Formale Sprachen und Automaten

Robin Rausch, Florian Maslowski

11. November 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Alphabet

Ein Alphabet Σ ist eine nicht-leere Menge von Symbolen(Zeichen, Buchstaben). Beispiel: $\Sigma_{ab} = a, b$

1.2 Wort

Ein Wort w über dem Alphabet Σ(Sigma) ist eine endliche Folge von Symbolen aus Σ. Das Wort $w = abaabab$ wurde beispielsweise aus dem Alphabet Σ_{ab} gebildet.
Die Länge eines Wortes kann durch Betragsstriche angegeben werden. Beispiel: $|w| = 7$
Ebenso kann man die Anzahl bestimmter Symbole in einem Wort bestimmen: $|w|_b = 3$
Ein einzelnes Zeichen kann durch eckige Klammern angegeben werden: $w[2] = b$
Wörter können bliebig konkateniert werden(hintereinanderschreiben ohne abstand): $w_1 w_2 = abbabaab$ mit $w_1 = abba$ und $w_2 = baab$.
Wörter dürfen auch potenziert werden: $w^3 = abaababababaababababaabab = www$
Das leere Wort lautet ε.

1.3 Formale Sprachen

Eine formale Sprache L über einem Alphabet Σ ist eine Menge von Wörtern aus $\Sigma^* : L \subseteq \Sigma^*$. Eine Sprache kann sowohl endlich als auch unendlich sein.
Beispiel: $L_1 = \{w \in \Sigma^*_{bin} | \ |w| \geqslant 2 \wedge w[|w| - 1] = 1\}$ ist die Menge aller Binärwörter, an deren vorletzter Stelle 1 steht.
Das Produkt zweier formaler Sprachen: $L_1 \cdot L_2 = \{abac, abcb, bcac, bccb\}$ mit $L_1 = \{ab, bc\}$ und $L_2 = \{ac, cb\}$.
Sprachen können ebenfalls potenziert werden: $L^2 = \{ab, ba\} \cdot \{ab, ba\} = \{abab, abba, baab, baba\}$

1.4 Kleene Stern

Für ein Alphabet Σ und eine formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist der Operator Kleene Stern wie folgt definiert: $L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$.

Beispiel: Sei $L_1 = \{ab, ba\}$, dann $L^* = \{\varepsilon, ab, ba, abab, abba, baab, baba, ababab, ...\}$.

1.5 Überblick

Typ	Sprachklasse	Grammatik	Maschinenmodell
0	rekursiv aufzählbar	unbeschränkt	Turing-Maschine
1	kontextsensitiv	monoton	linear beschränkter Automat
2	kontextfrei	kontextfrei	Kellerautomat
3	regulär	rechtslinear	endlicher Automat

2 Reguläre Sprachen und endliche Ausdrücke

2.1 Reguläre Ausdrücke

Ein regulärer Ausdruck über Σ beschreibt eine formale Sprache.
Die Menge aller regulären Ausdrücke über Σ ist eine formale Sprache.

Beispiel: Sprache aller Wörter über Σ_{abc}, die nur aus genau zwei Symbolen bestehen:
Ausdruck: $r_1 = (a + b + c)(a + b + c)$
Sprache: $\mathcal{L}(r_1) = \{w \in \Sigma^*_{abc} \mid |w| = 2\}$

Operatoren:

$r_1 + r_2$	$\equiv$	$r_2 + r_1$	Kommutativität von $+$
$(r_1 + r_2) + r_3$	$\equiv$	$r_1 + (r_2 + r_3)$	Assoziativität von $+$
$(r_1 r_2) r_3$	$\equiv$	$r_1 (r_2 r_3)$	Assoziativität von $\cdot$
$\emptyset r \equiv r \emptyset$	$\equiv$	$\emptyset$	Absorbierendes Element für $\cdot$
$\varepsilon r \equiv r \varepsilon$	$\equiv$	r	Neutrales Element für $\cdot$
$\emptyset + r$	$\equiv$	r	Neutrales Element für $+$
$(r_1 + r_2) r_3$	$\equiv$	$r_1 r_3 + r_2 r_3$	Distributivität links
$r_1 (r_2 + r_3)$	$\equiv$	$r_1 r_2 + r_1 r_3$	Distributivität rechts
$r + r$	$\equiv$	r	Idempotenz von $+$
$(r^*)^*$	$\equiv$	r^*	Idempotenz von *
$\emptyset^*$	$\equiv$	ε	
ε^*	$\equiv$	ε	
$\varepsilon + r^* r$	$\equiv$	r^*	
$(\varepsilon + r)^*$	$\equiv$	r^*	
$r^* r$	$\equiv$	$r r^*$	

Nicht alle Operatoren sind für alle Typen zulässig:

	Vereinigung	Konkatenation	Potenz	Kleene-Stern
Wörter	✗	$w_1 \cdot w_2$	w^n	✗
Sprachen	$L_1 \cup L_2$	$L_1 \cdot L_2$	L^n	L^*
Reguläre Ausdrücke	$r_1 + r_2$	$r_1 \cdot r_2$	✗	r^*

2.2 Endliche Automaten

Endliche Automaten sind eine andere Darstellung einer regulären Sprache. Endliche Ausdrücke lassen sich in Reguläre Ausdrücke umformen. Genauso auch anders herum.
Endliche Automaten erkennen regulären Sprachen. Endliche Ausdrücke lassen sich in Reguläre Ausdrücke umformen. Genauso auch anders herum.
Endliche Automaten lassen sich sowohl deterministisch als auch nicht-deterministisch darstellen.

2.2.1 Komplement

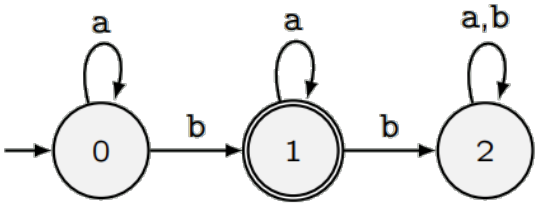
Wird durch vertauschen von End- und Nichtendzuständen erzeugt.

2.2.2 Deterministische endliche Automaten(DEA)

Ein DEA hat endlich viele Zustände. Jeder mögliche Übergang muss hierbei behandelt werden können. D.h. für das Alphabet Σ_{ab} muss von jedem Zustand sowohl ein a, als auch ein

b Übergang gegeben sein. Der Automat beginnt im Startzustand und muss im Endzustand enden. Wenn der Automat sich in einem Nicht-Endzustand befindet, befindet sich das Wort nicht in der Sprache, welche vom Automaten abgebildet wird.
Ein DEA hat endlich viele Zustände. Jeder mögliche Übergang muss hierbei behandelt werden können. D.h. für das Alphabet Σ_{ab} muss von jedem Zustand sowohl ein a, als auch ein b Übergang gegeben sein. Er terminiert wenn das Wort zu ende und Endzustand erreicht ist.
Der DEA lässt sich durch folgendes 5-Tupel darstellen:
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit den Komponenten:
Q ist eine endliche Menge von Zuständen
Σ ist ein endliches Alphabet
$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ist die Übergangsfunktion
$q_0 \in Q$ ist der Startzustand
$F \subseteq Q$ ist die Menge der Endzustände

Beispiel:



$\mathcal{A}_b = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit
- $Q = \{0, 1, 2\}$
- $\Sigma = \Sigma_{ab}$
- $\delta(0, a) = 0; \delta(0, b) = 1, \delta(1, a) = 1; \delta(1, b) = \delta(2, a) = \delta(2, b) = 2$
- $q_0 = 0$
- $F = \{1\}$

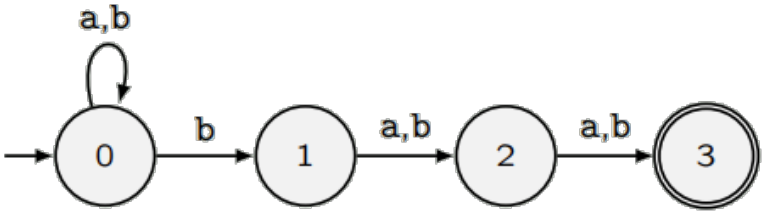
Zustand 2: „Mülleimerzustand“ (junk state), d.h. kein Wort wird mehr akzeptiert

2.2.3 Nicht-deterministische endliche Automaten(NEA)

Ein NEA hat endlich viele Zustände. Nicht jeder mögliche Übergang muss hierbei behandelt werden. D.h. für das Alphabet Σ_{ab} reicht es, nur den a-Übergang, bzw. nur den b-Übergang zu besitzen. Der Automat beginnt im Startzustand und muss im Endzustand enden. Wenn der Automat sich in einem Nicht-Endzustand befindet, befindet sich das Wort nicht in der Sprache, welche vom Automaten abgebildet wird. Zudem gibt es ε-Übergänge, diese können jederzeit verwendet werden ohne ein Eingabesymbol.
Der NEA lässt sich durch folgendes 5-Tupel darstellen:
$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ mit den Komponenten:
Q ist eine endliche Menge von Zuständen
Σ ist ein endliches Alphabet
Δ ist eine Relation über $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$
$q_0 \in Q$ ist der Startzustand

$F \subseteq Q$ ist die Menge der Endzustände

Beispiel:



$\mathcal{A}_n = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ mit

$Q = \{0, 1, 2, 3\}$

$\Sigma = \Sigma_{ab}$

$\Delta = \{(0, a, 0), (0, b, 0), (0, b, 1),$
$(1, a, 2), (1, b, 2),$
$(2, a, 3), (2, b, 3)\}$

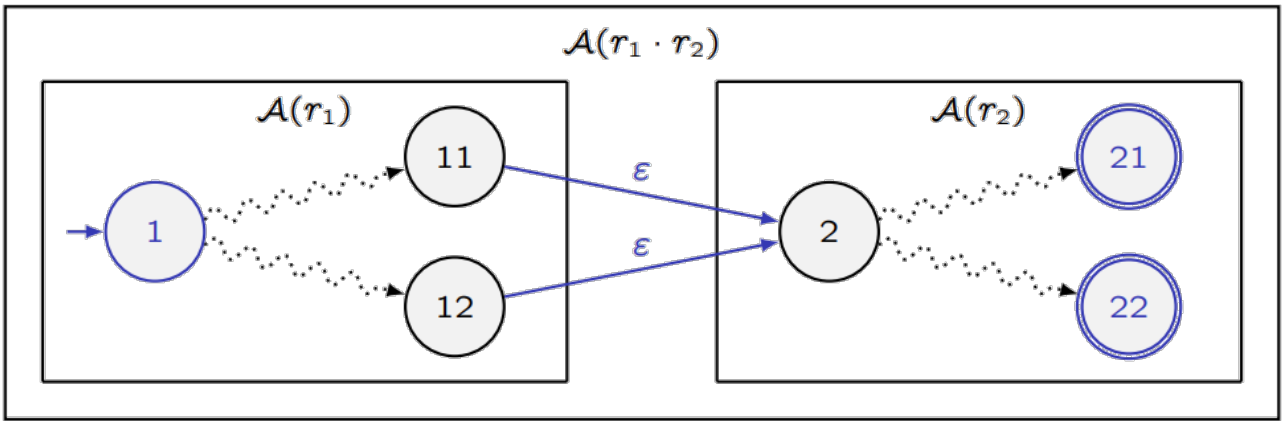
$q_0 = 0$

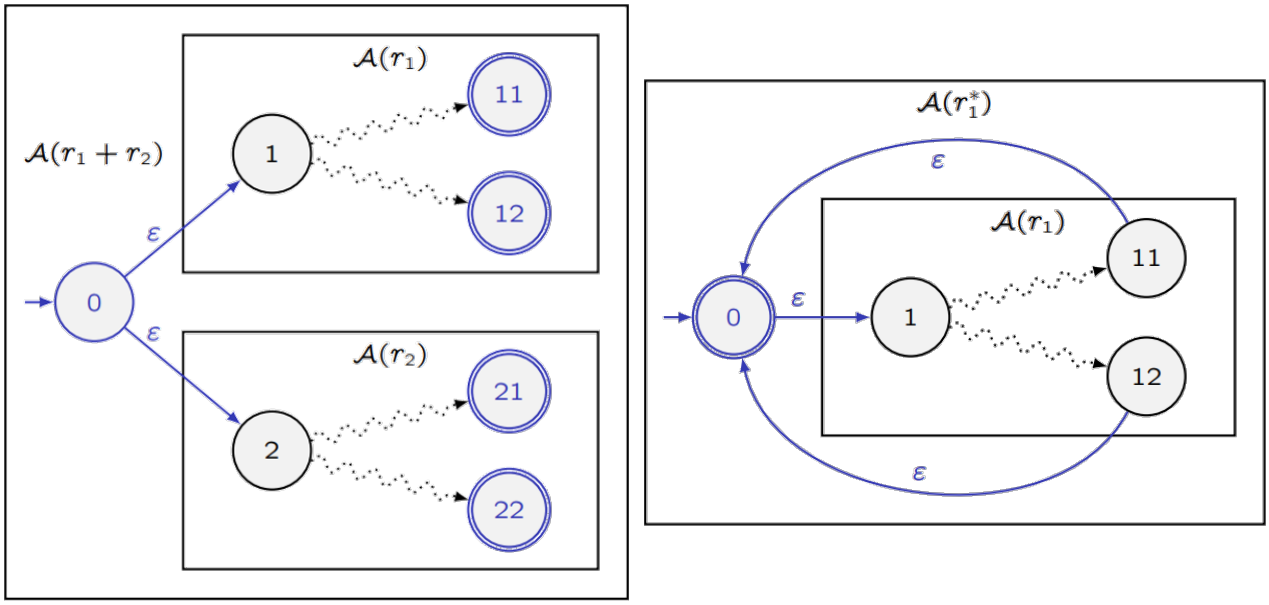
$F = \{3\}$

	$\mathcal{A}_n$	a	b	ε
$\rightarrow$	0	{0}	{0, 1}	{}
	1	{2}	{2}	{}
	2	{3}	{3}	{}
*	3	{}	{}	{}

2.2.4 Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke

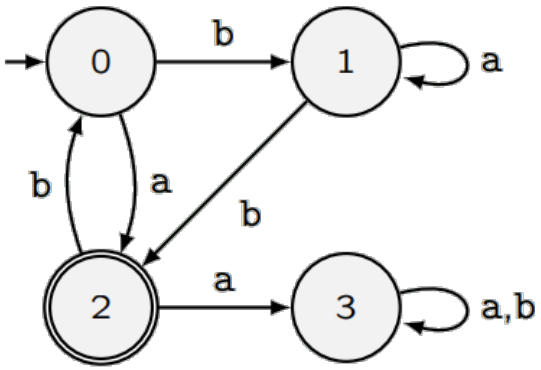
Man kann NEA und RA zusammenführen zu einem Automaten:





2.2.5 Transformation DEA zu RA

Um einen DEA zu einem RA umzuformen müssen zuerst die Gleichungen der jeweiligen Zustände aufgestellt und vereinfacht werden:



- $L_0 \equiv aL_2 + bL_1$
- $L_1 \equiv aL_1 + bL_2$
- $L_2 \equiv aL_3 + bL_0 + \varepsilon$
- $L_3 \equiv (a + b)L_3$

$$
\begin{aligned}
L_3 &\equiv (a+b)L_3 + \emptyset && \text{[neutrales Element]}\\
&\equiv (a+b)^*\emptyset && \text{[Arden]}\\
&\equiv \emptyset && \text{[absorbierendes Element]}\\
L_2 &\equiv a\emptyset + bL_0 + \varepsilon && \text{[einsetzen } L_3\text{]}\\
&\equiv \emptyset + bL_0 + \varepsilon && \text{[absorbierendes Element]}\\
&\equiv bL_0 + \varepsilon && \text{[neutrales Element]}\\
L_1 &\equiv aL_1 + b(bL_0 + \varepsilon) && \text{[einsetzen } L_2\text{]}\\
&\equiv a^*b(bL_0 + \varepsilon) && \text{[Arden]}
\end{aligned}
$$

Folglich kann man die gekürzten Gleichungen in einander einsetzen um bis zum Anfangszustand zu kommen:

- $L_0 \equiv aL_2 + bL_1$
- $L_1 \equiv a^*b(bL_0 + \varepsilon)$
- $L_2 \equiv bL_0 + \varepsilon$
- $L_3 \equiv \emptyset$

Da L_2 der Endzustand ist, bekommt die Gleichung ε hinzuaddiert!
Der vereinfachte Anfangszustand L_0 ist dann der RA zum zugehörigen DEA:

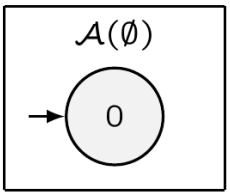
$$
\begin{aligned}
L_0 &\equiv a(bL_0 + \varepsilon) + b(a^*b(bL_0 + \varepsilon)) && \text{[einsetzen } L_1, L_2\text{]} \\
&\equiv abL_0 + a + ba^*bbL_0 + ba^*b && \text{[Distributivgesetz]} \\
&\equiv (ab + ba^*bb)L_0 + a + ba^*b && \text{[Kommutativ-,Distributivgesetz]} \\
&\equiv (ab + ba^*bb)^*(a + ba^*b) && \text{[Arden]}
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}((ab + ba^*bb)^*(a + ba^*b))$

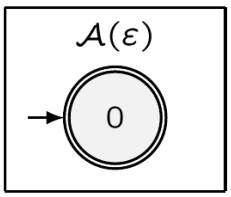
2.2.6 RA zu NEA

Aus den elementaren RA können einfach NEAs erstellt werden.

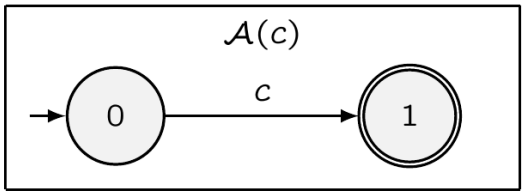
1. $\mathcal{A}(\emptyset) = (\{0\}, \Sigma, \{\}, 0, \{\})$



2. $\mathcal{A}(\varepsilon) = (\{0\}, \Sigma, \{\}, 0, \{0\})$

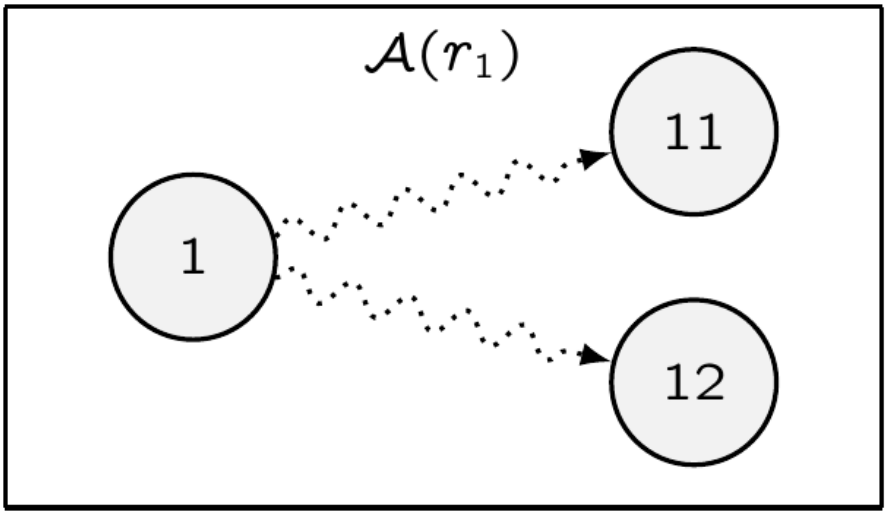


3. $\mathcal{A}(c) = (\{0, 1\}, \Sigma, \{(0, c, 1)\}, 0, \{1\})$ für alle $c \in \Sigma$

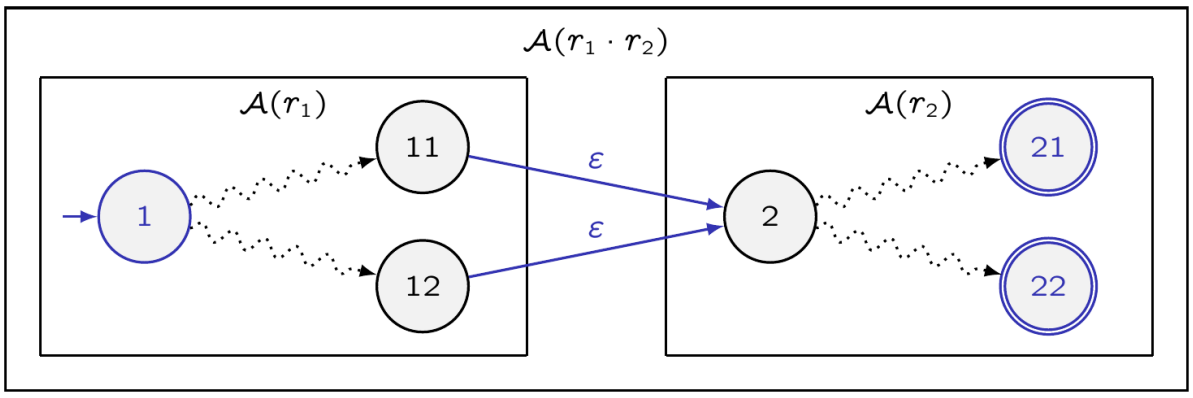


Bei komplexen RAs werden die RAs als "BlackBox"dargestellt, dabei werden die Übergänge gepunktet dargestellt.

$$\mathcal{A}(r_1) = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, 1, \{11, 12, \ldots\})$$



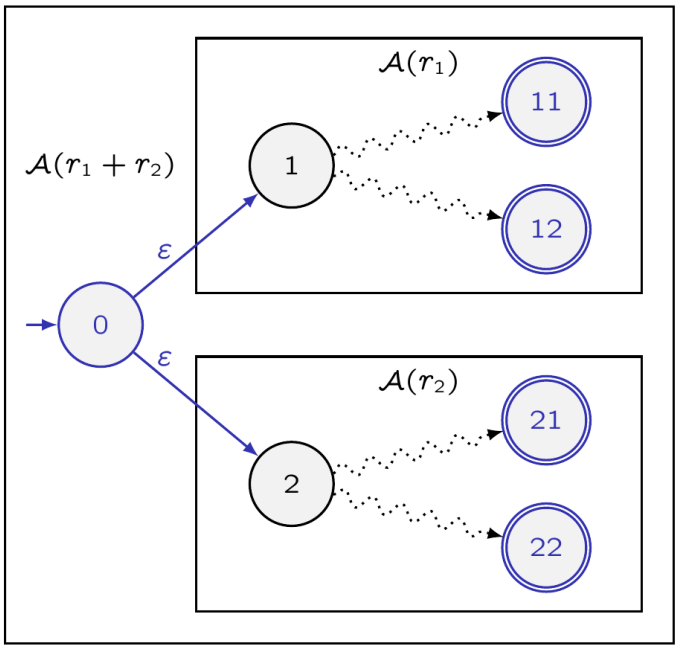
- $\mathcal{A}(r_1) = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, 1, \{11, 12, \ldots\})$
- $\mathcal{A}(r_2) = (Q_2, \Sigma, \Delta_2, 2, \{21, 22, \ldots\})$
4. $\mathcal{A}(r_1 \cdot r_2) = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(11, \varepsilon, 2), (12, \varepsilon, 2)\}, 1, \{21, 22\})$



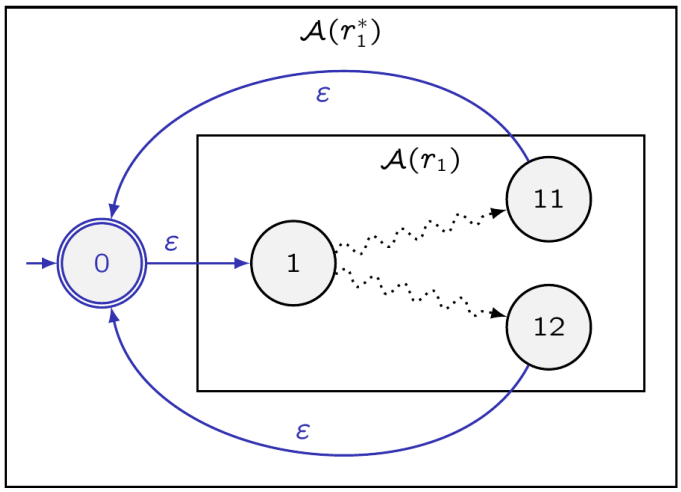
- Startzustand 1
- ε-Übergänge von 11 und 12 zu 2
- Endzustände 21 und 22

´

- $\mathcal{A}(r_1) = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, 1, \{11, 12\})$
- $\mathcal{A}(r_2) = (Q_2, \Sigma, \Delta_2, 2, \{21, 22\})$
5. $\mathcal{A}(r_1 + r_2) = (Q, \Sigma, \Delta, 0, F)$
   - $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{0\}$
   - $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(0, \varepsilon, 1), (0, \varepsilon, 2)\}$
   - $F = \{11, 12, 21, 22\}$)
- Neuer Startzustand 0
- ε-Übergänge von 0 zu 1 und 2
- Endzustände 11, 12, 21 und 22



- $\mathcal{A}(r_1) = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, 1, \{11, 12\})$
6. $\mathcal{A}(r_1^*) = (Q, \Sigma, \Delta, 0, \{0\})$
   - $Q = Q_1 \cup \{0\}$
   - $\Delta = \Delta_1 \cup \{(0, \varepsilon, 1), (11, \varepsilon, 0), (12, \varepsilon, 0)\}$
- Neuer Startzustand 0
- ε-Übergänge
  - von 0 zu 1
  - von 11 und 12 zu 0
- Endzustand 0



2.2.7 NEA zu DEA

Transformationstabelle mit neuen Zuständen erstellen. Zustandsmengen als neue Zustände definieren. Enthält Menge Endzustand, ist der neue Zustand ein Endzustand.

Übergangstabelle:

	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	$\varnothing$	q_2
$q_2{}^*$	$\varnothing$	$\varnothing$

Transformationstabelle:

	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$q_0, q_2{}^*$	$\{q_0, q_1\}$	q_0

2.2.8 DEA zu RLG

2.2.9 RLG zu NEA

2.2.10 Minimierung

Unerreichbare Zustände Entfernen. Unterscheidbare Zustände

2.2.11 Produktautomaten

2.3 Nicht-reguläre Sprachen und das Pumping-Lemma

2.4 Eigenschaften regulärer Sprachen

3 Chomsky Grammatiken und kontextfreie Sprachen

Gramatiken erzeugen formale Sprachen dar.
G=($N, \sum, P, S$) mit:

N Nichtterminalsymbole. Diese können für Regeln verwendet werden, aber dürfen nicht selbst im abgeleiteten Wort stehen.

P Ableitungsregeln. Bsp.: P=$\{S \to Aa|\varepsilon, A \to a\}$

S Startsymbol (ist nichtterminel)

3.1 Typ0 unbeschränkt

3.2 Typ1 Monoton

$\alpha \to \beta$ mit $|\alpha| \leq |\beta|$ und Ausnahme $S \to \varepsilon$, wenn S auf keiner rechten Seite ist.

3.3 Typ2 Kontextfreie

A $\to \beta$ mit A $\in$ N und $\beta \in V^*$

3.4 Typ3 rechtsregulär/-linear

A $\to$ cB mit A $\in$ N; B $\in$ N $\cup \{\varepsilon\}$; c $\in \sum \cup \{\varepsilon\}$

3.5 Cocke-Younger-Kasami(CYK)-Algorythmus

Entscheidet Wortproblem für kontextfreie Grammatiken in CNF. Bsp.:

$w =$ abacba

Regeln:

$S \to a$
$B \to b$
$B \to c$
$S \to SA$
$A \to BS$
$B \to BB$
$B \to BS$

Umgekehrte Regeln:

$SA \leftarrow S$
$BS \leftarrow A, B$
$BB \leftarrow B$

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	S	{}	S	{}	{}	S
2		B	A, B	B	B	A, B
3			S	{}	{}	S
4				B	B	A, B
5					B	A, B
6						S
$w =$	a	b	a	c	b	a

1. Wort unter Tabelle schreiben

2. Umgekehrte Regeln bilden (optional)
3. Herleitungen in Tabellen-Diagonale eintragen
4. Herleitungen der Teilwörter als Menge eintragen (alle Möglichkeiten)

3.6 Chomskynormalform CNF

Zur Entscheidung des Wortproblems. Nur Regeln mit Syntax:
1. $A \to BC$ oder 2. $A \to a$ mit $A, B, C \in Nichtterminalsymbole \ \wedge \ a \in Terminalsymbole$ und $S \to \epsilon$, wenn S auf keiner Rechten Seite ist.
Vorgehen:

1. Epsilon-Regeln entfernen
   (a) Erstelle Liste L mit $A \to \epsilon$-Regeln und allen Regeln, die auf Nichtterminalsymbole in L zeigen.
   (b) Ergänze rechte Seite der Regeln mit sich selbst mit eingesetztem ϵ für Nichtterminalsymbole $\in$ L
   (c) Wenn $S \in L$ füge Regel $S_0 \to S|\epsilon$ ein
2. Kettenregel entfernen
   (a) Erstelle Listen für Kettenregeln ausgehend von jeweiligen Nichtterminalen
   (b) Ergänze Regeln mit allen Kettenregeln
   (c) Regeln kürzen
3. überflüssige Symbole entfernen
4. Einzelne Nichtterminalsymbole auf rechter Seite ersetzen
5. Rechte Seite mit Hilfssymbolen kürzen

4 Kellerautomaten

Endlicher Automat mit unendlichem Stack, auf welchem nur der oberste/neueste Buchstabe gelesen, »gepusht« oder »gepopt« werden kann.
Syntax: A=(Q, Σ, Γ, Δ, q_0, Z)

Γ Stack-Alphabet

q_0 Startzustand

Z Startstacksymbol

5 Turing Maschine

Automaten mit endlosem Einleseband.
Terminiert wenn Endzustand erreicht und Einleseband nicht verschiebbar ist.
M=(Q, $\sum, \Gamma, \Delta, q_0$, F) mit:

Γ Vereinigung aus mindestens Blank-Symbol und Terminalsymbole: $\Gamma \supseteq \sum \cup \{\square\}$

Δ Übergangsrelationen Syntax: IST-Zustand IST-Inhalt Neuer-Inhalt Verschiebung Neuer-Zustand Bsp.: $0 \begin{pmatrix} a \\ \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ l \end{pmatrix} 1$

F Endzustände

5.1 K-Band zu 1-Band

5.2 Linear beschränkter Automat

Touring Automat mit beschränktem Band durch Start- und Endsymbol (Band: "$> abaab <$ ")

6 Entscheidbarkeit

6.1 Entscheidbar

6.2 Unentscheidbar

Halteproblem:

6.3 Semi-entscheidbar

6.4 Postsches KorrespondenzProblem (PKP)

Endliche Folge an Wortpaaren, mit nichtleeren Wörtern, über endlichem Alphabet.
Syntax: P=$((l_1, r_1), (l_2, r_2), ...(l_n, r_n))$ **Lösung:** $l_{i_1} \cdot l_{i_2} \cdot ... \cdot l_{i_n} = r_{i_1} \cdot r_{i_2} \cdot ... \cdot r_{i_n}$

7 Berechenbarkeit

8 Komplexität