



Politechnika Krakowska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Sprawozdanie z przedmiotu:

Projektowanie i Analiza Eksperymentów

Projekt nr 1 Temat:
**Jedno i dwuczynnikowa
analiza wariancji**

Wykonał: **Rafał Gęgotek**
Kierunek: Informatyka
Stopień studiów: II stopnia
Specjalizacja: Data Science
Rok akademicki: 2022/2022

Spis Treści

1. Cel Projektu	2
2. Teoretyczny opis analizy wariancji	2
3. Opis eksperymentu	3
4. Zbiór danych	3
5. Sprawdzenie założeń do analizy wariancji	4
5.1 Normalność rozkładu	4
5.2 Sprawdzenie Homoskedastyczności	8
5.3 Niezależność wariancji	9
5.4 Wnioski do założeń analizy wariancji	9
6. Jednoczynnikowa analiza wariancji	10
6.1 Ze względu na czynnik szerokości spodu	10
6.2 Ze względu na czynnik długość skrzydła	11
7. Dwuczynnikowa analiza wariancji	12
7.1 Bez integracjami	12
7.2 Z integracjami	13
8. Wnioski	16

1. Cel Projektu

Celem projektu jest przeprowadzenie analizy wariancji jednoczynnikowej oraz dwuczynnikowej zarówno z integracjami jak i bez interakcji.

Natomiast tematem doświadczalnym będzie sprawdzenie wpływu długości skrzydła oraz szerokości spodu, na czas spadania helikoptera, wykonanego z papieru metodą origami.

2. Teoretyczny opis analizy wariancji

Analiza wariancji w skrócie **ANOVA** to stosunek wariancji, którą obliczyliśmy pomiędzy badanymi grupami a średnią wariancją, którą zaobserwowaliśmy wewnątrz grup. Analiza ta jest metodą statystyczną pozwalającą na podział zaobserwowanej zmienności (wariancji) wyników na oddzielne części.

Jednym z podstawowych zagadnień w analizie wariancji jest oszacowanie tzw. Średnich Kwadratów (MS). Stosunek średnich kwadratów obliczanych dla poszczególnych czynników w odniesieniu do średniego kwadratu błędu pozwala oszacować nam wpływ każdego z czynników oddzielnie na poziom zmiennej zależnej.

Ideą analizy wariancji jest sprawdzenie czy pewne zmienne niezależne (czynniki) mają wpływ na poziom zmiennej zależnej (zmiennej testowanej, mierzonej). W zależności od rodzaju czynników stosujemy różne rodzaje analizy wariancji.

Hipoteza zerowa zakłada brak różnic między średnimi populacyjnymi, natomiast **hipoteza alternatywna** (H1) formułowana jest zazwyczaj jako "nieprawda, że H0" i mówi o tym, że średnie populacyjne różnią się w jakiś sposób.

Aby przy testowaniu układu hipotez możliwe było posługiwanie się metodami analizy wariancji muszą być spełnione poniższe **założenia**:

- zmienna zależna powinna być typu ilościowego
- Próby wybiera się losowo, a także niezależnie od siebie, z każdej z populacji.
- Każda z badanych populacji cechuje się rozkładem normalnym
- W analizowanych populacjach wariancje są takie same (homogeniczność)

Analiza wariancji występuje w dwóch odmianach:

- **Jednoczynnikowa analiza wariancji** (ang. one-way analysis of variance) jest to najprostsza forma analizy wariancji, gdzie zmienna odpowiedzi może zależeć tylko od jednego czynnika. Jednoczynnikowa ANOVA zawiera minimum dwa warunki eksperymentalne i pozwala na porównanie średnich z dwóch lub z większej ilości grup jednocześnie. Tym samym jest ona blisko związana z testem t. W przypadku tylko dwóch grup daje taki sam wynik jak test t, natomiast dla większej ilości grup jest traktowana jako jego rozszerzenie.
- W przypadku **dwuczynnikowej analizy wariancji** zmienna odpowiedzi może zależeć od dwóch czynników. Problem tej analizy jest bardziej złożony niż dla jednoczynnikowej analizy, ponieważ polega nie tylko na zbadaniu, który z dwóch czynników ma wpływ na wartość zmiennej odpowiedzi, ale także czy istnieje interakcja między nimi, czyli czy dwa czynniki współdziałają między sobą. Należy więc rozważyć również hipotezę o istnieniu interakcji.

3. Opis eksperymentu

Na podstawie opisu i modeli załączonych od prowadzącego, należy przygotować helikoptery będące obiektami pomiarowymi. Helikoptery te różnią się długościami skrzydeł oraz szerokością spodu.

Długość skrzydeł, oraz szerokość spodu są w tym przypadku czynnikami klasyfikującymi. Każdy z nich jest podzielony na 3 poziomy. Badaną cechą w eksperymencie będzie długość lotu helikoptera.

Ponieważ helikoptery składające się z 3 różnych długości skrzydeł oraz 3 różnych szerokości spodu, istnieje zatem 9 różnych możliwych helikopterów. Ponadto każdy rodzaj helikoptera posiada swoją kopię, tak więc łącznie jest 18 egzemplarzy.

Następnie dla każdego helikoptera należy wykonać 5 pomiarów czasu lotu. Aby eksperyment miał jak największy sens, powinno się wypuszczać je z jak największej możliwej wysokości.

4. Zbiór danych

Tak jak opisano wcześniej łącznie jest 18 egzemplarzy helikopterów dla których wykonano po 5 pomiarów czasu. Dane liczą łącznie 90 rekordów, w których poza czasem lotu obiektu znalazły się konkretne czynniki jakie potencjalnie miały na niego wpływać.

Czynnik długości skrzydła:

- 27 mm
- 39 mm
- 50 mm

Czynnik szerokości spodu:

- 15 mm
- 22 mm
- 28 mm

Fragment tabeli zawierającej zbiór danych poddawany analizie wariancji:

Lp	Nr_egzeplarza	Nr_pomiaru	Szerokosc_spodu	Długosc_skrzydła	Czas_lotu
1	1	1	15	27	1.37
2	1	2	15	27	1.2
3	1	3	15	27	1.35
4	1	4	15	27	1.23
5	1	5	15	27	1.31
6	2	1	15	27	1.47
7	2	2	15	27	1.32
8	2	3	15	27	1.24
9	2	4	15	27	1.62
10	2	5	15	27	1.33
11	3	1	15	39	1.93
12	3	2	15	39	2.01
13	3	3	15	39	1.69
14	3	4	15	39	1.46
15	3	5	15	39	1.67
16	4	1	15	39	1.76
17	4	2	15	39	1.69
18	4	3	15	39	1.78
19	4	4	15	39	1.88
20	4	5	15	39	1.93
21	5	1	15	50	2.42
22	5	2	15	50	2.4

5. Sprawdzenie założeń do analizy wariancji

Przy pomocy narzędzi dostępnych w programie R zostanie podana weryfikacja założeń opisanych w punkcie 2, poza pierwszym założeniem, gdyż zmienna zależna jest typu ilościowego.

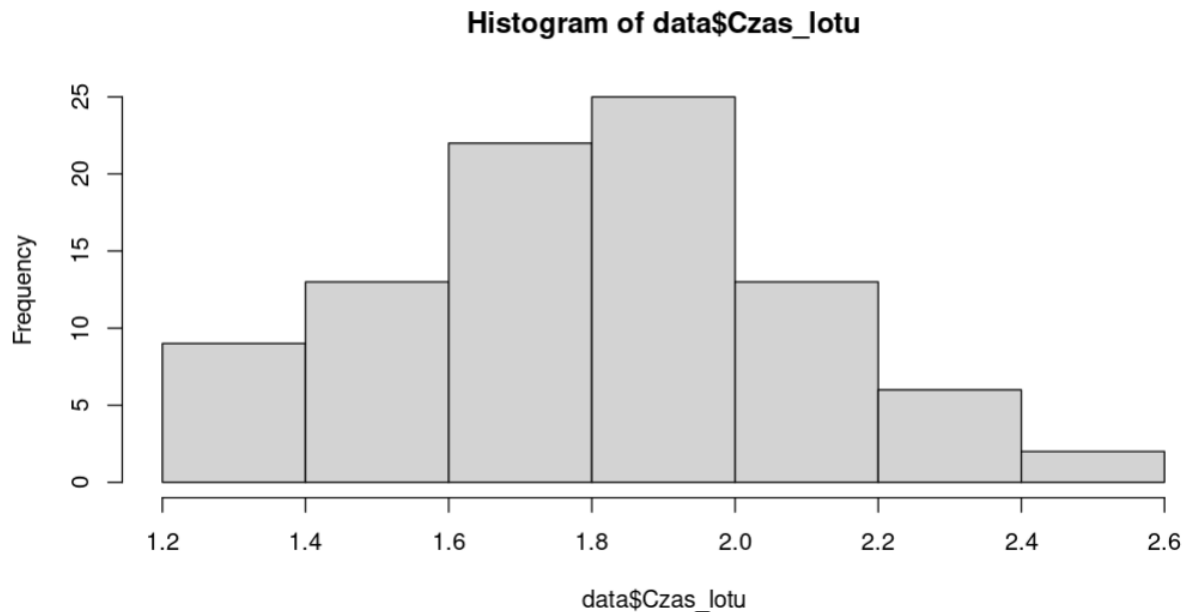
5.1 Normalność rozkładu

Z poniższych statystyk można zaobserwować, że średni czas lotu to ok 1.82s, czy chociażby to że potencjalny rozkład normalny jest prawoskośny (dodatnia skośność) i leptokurtyczny (dodatnia kurtoza).

```
Szerokosc_spodu Długosc_skrzydła Czas_lotu
15:30           27:30           Min.   :1.200
22:30           39:30           1st Qu.:1.627
28:30           50:30           Median :1.825
                                   Mean    :1.807
                                   3rd Qu.:2.000
                                   Max.    :2.420
```

```
> skewness(data$Czas_lotu)
[1] 0.03367714
> kurtosis(data$Czas_lotu)
[1] 2.656257
```

Poniżej prezentuje się wykres histogramu dla zmiennej objaśnianej Czas_lotu.

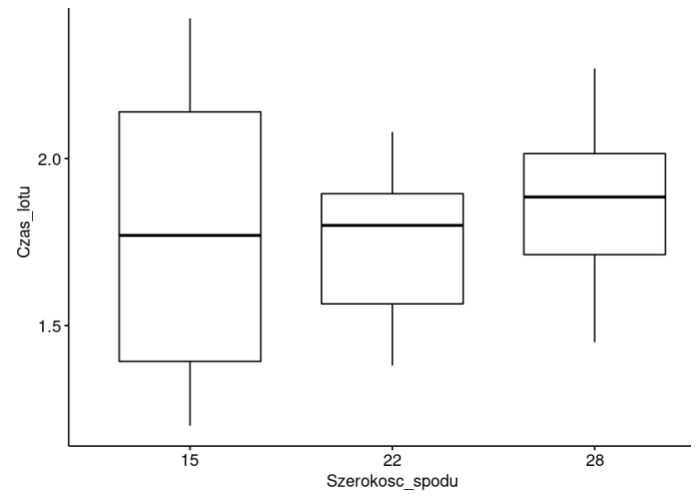
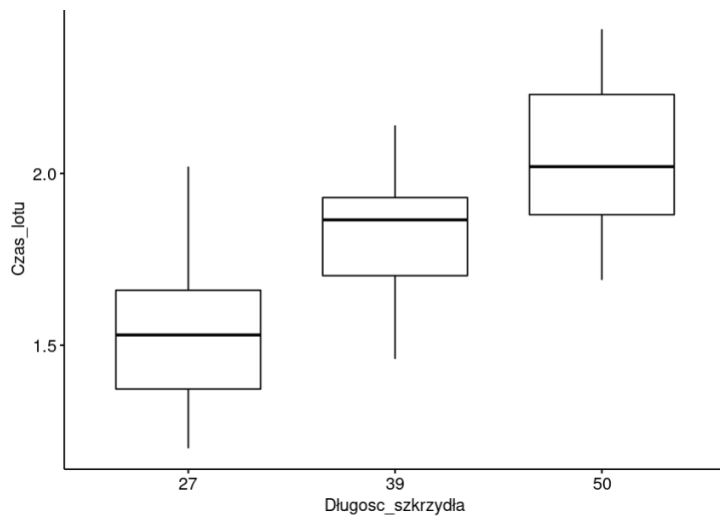


Na kolejnych statystykach i wykresach przedstawiono pogrupowane średnie wartości zmiennej objaśnianej wraz z odchyleniem standardowym oraz wykresami Box Plot i qqPlot dla każdej z grup czynnikowych. Gdzie nie ma żadnych wartości odstających, jednakże dla parametru szerokości spodu nie można stwierdzić, że występują istotne różnice statystyczne.

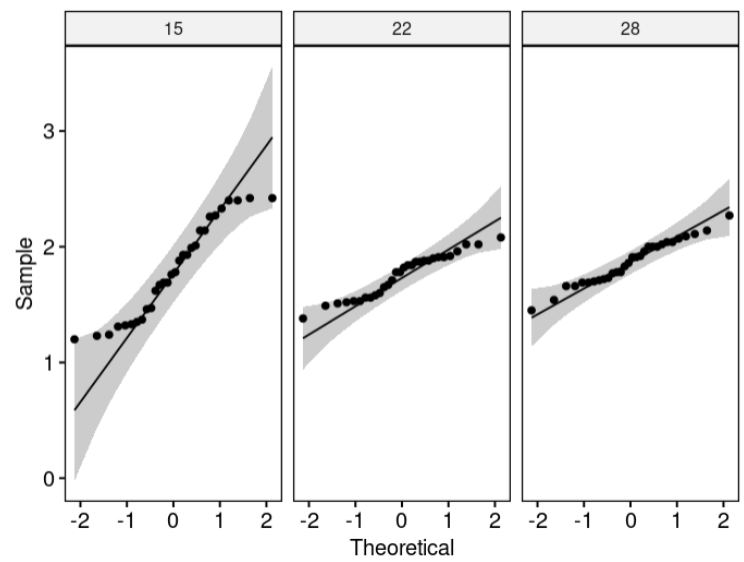
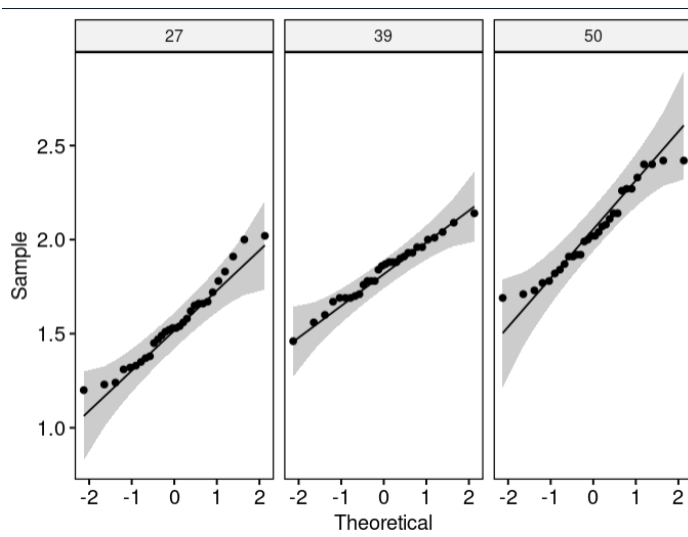
```
> data %>% group_by(Długosc_skrzydła) %>% get_summary_stats(Czas_lotu, type="mean_sd")
# A tibble: 3 × 5
  Długosc_skrzydła variable      n mean  sd
  <fct>           <chr>    <dbl> <dbl> <dbl>
1 27              Czas_lotu    30  1.55 0.218
2 39              Czas_lotu    30  1.83 0.159
3 50              Czas_lotu    30  2.04 0.225

> ggboxplot(data, x="Długosc_skrzydła", y="Czas_lotu")
> data %>% group_by(Szerokosc_spodu) %>% get_summary_stats(Czas_lotu, type="mean_sd")
# A tibble: 3 × 5
  Szerokosc_spodu variable      n mean  sd
  <fct>           <chr>    <dbl> <dbl> <dbl>
1 15              Czas_lotu    30  1.8  0.412
2 22              Czas_lotu    30  1.75 0.189
3 28              Czas_lotu    30  1.87 0.194
```

Wykresy Box Plot



Wykresy qq Plot



Główną metodą używaną do sprawdzenia normalności rozkładu jest test Shapiro, który został przedstawiony poniżej, z podziałem dla każdej grupy w ramach obu czynników.

```
> shapiro.test(splitSzerokoscSpodu$"15"$Czas_lotu)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  splitSzerokoscSpodu$"15"$Czas_lotu
W = 0.92343, p-value = 0.03295

> shapiro.test(splitSzerokoscSpodu$"22"$Czas_lotu)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  splitSzerokoscSpodu$"22"$Czas_lotu
W = 0.94305, p-value = 0.1099

> shapiro.test(splitSzerokoscSpodu$"28"$Czas_lotu)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  splitSzerokoscSpodu$"28"$Czas_lotu
W = 0.97627, p-value = 0.72

> splitDługoscSkrzydła = split(data, data$Długosc_skrzydła)
> shapiro.test(splitDługoscSkrzydła$"27"$Czas_lotu)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  splitDługoscSkrzydła$"27"$Czas_lotu
W = 0.96393, p-value = 0.3886

> shapiro.test(splitDługoscSkrzydła$"39"$Czas_lotu)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  splitDługoscSkrzydła$"39"$Czas_lotu
W = 0.98479, p-value = 0.9336

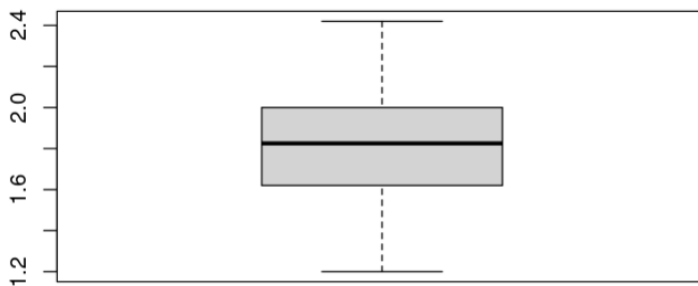
> shapiro.test(splitDługoscSkrzydła$"50"$Czas_lotu)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  splitDługoscSkrzydła$"50"$Czas_lotu
W = 0.9476, p-value = 0.1457
```

Wyniki testu mają jedynie charakter edukacyjny, gdyż ilość pomiarów każdej z grób liczy 15 pozycji. Mimo to można zauważyć, że dla 5 z 6 grup, wartość p-value jest większa od 5%, co jest głównym warunkiem, na podstawie którego można stwierdzić brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, a więc rozkład jest normalny. Jednakże test lepiej będzie oceniać normalność, przy zastosowaniu go na całym zbiorze danych.

W związku z powyższym uwzględniając wszystkie dane, tak prezentują się wykres Box Plot, dla sprawdzenia wartości odstających oraz test Shapiro dla normalności rozkładu (brak podstaw do odrzucenia H_0).



```
> shapiro.test(data$Czas_lotu)

Shapiro-Wilk normality test

data:  data$Czas_lotu
W = 0.98634, p-value = 0.4713
```

Biorąc pod uwagę wszystkie pokazane powyżej czynniki, a więc skośność, kurtozę, histogram oraz testy Shapiro można potwierdzić normalność rozkładu, oraz brak wartości odstających (wykres boxPlot).

5.2 Sprawdzenie Homoskedastyczności

W celu zbadania homoskedastyczności zostały wykorzystane Test Levene'a oraz Bartłeta. Test Levene'a jest alternatywą dla Bartłeta, ale jest mniej wrażliwy na odstępstwa od normalności. Dla obu jak technik jeżeli p-value jest mniejsze niż 5% to możemy stwierdzić brak wyraźnych zmian wariancji reszt.

```
> leveneTest(data = data, Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
      Df F value    Pr(>F)
group 2  17.169 5.189e-07 ***
      87
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> leveneTest(data = data, Czas_lotu ~ Długosc_skrzydła)
Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
      Df F value Pr(>F)
group 2   1.6834 0.1917
      87
```

```
> bartlett.test(Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu, data)

Bartlett test of homogeneity of variances

data:  Czas_lotu by Szerokosc_spodu
Bartlett's K-squared = 24.241, df = 2, p-value = 5.447e-06

> bartlett.test(Czas_lotu ~ Długosc_skrzydła, data)

Bartlett test of homogeneity of variances

data:  Czas_lotu by Długosc_skrzydła
Bartlett's K-squared = 3.8139, df = 2, p-value = 0.1485
```

Dla czynnika długości skrzydła nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Niestety dla parametru szerokości spodu oba testy wykazały wartość p większą niż 5%, przez co założenie homoskedastyczności reszt nie jest spełnione.
*Jednakże biorąc pod uwagę charakter edukacyjny tego projektu, to pomimo takiego rezultatu zostaną wykonane dalsze czynności analizy wariancji.

5.3 Niezależność wariancji

Niezależność wariancji została przedstawiona na wykorzystaniu testu Pairwise z ustawieniem korekty typu Bonferroniego.

```
> pairwise_t_test(data = data, Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu, p.adjust.method="bonferroni")
# A tibble: 3 × 9
  .y.      group1 group2    n1    n2      p p.signif p.adj p.adj.signif
* <chr>    <chr>  <chr>  <int> <int>  <dbl> <chr>    <dbl> <chr>
1 Czas_lotu 15    22      30    30 0.516 ns      1      ns
2 Czas_lotu 15    28      30    30 0.358 ns      1      ns
3 Czas_lotu 22    28      30    30 0.118 ns     0.355 ns
> pairwise_t_test(data = data, Czas_lotu ~ Dlugosc_skrzydla, p.adjust.method="bonferroni")
# A tibble: 3 × 9
  .y.      group1 group2    n1    n2      p p.signif      p.adj p.adj.signif
* <chr>    <chr>  <chr>  <int> <int>  <dbl> <chr>    <dbl> <chr>
1 Czas_lotu 27    39      30    30 5.1e- 7 **** 1.53e- 6 ****
2 Czas_lotu 27    50      30    30 5.64e-15 **** 1.69e-14 ****
3 Czas_lotu 39    50      30    30 1.27e- 4 *** 3.8e- 4 ***
```

Na podstawie wyników, można stwierdzić że wszystkie porównania dotyczące grup dla parametru długości lotu są statystycznie istotne, gdyż wartość p-value jest zdecydowanie niższa niż 5%. Natomiast dla parametru szerokości spodu sytuacja jest odwrotna, co również byłoby podstawą, do braku klasyfikacji tego parametru w ramach analizy wariancji.

Jednakże biorąc pod uwagę fakt wyboru helikopterów do eksperymentu, jako losowego doboru szerokości spodu i długości skrzydeł, można uznać, iż założenie niezależności wariancji jest spełnione.

5.4 Wnioski do założeń analizy wariancji

Czynnik długości skrzydła spełnia wszystkie wskazane założenia wariancji. Odwrotnie sytuacja wygląda dla parametru szerokości spodu, który na tym etapie powinien zostać odrzucony do dalszej analizy z powodu niespełnienia warunku homoskedastyczności.

6. Jednoczynnikowa analiza wariancji

6.1 Ze względu na czynnik szerokości spodu

Analiza wariancji jednoczynnikowej wykazała, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, gdyż wartość $\text{Pr}(> F)$ jest większe od 5%. Tak więc nie ma znaczących różnic, co również potwierdza test Tukeya, gdzie dla każdej grupy wartości są znacznie większe niż 5%, przez co możemy wnioskować, że średnie między grupami mogą być możliwie równe. W związku z powyższym adekwatne jest również przeprowadzenie testu Kruksela Wallisa. Jego rezultat wskazuje, że średnie pomiędzy grupami mogą być możliwie równe.

```
> daneanova <- lm(Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu, data = data)
> anova(daneanova)
Analysis of Variance Table

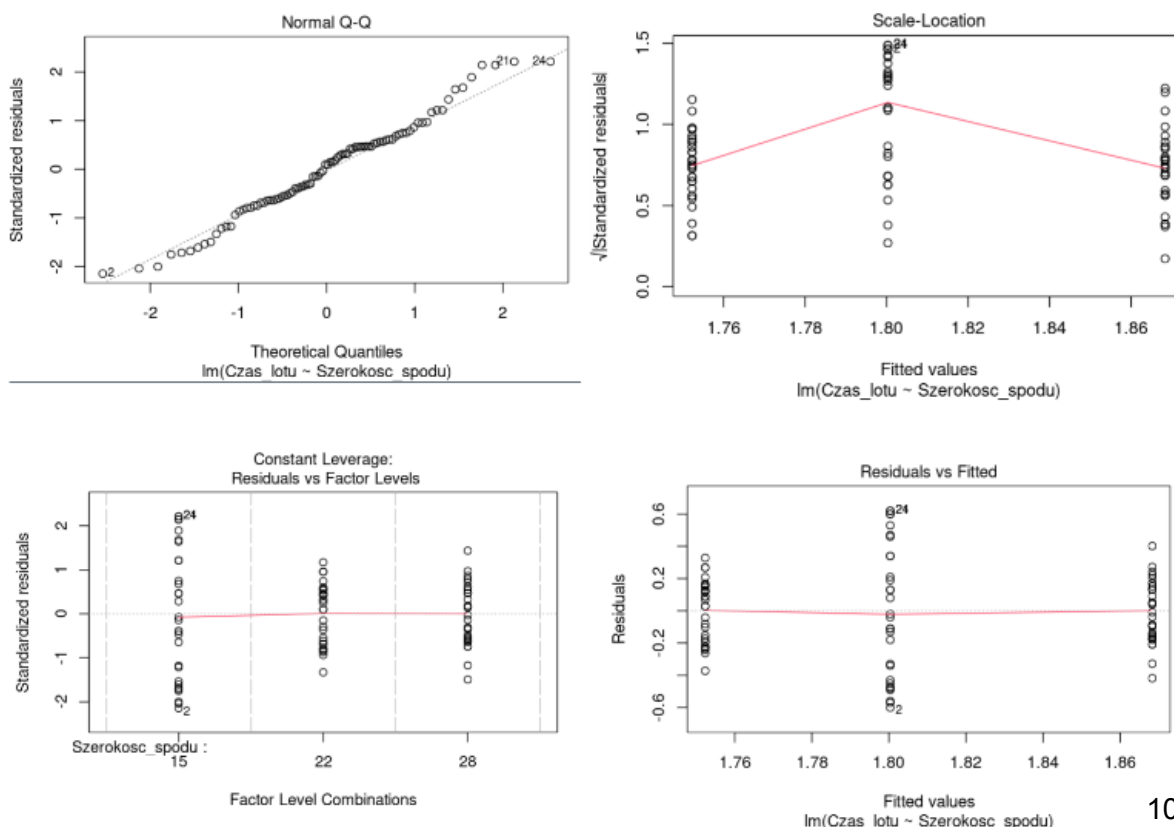
Response: Czas_lotu
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Szerokosc_spodu  2  0.2038  0.101920  1.2564  0.2898
Residuals      87  7.0577  0.081122
> TukeyHSD(aov(daneanova))
Tukey multiple comparisons of means
 95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = daneanova)

$Szerokosc_spodu
      diff       lwr       upr    p adj
22-15 -0.048 -0.2233551  0.1273551 0.7913349
28-15  0.068 -0.1073551  0.2433551 0.6262477
28-22  0.116 -0.0593551  0.2913551 0.2608378

> data %>% kruskal_test(Czas_lotu~Szerokosc_spodu)
# A tibble: 1 × 6
  .y.      n statistic    df    p method
* <chr> <int>    <dbl> <int> <dbl> <chr>
1 Czas_lotu    90      3.29     2 0.193 Kruskal-Wallis
```

Poniżej znajdują się wykresy opisujące ten model:



6.2 Ze względu na czynnik długość skrzydła

Analiza wariancji jednoczynnikowej w tym przypadku wykazała, że można odrzucić hipotezę zerowej, gdyż wartość $\Pr(>F)$ jest znacznie mniejsza niż 5%. W tym przypadku adekwatne było wykonanie testu tukeya, który to potwierdził, że są zauważalne różnice, gdyż wartości p_{adj} są również zdecydowanie mniejsze od 5%. Podsumowując nie ma różnic między grupami, biorąc pod uwagę czynnik długości skrzydła.

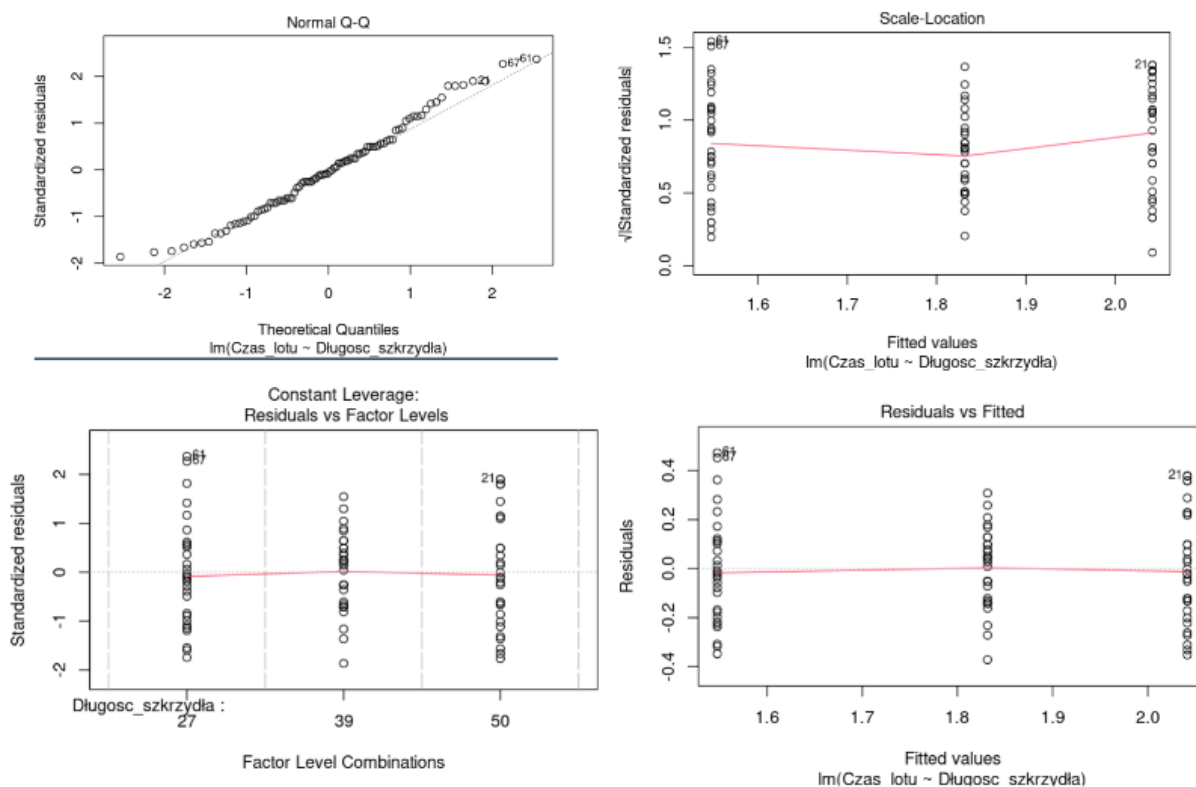
```
> daneanova <- lm(Czas_lotu ~ Długosc_skrzydła, data = data)
> anova(daneanova)
Analysis of Variance Table

Response: Czas_lotu
              Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Długosc_skrzydła  2 3.6879  1.84396   44.892 4.03e-14 ***
Residuals        87 3.5736  0.04108
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> TukeyHSD(aov(daneanova))
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = daneanova)

$Długosc_skrzydła
      diff      lwr      upr    p adj
39-27  0.284 0.15922157 0.4087784 0.0000015
50-27  0.494 0.36922157 0.6187784 0.0000000
50-39  0.210 0.08522157 0.3347784 0.0003694
```

Poniżej znajdują się wykresy opisujące ten model:



7. Dwuczynnikowa analiza wariancji

7.1 Bez integracjami

Na wstępie została sprawdzona homoskedastyczność reszt, na podstawie testu Breuscha-Pagana, w wyniku którego wartość p-value była zdecydowanie mniejsza niż 5%, przez co warunek nie został spełniony.

```
> bptest(res.aov3)

studentized Breusch-Pagan test

data:  res.aov3
BP = 18.332, df = 4, p-value = 0.001063
```

Zastosowanie dwuczynnikowej analizy wariancji wpłynęło pozytywnie na istotność czynnika szerokości spodu, którego wartość p wynosi 0.08, co nadal jest powyżej 5%. Dlatego też nadal istotnym parametrem jest tylko czynnik długości skrzydła, co również potwierdza test Tukeya

```
> #Dwuczynnikowa analiza wariancji bez integracji
> res.aov3 <- aov(Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu + Długosc_skrzydła , data = data)
> summary(res.aov3)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Szerokosc_spodu	2	0.204	0.1019	2.571	0.0824 .
Długosc_skrzydła	2	3.688	1.8440	46.513	2.26e-14 ***
Residuals	85	3.370	0.0396		

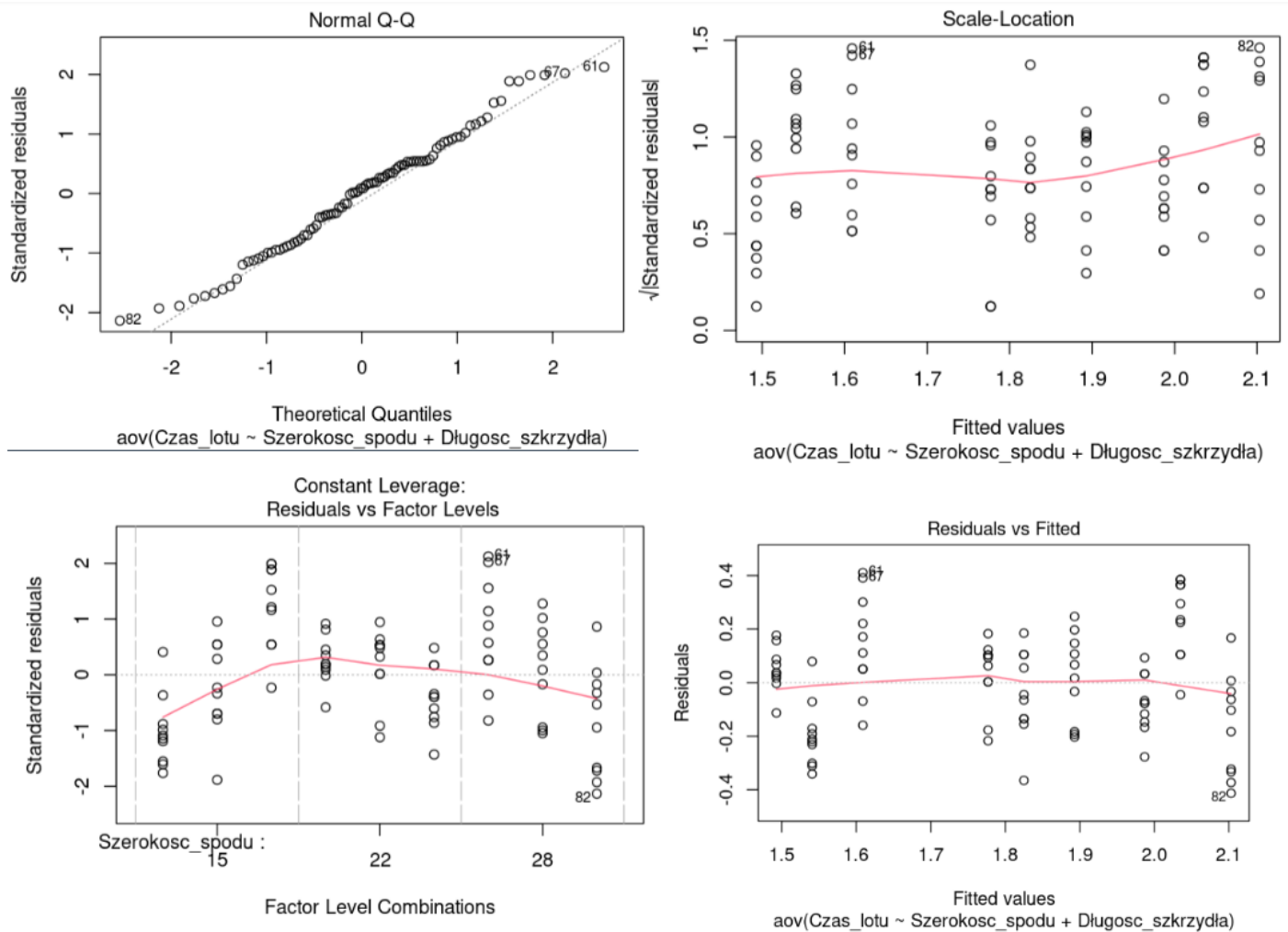
```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> TukeyHSD(res.aov3)
Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu + Długosc_skrzydła, data = data)

$Szerokosc_spodu
      diff      lwr      upr      p adj
22-15 -0.048 -0.170634701 0.0746347 0.6206093
28-15  0.068 -0.054634701 0.1906347 0.3865878
28-22  0.116 -0.006634701 0.2386347 0.0676980

$Długosc_skrzydła
      diff      lwr      upr      p adj
39-27  0.284  0.1613653 0.4066347 0.0000011
50-27  0.494  0.3713653 0.6166347 0.0000000
50-39  0.210  0.0873653 0.3326347 0.0002907
```

Poniżej znajdują się wykresy opisujące model bez interakcji:



7.2 Z integracjami

Ponownie na wstępie wykonano test Breuscha-Pagana, który w tym przypadku wyszedł pozytywnie i został spełniony warunek dotyczący homoskedastyczności reszt (p-value znacząco wyższe niż 5%).

```
> bptest(res.aov4)

studentized Breusch-Pagan test

data:  res.aov4
BP = 11.154, df = 8, p-value = 0.1931
```



```

> #Dwuczynnikowa analiza wariancji z integracjami
> res.aov4 <- aov(Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu * Dlugosc_skrzydla, data = data)
> summary(res.aov4)

```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Szerokosc_spodu	2	0.204	0.1019	4.611	0.0127 *
Dlugosc_skrzydla	2	3.688	1.8440	83.422	< 2e-16 ***
Szerokosc_spodu:Dlugosc_skrzydla	4	1.579	0.3948	17.862	1.51e-10 ***
Residuals	81	1.790	0.0221		

```

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> TukeyHSD(res.aov4)
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = Czas_lotu ~ Szerokosc_spodu * Dlugosc_skrzydla, data = data)

$Szerokosc_spodu
      diff      lwr      upr    p adj
22-15 -0.048 -0.13965212 0.04365212 0.4273200
28-15  0.068 -0.02365212 0.15965212 0.1856873
28-22  0.116  0.02434788 0.20765212 0.0093265

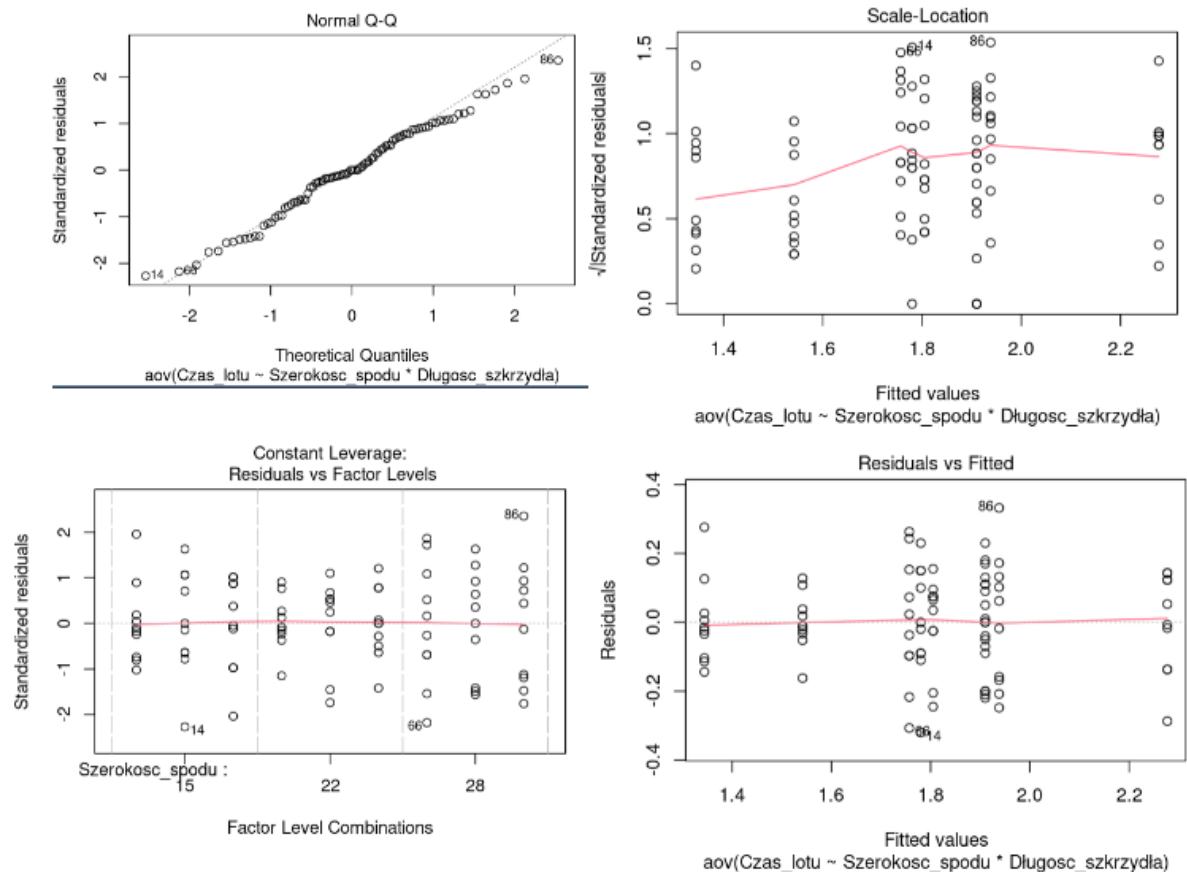
$Dlugosc_skrzydla
      diff      lwr      upr    p adj
39-27  0.284  0.1923479 0.3756521 0.0e+00
50-27  0.494  0.4023479 0.5856521 0.0e+00
50-39  0.210  0.1183479 0.3016521 1.5e-06

$`Szerokosc_spodu:Dlugosc_skrzydla`
      diff      lwr      upr    p adj
22:27-15:27 1.980000e-01 -0.013914861 0.4099149 0.0859834
28:27-15:27 4.130000e-01  0.201085139 0.6249149 0.0000008
15:39-15:27 4.360000e-01  0.224085139 0.6479149 0.0000002
22:39-15:27 4.610000e-01  0.249085139 0.6729149 0.0000000
28:39-15:27 5.660000e-01  0.354085139 0.7779149 0.0000000
15:50-15:27 9.330000e-01  0.721085139 1.1449149 0.0000000
22:50-15:27 5.660000e-01  0.354085139 0.7779149 0.0000000
28:50-15:27 5.940000e-01  0.382085139 0.8059149 0.0000000
28:27-22:27 2.150000e-01  0.003085139 0.4269149 0.0440779
15:39-22:27 2.380000e-01  0.026085139 0.4499149 0.0161944
22:39-22:27 2.630000e-01  0.051085139 0.4749149 0.0048860
28:39-22:27 3.680000e-01  0.156085139 0.5799149 0.0000129
15:50-22:27 7.350000e-01  0.523085139 0.9469149 0.0000000
22:50-22:27 3.680000e-01  0.156085139 0.5799149 0.0000129
28:50-22:27 3.960000e-01  0.184085139 0.6079149 0.0000022
15:39-28:27 2.300000e-02 -0.188914861 0.2349149 0.9999934
22:39-28:27 4.800000e-02 -0.163914861 0.2599149 0.9983359
28:39-28:27 1.530000e-01 -0.058914861 0.3649149 0.3538131
15:50-28:27 5.200000e-01  0.308085139 0.7319149 0.0000000
22:50-28:27 1.530000e-01 -0.058914861 0.3649149 0.3538131
28:50-28:27 1.810000e-01 -0.030914861 0.3929149 0.1565234
22:39-15:39 2.500000e-02 -0.186914861 0.2369149 0.9999875
28:39-15:39 1.300000e-01 -0.081914861 0.3419149 0.5783485
15:50-15:39 4.970000e-01  0.285085139 0.7089149 0.0000000
22:50-15:39 1.300000e-01 -0.081914861 0.3419149 0.5783485
28:50-15:39 1.580000e-01 -0.053914861 0.3699149 0.3110453
28:39-22:39 1.050000e-01 -0.106914861 0.3169149 0.8131225
15:50-22:39 4.720000e-01  0.260085139 0.6839149 0.0000000
22:50-22:39 1.050000e-01 -0.106914861 0.3169149 0.8131225
28:50-22:39 1.330000e-01 -0.078914861 0.3449149 0.5477048
15:50-28:39 3.670000e-01  0.155085139 0.5789149 0.0000138
22:50-28:39 2.220446e-16 -0.211914861 0.2119149 1.0000000
28:50-28:39 2.800000e-02 -0.183914861 0.2399149 0.9999699
22:50-15:50 -3.670000e-01 -0.578914861 -0.1550851 0.0000138
28:50-15:50 -3.390000e-01 -0.550914861 -0.1270851 0.0000747
28:50-22:50 2.800000e-02 -0.183914861 0.2399149 0.9999699

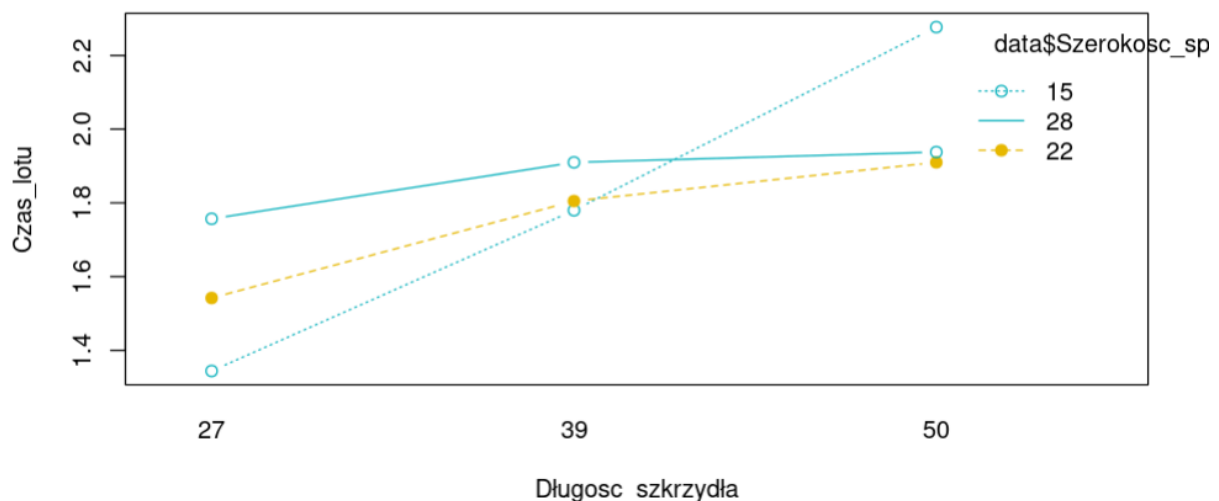
```

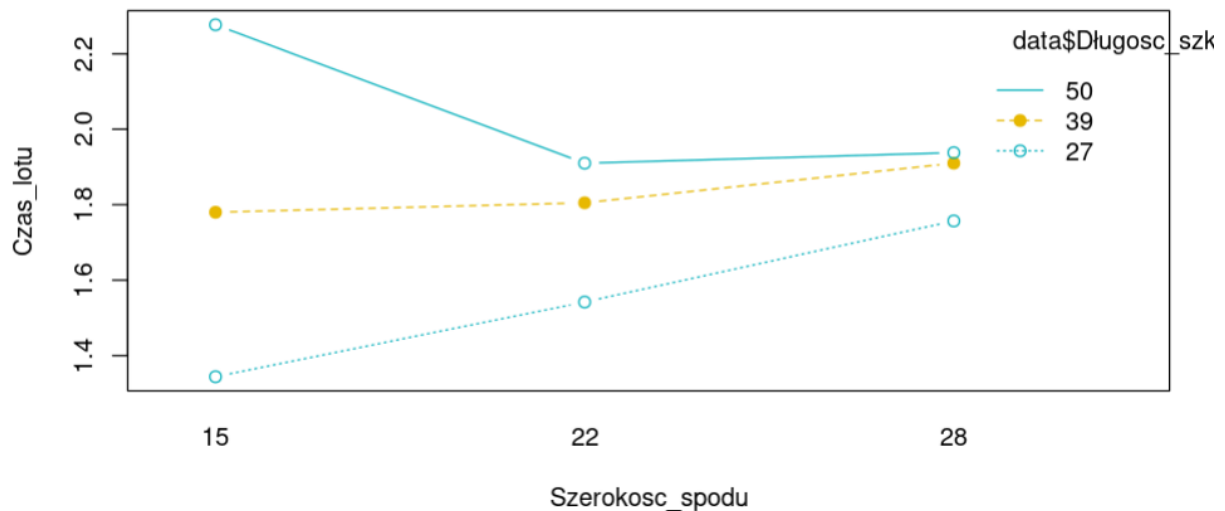
Dwuczynnikowa analiza wariancji z integracjami wskazała na istotność obu zastosowanych czynników. Również szerokość spodu osiągnęła wartość p zauważalnie mniejszą niż 5%. Dodatkowo istotna statystycznie jest również interakcja między parametrami. Najlepiej z czynników wypada długość skrzydła. Natomiast w rezultacie testu Tukeya dla tego modelu widać, że dla części kombinacji wartość p jest większa od 5%.

Poniżej znajdują się wykresy opisujące model z interakcjami:



Na kolejnych wykresach została przedstawiona interakcja między grupami.





8. Wnioski

Na podstawie przedstawionych statystyk, wykresów, oraz użytych narzędzi testowych można wyciągnąć konkretne wnioski.

Jednoczynnikowa analiza wariancji dla czynnika szerokości spodu nie wykazała zależności pomiędzy czasem lotu helikoptera. Dodatkowo należy zaznaczyć, że dla tego modelu nie zostały spełnione założenia wariancji, z powodu homoskedastyczności.

Natomiast dla czynnika długości skrzydła, jednoczynnikowa analiza wariancji wykazała istotność, a czas lotu helikoptera jest większy wraz z długością skrzydła. W tym przypadku założenia wariancji zostały spełnione

Dla dwuczynnikowej analizy wariancji można zaobserwować, że wykorzystanie iteracji dało pozytywny efekt, w taki sposób że oba czynniki wykazały istotność.