Section 5: Théorie des graphes

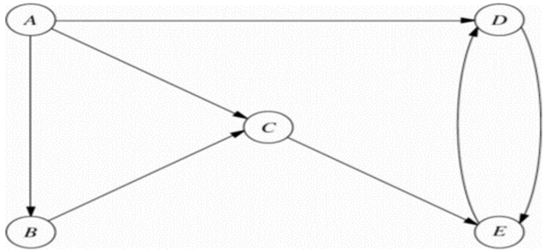
Année Universitaire: 2021-2022

Définitions

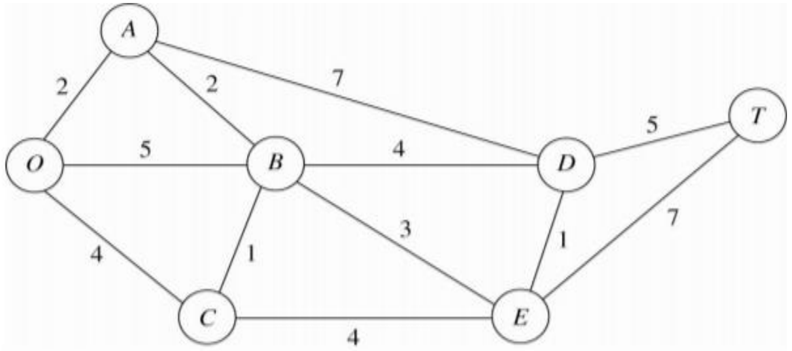
❑ ***Graphe orienté***

Un graphe est orienté si ses arêtes ne peuvent être parcourues que dans un sens.

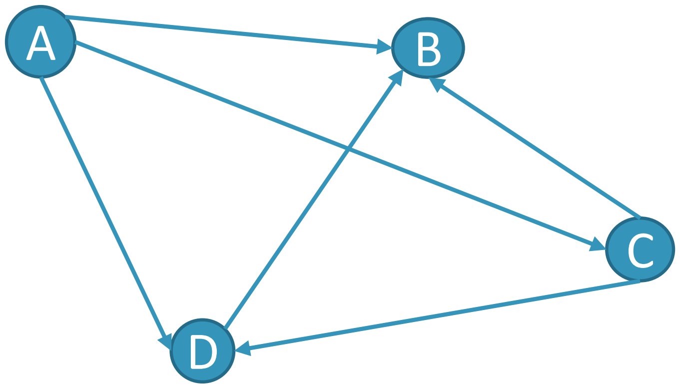
L'orientation des arêtes est indiquée par des flèches sur les arêtes.



❑ ***Graphe non orienté***

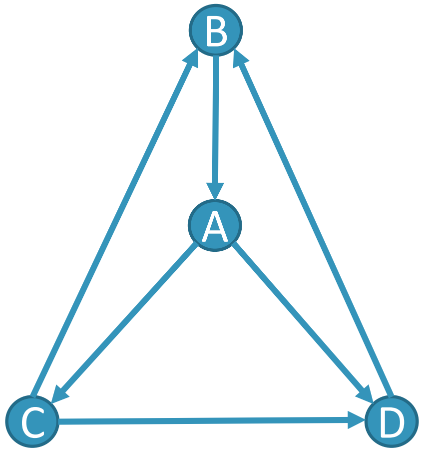


Dictionnaire des précédents (graphe orienté)



X	Prédécesseurs
A	-
B	A,D,C
C	A
D	A,C

Matrice d’un graphe orienté

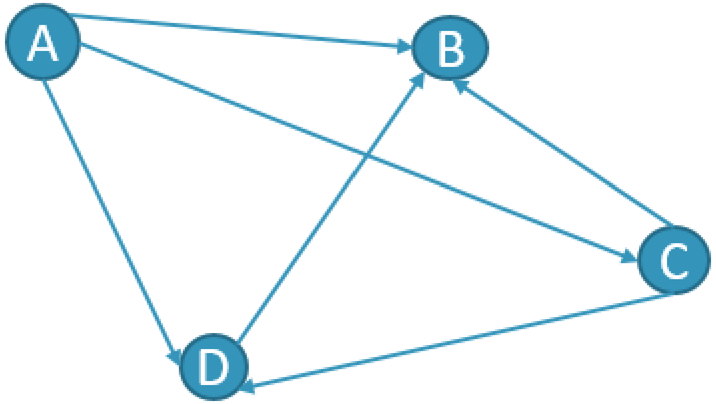


$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

On peut également définir la matrice d'adjacence d'un graphe orienté. Cette fois, le coefficient $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arcs d'origine i et d'extrémité j.

Degré d'un sommet

- Nombre d'arêtes reliées à ce sommet.
- Le sommet A est de degré 3: (B,C,D)

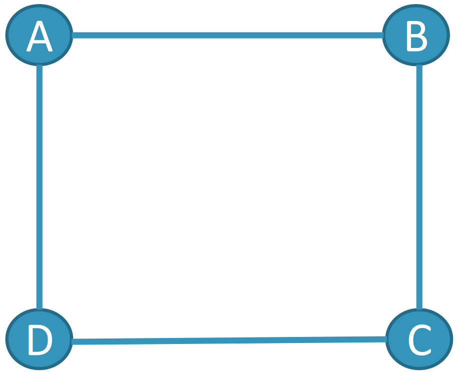


Types de graphes

❑ ***Cycle:***

On peut partir d'un sommet et revenir à ce sommet en parcourant une et une seule fois les autres sommets.

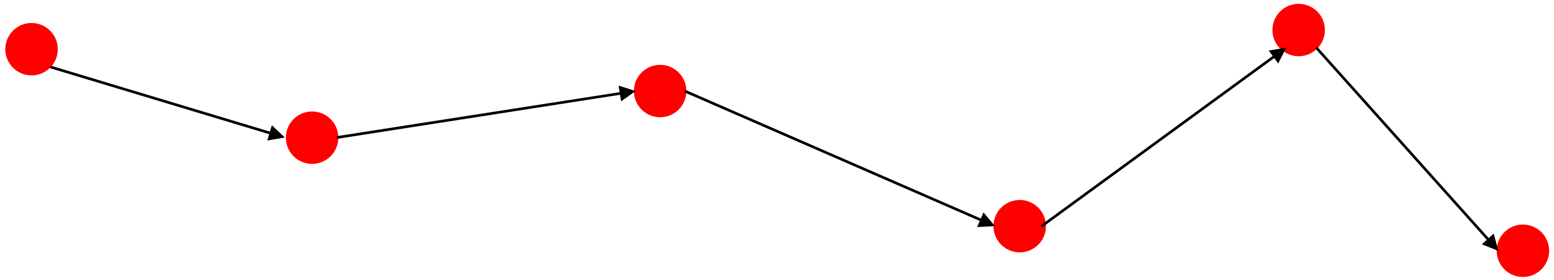
Exemple: A,B,C,D,A



Types de graphes

❑ ***Chaine***

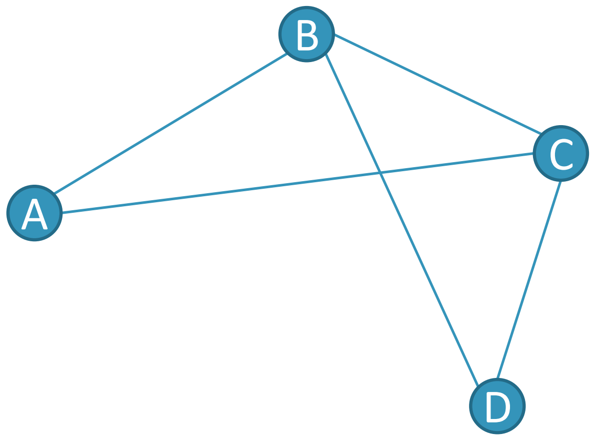
Une suite de sommets reliés par une seule arête.

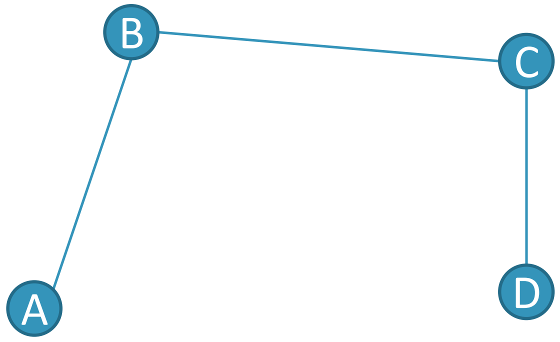


Types de graphes

❑ ***Chaîne hamiltonienne:***

Chaîne passant par tous les sommets d'un graphe ABCD, ABDC, ACBD.

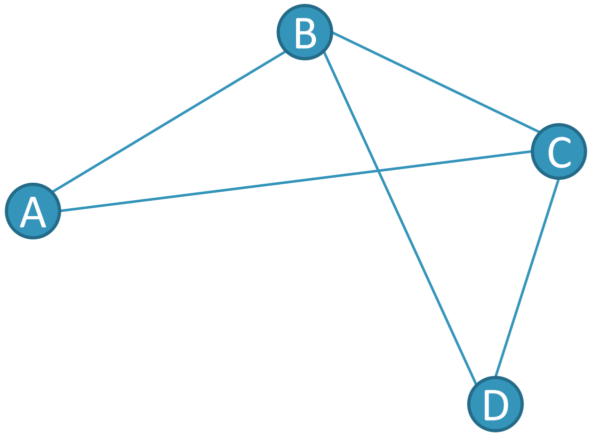


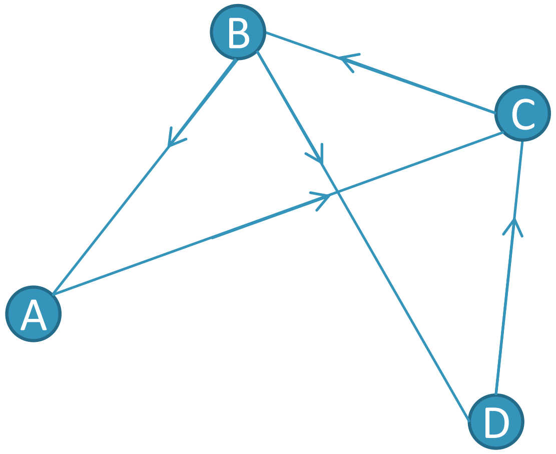


Types de graphes

❑ ***Chaîne eulérienne:***

Chaîne passant par toutes les arêtes d'un graphe BACBDC.





Types de cycles

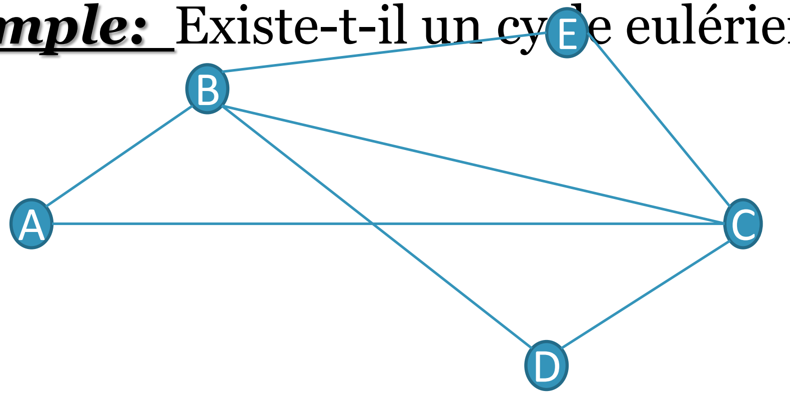
- ***<u>Cycle eulérien:</u>***

Passant une seules fois par toutes les arêtes d’un graphe et revenant au sommet de départ.

- ***<u>Cycle Hamiltonien:</u>***

Passant une seule fois par tous les sommets d’un graphe et revenant au sommet de départ.

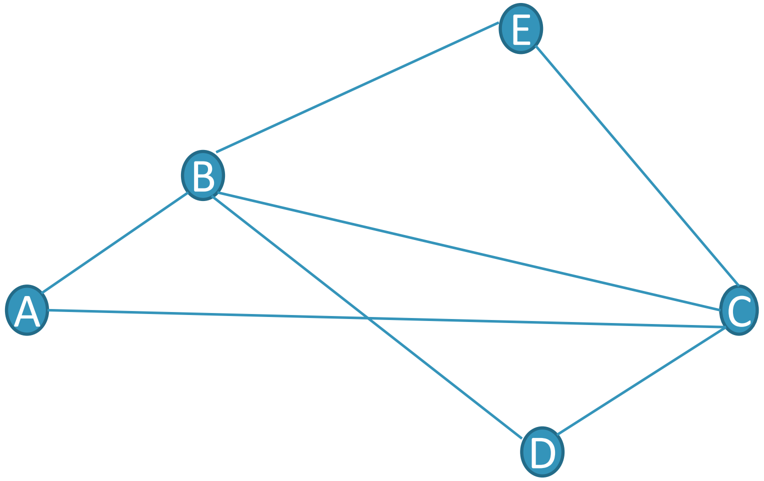
<u>Exemple:</u> Existe-t-il un cycle eulérien?



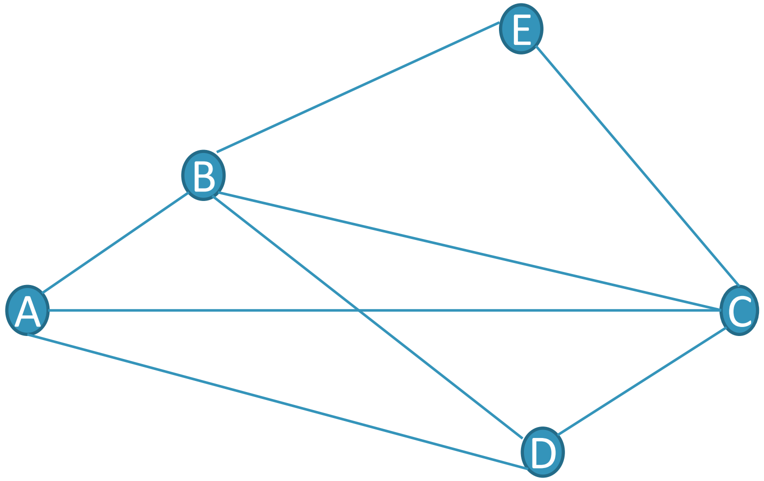
CDBCABEC

Théorème d'Euler (1766)

Graphe eulérien ⟺ tous les sommets du graphe ont un degré pair.



Oui

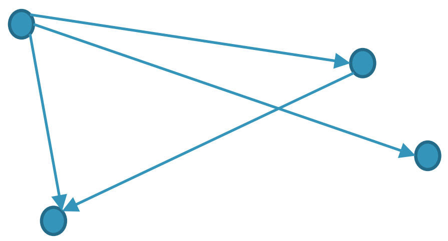


Non

Connexité

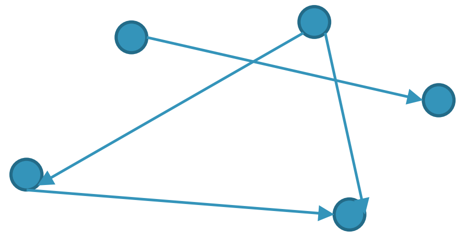
❑ ***<u>Graphe connexe:</u>***

Tous les sommets sont reliés entre eux.



❑ ***<u>Graphe non connexe</u>***

Il existe des sommets non reliés entre eux.

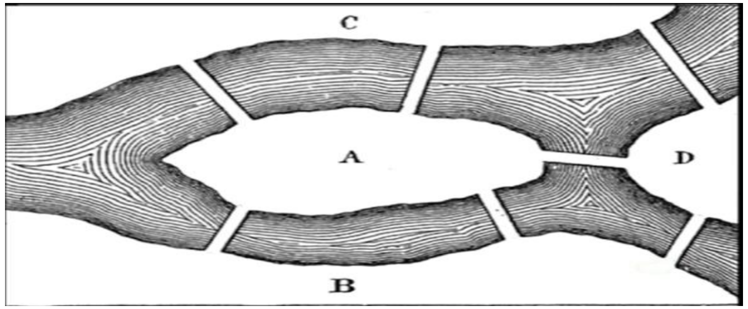


Retour à Königsberg

<u>Les 7 ponts de Königsberg</u>

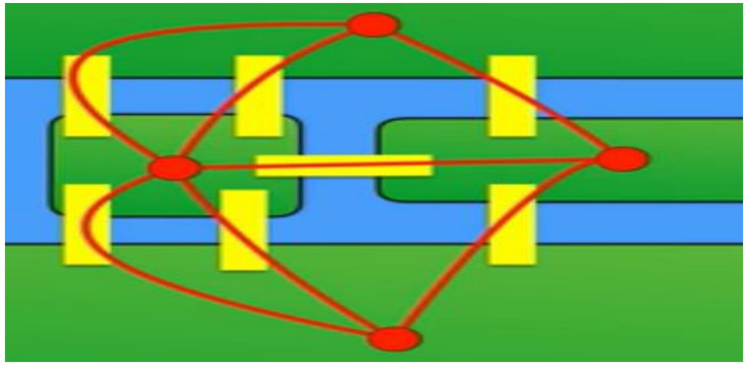
Est-il possible de parcourir les ponts de la ville

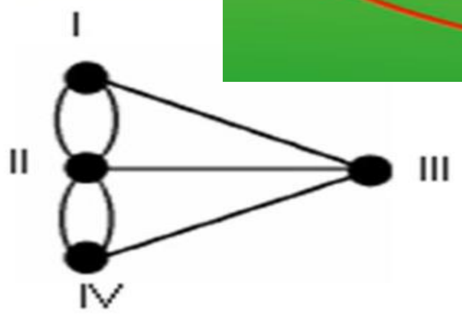
en passant sur chacun des 7 ponts exactement une fois?



<u>Sous forme de graphe</u>

- ❑Les sommets= quartiers
- ❑Les arcs= les ponts
- ❑Le problème => le graphe est il eulérien?**Non**





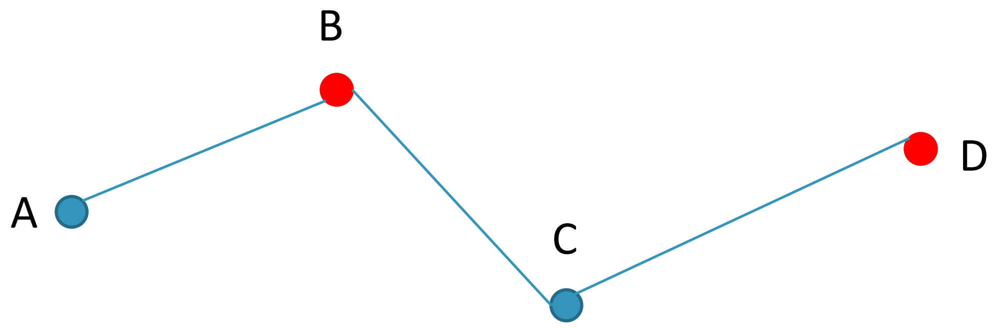
Coloriage des sommets d’un graphe non orienté

<u>Nombre chromatique:</u>

Affecter tous les sommets d’un graphe d’une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

Le nombre nécessaire de couleur = Nombre chromatique

Exemple1:



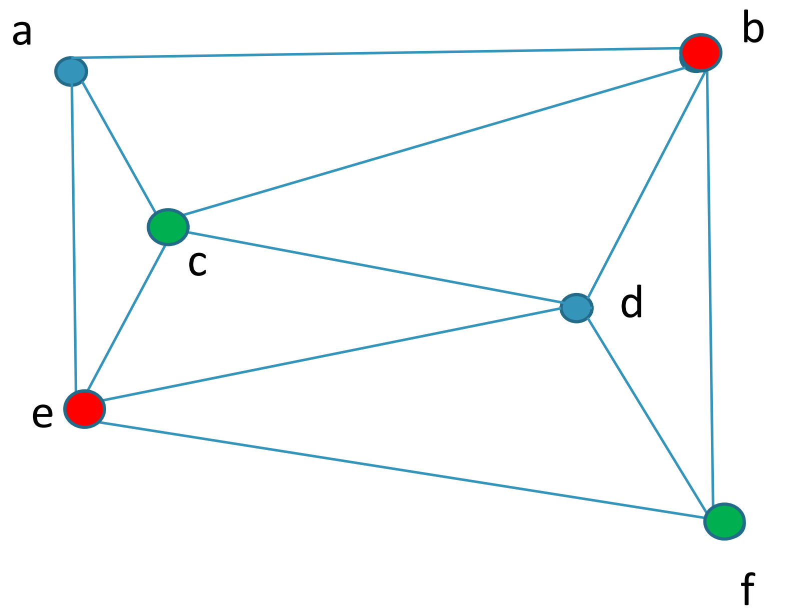
Couleur1: A, C

Couleur2: B, D

Nombre chromatique=2

Coloriage des sommets d’un graphe non orienté

Exemple2:

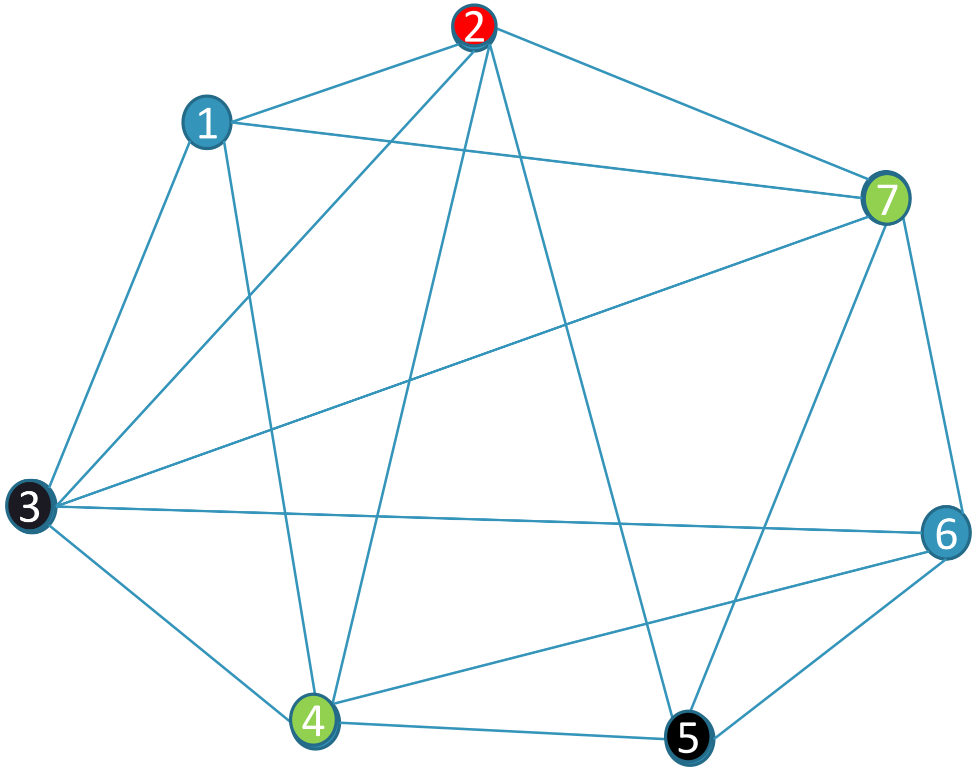


Couleur1= {a,d}
Couleur2= {b,e}
Couleur3={c,f}
Nombre chromatique=3

Application 1/3

- Une université doit organiser les horaires des examens.
- On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, numérotées de 1 à 7:
- Les paires de cours suivantes ont des étudiants en commun: 1 et2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7, 6 et 7.
  - Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale?

Application 2/3



- 1 et2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7,
- 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7,
- 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7,
- 4 et 5, 4 et 6,
- 5 et 6,
- 5 et 7,
- 6 et 7.

Couleur1= {1,6}
Couleur2= {2}
Couleur3={3,5}
Couleur4={4,7}
Nombre chromatique=4

Application 3/3

- ***K=4***: les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante:
  - ***Période 1***, épreuves des cours 1 et 6
  - ***Période 2***, épreuve du cours 2
  - ***Période 3***,épreuves des cours 3 et 5
  - ***Période 4***, épreuves des cours 4 et 7

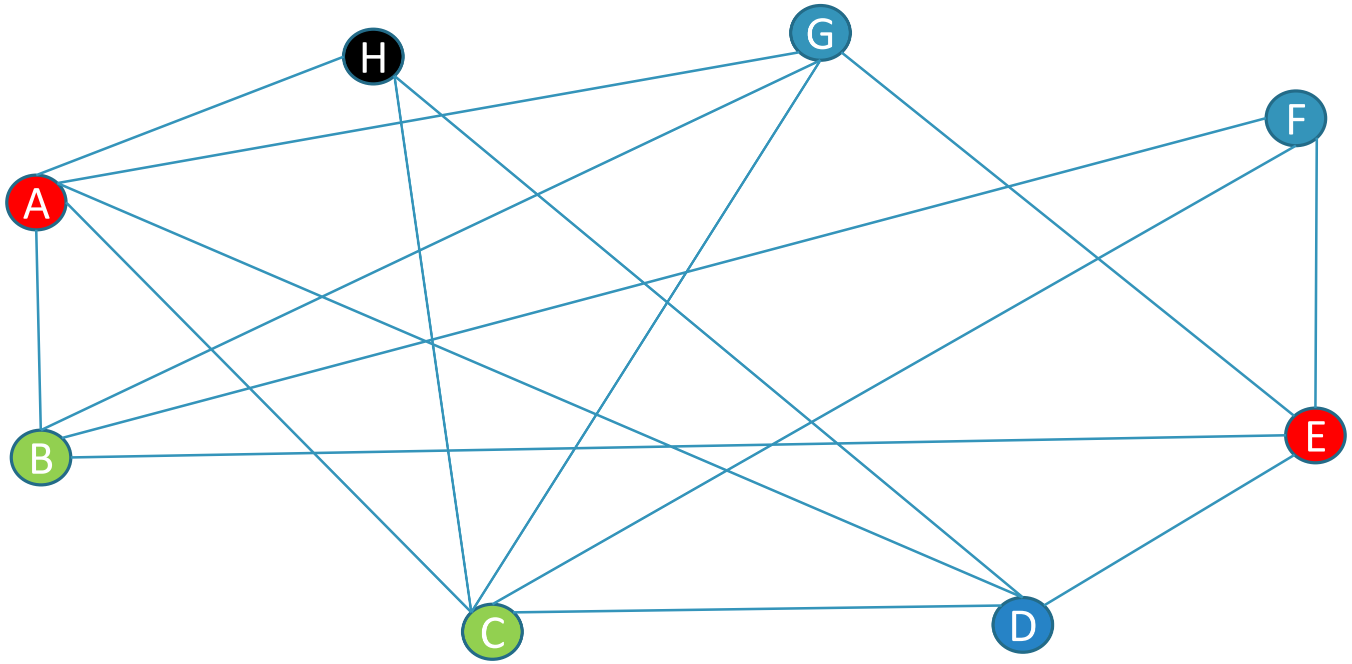
Application 1/2

- A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit commerciaux; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les commerciaux ne sont pas prêts à travailler ensemble:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Quel nombre minimum d'équipes faut-il?

Application 2/2



Couleur1= {A,E}
Couleur2= {B,C}
Couleur3={D,F,G}
Couleur4={H}
Nombre chromatique=4 *donc 4 équipes*