Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2
по дисциплине «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Равашдех Ф.Х.

Группа ИУ7-65Б

Преподаватели Власов П.А.

Москва, 2025

1 Задание

1.1 Цель работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1.2 Содержание работы

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания $\mathrm{M}X$ и дисперсии $\mathrm{D}X$ соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания $\mathrm{M}X$;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии $\mathrm{D}X$.
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

1.3 Содержание отчета

1. основные формулы и определения;
2. текст программы;
3. результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта.

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Опр. Интервальной оценкой с уровнем доверия $\gamma \in (0, 1)$ параметра θ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что выполняется равенство:

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma.$$

Опр. Доверительным интервалом с уровнем доверия γ для параметра θ называется интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистики $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$, задающих оценку уровня γ для θ.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайно величины

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестны.

Тогда для построения γ-доверительного интервала для μ используется центральная статистика

$$T(\vec{X}, \mu) = \frac{\mu - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для μ вычисляются по формулам:

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $S(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$, $t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, n — объем выборки.

Для построения γ-доверительного интервала для σ^2 используется центральная статистика

$$T(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для σ^2 вычисляются по формулам:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где n — объем выборки, $S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, $h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ и $h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

3 Практическая часть

```
mu = mean(x); % -3.6762
S_quad = var(x); % 0.8664
display(mu);
display(S_quad);

gamma = 0.9;
quant_St = tinv((1 + gamma) / 2, n - 1);
mu_lower = mu - (sqrt(S_quad) * quant_St / sqrt(n));
mu_upper = mu + (sqrt(S_quad) * quant_St / sqrt(n));
display(mu_lower);
display(mu_upper);
display(mu_lower, mu_upper);

quant_chi1 = chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
quant_chi2 = chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
sigma_lower = S_quad * (n - 1) / quant_chi2;
sigma_upper = S_quad * (n - 1) / quant_chi1;
display(sigma_lower);
display(sigma_upper);
display(sigma_lower, sigma_upper);

mu_N = zeros(n, 1) + mu;
mu_n = zeros(n, 1);
mu_lower_n = zeros(n, 1);
mu_upper_n = zeros(n, 1);

S_quad_N = zeros(n, 1) + S_quad;
S_quad_n = zeros(n, 1);
S_quad_lower_n = zeros(n, 1);
S_quad_upper_n = zeros(n, 1);

for i = 1 : n
mu_n(i) = sum(x(1 : i)) / i;
S_quad_n(i) = sum((x(1 : i) - mu_n(i)) .^2) / (i - 1);

quant_st_i = tinv((1 + gamma) / 2, i - 1);

mu_lower_n(i) = mu_n(i) - (quant_st_i * sqrt(S_quad_n(i)) / sqrt(i));
mu_upper_n(i) = mu_n(i) + (quant_st_i * sqrt(S_quad_n(i)) / sqrt(i));

```

```
    quant_chi1_i = chi2inv((1 - gamma) / 2, i - 1);
    quant_chi2_i = chi2inv((1 + gamma) / 2, i - 1);

    S_quad_lower_n(i) = S_quad_n(i) * (i - 1) / quant_chi2_i;
    S_quad_upper_n(i) = S_quad_n(i) * (i - 1) / quant_chi1_i;
end

a = 11;
figure();
hold on;
grid on;
xlabel("n");
ylabel('\mu');
plot((a : n), mu_N(a:n), 'r', LineWidth=1);
plot((a : n), mu_n(a:n), 'm--', LineWidth=1);
plot((a : n), mu_lower_n(a:n), 'b-o', MarkerIndices=1:5:length(mu_lower_n(a:n)), LineWidth=1);
plot((a : n), mu_upper_n(a:n), 'k-*', MarkerIndices=1:5:length(mu_lower_n(a:n)), LineWidth=1);
legend('\mu\^(x_N)', '\mu\^(x_n)', '\mu_{-}(x_n)', '\mu^{-}(x_n)');

figure();
hold on;
grid on;
xlabel("n");
ylabel('\sigma');
plot((a : n), S_quad_N(a:n), 'r', LineWidth=1);
plot((a : n), S_quad_n(a:n), 'm--', LineWidth=1);
plot((a : n), S_quad_lower_n(a:n), 'b-o', MarkerIndices=1:5:length(S_quad_lower_n(a:n)), LineWidth=1);
plot((a : n), S_quad_upper_n(a:n), 'k-*', MarkerIndices=1:5:length(S_quad_upper_n(a:n)), LineWidth=1);
legend('S^2(x_N)', 'S^2(x_n)', '\sigma^2_{-}(x_n)', '\sigma^{2 -}(x_n)');
```

4 Экспериментальная часть

4.1 Результаты расчетов

Выборка: X=[-2.79,-3.01,-4.07,-2.85,-2.43,-3.20,-3.72,-4.27,-5.48,-2.38,-4.69,-4.34,-5.08,-5.01, -4.08,-4.20,-4.74,-1.88,-3.25,-2.78,-3.56,-3.54,-3.79,-3.18,-5.08,-4.30,-2.86,-2.45,-3.08,-3.22,-2.76,-3.20, -3.33,-4.91,-4.06,-3.81,-3.96,-3.65,-3.77,-4.60,-5.21,-2.67,-1.95,-2.43,-1.73,-2.50,-3.96,-3.75,-2.70,-4.26, -3.42,-4.07,-4.74,-3.00,-4.37,-5.42,-5.00,-4.08,-2.46,-4.33,-4.08,-3.72,-4.09,-2.96,-3.71,-1.51,-3.70,-6.48, -4.26,-4.39,-3.16,-4.63,-2.66,-2.22,-4.79,-2.46,-3.69,-3.35,-2.32,-4.17,-3.85,-4.93,-2.05,-3.15,-3.49,-5.70, -2.53,-3.85,-4.32,-3.37,-3.98,-3.74,-5.28,-2.56,-3.21,-3.10,-3.78,-3.36,-3.32,-2.59,-2.45,-3.34,-3.20,-4.14, -4.00,-4.79,-4.02,-4.58,-4.45,-3.69,-4.53,-3.98,-4.51,-4.44,-3.78,-4.24,-4.00,-2.46,-2.58,-4.04];

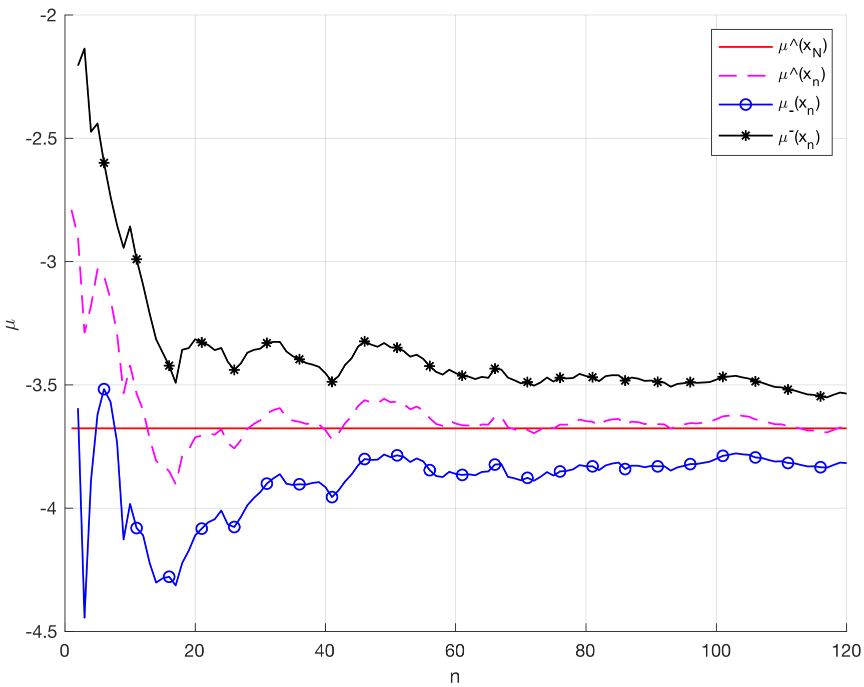

Рис. 4.1: Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

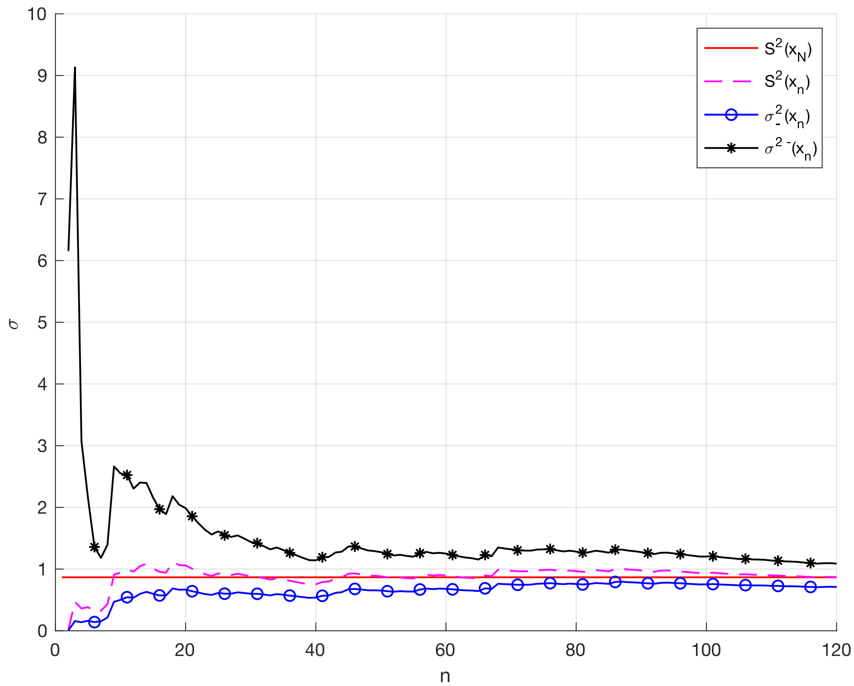

Рис. 4.2: Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N