Exemplos resolvidos de parte do conteúdo da primeira prova

Leia recado importante no final do texto

[1] Calcule f'(x) e f''(x) para $f(x) = 3.x^3-4.x^2+5.x-1$, no ponto x = 5, com ε = 0,01 e iniciando com h =1.

Para cada iteração, a aproximação de f'(x) é p = [f(x+h)-f(x-h)]/[2.h].
Então, $p = [(3.(5+h)^3-4.(5+h)^2+5.(5+h)-1)-(3.(5-h)^3-4.(5-h)^2+5.(5-h)-1)]/[2.h]$.

Para cada iteração, a aproximação de f''(x) é $p = [f(x+2.h)-f(x)+f(x-2.h)]/[4.h^2]$.
Então, $p = [(3.(5+2.h)^3-4.(5+2.h)^2+5.(5+2.h)-1)-(3.(5)^3-4.(5)^2+5.(5)-1)+(3.(5-2.h)^3-4.(5-2.h)^2+5.(5-2.h)-1)]/[4.h^2]$.

Resolvendo numericamente com auxílio de tabelas.

k	h	p_k	$\lvert p_k-p_{k-1}\rvert$	
1	1	193		
2	0,1	190,03	2,97	
3	0,01	190,0003	0,0297	
4	0,001	190,000003	0,000297	$\lvert p_k-p_{k-1}\rvert<ε$

k	h	p_k	p_k-p_{k-1}	
1	1	82		
2	0,1	82	7,24754E-13	$\lvert p_k-p_{k-1}\rvert<ε$

Resolvendo analiticamente para conferir os resultados.

Com $f(x) = 3.x^3-4.x^2+5.x-1$, $f'(x) = 9.x^2-8.x+5$ e f''(x) = 18.x-8.
No ponto x = 5, f'(5) = 190 e f''(x) = 82.

[2] Calcule ∇f(x) para $f(x) = 3.x_1^3-4.x_2^2+10.x_1.x_2$, no ponto $x^T = (5\ 2)$ com ε = 0,01 e iniciando com h =1.

Para cada iteração, a aproximação de $\partial/\partial x_1\, f(x_1, x_2)$ é $p = [f(x_1+h,x_2)-f(x_1-h,x_2)]/[2.h]$.
Então, $p = [(3.(5+h)^3-4.2^2+10.(5+h).2)-(3.(5-h)^3-4.2^2+10.(5-h).2)]/[2.h]$.

Para cada iteração, a aproximação de $\partial/\partial x_2\, f(x_1, x_2)$ é $p = [f(x_1,x_2+h)-f(x_1,x_2-h)]/ [2.h]$.
Então, $p = [(3.5^3-4.(2+h)^2+10.5.(2+h))-(3.5^3-4.(2+h)^2+10).5.(2+h)]/[2.h]$.

Resolvendo numericamente com auxílio de tabelas.

k	h	p_k	$\lvert p_k-p_{k-1}\rvert$	
1	1	248		
2	0,1	245,03	2,97	
3	0,01	245,0003	0,0297	
4	0,001	245,000003	0,000297	$\lvert p_k-p_{k-1}\rvert<ε$

k	h	p_k	p_k-p_{k-1}	
1	1	34		
2	0,1	34	5,68434E-14	$\lvert p_k-p_{k-1}\rvert<ε$

Resolvendo analiticamente para conferir os resultados.

Com $f(x) = 3.x_1^3-4.x_2^2+10.x_1.x_2$, $\partial/\partial x_1\, f(x_1,x_2) = 9.x_1^2+10.x_2$ e $\partial/\partial x_2\, f(x_1,x_2) = -8.x_2+10.x_1$.
No ponto $x^T = (5\ 2)$, $\partial/\partial x_1\, f(5, 2) = 245$ e $\partial/\partial x_2\, f(5, 2) = 34$.

[3] Utilizando o Método da Busca Uniforme separe as raízes de f(x) = 2,5.sen(x).ln(x+1)-1, no intervalo [0, 8], com Δ = 0,5.

	x	f(x)	
Δ = 0,5	0,0	-1,000	
	0,5	-0,514	
	1,0	0,458	[0,5 , 1,0]
	1,5	1,285	
	2,0	1,497	
	2,5	0,874	
	3,0	-0,511	[2,5 , 3,0]
	3,5	-2,319	
	4,0	-4,045	
	4,5	-5,166	
	5,0	-5,295	
	5,5	-4,302	
	6,0	-2,359	
	6,5	0,084	[6,0 , 6,5]
	7,0	2,415	
	7,5	4,018	
	8,0	4,435	

[4] Utilizando o Método da Busca Uniforme separe a primeira raiz de f(x) = 2,5.sen(x).ln(x+1)-1, no intervalo [0, 8], com Δ = 0,5 e calcule a primeira raiz, com δ = 0,1.

	x	f(x)	
Δ = 0,5	0,0	-1,000	
	0,5	-0,514	
	1,0	0,458	[0,5 , 1,0]
δ = 0,1	0,5	-0,514	
	0,6	-0,337	
	0,7	-0,145	
	0,8	0,054	[0,7 , 0,8]

Resultado:
x = (0,7+0,8)/2 = 0,75
f(x) = -0,046

Veja o gráfico, ao final do texto, onde podem ser vistos os intervalos onde existem raízes.

[5] Utilize o Método da Divisão ao Meio e calcule a raiz de f(x) = 2,5.sen(x).ln(x+1)-1, no intervalo [2, 4], com ε = 0,01.

k	a	b	b-a	f(a)	f(b)	p	f(p)	f(a)*f(p)
1	2	4	2	1,497	-4,045	3	-0,511	-0,765051407
2	2	3	1	1,497	-0,511	2,5	0,874	1,309277335
3	2,5	3	0,5	0,874	-0,511	2,75	0,261	0,228344726
4	2,75	3	0,25	0,261	-0,511	2,875	-0,108	-0,028172513
5	2,75	2,875	0,125	0,261	-0,108	2,8125	0,081	0,021227478
6	2,8125	2,875	0,0625	0,081	-0,108	2,84375	-0,012	-0,000990269
7	2,8125	2,84375	0,03125	0,081	-0,012	2,828125	0,035	0,00283141
8	2,828125	2,84375	0,015625	0,035	-0,012	2,8359375	0,011	0,000396967
9	2,8359375	2,84375	0,0078125	0,011	-0,012	2,83984375	0,000	

Como $\lvert b_9-a_9\rvert < ε$, pode-se parar com x = 2,8359375 e f(x) = 0,000396967.
Continuando a iteração desta última linha, encontra-se x = 2,83984375 e f(x) = 0,000.

[6] Utilize o Método das Cordas e calcule a raiz de $f(x) = 2,5.sen(x).ln(x+1)-1$, no intervalo [2, 4], com $\varepsilon = 0,01$.

k	a	b	b-a	f(a)	f(b)	p	f(p)	f(a)*f(p)
1	2	4	2	1,497	-4,045	2,540340551	0,788	1,179736531
2	2,540340551	4	1,459659449	0,788	-4,045	2,778290499	0,181	0,142548935
3	2,778290499	4	1,221709501	0,181	-4,045	2,830597404	0,027	0,004963391
4	2,830597404	4	1,169402596	0,027	-4,045	2,838474406	0,004	0,000102997
5	2,838474406	4	1,161525594	0,004	-4,045	2,839551531	0,001	

Só o extremo a está mudando de valor. Portanto, não é possível utilizar $|b_k-a_k| < \varepsilon$ como critério de parada.
Neste caso, deve-se verificar se f(p) está próximo de zero. Para isto será utilizada a tolerância $\varepsilon/10 = 0,001$.
Como $|f(p_5)| < \varepsilon/10$, pode-se parar com x = 2,838474406 e f(x) = 0,004.

[7] Utilize o Método de Newton e calcule a raiz de $f(x) = 2.x^4-16.x^3+40.x^2-32.x+3$, no intervalo [0, 4], com $\varepsilon = 10^{-5}$ e partindo do ponto x = 1.

Para $f(x) = 2.x^4-16.x^3+40.x^2-32.x+3$, $f'(x) = 8.x^3-48.x^2+80.x-32$.
Para cada iteração, $p_{k+1} = p_k - f(p_k)/f'(p_k)$.

k	p_k	$f(p_k)/f'(p_k)$	$\lvert f(p_k)/f'(p_k)\rvert$	p_{k+1}	$f(p_{k+1})$
1	1	-0,375	0,375	1,375	0,180175781
2	1,375	0,022390777	0,022390777	1,352609223	-0,001604081
3	1,352609223	-0,000195916	0,000195916	1,352805139	-1,1406E-07
4	1,352805139	-1,39328E-08	1,39328E-08	1,352805153	0
5	1,352805153				

Como $|f(p_4)/f'(p_4)| < \varepsilon$, pode-se parar com x = 1,352805153 e f(x) = 0.

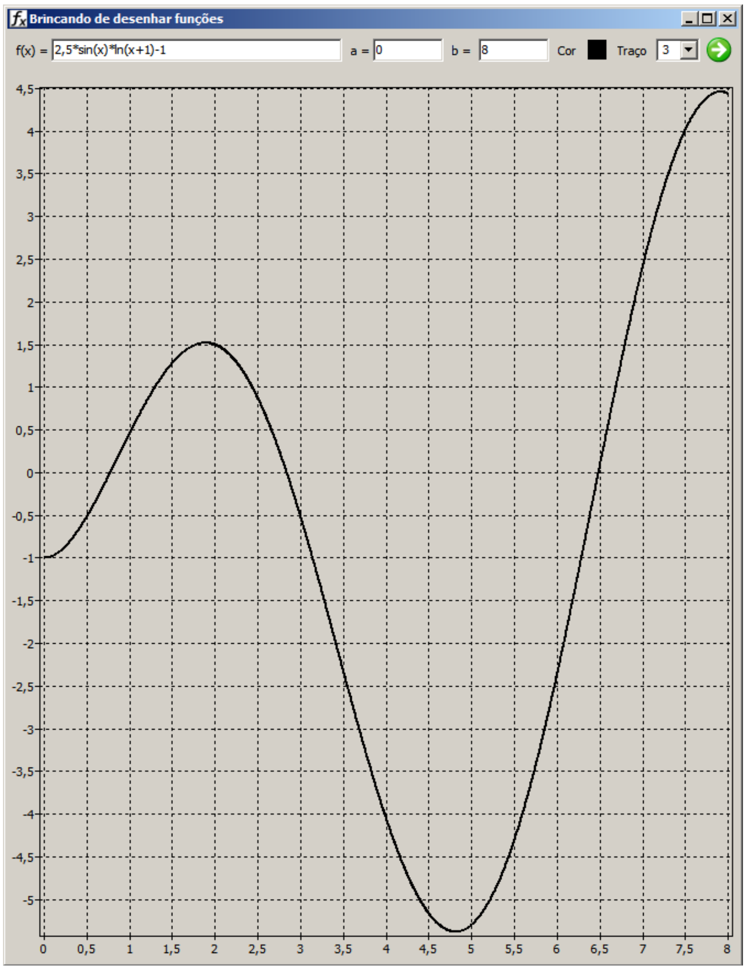

Figura da função $f(x) = 2,5.sen(x).ln(x+1)-1$ utilizada nos exemplos 3, 4, 5 e 6.

Exemplo 3
Intervalos
[0,5 , 1,0], [2,5 , 3,0] e [6,0 , 6,5]

Exemplo 4
Primeira raiz
x = 0,75; f(x) = -0,046

Exemplo 5
Raiz entre 2 e 4
x = 2,83984375; f(x) = 0,000

Exemplo 6
Raiz entre 2 e 4
x = 2,839551531; f(x) = 0,001

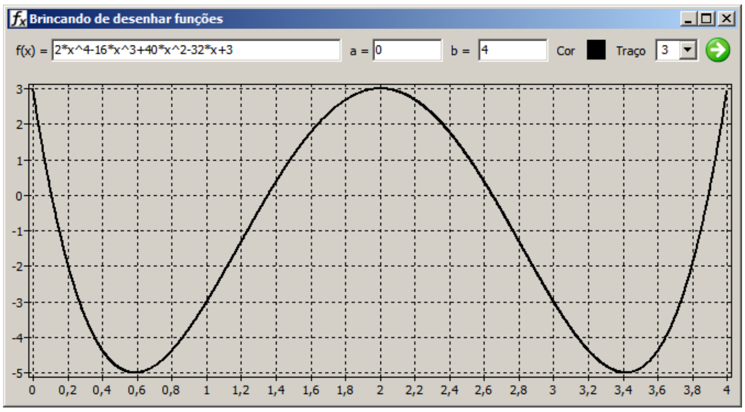

Figura da função $f(x) = 2.x^4-16.x^3+40.x^2-32.x+3$ utilizada no exemplo 7.

Raiz partindo do ponto x = 1
x = 1,352805153; f(x) = 0

Gastando mais uma página, só para informar que não precisa mais do que duas páginas para fazer a prova
É isto mesmo.
Imagine que estivesse fazendo esta prova em sala de aula e recebesse, **por motivos ecológicos** , apenas uma folha com as questões.
Você poderia utilizar apenas a folha das questões, frente e verso, para resolver a prova.
Resumindo, não é uma prova longa ou trabalhosa.

Gráficos
Os gráficos ao final da segunda página servem para ajudar a verificar se as respostas são compatíveis com as funções dadas.
Em uma prova, o gentil e simpático aluno poderia marcar alguns pontos (4, 5 ou 6), calcular a função nestes pontos e traçar uma curva ligando os pontos para ter uma ideia da função.
Aqui eu utilizei o programa da nossa Patricinha.

Fale a verdade - também conhecido como pesquisa de opinião pública
É o fim do mundo o professor fazer uma prova modelo para os alunos. Não é?
☐ Sim, fico até envergonhado.
☐ Não, eu não tenho vergonha nenhuma. Sou assim mesmo.

ATENÇÃO
Estes exemplos foram feitos para ajudá-lo a estudar.
Espera-se que você reproduza os exemplos, refazendo todos os cálculos.
Se encontrar algum erro de cálculo, basta corrigir e, caso queira, me informe.
É possível que existam erros de cálculo, pois fiz todos mentalmente, enquanto digitava o texto.
Note que escrevi todas as equações exatamente para não utilizar calculadora ao desenvolver o texto.
Em resumo, foi feito para ajudar e se estiver atrapalhando, interrompa a leitura e não utilize este texto.