Badanie przebiegu zmienności funkcji

Przemysław Sankowski

19.01.2018

Spis treści

1 Wprowadzenie **2**

2 Wyznaczenie dziedziny funkcji **3**

3 Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji **3**

4 Wyznaczenie punktu przecięcia z osią Oy **3**

5 Wyznaczenie granic dziedziny **4**

6 Wyznaczenie asymptot **5**

7 Wyznaczenie przedziałów monotoniczności **6**

8 Wyznaczenie ekstremów **6**

9 Wyznaczenie przedziałów wklęsłości i wypukłości **7**

10 Wyznaczenie punktów przegięcia **8**

1 Wprowadzenie

Żeby uzyskać przebieg zmienności funkcji należy wyznaczyc:

1. Dziedzinę.
2. Miejsca zerowe.
3. Punkt przecięcia z osią Oy.
4. Granice na krańcach dziedziny.
5.Asymptoty.
6.Przedziały monotoniczności.
7.Ekstrema.
8.Przedziały wklęsłości i wypukłości.
9.Punkty przegięcia.

Do badania powyższych własności używamy drugiej pochodnej funkcji. Na końcu rysujemy wykres funkcji i odczytujemy z niego zbiór wartości funkcji.

Na przykład rozwiązania weźmy funkcję:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2} + 1$$

2 Wyznaczenie dziedziny funkcji

$$x^2 - 2 = 0 \tag{1}$$

$$x^2 = 2 \tag{2}$$

$$x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = \sqrt{2} \tag{3}$$

A zatem dziedzina funkji to:

$$\mathbb{R} \backslash \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

3 Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji

$$\frac{1}{x^2 - 2} + 1 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{x^2 - 2} = 1 \tag{5}$$

$$1 = -(x^2 - 2) \tag{6}$$

$$x^2 = 1 \tag{7}$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \tag{8}$$

4 Wyznaczenie punktu przecięcia z osią Oy

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 2} + 1 = \frac{1}{-2} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \tag{9}$$

Zatem punkt przecięcia z osią Oy to:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

5 Wyznaczenie granic dziedziny

Należy wyznaczyć granice funkcji w $+\infty$ i $-\infty$ oraz dla x'ów przerywających ciągłość funkcji, czyli dla krawędzi tej części funkcji, która znajduje się poza dziedziną. W naszym przypadku to $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$ (3).
Zacznijmy od granic w nieskończonościach:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-2}+1\right) = \left[\frac{1}{+\infty}+1\right] = [0+1] = 1 \quad (10)$$

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = \lim_{n\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-2}+1\right) = \left[\frac{1}{-\infty}+1\right] = [0+1] = 1 \quad (11)$$

Otrzymujemy w ten sposób asymptotę poziomą wyrażoną wzorem $y = 1$. Teraz obliczamy granicę w punktach nieciągłości. Zacznijmy od granicy lewostronnej z $\sqrt{2}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}^-}\left(\frac{1}{x^2-2}+1\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}^{-}-2}+1\right] = \left[\frac{1}{0^-}+1\right] = (12)$$
$$= [-\infty+1] = -\infty$$

Następnie granicę prawostronną z $\sqrt{2}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{2}^+}\left(\frac{1}{x^2-2}+1\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}^{+}-2}+1\right] = \left[\frac{1}{0^+}+1\right] = (13)$$
$$= [+\infty+1] = +\infty$$

Ze względu na to, że granice wyliczone w powyższych równaniach są różne, granica dla $x = \sqrt{2}$ nie istnieje.
Następnie należy wyliczyć granicę dla $x = -\sqrt{2}$:

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\sqrt{2}^-}\left(\frac{1}{x^2-2}+1\right) = \left[\frac{1}{-\sqrt{2}^{+}-2}+1\right] = \left[\frac{1}{2^+-2}+1\right] = (14)$$
$$= \left[\frac{1}{0^+}+1\right] = [+\infty+1] = +\infty \quad (15)$$

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\sqrt{2}^+} \left(\frac{1}{x^2-2}+1\right) = \left[\frac{1}{-\sqrt{2}^+ - 2}+1\right] = \left[\frac{1}{0^-}+1\right] = (16)$$
$$= [-\infty + 1] = -\infty$$

Granica dla $x = -\sqrt{2}$ również nie istnieje.

6 Wyznaczenie asymptot

Asymptoty pionowe to proste pionowe przechodzące przez punkty nieciągłości funkcji, czyli znajdujące się w $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$ (3)
Asypmtoty poziome istnieją, jeżeli granice w $+\infty$ i $-\infty$ istnieją i nie są nieskończone. Z równań (10) i (11) wynika, że asymptota pionowa istnieje, a jej wartość to $y = 1$.

W tym przykładzie **asymptoty ukośne** nie istnieją, ale normalnie wyznaczamy je wzorami:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$$

Jeśli obie te granice są skończone, to **asymptota ukośna prawostronna** opisana jest równaniem:

$$y = ax + b$$

Tak samo obliczamy **asymptotę ukośną lewostronną**, tylko że liczymy granice w $-\infty$.

7 Wyznaczenie przedziałów monotoniczności

Aby wyznaczyć przedziały monotoniczności (oraz ekstrema) musimy obliczyć pochodną funkcji.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2-2} + 1\right)' = \frac{-2x}{(x^2-2)^2} \tag{17}$$

Aby policzyć pochodną skorzystaliśmy ze wzorów z [1] Funkcja f(x) jest **rosnąca** jeśli $f'(x) > 0$, **malejąca** natomiast kiedy $f'(x) < 0$, należy więc rozwiązać obie te nierówności.

$$f'(x) > 0 \rightarrow \frac{-2x}{(x^2-2)}^2 > 0 \rightarrow -2x > 0 \rightarrow x < 0 \tag{18}$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow \frac{-2x}{(x^2-2)}^2 < 0 \rightarrow -2x < 0 \rightarrow x > 0 \tag{19}$$

Z powyższych równań wynika, że funkcja jest rosnąca dla $x \in (-\infty; 0)$, a malejąca dla $x \in (0; +\infty)$

8 Wyznaczenie ekstremów

Do obliczenia ekstremów potrzebujemy pochodnej, którą wyliczyliśmy już w równaniu 17. Funkcja może mieć ekstremum tylko w tych miejscach gdzie jej pochodna się zeruje. Dodatkowo aby ekstremum istniało, to funkcja musi w danym punkcie zmienić monotoniczność. Mogą być dwie sytuacje:

∘ Jeśli funkcja była rosnąca i w pewnym momencie zaczyna maleć, to mamy ekstremum maksimum (wykres lokalnie przypomina górkę)
∘ Jeśli funkcja była malejąca i w pewnym momencie zaczyna rosnąć, to mamy ekstremum minimum (wykres lokalnie przypomina dolinę)
Zaczynamy od znalezienia x'ów dla których $f'(x) = 0$, liczymy więc.

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-2x}{(x^2-2)}^2 = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \tag{20}$$

Następnie należy sprawdzić, czy funkcja w punkcie $x = 0$ zmienia monotoniczność.

Ustaliliśmy już, że dla $x \in (-\infty; 0)$ funkcja f(x) jest rosnąca, a dla $x \in (0; +\infty)$ - malejąca, zatem jest to ekstremum minimum, którego wartość należy wyliczyć z równania f(0):

$$f'(0) = \frac{1}{0^2 - 2} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \tag{21}$$

9 Wyznaczenie przedziałów wklęsłości i wypukłości

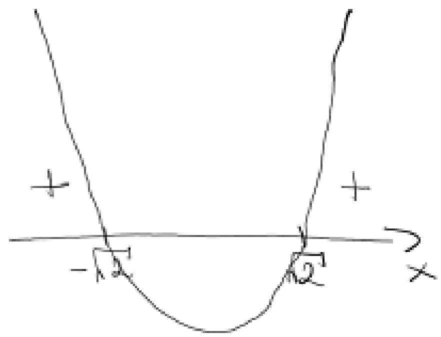
Aby wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości (oraz punkty przegięcia), to musimy obliczyć drugą pochodną funkcji. Zatem liczymy:

$$f''(x) = \left(\frac{-2x}{(x^2 - 2)^2}\right)' = \cdots = \frac{6x^4 - 8x^2 - 8}{(x^2 - 2)^4} \tag{22}$$

Ponownie skorzystaliśmy z wzorów z [1]
Funkcja f(x) jest **wypukła** kiedy $f''(x) > 0$, a **wklęsła** kiedy $f''(x) < 0$.
Na początku wyznaczymy przedziały w których funkcja jest wypukła, czyli rozwiążemy nierówność:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \rightarrow \frac{6x^4 - 8x^2 - 8}{(x^2 - 2)^4} > 0 \rightarrow 6x^4 - 8x^2 - 8 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow 6x^4 - 8x^2 - 8 = 0 \rightarrow t = x^2 [t > 0] \rightarrow 6t^2 - 8t - 8 = 0 \\ \triangle = 64 - 4 * 6 * (-8) = 256 \\ \sqrt{\triangle} = 16 \\ t_1 = -\frac{8}{12} < 0 \\ t_2 = 2 < 0 \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2} \cup x = -\sqrt{2} \end{aligned} \tag{23}$$

Zatem miejsca zerowe funkcji $y = 6x^4 - 8x^2 - 8$ to $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ Następnie musimy naszkicować wykres tej funkcji (Rysunek 1).



Rysunek 1: Piękny wykresik

Z wykresu możemy odczytać gdzie funkcja jest większa od 0, z czego otrzymujemy:
$6x^4 - 8x^2 - 8 > 0$ dla $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$
To znaczy, że funkcja jest wypukła dla $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.
Również z wykresu możemy wywnioskować, że funkcja jest wklęsła dla $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

10 Wyznaczenie punktów przegięcia

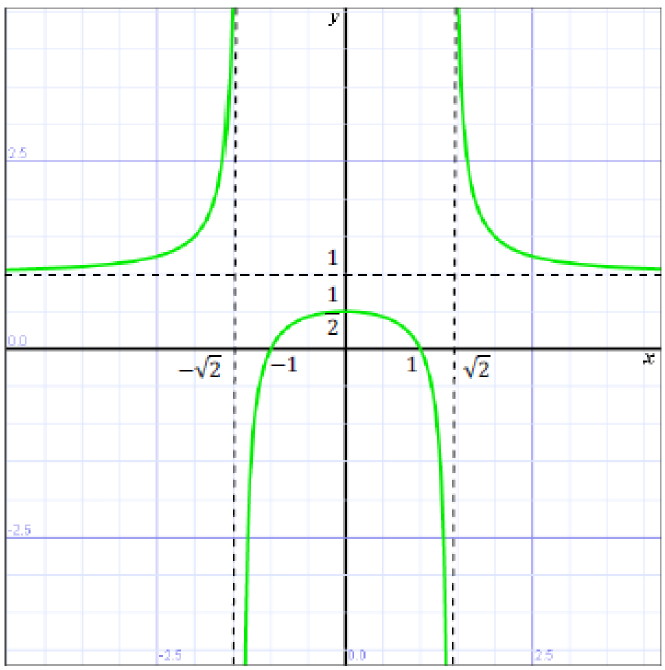
Punkty przegięcia występują w tych miejscach, w których funkcja zmienia wypukłość. Żeby je znaleźć, to należy rozwiązać równanie:

$$f''(x) = 0 \tag{24}$$

Z równania (23) wynika, że $x = -\sqrt{2} \cup x = \sqrt{2}$.
Oznacza to, że w tych punktach funkcjaa zmienia wypukłość, czyli teoretycznie są to punkty przegięcia, ale... Niestety nie należą one do dziedziny - na początku wyliczyliśmy, że dziedzina to: $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.
Z czego płynie wniosek, że nasza funkcja f(x) nie ma punktów przegięcia.

Na koniec rysujemy jeszcze wykres funkcji i odczytujemy z niego zbiór wartości.
Zgodnie z (Rysunek 2 - następna strona) zbiór wartości funkcji to:

$$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty) \tag{25}$$



Rysunek 2: Wykres całej funkcji

Artykuł napisany na podstawie [2]

Literatura

[1] e Trapez. *Wzory na pochodne.*

[2] Barbara Wikieł. *Matematyka, Podstawy z elementami matematyki wyższej.* Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2013.