

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Учебно-исследовательская работа №2 (УИР 2)**  
**“Марковские модели систем массового обслуживания”**  
по дисциплине “Моделирование”

Выполнили:

Студенты группы Р3334

Баянов Р. Д.

Кузнецов Д. А.

Вариант: 3/8/34

Преподаватель:

Авксентьева Е. Ю.

Санкт-Петербург

2024 г.

# Содержание

Цель работы .....	3
Постановка задачи и исходные данные .....	4
Описание исследуемых систем .....	5
Перечень состояний марковского процесса для исследуемых систем .....	7
Размеченные графы переходов марковского процесса .....	8
Матрицы интенсивностей переходов .....	9
Значения стационарных вероятностей .....	11
Формулы, используемые для расчёта характеристик систем и значения характеристик систем .....	12
Результаты (графики и выводы) сравнительного анализа характеристик функционирования исследуемых систем .....	14
Вывод .....	15

# Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей – систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

# Постановка задачи и исходные данные

Разработать и рассчитать марковские модели одно- и многоканальных СМО с однородным потоком заявок и выбрать наилучший вариант построения СМО в соответствии с заданным критерием эффективности.

В процессе исследований для расчета характеристик функционирования СМО использовать программу MARK.

Вариант: 3/8/34

Таблица 1 – Параметры структурной и функциональной организации систем.

Вариант	СИСТЕМА 1		СИСТЕМА 2		Критерий эффективности
	П	ЕН	П	ЕН	
3/8	2	3/0	1(H <sub>2,4</sub> )	3	в)

Так как  $N_1 + N_2 = 3 + 8 = 11$  – нечётное число, то вариант для критерия эффективности выбирается по  $N_1$ .

в) – максимальная нагрузка системы.

Обозначения в таблице 1:

**П** – число обслуживающих приборов в системе;

**П (E<sub>k</sub>)** – в одном из **Приборов** (любом) длительность обслуживания разделена по закону Эрланга k-го порядка;

**П (H<sub>v</sub>)** – в одном из **Приборов** (любом) длительность обслуживания распределена по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации, равным  $v$ ;

**ЕН – Ёмкости Накопителей: X/Y/Z** (X – перед первым прибором, Y – перед вторым прибором и Z – перед третьим прибором);

Таблица 2 – Параметры нагрузки.

Вариант	Интенс. потока	Ср. длит. обслуж.	Вероятности занятия прибора ...		
	$\lambda, 1/c$	$b, c$	П1	П2	П3
34	0,9	2	0,55	0,15	0,3

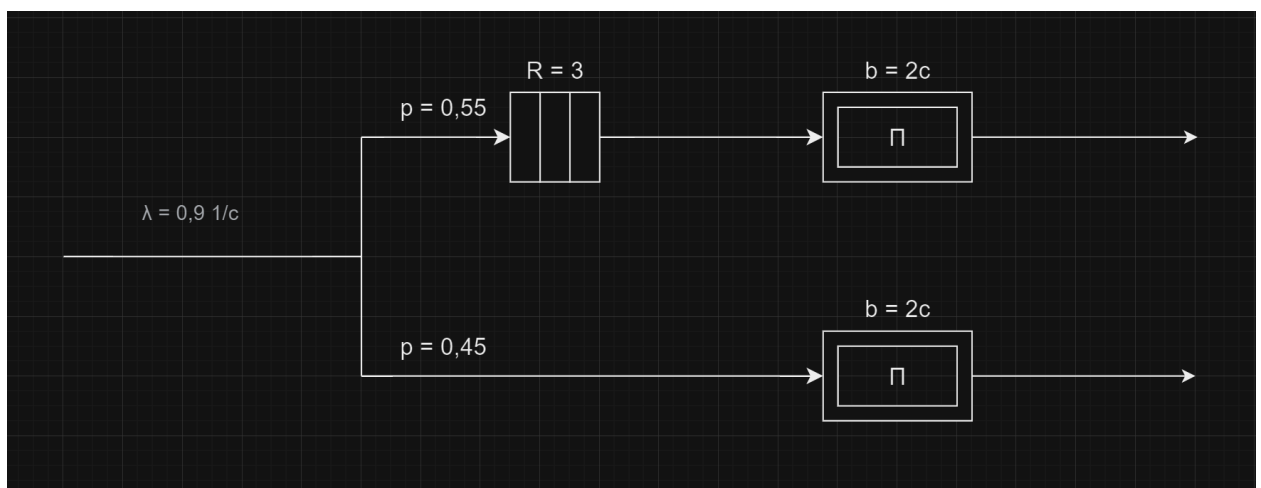
в случае двухканальной СМО вероятность занятия прибора П1 выбирается из табл.2, а вероятность занятия прибора П2 принимается равной сумме вероятностей занятия приборов П2 и П3

# Описание исследуемых систем

Для обеих систем интенсивность обслуживания –  $0,9 \text{ 1/с}$ , время обслуживания –  $2 \text{ с}$ .

**Система 1:** Система обладает 2 приборами. В обоих приборах время обслуживания распределено по экспоненциальному распределению. Система имеет одну очередь, длиной 3, относящуюся к первому прибору, в то время как у второго прибора нет своей очереди. Как только какой-то из приборов освобождается заявка направляется по принципу  $0,55$  на первый прибор вероятностно и  $0,15 + 0,3 = 0,45$  на второй прибор. Если прибор с номером 2 занят, но именно на него пришла заявка, то эта заявка отбрасывается, то же происходит, если очередь в приборе 1 переполнена, и заявка пришла на первый прибор.

**Графическое представление системы 1:**



**Система 2:** Система обладает 1 прибором. И время обслуживания этого одного прибора распределено по гиперэкспоненциальному распределению с коэффициентом вариации  $2,4$ . Также эта система обладает очередью длиной 3. Заявки, отправленные на эту систему, скапливаются в очереди и так как прибор всего один в системе, то вероятность обработки заявки именно этим прибором равна 1. Если очередь заполнена, то заявка будет просто отброшена. Как мы знаем, если время обслуживания прибора распределено по гиперэкспоненциальному распределению, то это значит, что заявка может обрабатываться по одному из двух экспоненциальных распределений (по одной из двух фаз), время обслуживания и интенсивность ( $b_1$  и  $b_2$ ), которых вычисляется с помощью коэффициента вариации этого гиперэкспоненциального распределения, а именно  $2,4$ . Также вычислим вероятность попадания заявки в ту или иную фазу ( $q$ ). Две заявки в приборе

не может находиться, поэтому если в одной фазе есть заявка, то вторая пустует.

**Расчёт параметров для ГЭР с помощью коэффициента вариации:**

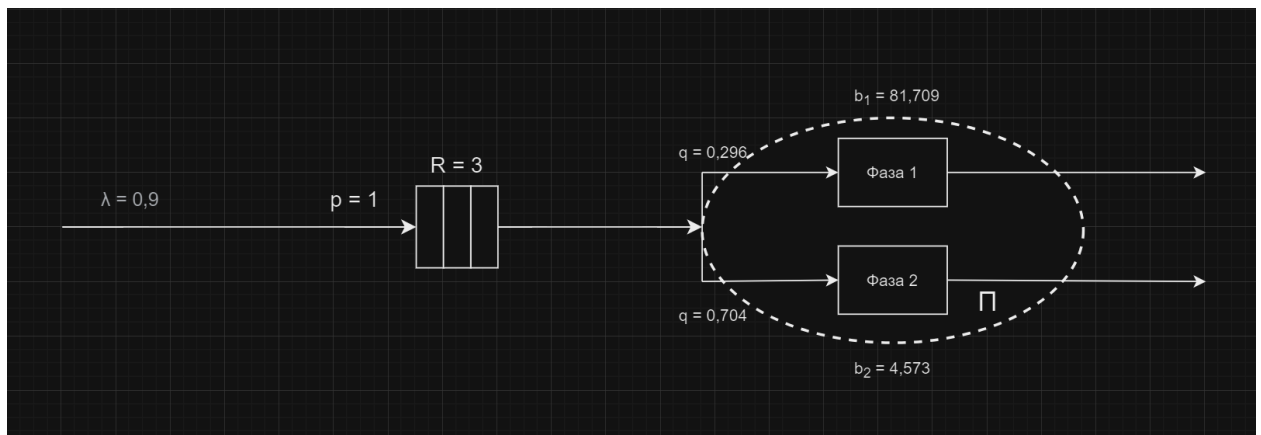
$$\nu = 2,4;$$

$$q \leq \frac{2}{1 + \nu^2} = \frac{2}{1 + 2,4^2} \approx 0,296; \text{ возьмём } q = 0,2 \text{ для расчётов;}$$

$$b_1 = b \left( 1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}} (\nu^2 - 1) \right) \approx 81,709 \text{ c} \rightarrow u_1 = \frac{1}{81,709} = 0,0122 \text{ 1/c;}$$

$$b_2 = b \left( 1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}} (\nu^2 - 1) \right) \approx 4,573 \text{ c} \rightarrow u_2 = \frac{1}{4,573} = 0,219 \text{ 1/c;}$$

**Графическое представление системы 2:**



# Перечень состояний марковского процесса для исследуемых систем

Таблица 3 – перечень состояний для двух систему

Номер состояния	Система 1	Система 2
	$(\Pi_1/\Pi_2/O_1)$	$(\Pi_{11}/\Pi_{12}/O)$
E0	(0/0/0)	(0/0/0)
E1	(1/0/0)	(1/0/0)
E2	(0/1/0)	(1/0/1)
E3	(1/1/0)	(1/0/2)
E4	(1/1/1)	(1/0/3)
E5	(1/1/2)	(0/1/0)
E6	(1/1/3)	(0/1/1)
E7	-	(0/1/2)
E8	-	(0/1/3)

Обозначения для таблицы:

$E_k$  – состояние системы

$\Pi_k$  – прибор (0 – заявка отсутствует, 1 – заявка присутствует в приборе)

$\Pi_{kl}$  – прибор с двумя фазами работы (гиперэкспоненциальное распределение), где  $k$  – номер прибора,  $l$  – номер фазы.

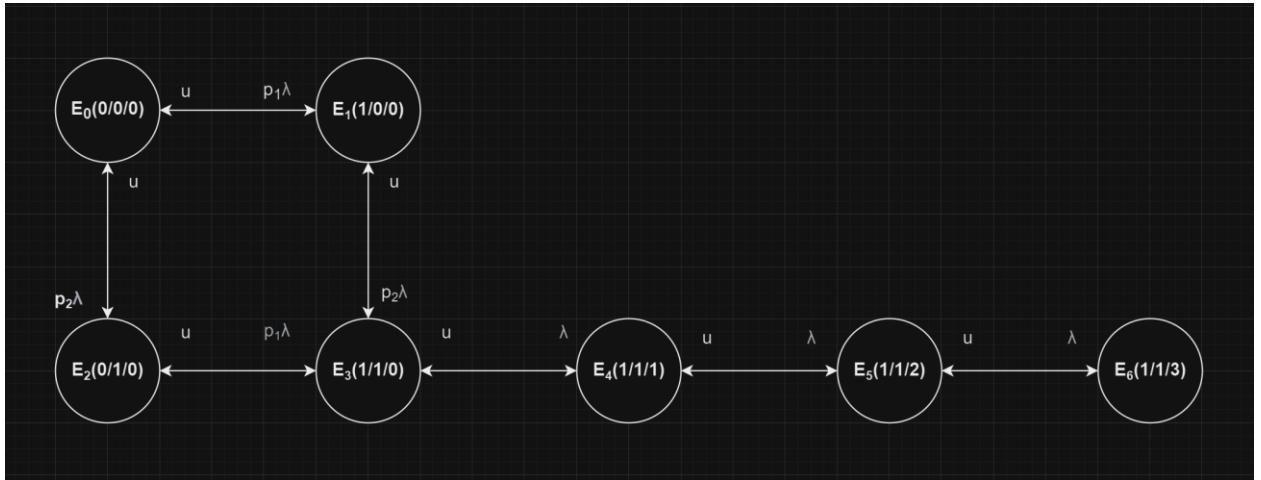
$O_k$  – кол-во заявок в очереди, где  $k$  – обозначение номера прибора, к которому эта очередь относится.

$O$  – общая очередь<sup>1)</sup>

0 означает, что в элементе системы нет заявки, 1 означает, что в элементе есть заявка.

# Размеченные графы переходов марковского процесса

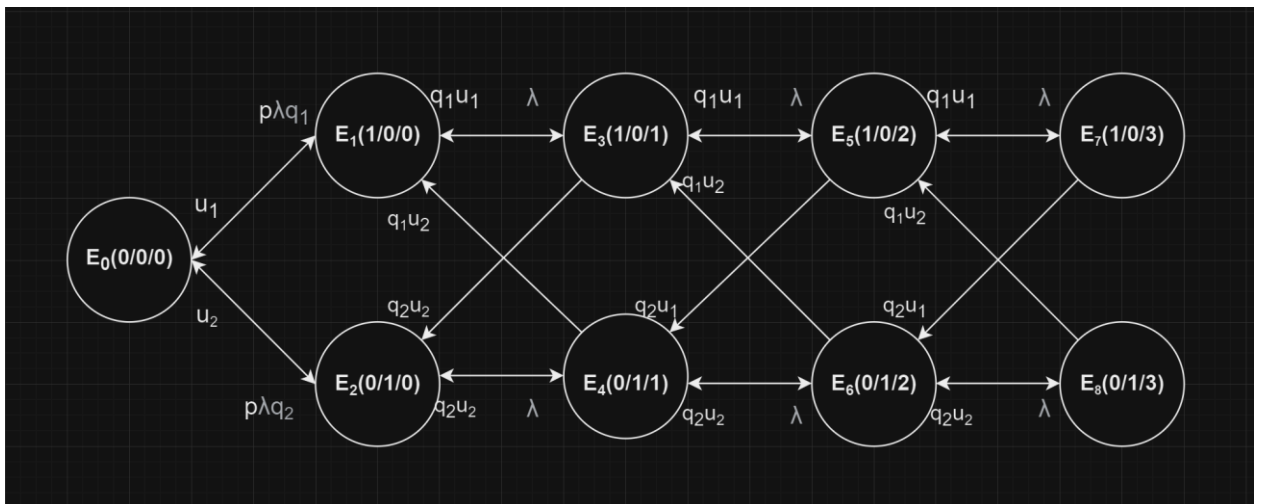
Размеченный граф для системы 1:



Обозначения для графа:

$$p_1 = 0,55; p_2 = 0,45; u = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} = 0,5 \frac{1}{c}; \lambda = 0,9 \frac{1}{c}$$

Размеченный граф для системы 2:



Обозначения для графа:

$$u_1 = 0,0122 \frac{1}{c}; u_2 = 0,219 \frac{1}{c}; q_1 = 0,296; q_2 = 0,704; \lambda = 0,9 \frac{1}{c}$$



# Матрицы интенсивностей переходов

Воспользуемся программой MARK для изображения матрицы интенсивности переходов. Но перед этим рассчитаем все интенсивности процессов, чтобы было удобнее занести их в программу.

$$u = 0,5$$

$$\lambda = 0,9$$

$$k1 = p_1 \lambda = 0,55 * 0,9 = 0,495$$

$$k2 = p_2 \lambda = 0,45 * 0,9 = 0,405$$

**Матрица интенсивности для системы 1:**

Данные Справка									
Список элементов матрицы			0	1	2	3	4	5	6
Имя	Знач...	0	0	k1	k2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
u	0.5000	1	u	1	0.0000	k2	0.0000	0.0000	0.0000
lambda	0.9000	2	u	0.0000	2	k1	0.0000	0.0000	0.0000
k1	0.4950	3	0.0000	u	u	3	lambda	0.0000	0.0000
k2	0.4050	4	0.0000	0.0000	0.0000	u	4	lambda	0.0000
		5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	u	5	lambda
		6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	u	6

$$u_1 = 0,0122$$

$$u_2 = 0,219$$

$$\lambda = 0,9$$

$$k1 = p \lambda q_1 = 1 * 0,9 * 0,296 = 0,2664$$

$$k2 = p \lambda q_2 = 1 * 0,9 * 0,704 = 0,6336$$

$$m1 = q_1 u_1 = 0,296 * 0,0122 = 0,0036112$$

$$m2 = q_1 u_2 = 0,296 * 0,219 = 0,064824$$

$$m3 = q_2 u_1 = 0,704 * 0,0122 = 0,008588$$

$$m4 = q_2 u_2 = 0,704 * 0,219 = 0,154176$$

**Матрица интенсивности для системы 2:**

Список элементов матрицы		
Имя	Знач...	
u1	0.0122	
lambda	0.9000	
u2	0.2190	
k1	0.2664	
k2	0.6336	
m1	0.0036	
m2	0.0648	
m3	0.0086	
m4	0.1542	

# Значения стационарных вероятностей

Таблица 4 – значения стационарных вероятностей для систем

Номер состояния	Система 1		Система 2	
	Обозначение	Вероятность	Обозначение	Вероятность
0	(0/0/0)	0.0812	(0/0/0)	0.0001
1	(1/0/0)	0.0804	(1/0/0)	0.0003
2	(0/1/0)	0.0657	(1/0/1)	0.0006
3	(1/1/0)	0.0651	(1/0/2)	0.0019
4	(1/1/1)	0.1172	(1/0/3)	0.0036
5	(1/1/2)	0.2109	(0/1/0)	0.0118
6	(1/1/3)	0.3796	(0/1/1)	0.0221
7	-	-	(0/1/2)	0.8689
8	-	-	(0/1/3)	0.0907

# Формулы, используемые для расчёта характеристик систем и значения характеристик систем

Таблица 5 – формулы и расчёты характеристик

Характеристика	Номер системы	Прибор	Расчётная формула	Система 1	Система 2
Нагрузка	1	П1	-	-	-
		П2	-	-	-
		Вся система	$y = \frac{\lambda}{\mu}$	1.8	-
	2	П11	$y1 = \lambda * b1$	-	0.01098
		П22	$y2 = \lambda * b2$	-	0.1971
		Вся система	$Y = y1 + y2$	-	0.20808
Загрузка	1	П1	$p1 = 1 - (p_0 + p_2)$	0.8531	-
		П2	$p2 = 1 - (p_0 + p_1)$	0.8384	-
		Вся система	$\frac{1}{2} * (p1 + p2)$	0.84575	-
	2	П11	$p1 = 1 - (p_0 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8)$	-	0.0064
		П22	$p2 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$	-	0.9935
		Вся система	$\frac{1}{2} * (p1 + p2)$	-	0.49995
Длина очереди	1	П1	-	-	-
		П2	-	-	-
		Вся система	$l = 1 * p_4 + 2 * p_5 + 3 * p_6$	1.6778	-
	2	П11	-	-	-
		П22	-	-	-
		Вся система	$l = 1 * (p_2 + p_6) + 2 * (p_3 + p_7) + 3 * (p_4 + p_8)$	-	2.0472
Число заявок	1	П1	$m_1 = p_1 + l_1$	3,0804	-
		П2	$m_2 = p_2$	0,0657	-
		Вся система	$m = m_1 + m_2$	3,1461	-
	2	П11	-	-	-

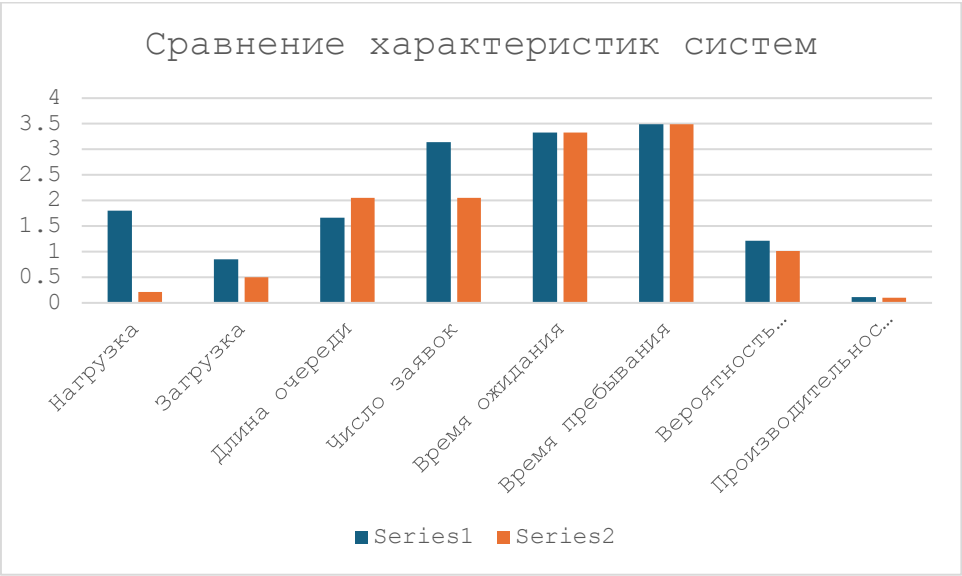
		П22	-	-	-
		Вся система	$m = m_1 + m_2 + l = p_1 + p_2 + l$	-	3,1461
Время ожидания	1	П1	$w = \frac{l_1}{\lambda}$	3,33	-
		П2	0	0	-
		Вся система	$w = \frac{l_1}{\lambda}$	3,33	-
	2	П11	-	-	-
		П22	-	-	-
		Вся система	$w = \frac{l_1}{\lambda}$	-	3,33
Время пребывания	1	П1	$u_1 = \frac{m_1}{\lambda}$	3,423	-
		П2	$u_2 = \frac{m_2}{\lambda}$	0.073	-
		Вся система	$u = \frac{m}{\lambda}$	3,496	-
	2	П11	-	-	-
		П22	-	-	-
		Вся система	$u = \frac{m}{\lambda}$	-	3,4956
Вероятность потери	1	П1	$\pi_1 = p_6$	0.3796	-
		П2	$\pi_2 = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$	0.8385	-
		Вся система	$\pi = \pi_1 + \pi_2$	1.2181	-
	2	П11	-	-	-
		П22	-	-	-
		Вся система	$\pi = p_4 + p_8$	-	1.0188
Производительность	1	П1	$\lambda_1' = \lambda * p_1, 1 * (1 - \pi_1)$	0.0462	-
		П2	$\lambda_2' = \lambda * p_1, 2 * (1 - \pi_2)$	0.0300	-
		Вся система	$\lambda' = \lambda * (1 - \pi)$	0.1137	-
	2	П11	-	-	-
		П22	-	-	-
		Вся система	$\lambda' = \lambda * (1 - \pi)$	-	0.0997

# Результаты (графики и выводы) сравнительного анализа характеристик функционирования исследуемых систем

	Нагру зка	Загруз ка	Длин а оче ре ди	Числ о заяв ок	Время ожид ания	Время пребыва ния	Вероятн ость по тери	Производитель ность
Систе ма 1	1.8	0.845 75	1.67 78	3,14 61	3,33	3,496	1.2181	0.1137
Систе ма 2	0.208 08	0.499 95	2.04 72	3,14 61	3,33	3,496	1.0188	0.0997

График сравнения характеристик систем:

Ряд1 – первая система, ряд2 – вторая система



# Вывод

Выполнив данную лабораторную работу, мы провели сравнение двух построений СМО. Вычислили самые разные характеристики, построили графы процессов, изобразили матрицы интенсивности, но самое главное мы обнаружили характеристическую разницу между двумя системами. А именно, самое главное для нас – это максимальная нагрузка системы. Эта величина для первой системы равна 0.84575, а для второй системы 0.49995. Это колоссальная разница, и она говорит нам то, что вторая система крайне часто находится в простое и не занимается работой. Чего не скажешь о первой. Следовательно, мы выбираем первую систему, так как она имеет выше коэффициент загрузки.