# Algorithmen und Komplexität

*Robin Rausch, Florian Maslowski*

*23. Juni 2022*

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Komplexitaet

Der Begriff Komplexität beschreibt die Frage:

Wie teuer ist ein Algorithmus?

Genauergesagt wird hierfür ermittelt, wie viele elementare Schritte eine Algorithmus im Durchschnitt und schlimmstenfalls braucht. Diese beiden Werte spiegeln die Komplexität wieder.

## 1.1 $\mathcal{O}$-Notation

Die $\mathcal{O}$-Notation ist eine obere Grenze einer Funktion. $\mathcal{O}(f)$ ist die Menge aller Funktionen, die langfristig nicht wesentlich schneller wachsen als $f$.
Einige Beispiele sind zum Beispiel:

- $n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$
- $3n^3 + 2n^2 + 17 \in \mathcal{O}(n^3)$
- $n\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n^2)$

**Rechenregeln für $\mathcal{O}$-Notation:**

$$\begin{array}{rcrll}
\text{Für jede Funktion } f & & f & \in \mathcal{O}(f) & \\
g \in \mathcal{O}(f) & \Rightarrow & c \cdot g & \in \mathcal{O}(f) & \text{Konstanter Faktor} \\
g \in \mathcal{O}(f) \wedge h \in \mathcal{O}(f) & \Rightarrow & g + h & \in \mathcal{O}(f) & \text{Summe} \\
g \in \mathcal{O}(f) \wedge h \in \mathcal{O}(g) & \Rightarrow & h & \in \mathcal{O}(f) & \text{Transivität} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \in \mathbb{R} & \Rightarrow & g & \in \mathcal{O}(f) & \text{Grenzwert}
\end{array}$$

### 1.1.1 Landau-Symbole

| | | |
|---|---|---|
| $g \in \Omega(f)$ | $g$ wächst mindestens so schnell wie $f$ | $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}$ |
| $g \in \Theta(f)$ | $g$ wächst genau so schnell wie $f$ | $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = c \in \mathbb{R}^{>0}$ |
| $g \sim f$ | $g$ wächst genau so schnell wie $f$ | $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ |

- Betrachten Sie folgende Funktionen:
  - $h_1(x) = x^2 + 100x + 3$
  - $h_2(x) = x^2$
  - $h_3(x) = \frac{1}{3}x^2 + x$
  - $h_4(x) = x^3 + x$

$g \in \mathcal{O}(f)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = c \in \mathbb{R}$

$g \in \Omega(f)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}$

$g \in \Theta(f)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = c \in \mathbb{R}^{>0}$

$g \sim f$: $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$

Vervollständigen Sie die Tabelle. Zeile steht in Relation ... zu Spalte:

| | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $h_1$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ | $\mathcal{O}$ |
| $h_2$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ | $\mathcal{O}$ |
| $h_3$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$ | $\mathcal{O}$ |
| $h_4$ | $\Omega$ | $\Omega$ | $\Omega$ | $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$ |

Zur $\Theta$-Notation gibt es auch ein eigenes *Master-Theorem*.

## 1.2 Logarithmen

## 1.3 Dynamisches Programmieren

## 1.4 Rekurrenzen

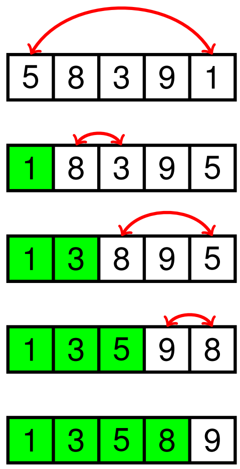
## 1.5 Divide & Conquer

# 2 Einfache Sortierverfahren

## Selectionsort

In-place
Stabil

1. Finde kleinstes Element in Folge$(a_0, ...a_{k-1})$
2. Vertausche $a_{min}$ mit $a_0$
3. finde kleinstes Element in Folge$(a_1, ...a_{k-1})$
4. Vertausche $a_{min}$ mit $a_1$
5. ...




## 2.1 Insertionsort

### 2.1.1 Indirektes Sortieren

## 2.2 Bubblesort

## 2.3 Quicksort

# 3 Divide & Conquer Sortierverfahren

## 3.1 Mergesort

Out-of-place
Stabil

# 4 Heap Sortierverfahren

# 5 Binäre Suchbäume

# 6 AVL-Bäume

# 7 Hashing und Hashtabellen

# 8 Master-Theorem

# 9 Master-Theorem nach Landau