1. *Сформулировать определения случайной величины и функции распределения вероятностей СВ. Записать основные свойства функции распределения.*

~~~ ~~~

• Случайной величиной называют скалярную функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных исходов, если для любого $x\in\mathbb{R}$ множество $\{\omega : X(\omega)<x\}$ элементарных исходов, удовлетворяющих условию $X(\omega)<x$, является событием.

• Функцией распределения (вероятностей) СВ X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X<x\}$ – т.е. события, состоящего из только тех элементарных исходов, для которых $при\ X(\omega)<x: \ F(x)=P\{X<x\}$.

• Свойства функции распределения:

1) $$0\le F(x)\le 1$$

2) $F(x_1)\le F(x_2)$, при x1<x2; т.е. Ф – неубывающая функция

3) $$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0; \quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

4) $$P\{x_1\le X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$$

5) $F(x)=F(x-0), \ где \ F(x-0)=\lim\limits_{y\to x-0}F(y)$; т.е. Ф – непрерывная слева функция.

2. *Сформулировать определения дискретной СВ; понятие ряда распределения. Сформулировать определение непрерывной СВ и функции плотности распределения вероятностей.*

~~~ ~~~

• СВ X называют дискретной, если множество её возможных значений конечно или счетно.

• Рядом распределения (вероятностей) ДСВ X называют таблицу, состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней вероятности $p_i=P\{X=x_i\}$ того, что случайная величина принимает эти значения.

• Непрерывной называют СВ X, функцию распределения которой можно представить в виде $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(y)dy$.

• Функцию $f(x)$ называют плотностью распределения вероятностей НСВ X.

3. *Записать основные свойства функции плотности распределения вероятностей НСВ.*

~~~ ~~~

• 1) $\forall n \ f(n)\ge 0$

2) $P\{x_1\le X<x_2\}=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

4) $P\{x\le X<x+\Delta x\}\approx f(x)\Delta x$ в точках непрерывности плотности распределения

5) $P\{X=x\}=0$ для любого наперед заданного $x\in\mathbb{R}$.

4. *Сформулировать определение дискретного случайного вектора и его функции распределения вероятностей. Записать свойства функции распределения двумерного СВектора.*

~~~ ~~~

• n-мерным случайным вектором называется совокупность СВ $X_1=X_1(\omega), \ \dots, X_n=X_n(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, B, P). Сами СВ $X_1,\dots,X_n$ называют копонентами СВектора.

• Функцией распределения n-мерного СВектора $F(x_1,\dots,x_n)=F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}$ равно вероятности совместного осуществления событий $\{X_1<x_1\},\dots,\{X_n<x_n\}$, т.е. $F(x_1,\dots,x_n)=P\{X_1<x_1,\dots,X_n<x_n\}$.

• Свойства двумерной функции распределения:

1) $$0\le F(x_1,x_2)\le 1$$

2) $F(x_1,x_2)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов x1 и x2.

3) $$F(-\infty,x_2)=F(x_1,-\infty)=0$$

4) $$F(+\infty,+\infty)=1$$

5) $P\{a_1\le X_1\le b_1, \ a_2\le X_2\le b_2\}=F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2)$.

6) $F(x_1,x_2)$ – непрерывна слева в любой точке $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ по каждому из аргументов x1, x2.

7) $F_{X_1,X_2}(x,+\infty)=F_{X_1}(x); \ \ F_{X_1,X_2}(+\infty,x)=F_{X_2}(x)$.

5. *Сформулировать определения ДСВектора, понятие таблицы распределения двумерного СВектора. Сформулировать определения непрерывного СВектора и его функции плотности распределения вероятностей.*

~~~ ~~~

• Двумерный случайный вектор (X,У) называют дискретным, если каждая из случайных величин X и У является дискретной.

Таблицей распределения двумерного СВектор называют таблицу следующего вида:
в верхней строке перечислены все возможные значения $y_1,\dots,y_j,\dots y_m$ СВ У; в левом столбце – значения $x_1,\dots,x_i,\dots x_n$ СВ X;
на пересечении столбца yj и строки xi находится вероятность $p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$ совместного осуществления событий $\{X=x_i\} и \ \{Y=y_j\}$.

Также обычно добавляют строку Py и столбец Px:
на пересечении Px и xi записывается число $p_{x_i}=p_{i1}+\dots p_{im}$; на пересечении Py и yj записывается $p_{y_j}=p_{1j}+\dots+p_{nj}$.

• СВектор (X1,…Xн) называют непрерывным, если его совместную функцию распределения $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла $F(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n}f(y_1,\dots,y_n)dy_1\dots dy_n$.

Функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ называют совместной двумерной плотностью распределения СВ X1…Xn, либо плотностью распределения СВектора (X1,…Xn); $f(x_1,\dots,x_n)=\dfrac{\partial^n F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1\dots\partial x_n}$.
~~~

6. *Записать основные свойства функции плотности распределения двумерных СВекторов.*

~~~ ~~~

• Свойства функции плотности двумерных СВекторов:

1) $$f(x,y) \geq 0$$

2) $$P\{a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f dy$$

3) $$\int_{-}^{+} \int_{-}^{+} f(x,y) dx dy = 1$$

4) $$P\{x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y\} \cong f(x,y)\, \Delta x\, \Delta y$$

5) $$P\{X = x, Y = y\} = 0$$

6) $$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y) dx dy$$

7) $$f_X(x) = \int_{-}^{+} f_{X,Y}(x,y) dy$$

8) $$f_Y(y) = \int_{-}^{+} f_{X,Y}(x,y) dx$$

7. *Сформулировать определение независимых СВ. Сформулировать их свйостава. Сформулировать определение попарно независимых СВ и СВ, независимых в совокупности.*

~~~ ~~~

• СВ X и У называют независимыми, если совместная функция распределения $F_{XY}(xy)$ является произведением одномерных функций распределения: $F_{XY}(xy) = F_X(x)F_Y(y)$

• СВ X1…Xn, заданные на одном вероятностном пространстве, называются независимыми в совокупности, если $F_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = F_{X1}(x1) \ldots F_{Xn}(xn)$; независимыми попарно, если $\forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j,\ X_i\ и\ X_j\ независимые.$

• Свойства независимых СВ:

1) СВ X и У независимы тогда и только тогда, когда $\forall x, y \in \mathbb{R}$ события $\{X \leq x\}, \{Y \leq y\}$ независимы
2) X и У независимы ⇔ $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ \{x1 \leq X \leq x2\}, \{y1 \leq Y \leq y2\}$ независимы
3) X и У независимы ⇔ $\forall M1, M2\ \ \{x \in M1\}, \{Y \in M2\}$ независимы, где M – промежутки, либо объединения промежутков
4) Если X,У – ДСВ, то X,У независимы ⇔ $p_{ij} \geq p_{x_i} {}^* p_{y_j};\ \ p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},\ p_{x_i} = P\{X = x_i\}, p_{y_j} = P\{Y = y_j\}$.
5) Если X,У – НСВ, то они независимы ⇔ $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.

8. *Понятие условного распределения. Доказать формулу для вычисления условного ряда распределения одной компоненты двумерного дискретного СВектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение. Записать формулу для вычисления условной плотности распределения одной компоненты двумерного НСВектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение.*

~~~ ~~~

• Пусть дан двумерный СВектор (X,У) и известно, что СВ У принимает значение y.

• Пусть (X,У) – дискретный СВектор; $X \in \{x_1, \ldots, x_n\},\ Y \in \{y_1, \ldots, y_n\},\ p_{ij} = P\left\{(X,Y) = (x_i, y_j)\right\} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$. Пусть для некоторого j $Y = y_j$; $P\{X = x_i, Y = y_j\} = \dfrac{P\left\{(X,Y) = (x_i, y_j)\right\}}{P\{Y = y_j\}} = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}}$. Условной вероятностью того, что СВ X примет значение xi при условии что У принимает значение yj, называется число $\Pi_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{y_j}}$; набор вероятностей $\Pi_{ij},\ \ \forall i, j$ называется условным распределением СВ X.

• Пусть (XУ) – непрерывный СВектор. Условной функцией распределения СВ X при условии $Y = y$ называется отображение $F_X(x | Y = y) = P\{X < x | Y = y\}$. Условной плотностью распределения СВ X при условии У=y называется функция $f_X(x | Y = y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, где f(x,y) – совместная плотность распределения СВектора.

9. *Сформулировать критерий независимости двух СВ в терминах условных распределений.*

~~~ ~~~

• Пусть (X,У) – двумерный случайный вектор. Тогда:

1. СВ X,У независмы ⇔ $\left[\begin{array}{l} F_X(x | Y = y) = F_X(x)\ \forall y,\ на\ которых\ определена\ F_X(x | Y = y) \\ F_Y(y | X = x) = F_Y(y)\ \forall x,\ на\ которых\ определена\ F_Y(y | X = x) \end{array}\right.$

2. Если (X,У) – НСВектор, то X,У независимы ⇔ $\left[\begin{array}{l} f_X(x | Y = y) = f_X(x) \\ f_Y(y | X = x) = F_Y(y) \end{array}\right.$

3. Если (X,У) – ДСВектор, то X,У независимы ⇔ $\left[\begin{array}{l} P\{X = x_i | Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \\ P\{Y = y_j | X = x_i\} = P\{Y = y_j\} \end{array}\right.$

10. *Понятие функции СВ. Указать способ построения ряда распределения функции ДСВ. Сформулировать теорему о плотности распределения функции от НСВ.*

~~~ ~~~

• СВ У, которая каждому значению СВ Х ставит в соответствие число $Y = \phi(x)$, называют скалярной функцией скалярной СВ Х. При этом сама У также является случайной величиной: если Х – ДСВ, то У – также ДСВ; если Х – НСВ, то У может быть НСВ, ДСВ или СВ смешаного типа.

• Если Х – ДСВ, то ряд распределения У строится следующим образом – в первой строке записываются значения $y_i = \phi\left(x_i\right)$, а во вторую строку переписываются значения $p_i, соответствовавшие\ x_i$.

• Теорема: если Х – НСВ с плотностью распределения $f_X(x)$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - монотонная и непрерывно диффернцируемая скалярная функция, а ψ – обратная к ϕ), то для СВ $Y = \phi(x)$ функция распределения $f_Y(y) = f_X\Big(\psi(y)\Big)\Big|\psi'(y)\Big|$.

11. *Понятие скалярной функции случайного векторного аргумента. Доказать формулу для нахождения значения функции распределения СВ У, функционльно зависящей от случайных величин X1 и X2.*

~~~ ~~~

• Пусть (X1, X2) – СВектор, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - скалярная функция. СВ $Y = \phi\left(X_1, X_2\right)$ называют скалярной функией случайного вектора.

• Теорема: Пусть (X1,X2) – НСВектор и $Y = \phi(X1, X2)$. Тогда $F_Y(y) = \iint_{D(y)} f\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2$.

Доказательство: $F_Y(y) = P\{Y < y\}$. $События\ \{Y < y\}, \Big\{\left(X_1, X_2\right) \in D(y)\Big\}$ эквивалентны. Следовательно,

$$F_Y(y) = P\Big\{\left(X_1, X_2\right) \in D(y)\Big\} = \iint_{D(y)} f\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2.$$

12. *Сформулировать и доказать теорему о формуле свертки.*

~~~ ~~~

• Теорема: пусть (X,У) – СВектор, непрерывный и независимый, а $Z = X + Y$. Тогда $\boldsymbol{f_Z(z) = \int_{-}^{+} f_X(x) f_Y(z-x) dx}$.

Доказательство:

$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X+Y < z\} = P\{Y < z - X\} = P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-}^{+} dx \int_{-}^{z-x} f(x,y)dy$. Т.к. Х,У независимы, то $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, следовательно $F_Z(z) = \int_{-}^{+} dx \int_{-}^{z-x} f_X(x)f_Y(y)dy = \int_{-}^{+} f_X(x)dx \int_{-}^{z-x} f(y)dy$.

Наконец, $\boldsymbol{f_Z(z)} = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_{-}^{+} f_X(x)dx \int_{-}^{z-x} f_Y(y)dy\right] = \boldsymbol{\int_{-}^{+} f_X(x) f_Y(z-x)dx}$.

Выражение $(f1*f2)(y) = \int_{-}^{+} f1(x1)f2(y-x)dx$ *называется сверткой функций* $f1, f2$.

13. *Сформулировать определение математического ожидания СВ (дискретный и непрерывный случаи). Записать формулы вычисления МО функции от СВ. Сформулировать свойства МО и его механический смысл.*

~~~ ~~~

• ДСВ: Математическим ожиданием СВ Х называется число $M[X] = \sum_i p_i x_i$, где $p_i = P\{X = x_i\}$, x_i пробегает множество всех значений Х.

НСВ: Математическим ожиданием СВ Х называется число $M[x] = \int_{-}^{+} xf(x)dx$, где f(x) – плотность распределения НСВ Х.

• Если Х – СВ, $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, то $M[\phi(X)] = \sum_i p_i \phi(x_i)$ для ДСВ и $= \int_{-}^{+} \phi(x)f(x)dx$ для НСВ.

• Механический смысл мат.ожидания: пусть есть стержень, обладающий «вероятностной массой» и в xi лежит её pi часть. Тогда математическое ожидание задаёт x0 – центр тяжести для этого стержня. В случае НСВ, f(x) можно интерпретировать как «плотность» бесконечного стержня.

Свойства МО:

1) Если Х принимает значение x0 с вероятностью 1 (т.е. не является СВ), то MX=x0.
2) $$M[aX+b] = aM[X]+b$$
3) $$M[X+Y] = MX + MY$$
4) Если Х и У независимые, то $M[XY] = MXMY$

14. *Сформулировать определение дисперсии СВ. Записать формулы вычисления дисперсии в дискретном и непрерывном случае. Сформулировать свойства дисперсии и её механический смысл.*

~~~ ~~~

• Дисперсией СВ Х называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ Х от её среднего значения: $D[X] = M[X - MX]^2$.

Для ДСВ: $DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i$; для НСВ: $DX = \int_{-}^{+} (x - MX)^2 f(x)dx$.

Механический смысл. Дисперсия представляет собой второй момент центрированной СВ Х: $X^o = X - MX$ *//коментарий автора: это не икс в нулевой, это икс с кружочком сверху*

• Свойства дисперсии:

1) Если СВ Х принимает всего одно значени С с вероятностью 1, то DC = 0
2) $$D[aX+b] = a^2 DX$$
3) $$DX = M[X^2] - (MX^2)$$
4) $D[X+Y] = DX + DY$, если Х и У – независимые СВ.

15. *Сформулировать определения начального и центрального моментов СВ. МО и дисперсия как моменты. Сформулировать определение квантили и медианы СВ.*

~~~ ~~~

• Начальным моментом К-го порядка СВ Х называют математическое ожидание К-й степени этой СВ: $m_k = M[X^k] = \sum_i x_i^k p_i$.

• Центральным моментом К-го порядка Х называют матожидание к-й степени величины $X^o = X - MX$: $m_k^o = M[(X - MX)^k] = \sum_i (x_i - MX)^k p_i$.

• Математическое ожидание СВ Х – совпадает с моментом первого порядка. Дисперсия совпадает с центральным моментом 2-го порядка.

• Квантилью СВ Х уровня а называется число q_α, определяемое соотношением $P\{X < q_\alpha\} \le \alpha$, $P\{X > q_\alpha\} \le 1 - \alpha$. Медианой СВ Х называется её квантиль уровня 0.5.

16. *Сформулировать определение ковариации СВ. Записать формулы вычисления ковариации в дискретном и непрерывном случаях. Сформулировать свойства ковариации.*

~~~ ~~~

• Коварацией СВ Х и У называется число $cov(X,Y) = M[(X - m1)(Y - m2)]$, где m1=MX, m2=MY.

Если Х,У – ДСВ, то ковариация $cov(X,Y) = \sum_{ij} (x_i - MX)(y_j - MY)p_{ij}$; если НСВ -

$cov(X,Y) = \int_{-}^{+}\int_{-}^{+} (x - MX)(y - MY)f_{XY}(x,y)dxdy$.

• Свойства ковариации:
~~~

1) $$cov(X,X) = DX$$

2) $cov(X,Y) = 0$, если Х,У – независимые СВ

3) $$Если\ Y_1 = a_1X_1 + b_1,\ Y_2 = a_2X_2 + b_2,\ \ то\ cov(Y1,Y2) = a_1a_2cov(X1,X2)$$

4) $$-\sqrt{DXDY} \le cov(X,Y) \le \sqrt{DXDY};$$

5) Равенство $\left|cov(X,Y)\right| = \sqrt{DXDY}$ верно тогда и только тогда, когда СВ Х,У связаны линейной зависимостью, т.е. $Y = aX + b$.

6) $$cov(X,Y) = M(XY) - MXMY.$$