75
y^2	0,0625	1	5,0625	16	39,0625	81	142,1875
ŷ	0,0625	1	5,0625	16	39,0625	81	142,1875
E	0	0	0	0	0	0	0
e^2	0	0	0	0	0	0	0

$$R^2 = 1 - \left(\frac{n.\sum e^2}{n.\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2} \right)$$

$$R^2 = 1 - \left(\frac{6.0}{6.142,1875 - 22,75^2} \right) = 1$$

[8] Calcule o Coeficiente de Determinação para cada um dos casos e informe qual é o melhor ajuste.

Foram calculados nos problemas [5], [6] e [7]

$\hat{y} = a + b.x$	$\hat{y} = -2,333333 + 3,5.x$	$R^2 = 0,958279$	Bom
$\hat{y} = a.b^x$	$\hat{y} = 0,203461.3,938884^x$	$R^2 = 0,767558$	Ruim
$\hat{y} = a.x^b$	$\hat{y} = 1.x^2$	$R^2 = 1$	Ótimo (melhor)

[9] Considere o melhor ajuste e, se ele foi muito bom, explique o motivo.

O ajuste oferece Coeficiente de Determinação unitário que significa que a curva ajustada passa pelos pontos dados.

Este é o recado importante.

ATENÇÃO
Estes exemplos foram feitos para ajudá-lo a estudar.
Espera-se que você reproduza os exemplos, refazendo todos os cálculos.
Se encontrar algum erro de cálculo, basta corrigir e, caso queira, me informe.
É possível que existam erros de cálculo, pois fiz todos mentalmente, enquanto digitava o texto.
Note que escrevi todas as equações exatamente para não utilizar calculadora ao desenvolver o texto.
Em resumo, foi feito para ajudar e se estiver atrapalhando, interrompa a leitura e não utilize este texto.

Este *não* é o recado importante.

Extra: para colorir. Quantos desocupados vão gastar seu tempo colorindo? **Extra plus: para descolorir.**