Algorithmen und Komplexität

Robin Rausch, Florian Maslowski

23. Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexitaet

Der Begriff Komplexität beschreibt die Frage:

Wie teuer ist ein Algorithmus?

Genauergesagt wird hierfür ermittelt, wie viele elementare Schritte eine Algorithmus im Durchschnitt und schlimmstenfalls braucht. Diese beiden Werte spiegeln die Komplexität wieder.

1.1 $\mathcal{O}$-Notation

Die $\mathcal{O}$-Notation ist eine obere Grenze einer Funktion. $\mathcal{O}(f)$ ist die Menge aller Funktionen, die langfristig nicht wesentlich schneller wachsen als f.
Einige Beispiele sind zum Beispiel:

- $n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$
- $3n^3 + 2n^2 + 17 \in \mathcal{O}(n^3)$
- $n\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n^2)$

Rechenregeln für $\mathcal{O}$-Notation:

Für jede Funktion f		f	$\in \mathcal{O}(f)$	
$g \in \mathcal{O}(f)$	$\Rightarrow$	$c \cdot g$	$\in \mathcal{O}(f)$	Konstanter Faktor
$g \in \mathcal{O}(f) \wedge h \in \mathcal{O}(f)$	$\Rightarrow$	$g + h$	$\in \mathcal{O}(f)$	Summe
$g \in \mathcal{O}(f) \wedge h \in \mathcal{O}(g)$	$\Rightarrow$	h	$\in \mathcal{O}(f)$	Transivität
$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	g	$\in \mathcal{O}(f)$	Grenzwert

1.1.1 Landau-Symbole

$g \in \Omega(f)$	g wächst mindestens so schnell wie f	$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}$
$g \in \Theta(f)$	g wächst genau so schnell wie f	$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = c \in \mathbb{R}^{>0}$
$g \sim f$	g wächst genau so schnell wie f	$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$

- Betrachten Sie folgende Funktionen:
  - $h_1(x) = x^2 + 100x + 3$
  - $h_2(x) = x^2$
  - $h_3(x) = \frac{1}{3}x^2 + x$
  - $h_4(x) = x^3 + x$

$g \in \mathcal{O}(f)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = c \in \mathbb{R}$

$g \in \Omega(f)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R}$

$g \in \Theta(f)$: $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = c \in \mathbb{R}^{>0}$

$g \sim f$: $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$

Vervollständigen Sie die Tabelle. Zeile steht in Relation ... zu Spalte:

	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta$	$\mathcal{O}$
h_2	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta$	$\mathcal{O}$
h_3	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta$	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta$	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$	$\mathcal{O}$
h_4	Ω	Ω	Ω	$\mathcal{O}, \Omega, \Theta, \sim$

Zur Θ-Notation gibt es auch ein eigenes *Master-Theorem*.

1.2 Logarithmen

Der Logarithmus beschreibt die Umkehrfunktion zur Potenzierung:

$$\log_a a^b = b$$

Wir werden meist den Logarithmus zur Basis 2 brauchen.
Rechenregeln mit dem Logarithmus:

$$log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x = c \log_b x$$

$\mathcal{O}(\log_a x) = \mathcal{O}(c \log_b x) = \mathcal{O}(\log_b x) \Rightarrow$ Die Basis ist für $\mathcal{O}$ irrelevant!

1.3 Dynamisches Programmieren

1.4 Rekurrenzen

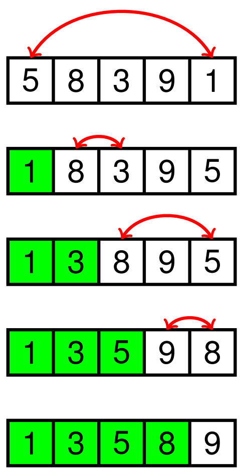
1.5 Divide & Conquer

2 Einfache Sortierverfahren

Selectionsort

Speicher:	In-place
Stabilität:	Stabil
Komplexität:	$\mathcal{O}(n^2)$

1. Finde kleinstes Element in Folge($a_0, ...a_{k-1}$)
2. Vertausche a_{min} mit a_0
3. finde kleinstes Element in Folge($a_1, ...a_{k-1}$)
4. Vertausche a_{min} mit a_1
5. ...



2.1 Insertionsort

2.1.1 Indirektes Sortieren

2.2 Bubblesort

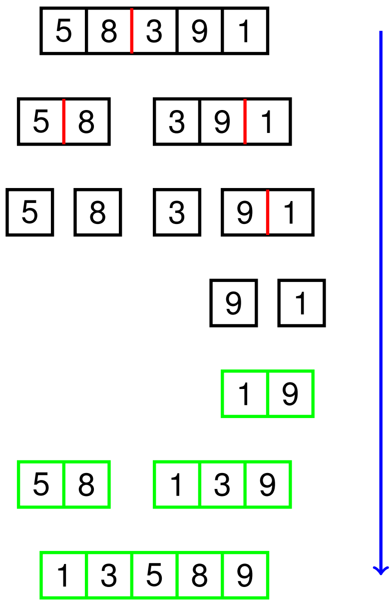
2.3 Quicksort

3 Divide & Conquer Sortierverfahren

3.1 Mergesort(Top-Down)

Speicher:	Out-of-place
Stabilität:	Stabil
Komplexität:	$\mathcal{O}(n^2)$

1. Wenn |S| $\leq$ 1: gib S zurück
2. Teile S in zwei gleich lange Folgen L und R
3. Sortieren L und R(rekursiv)
4. Vereinige L und R zu S':
   (a) solange L oder R nicht leer sind:
   (b) m:= min(l_1, r_1)
   (c) entferne m aus L bzw. R
   (d) hänge m an S' an
5. gib S' zurück



4 Heap Sortierverfahren

5 Binäre Suchbäume

6 AVL-Bäume

7 Hashing und Hashtabellen

8 Master-Theorem

9 Master-Theorem nach Landau