

# Analysis

*Robin Rausch, Florian Maslowski, Ozan Akzebe*

*8. Juli 2022*

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Eigenwerttheorie</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Quadrik</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Satz von Bolzano-Weierstrass</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Grenzwert</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Cauchy Kriterium</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Konvergenzkriterium</b>	<b>3</b>
6.1	Satz der monotonen Konvergenz . . . . .	4
6.2	Leibniz-Kriterium . . . . .	4
6.3	Regel von L'Hospital . . . . .	4
6.4	Sandwich-Prinzip . . . . .	4
6.5	Wurzel-/Quotientenkriterium . . . . .	4
6.6	Integralkriterium . . . . .	4
6.7	Majoranten-/Minorantenkriterium . . . . .	4
6.8	Stetigkeit . . . . .	4
6.9	Konvergenzradius . . . . .	5
6.10	Wichtigste Potenzreihen . . . . .	5
<b>7</b>	<b>Kurvendiskussion</b>	<b>5</b>
7.1	Newtonverfahren . . . . .	5
7.2	Ableitungen . . . . .	6
7.2.1	Grundfunktionen . . . . .	6
7.2.2	Regeln . . . . .	6
7.3	Tangentengleichung . . . . .	6
7.4	Stammfunktionen . . . . .	7
7.5	Definitionsbereich und Wertemenge bestimmen . . . . .	7
7.6	Nullstellen berechnen . . . . .	7
7.7	Y-Achsenabschnitt . . . . .	7
7.8	Symmetrieverhalten bestimmen . . . . .	7
7.8.1	Achsensymmetrie zur y-Achse . . . . .	7
7.8.2	Punktsymmetrie . . . . .	7
7.9	Extremstellen/werte und Hoch/Tiefpunkte berechnen . . . . .	8
7.10	Wendepunkt . . . . .	8

<b>8</b>	<b>Taylor Entwicklung</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>Integrale</b>	<b>8</b>
9.1	Integralregeln . . . . .	8
<b>10</b>	<b>3d Bild</b>	<b>9</b>

# 1 Eigenwerttheorie

Der Eigenvektor  $\vec{x}$  ist der Vektor einer Matrix  $A$ , der sich bei der Multiplikation mit der Matrix nur um die Länge mit dem ändert:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

sdfs

## 2 Quadrik

Die Quadrik ist die Lösungsmenge von quadratischen Gleichungen mit mehreren Variablen.

## 3 Satz von Bolzano-Weierstrass

1. Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  hat wenigstens einen Häufungspunkt
2. Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  hat wenigstens eine konvergente Teilfolge

## 4 Grenzwert

$$A \text{ ist Grenzwert} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$$

Für alle Epsilon die Größer als 0 sind, gibt es ein  $n_0$  ab dem alle Folgenden  $n > n_0$  Glieder innerhalb des Epsilon-Gürtels liegen. (Das heißt  $a_n$  - Grenzwert ist kleiner als Epsilon)

Jede Geometrische Folge:  $a_n = q^n$  ist eine Nullfolge, wenn  $-1 < q < 1$

Geometrische Folgen haben ihre Variablen immer nur als Potenz bsp.:  $a_n : \frac{1}{2^n}$

## 5 Cauchy Kriterium

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\epsilon, m \geq n_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon$$

Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es einen Index  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , so dass für all  $n \geq n_\epsilon$  und  $m \geq n_\epsilon$ , die Abschätzung  $|a_n - a_m| < \epsilon$  erfüllt ist.

Ist das Cauchy Kriterium erfüllt ist die Folge konvergent, und hat einen Grenzwert

## 6 Konvergenzkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$$

$\forall \epsilon > 0, n \in \mathbb{N} \exists n_\epsilon : n > n_\epsilon \Rightarrow |g - a_n| < \epsilon$  Für alle positiven Epsilon und natürliche  $n$ , gibt es eine Grenze  $n_\epsilon$ , nach der alle Folgenglieder um weniger als epsilon vom Grenzwert entfernt sind.

## 6.1 Satz der monotonen Konvergenz

Jede noch monoton wachsende/fallende nach oben/unten beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent.

## 6.2 Leibniz-Kriterium

Wird oft bei alternierenden Folgen angewendet!

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k * a_n$$

Sei  $a_n$  eine monotone, reelle Nullfolge, dann konvergiert die alternierende Reihe

## 6.3 Regel von L'Hospital

Für Grenzwerte bei Brüchen, wenn:

1. Zähler und Nenner gegen 0 oder  $\pm\infty$  gehen
2. Grenzwert des Bruchs  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert

$$\text{Regel: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## 6.4 Sandwich-Prinzip

Wenn eine Folge zwischen 2 konvergierenden Folgen mit dem selben Grenzwert liegt, konvergiert diese auch gegen den selben Grenzwert.

## 6.5 Wurzel-/Quotientenkriterium

Bei Reihen mit Potenzen wird meist das Wurzelkriterium verwendet!

Eine Reihe  $\sum a_k$  ist absolut konvergent wenn:

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$$

$$2. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = q < 1$$

Wenn  $q > 1$  gilt, ist die Reihe divergent.

Wenn  $q = 1$  gilt, kann man keine Aussage über die Konvergenz treffen.

## 6.6 Integralkriterium

## 6.7 Majoranten-/Minorantenkriterium

Das Majoranten- und Minorantenkriterium wird oft bei Reihen folgender Form verwendet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

mit  $P$  und  $Q$  als Polynomfunktionen!

Majorantenkriterium: Die Reihe wird durch eine größere ersetzt, deren Konvergenz bekannt ist.




Minorantenkriterium: Die Reihe wird durch eine kleinere ersetzt, deren Divergenz bekannt ist.

## 6.8 Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, falls die Funktion keine Sprünge hat. Linke Seite der Funktion ist gleich rechte Seite der Funktion.

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

## 6.9 Konvergenzradius

Potenzreihen		
$\sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$		
Potenzreihen konvergieren absolut im inneren einer Kreisscheibe. Deren Radius heißt Konvergenzradius.		
Wurzelkriterium	Quotientenkriterium	Für
$ z  < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }} := R$	$ z  < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n }} := R$	$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$
$ z  < \frac{1}{\sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n }}} := R$ 	$ z  < \frac{1}{\sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n }}} := R$ 	$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{p \cdot k + r}$ 

## 6.10 Wichtigste Potenzreihen

Funktion	Potenzreihe	Bereich
$f(x) = \frac{1}{1-x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$-1 < x < 1$

$f(x) = \ln(1+x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} * x^n$	$-1 < x < 1$
-------------------	--	--------------

$f(x) = e^x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} * x^n$	
--------------	--	--

$g(x) = x * e^{x^2}$	$= x * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$	
----------------------	--	--

$f(x) = \cos(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} * x^{2n}$	
------------------	---	--

$f(x) = \sin(x)$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} * x^{2n+1}$	
------------------	---	--

## 7 Kurvendiskussion

### 7.1 Newtonverfahren

Annähern an Nullstellen durch Rekursion:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

### 7.2 Ableitungen

#### 7.2.1 Grundfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$n * x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

#### 7.2.2 Regeln

Name	Vorher	Nachher
Summenregel	$(f \pm g)$	$f' \pm g'$
Produktregel	$(f * g)$	$f' * g + f * g'$
Quotientenregel	$(\frac{f}{g})$	$\frac{f' * g - f * g'}{g^2}$
Kettenregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) * g'(x)$

## 7.3 Tangentengleichung

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

## 7.4 Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$
$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x ) + c$
$n * x^{n-1}$	$x^n + c$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + c$
$2x$	$x^2 + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}(\sqrt[n]{x})^{n+1} + c$
$\ln x$	$x * \ln(x) - x + c$
$e^x$	$e^x + c$
$e^{z*x}$	$\frac{1}{z}e^{z*x} + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$

## 7.5 Definitionsbereich und Wertemenge bestimmen

Definitionsbereich: Was darf man alles für x einsetzen darf.

Wertemenge: Die Menge die rauskommt, wenn man alles aus der Definitionsmenge einsetzt

## 7.6 Nullstellen berechnen

Gleichung gleich 0 setzen ( $f(x) = 0$ ) und ausrechnen

## 7.7 Y-Achsenabschnitt

In die Funktion  $x=0$  einsetzen und das Ergebnis berechnen

## 7.8 Symmetrieverhalten bestimmen

### 7.8.1 Achsensymmetrie zur y-Achse

Prüft, ob bei  $f(-x) = f(x)$  dasselbe rauskommt

### 7.8.2 Punktsymmetrie

Punktsymmetrie liegt vor, wenn  $-f(x) = f(-x)$

### 7.9 Extremstellen/werte und Hoch/Tiefpunkte berechnen

Extremstellen:  $f'(x) = 0$

Hoch- oder Tiefpunkt:  $f''(x)$  an der Nullstelle von  $f'(x)$  Ist  $f''(x) > 0$  Tiefpunkt Ist  $f''(x) < 0$  Hochpunkt

### 7.10 Wendepunkt

2. Ableitung bestimmen und Nullstellen berechnen  $\rightarrow$  hier sind Wendepunkte 3. Ableitung bestimmen um zu bestimmen, ob Rechts-Links-Wendepunkt oder Links-Rechts Wendepunkt  $f'''(x) > 0$  rechts-links gekrümmt  $f'''(x) < 0$  links-rechts gekrümmt  $f'''(x) = 0$  kein Wendepunkt

## 8 Taylor Entwicklung

Wird genutzt um aus Funktionen Reihen zu machen.

Formel:  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i$

## 9 Integrale

### 9.1 Integralregeln

1. Faktorregel

$$\int c * f(x) dx = c * \int f(x) dx$$

2. Potenzregel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \neq -1$$

3. Summenregel

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

4. Partielle Integration

$$\int f(x) * g'(x) dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x) dx$$

5. Substitutionsregel

$$\int f(g(x)) * g'(x) dx = \int f(g(x)) dx$$

6. Logarithmische Integration

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|)$$

7. Vertauschungsregel

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

8. Gleichheit von oberer und unterer Grenze

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$



## 10 3d Bild

