Section2. Résolution graphique d’un programme linéaire

Année Universitaire: 2021-2022

Programme linéaire (PL)

Problème d’optimisation consistant à

- maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire de n variables de décision
- soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d’équations ou d’inéquations linéaires

Programme linéaire (PL)

1. Détection d’un problème
2. Formulation du problème
3. Elaboration d’un modèle
4. Collecte des données
5. Résolution du problème
6. Validation du modèle
7. Prise de décision et implémentation de la solution

Mise en forme mathématique

1. Définir les variables de décision
   - ensemble des variables qui régissent la situation à modéliser
   - variables réelles, entières, binaires
2. Préciser la fonction objectif
   - fonction mathématique composée des variables de décision qui représente le modèle physique modélisé
   - fonction linéaire
3. Préciser les contraintes du problème
   - ensemble des paramètres qui limitent le modèle réalisable
   - équations ou inéquations composées des variables de décision
4. **Résolution graphique**

Mise en forme mathématique

Fonction objectif

- **Maximiser** ou **minimiser**
- $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + \; + c_nx_n$

Contraintes

- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \; (\leq, =, \geq) \; b_1$
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \; (\leq, =, \geq) \; b_2$
- $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \; (\leq, =, \geq) \; b_m$

Contraintes de non-négativité

- $x_j \geq 0$; $j = 1, 2, 3, \ldots n$

avec

- x_j variables de décision (inconnues)
- a_{ij}, b_i, c_j paramètres du programme linéaire

Exemple 1 : Problème d'agriculture (1/5)

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m3 d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Exemple 1 : Problème d'agriculture (2/5)

Etape 1: *Identification des variables de décision.*

Les deux activités que l'agriculteur doit déterminer sont les surfaces à allouer pour la culture de tomates et de piments:

- x_1: la surface allouée à la culture des tomates
- x_2: la surface allouée à la culture des piments

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives :
$x_1 \; , x_2 \; \geq 0$

Exemple 1 : Problème d'agriculture (3/5)

Etape 2: *Identification des contraintes. Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :*

-Terrain : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leq 150$

- Eau : la culture d'un hectare de tomates demande 4 m3 d'eau et celle d'un hectare de piments demande 2m3 mais l'agriculteur ne dispose que de 440m3. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \leq 440$

- Main d'œuvre : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \leq 480$

- Les limitations du bureau du périmètre irrigué : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \leq 90$

Exemple 1 : Problème d’agriculture (4/5)

Etape 3: *Identification de la fonction objectif.*

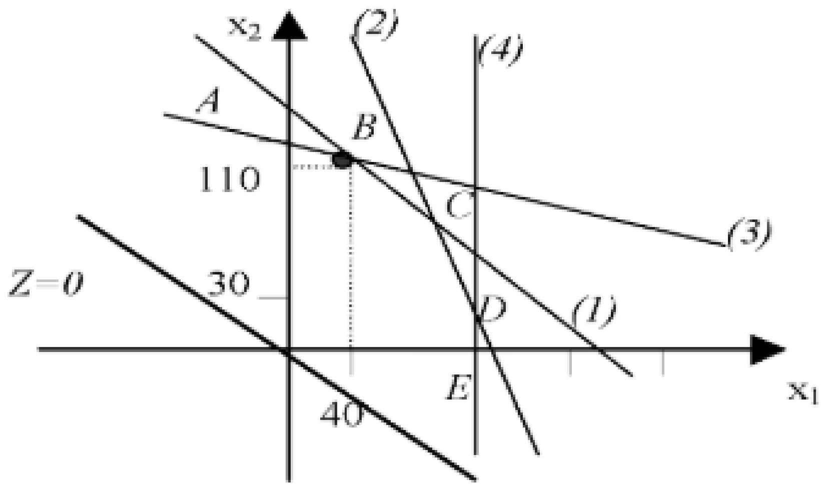
La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 100 et 200, des deux variables de décision x_1 et x_2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objectif est donc $Max\ z = 100x_1 + 200x_2$
Le programme linéaire qui modélise le problème d’agriculture est :

$$Max\ z = 100x_1 + 200x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1\ , x_2\ \geq\ 0 \end{cases}$$

Exemple 1 : Problème d’agriculture (5/5)

Etape 4: *Résolution graphique*



la solution optimale est B(40,110)

Exemple 2 : Problème de production

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	M2	M3
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.

La disponibilité pour chaque machine sont :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3 .

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P2 un profit unitaire de 1000 dinars.

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit total maximum ?