EXERCICE 2 *(5 points)* ***Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité***

Les parties A et B sont indépendantes.

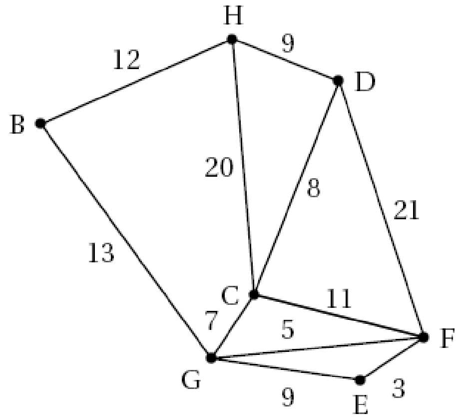
Partie A

Des touristes sont logés dans un hôtel H.

Un guide souhaite faire visiter la région à ces touristes en empruntant les routes signalées comme d'intérêt touristique par l'office du tourisme.

Les tronçons de route qu'il souhaite emprunter sont représentés sur le graphe ci-contre.

Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. **a)** Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant ? Justifier la réponse.

Rechercher un chemin qui part d'un sommet, qui passe par toutes les arêtes une seule fois et qui revient au sommet de départ, c'est chercher un cycle eulérien dans le graphe.
D'après le théorème d'EULER, un graphe possède un cycle eulérien si et seulement il est connexe et si tous les sommets sont de degrés pairs.
On cherche les degrés des sommets :

Sommets	H	B	C	D	E	F	G
Degrés	3	2	4	3	2	4	4

Le graphe est connexe, mais il y a 2 sommets de degrés impairs, donc il n'y a pas de cycle eulérien dans ce graphe : **le guide ne peut pas emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel et en y revenant.**

b) Le guide peut-il emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux, en partant de l'hôtel mais sans forcément y revenir ? Justifier la réponse.

Le guide souhaite partir de l'hôtel et parcourir tous les tronçons de route sans forcément revenir à l'hôtel ; il s'agit alors de trouver une chaîne eulérienne dans ce graphe.
D'après le théorème d'EULER, un graphe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe et si exactement deux de ses sommets sont de degrés impairs.
C'est le cas ici car seuls les sommets H et D sont de degrés impairs ; **on peut donc trouver un parcours partant de H et arrivant à D passant une et une seule fois par chaque tronçon de route.**

Voici un tel parcours : H – G – C – H – D – C – F – G – E – F – D

2. Un musée est situé en E. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel H au musée E. Justifier la réponse. ***(On utilisera l'algorithme de Dijkstra)***

	H	B	C	D	E	F	G
Init.	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
H : 0		12 H	20 H	9 H	∞	∞	∞
D : 9		12 H	~~20 H~~ 17 D		∞	30 D	∞
B : 12			17 D		∞	30 D	25 B
C : 17					∞	~~30 D~~ 28 C	~~25 B~~ 24 C
G : 24					33 G	28 C	
F :28					~~33 G~~ 31 F		

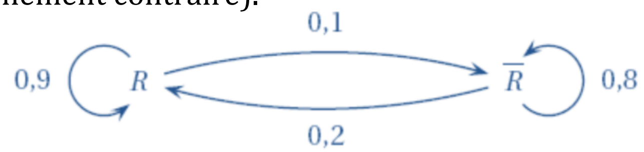
Le chemin de longueur minimale 31 km entre H et E est : H – D – C – F – E

Partie B

L'office de tourisme évalue chaque année les hôtels de sa région et répertorie les meilleurs sur son site internet. On admet que dans cette région, la création ou la disparition d'hôtels est négligeable. On constate que, chaque année :

- 10% des hôtels répertoriés ne seront plus répertoriés l'année suivante ;
- 20% des hôtels non répertoriés sur le site seront répertoriés l'année suivante.

1. Réaliser un graphe décrivant cette situation (on notera R l'évènement « l'hôtel est répertorié » et $\overline{\text{R}}$ son évènement contraire).



2. Écrire la matrice de transition de ce graphe.

D'après le cours, en prenant les sommets dans l'ordre R et $\overline{\text{R}}$, la matrice de transition de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

3. En 2016, 30% des hôtels de la région étaient répertoriés.
Quel pourcentage d'hôtels sera répertorié en 2017 ? en 2018 ?

On appelle P_n l'état donnant la répartition des hôtels répertoriés et ceux qui ne le sont pas l'année 2015+n ; on représente cet état par une matrice ligne à 2 colonnes.

On a donc **pour l'année 2015**, correspondant à $n = 0$: $\boldsymbol{P_0 = (0{,}3 \quad 0{,}7)}$**.**

En 2016 l'état sera :

$$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}7 \times 0{,}2 & 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}41 & 0{,}59 \end{pmatrix}$$

Donc **le pourcentage d'hôtels répertoriés en 2016 sera de 41%.**

En 2017 l'état sera :

$$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}41 & 0{,}59 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}41 \times 0{,}9 + 0{,}59 \times 0{,}2 & 0{,}41 \times 0{,}1 + 0{,}59 \times 0{,}8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}487 & 0{,}513 \end{pmatrix}$$

Donc **le pourcentage d'hôtels répertoriés en 2017 sera de 48,7%.**

4. Quel pourcentage d'hôtels serait répertorié à long terme ?

La matrice de transition ne comportant aucun zéro, l'état P_n converge vers l'état stable du système, c'est-à-dire la matrice $P = (x \quad 1 - x)$ telle que $P \times M = P$.

$$P \times M = P \iff (x \quad 1-x) \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (x \quad 1-x)$$
$$\iff \begin{cases} 0{,}9x + 0{,}2(1-x) = x \\ 0{,}1x + 0{,}8(1-x) = 1 - x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 0{,}9x + 0{,}2 - 0{,}2x - x = 0 \\ 0{,}1x + 0{,}8 - 0{,}8x - 1 + x = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -0{,}3x = -0{,}2 \\ 0{,}3x = 0{,}2 \end{cases}$$
$$\iff x = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$$

L'état stable du système est donc la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Donc, **à long terme, il y aura les deux tiers des hôtels qui seront répertoriés, soit 66,67%.**