Док-во

1) $DX = M[(X-m)^2] = \left\{\begin{array}{l} \text{Расм. с.в. } Y=(X-MX)^2 \geq 0 \\ \text{Применим к } Y \text{ 1 нерав. Чебышева} \\ P\{Y \geq \varepsilon_1\} \leq \frac{MY}{\varepsilon_1} \quad \text{для } \varepsilon_1 = \varepsilon^2 \\ MY \geq \varepsilon_1 P\{Y \geq \varepsilon_1\} \end{array}\right\} \geq \varepsilon^2 P\{Y \geq \varepsilon^2\} =$

$$= P\{(X-MX)^2 \geq \varepsilon^2\} \cdot \varepsilon^2 = P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \cdot \varepsilon^2$$

Т.о. $DX \geq \varepsilon^2 P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Пример Пред. допустим. давление в пневмосистеме ракеты сост. 200 Па. После проверки большого кол-ва однотип. ракет получено среднее знач. давления 150 Па. Оценить вер-ть, что давление в п.с. случайно выбр. ракеты окажется выше предельно допустимого. Как изменится эта оценка, если доп. известно, что ско давления в пневмосист. ракеты составл. $\sigma = 5$ Па?

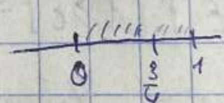
Решение

1) Пусть X - с.в., приним. знач., равное давлению в п.с. случ. выбр. ракеты, Па
Тогда из усл: $MX = 150$, $DX = \sigma^2 = 25$

Нужно оценить $P\{X \geq 200\}$

2) Т.к. X - дав $\Rightarrow X \geq 0$. Исп. 1е нерав. Чеб.

$P\{X \geq \underbrace{200}_{\varepsilon}\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$

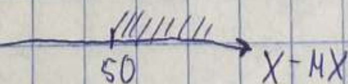


не очень информативно

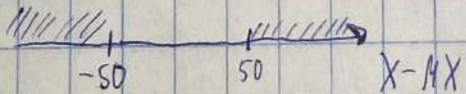
3) $\exists DX = 25$ Исп. 2 нерав. Чеб.

$P\{X \geq 200\} = P\{X - MX \geq 200 - MX\} = P\{X - MX \geq 50\} \leq P\{|X-MX| \geq 50\} \leq \left\{\begin{array}{l}\text{2е нерав.} \\ \text{Чеб}\end{array}\right\} \leq$

$P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$



$\leq \frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{25}{2500} = \frac{1}{100}$



$P\{X \geq 200\} \leq \frac{1}{100}$ лучше

1

Предельные теоремы теории вероятностей

① Неравенство Чебышева

Th 1 (1е нер-во Чебышева)

Пусть 1) X - с.в.

2) $X \geq 0$ (т.е. $P\{X<0\}=0$)

3) $\exists MX$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$ - 1е нерав-во Чебышева

Док-во

(для непр с.в.)

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \{X \geq 0\} = \int_0^{+\infty} x f_X(x)dx = \left\{\begin{matrix}\text{св-во} \\ \text{аддитив. интегр.}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\varepsilon} \underset{\geq 0}{x} \underset{\geq 0}{f_X(x)}dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f_X(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \underset{\geq \varepsilon}{x} f_X(x)dx \geq$$

$$\left\{\begin{matrix} x \geq \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow x f_X(x) \geq \varepsilon f_X(x) \end{matrix}\right\} \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon f_X(x)dx = \varepsilon \underbrace{\int_{\varepsilon}^{+\infty} f_X(x)dx}_{P(X \geq \varepsilon)} = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$$

$$MX \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

Th2 (2-е нерав Чебышева)

Пусть 1) X - сл. велич

2) $\exists MX$, $\exists DX$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$ - 2е нерав. Чебышева

Замеч

2) Второе нерав. Чебышева дало сущ. более информ. оценку, чем 1 нерав., т.к. использует доп. инф. о дисперсии с.в. X
3) Обе оценки не противоречат друг другу, но вторая информатив

Замеч Исп. 1НЧ для $\varepsilon \leq MX$ или 2НЧ для $\varepsilon \leq \sqrt{DX}$ дает тривиал. оценку: $P\{\ldots\} \leq 1$

② Сходимость последовательности случ. велич.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - посл. случ велич.

Опр Гов, что посл $X_1, X_2, \ldots$ сходится по вероятности к случ. велич. Z, если вып.:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{число } a_n} 0$$

обозн

$a_n = P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\}$ - число

в опр. написано: числовая посл. a_n сходится к 0:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Обознач. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Z$

Опр Гов, что посл. случ. велич. $X_1, X_2, \ldots$ слабо сход к с.в. Z, если вып.:

$\forall x \in \mathbb{R}$ такого, что F_Z непр. в x, вып.

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Z(x),$$

где F_Z - ф распр св Z, $F_{X_n}(x)$ - ф распр св X_n, $n \in \mathbb{N}$

в кажд точке x, в кот F_Z непр, числ посл. $\underbrace{F_{X_n}(x)}_{\text{число}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{F_Z(x)}_{\text{число}}$

Обознач. $F_{X_n} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F_Z$

④ Центральная предельная теорема

~~Необходимо~~ Пусть 1) $X_1, X_2, \ldots$ – посл. незав. сл. вел.

2) Все X_i, $i \in N$ одинаково распр.

3) $\exists MX_i = m$, $\exists DX_i = \sigma^2$

Рассм. случ. велич. $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

~~Выше было показано, что~~ $\cancel{MX_n}$

$$M[\overline{X_n}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m$$

$$D[\overline{X_n}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left\{\begin{matrix} X_1, X_2, \ldots \\ \text{незав} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Рассм. сл. вел. $Y_n = \frac{\overline{X_n} - M[\overline{X_n}]}{\sqrt{D\overline{X_n}}} = \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$, $n \in N$

Тогда $M[Y] = M\left[\frac{\overline{X_n} - M\overline{X_n}}{\sqrt{D\overline{X_n}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{D\overline{X_n}}}\left[M\overline{X_n} - M\overline{X_n}\right] = 0$

$$D[Y] = D\left[\frac{\overline{X_n} - M\overline{X_n}}{\sqrt{D\overline{X_n}}}\right] = \frac{1}{D\overline{X_n}} D[\overline{X_n} - \cancel{M\overline{X_n}}] = 1$$

<u>Th</u> Центральная пред. теорема (ЦПТ)

Пусть 1) выполн. усл-я 1-3

2) $Y_n = \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m}{\sigma/\sqrt{n}}$, $n \in N$

Тогда посл-ть $Y_1, Y_2, \ldots$ слабо сходится к сл. вел. $Z \sim N(0,1)$

т.е. $\forall x \in R$ $F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$

функция распр станд. норм с.в

<u>Док-во</u> без док-ва

③ Закон больших чисел

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - посл. с.в.
$\exists MX_i = m_i,\ i \in N$

Опр Гов, что посл $X_1, X_2, \ldots$ удов. закону больших чисел, если
$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{ \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \right| \geq \varepsilon \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

R $\mathbb{R}$

Замеч

1) Обознач. $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad n \in \mathbb{N}$

$\overline{X_n},\ n \in N$ - случ. величины (выр через $X_1, X_2, \ldots, X_n$)

2) В опр ЗБЧ написано, что посл. $X_1, X_2, \ldots$ удов ЗБЧ, если
$$\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Это означ, что если посл. удов ЗБЧ, то при дост. больших n
$$\overline{X_n} \approx \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i}_{\text{это не случ. велич}}$$

т. е. при дост. больших n сл. велич $\overline{X_n}$ практич. теряют случ. характер

Вопрос Какой д.б. посл. $X_1, X_2, \ldots$, чтобы она удов ЗБЧ?

Th Чебышева (дост. усл. того, что посл сл вел удов ЗБЧ)
(ЗБЧ Чебышева)

Пусть 1) $X_1, X_2, \ldots$ - посл незав случ. велич.
2) $\exists MX_i = m_i,\ \exists DX_i = \sigma_i^2,\ i \in N$
3) Дисп. с.в. $X_1, X_2, \ldots$ огранич. в совокуп, то есть
$$(\exists C > 0)(\sigma_i^2 \leq C,\ i \in N)$$

Тогда
посл. $X_1, X_2, \ldots$ удов ЗБЧ

Следствие 2 Th Бернулли (ЗБЧ в форме Бернулли)

Пусть 1) провод. n испыт. по схеме Бернулли с вер. усп. p в отд. испыт.

2) Введем $r_n = \dfrac{\{\text{число успехов в серии из } n \text{ испыт}\}}{n}$

r_n — наблюденная частота успеха в серии из n испыт.

Тогда $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$

Док-во:

1) Расcм. сл. вел. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испыт. имел место успех} \\ 0 & \text{неудача} \end{cases}$

$X_i \sim B(1,p)$ $i \in N \Rightarrow MX_i = p$ $DX_i = pq$
(одинак. распр)

X_i независимы, т.к. испытания в схеме Бернулли независ.

Т.о. $X_1, X_2, \dots$ удов. следствию 1 из Th Чебышева $\Rightarrow$

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} MX_i = p$$

2) $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\substack{\text{число успехов} \\ \text{в серии из } n \text{ испыт}}} = r_n$

Т.О. $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$

Замеч. ЗБЧ в форме Бернулли означает, что при дост. большом объеме n испыт $r_n \approx p$

Покажем, что если в th Чеб. усл-е 3 заменить на 3', то посл $X_1, X_2, \ldots$ будет удов ЗБЧ

Док-во

$** \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad 0 \le P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \le \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2}$

$* \Rightarrow D\overline{X}_n \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

т.о. $\forall \varepsilon > 0 \quad \underset{\downarrow 0}{0} \le P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} \underset{\downarrow 0 \text{ (условие 3')}}{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$

по th о двух милиц. $P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ посл удов ЗБЧ

Следствие 1 th Чебышева

Пусть 1) $X_1, X_2, \ldots$ посл незав св

2) Все X_i, $i \in N$ одинаково распр.

3) $\exists MX_i = m$, $\exists DX_i = \sigma^2$, $i \in N$

Тогда

$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$

Док-во. Т.к. выполн

1) Условия 1 и 2 th Чебышева вып. Условие 3 также вып, т.к. $\sigma_i^2 = \sigma^2 \le \sigma^2 = C$. Поэтому посл. $X_1, X_2, \ldots$ удов ЗБЧ:

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\overline{X}_n - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m}_{m}| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$

Док-во

1) Рассм. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in N$

Применим к сл. велич. $\overline{X}_n$ 2НЧ: $P\{|\overline{X}_n - M[\overline{X}_n]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2}$ ⊛

$M[\overline{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$

$D[\overline{X}_n] = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2} D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \{X_i \text{ незав}\} = \overbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} \leq$

$\leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{n \cdot C}{n^2} = \frac{C}{n}$ ⊛⊛

Т.О.

$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \overbrace{P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum m_i| \geq \varepsilon\}}^{a_n} \leq \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}$

Устремим $n \to \infty$. Тогда $\frac{C}{n\varepsilon^2} \to 0$

Тогда по th о двух милиц.

$a_n \to 0$

Лекция 2
14.02

Замечание 1) Если посл $X_1, X_2, \ldots$ удов. усл. th Чебышева (и, ест, удов ЗБЧ), то про нее говорят, что она удов ЗБЧ в форме Ч (вып. усл. Ч)

2) Условие 3 в th Чебышева можно ослабить, потребовав вместо ограниченных дисперсий:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0$ (3')

{очевидно, что если вып 3, то вып. и (3'). обратное неверно}?

Пример В эксп. Пирсона по подбр. прав. монеты герб выпал 12 012 раз после 24000 подбрас. Какова вероятн. того, что при повт. испыт. отклонения отн. частоты успеха от 1/2 окажется таким же или больше.

Лекция 3
21.02

Решение

1) Схема исп. Бернулли $n = 24000$, $p = q = \frac{1}{2}$

$A = \{$ откл. ~~оконч.~~ отн. частоты успеха в повторном испытании окажется таким же или большим $\}$

$\overline{A} = \{$ – 11 – меньшим $\}$

2) Пусть k – число усп. в серии. Тогда отн. част. усп. $r_n = \frac{k}{n}$

$$\overline{A} = \left\{ \left| r_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{12\,012}{24000} - \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \frac{12000 - 12}{24000} < \frac{k}{n} < \frac{\cancel{12000+}\,12012}{24000} \right\} =$$

$$= \{ 11\,988 < k < 12\,012 \}$$

3) Тогда $P\{\overline{A}\} = P\{ 11\,988 < k < 12012 \} \approx \left\{ \begin{matrix} \text{инт. th} \\ \text{Муар-Лапл} \end{matrix} \right\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) \overset{*}{=}$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{12\,012 - \frac{1}{2} \cdot 24000}{\sqrt{24000/4}} = \frac{12}{\sqrt{6000}} = \frac{1.2}{\sqrt{60}} \approx 0.155$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{11\,988 - 12000}{\dots} \approx -0.155$$

$$\overset{*}{=} 2\,\Phi_0(0.155) \approx 2 \cdot 0{,}0615 = 0.123$$

Т.О. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}877$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}877$

Th (следствие) интегральная th Муавра-Лапласа

Пусть 1) проводится серия из $n>>1$ испыт. по схеме Бернулли с вероят. успеха p

2) S - общее число успехов в этой серии

Тогда $P\{k_1 \le S \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$, где

$x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = \overline{1,2}$, $q = 1-p$

Док-во

1) Пусть $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испыт. успех} \\ 0 & \text{неуд} \end{cases}$

Тогда 1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ - незав. случ. велич.

2) $X_i \sim B(1,p)$, $i \in \mathbb{N}$ - одинак. распр.

3) $MX_i = p$, $DX_i = pq$, $i \in \mathbb{N}$

Т.о. посл. $X_1, X_2, \dots$ удов. ЦПТ

Кроме того, $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

2) Т.о. $P\{k_1 \le S \le k_2\} = P\{k_1 \le \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \le k_2\} = P\{\frac{k_1}{n} \le \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \le \frac{k_2}{n}\} =$

$= P\{\frac{k_1}{n} - \underset{p}{\underset{\shortparallel}{m}} \le \overline{X}_n - \underset{p}{\underset{\shortparallel}{m}} \le \frac{k_2}{n} - \underset{p}{\underset{\shortparallel}{m}}\} = P\{\dfrac{\frac{k_1}{n} - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \le \dfrac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{DX_i}/\sqrt{n}} \le \dfrac{\frac{k_2}{n} - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}}\}$

$= P\left\{\dfrac{\frac{k_1}{n} - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \le \underbrace{\dfrac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{DX_i}/\sqrt{n}}}_{Y_n} \le \dfrac{\frac{k_2}{n} - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\underbrace{\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}_{x_1} \le Y_n \le \underbrace{\dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}}_{x_2}\right\} =$

$\approx \left\{ \begin{matrix} n>>1 \Rightarrow Y_n \sim N(0,1) \\ \text{прибл} \end{matrix} \right\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$

Замеч если $Y_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} Z \sim N(0,1)$, то говорят, что случ. величины Y_n имеют асимптотически станд. норм. распр.

Пример Проводят суммирование $n=10^4$ вещ. чисел, каждое из которых ~~содержит ошибку~~ округлено с точностью 10^{-4}. Считая, что ошибки окр. независимы и равном. распр. в интервале $(-0{,}5\cdot10^{-4}; 0{,}5\cdot10^{-4})$, найти диапазон, в котором с вероятн. 0,95 будет заключена ошибка результата суммирования

Реш. 1) Пусть X_i, $i=\overline{1,n}$ – случ. велич., принимающая значение, равное ошибке округл. i-го слаг.

Тогда $X_i \sim R(-0{,}5\cdot10^{-4}; 0{,}5\cdot10^{-4})$;

X_i – незав (по усл) $i=\overline{1,n}$

$S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ – ошибка результата сум. n чисел

2) $0.95 = P\{|S|<\varepsilon\}$ $\quad \varepsilon = ?$

$$0.95 = P\{|S|<\varepsilon\} = P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|<\varepsilon\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ЦПТ} \\ Y_n = \dfrac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow \overset{N(0,1)}{Z_n} \end{array} \right\} =$$

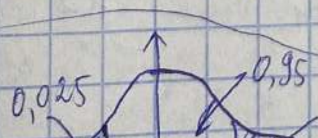
$$= \left\{ \begin{array}{l} X_i \sim R(-0{,}5\cdot10^{-4}; 0{,}5\cdot10^{-4}) \\ \Rightarrow MX_i = 0 \\ DX_i = \frac{10^{-8}}{12} \approx 10^{-9} \\ \Rightarrow \sigma \approx \frac{1}{3}10^{-4} \end{array} \right\} = P\left\{ \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \cancel{m}^{0}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{10^{-4}}{\sqrt{10^4}}} < \frac{\varepsilon\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{3}\cdot10^{-4}/\sqrt{n}} \right\} =$$

$$= P\left\{|Y_n| < \varepsilon\frac{3\sqrt{n}}{10^{-4}}\right\} = P\left\{|Y_n| < \overset{\varepsilon_1}{\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}}\right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. } n = 10^4 >> 1 \Rightarrow \\ \text{счит., что } Y_n \sim N(0,1) \text{ приближенно} \\ \text{(ЦПТ)} \end{array} \right\} = P\{|Y_n| < U_{0,975}\}$$

Из таб $U_{0,975} = 1.96$

$$\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}} = 1.96 \Rightarrow \varepsilon = \sigma\sqrt{n}\cdot1{,}96 \approx 6{,}5\cdot10^{-3}$$



$\varepsilon_1 = U_{0,975}$ – квантиль уровня $\alpha = 0.975$ станд норм сл. вел.

Т. о. $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{n}}$

Ответ: $S \in (-6.5\cdot10^{-3}, 6{,}5\cdot10^{-3})$

Опр <u>Выборкой</u> объема n из ген. совокупности X наз (любая) реализация случ. выборки объема n из ген. совокуп-ти X:
$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$
(маленькие, а там большие)

Замеч 1) После проведения эксп-в исследователь имеет в своем распоряжении <u>выборку $\vec{x}$</u>

<u>Случайная</u> выборка используется в теор. рассуждениях.

2) Пусть F – закон распр. св X. Тогда функц. распр. сл. выборки объема n из ген. совокупности X:

$$F_{\vec{X}}(t_1, ..., t_n) = P\{X_1 < t_1, ..., X_n < t_n\} = \left\{ \begin{matrix} \text{все } X_i \text{ незав.} \\ \text{в совокуп} \end{matrix} \right\} =$$

$$= P\{X_1 < t_1\} \cdot ... \cdot P\{X_n < t_n\} = F_{X_1}(t_1) \cdot ... \cdot F_{X_n}(t_n) =$$

$$= \{ X_i \sim X \Rightarrow F_{X_i} = F \} = F(t_1) \cdot ... \cdot F(t_n)$$

Опр Мн-во всех возм. значений сл. выборки $\vec{X}$ объема n из ген. совокупности X будем ~~обознач~~ наз <u>выборочным пространством</u> n, обознач.

$$X_n$$

Опр Любую измер. функцию $g(\vec{X})$ случ. выборки $\vec{X}$ будем наз. <u>статистикой</u>. При этом знач-е $g(\vec{x})$ этой ф. на выборке $\vec{x} \in X_n$ будем наз выборочным значением статистики g

Замеч Пусть $\vec{x}$ – выборка объема n из ген. совокуп. X. Это позвол. считать, что закон распр. св X моделируется законом распр-я дискр. св $\tilde{X}$:
$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$

$\tilde{X}$	x_1	x_n
p	$1/n$	$1/n$

Мат. ожид. св $\tilde{X}$: $M\tilde{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$D\tilde{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\tilde{X})^2$$

• Рассмотрим "общую" задачу МС:

Дано величина X, закон распр. кот. неизвестен (известен не полностью). Требуется по результатам наблюдений, т.е. по имеющимся реализациям св X сделать выводы о ее законе распр-я.

• Первая задача МС:

Дана св X, закон распр. кот неизвестен. Требуется "найти" закон распр св X

• Вторая задача МС:

Дана св X, закон распр. кот. известен с точностью до вектора $\vec{\theta}=(\theta_1, \dots, \theta_n)$ неизв. параметров. Требуется "найти" (оценить значения) этих параметров.

Замеч Фраза "закон распр. известен с точн. до в-ра θ произв. парам" означает, что известен общий вид распр. св X, но этот закон зависит от неизв. числовых параметров $\theta_1, \dots, \theta_n$, из кот. сформирован в-р $\vec{\theta}$

Пример 1) Известно, что св $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$, те известен общий вид з-на распр св X (это норм св), но неизв. парам θ_1 и θ_2 этого з-на распр

2) Изв., что $X \sim N(\theta_1, 1)$. θ_1 - неизв. параметр

Опр Мн-во возм значений св X с учетом ее закона распр-я (возможно, неизв.) будем называть генеральной совокупностью

Опр Случайной выборкой объема n из генер. совокуп. X наз. случ. вектор $\vec{X}=(X_1, \dots, X_n)$, где $X_i \sim X$, $i=\overline{1,n}$, $X_1, \dots, X_n$ незав. в совокуп

Математическая статистика

Основные понятия выборочной теории

1) Основные определения

Теория вероятностей - одна из ветвей "чистой" математики, которая строится дедуктивно, исходя из вполне опред. набора аксиом.

Мат. статистика явл. разделом ("грязной" математики) прикладной математики, которая строится индуктивно - от наблюдения к гипотезе, при этом аргументация основана на выводах теории вероятностей.

Пример 1) типичная задача ТВ: вероятн. вып. герба при одном подбр. равна р. Какова вероятн. того, что при n подбр. герб выпадет m раз?

типич. задача МС: после подбр. монеты n раз герб выпал m раз. Чему равна вероятн. p выпад. герба при одном подбр.

Основная задача МС: разработка методов получения научно-обоснованных выводов о массовых процессах или явл. по данным набл. или эксп. Эти выводы отн. не к отд. эксп-м, а представ. собой утверждение о вероятностных характеристиках изучаемых процессов или явлений

При этом n_i наз. частотой значения $z_{(i)}$,

$\frac{n_i}{n}$ - отн. частотой знач. $z_{(i)}$

$\boxed{\text{III}}$ Эмпирическая и выборочная функции распределения.

Пусть $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ - выборка из ген. сов-ти X.

Обозначим $n(t, \vec{x})$ число компонент век. $\vec{x}$, кот. меньше, чем t

Опр Эмпирич. ф. распр., построенной по выборке $\vec{x}$ наз. функцию

$$F_n: R \to R, \text{ опр. правилом}$$

$$F_n(t) = \frac{n(t, \vec{x})}{n}$$

Замеч 1) Функция F_n может принимать значения из мн-ва

$$\left\{ 0 = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1 \right\}$$

2) F_n явл. кусочно постоянной функцией, кот. имеет скачки (разрывы 1го рода) в точках

$t = z_{(i)}$

($z_{(i)}$, $i = \overline{1,m}$ - все попарно разл. знач-я компонент выборки $\vec{x}$)

3) Если все комп. выборки $\vec{x}$ попарно различные, то

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leq x_{(1)} \\ 1/n, & x_{(1)} < t \leq x_{(2)} \\ \dots \\ \frac{n-1}{n}, & x_{(n-1)} < t \leq x_{(n)} \\ 1, & x_{(n)} < t \end{cases}$$

4) Эмпирич. ф. распр. обладает всеми св-ми функции распределения

Опр. Вариац. рядом, отвечающим случ. выборке $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$, наз. случайный вектор $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})$, где $X_{(i)}$ - случ. величина, которая для каждой реализации $\vec{x}$ случ. вектора $\vec{X}$ принимает значение, равное i-му члену вариац. ряда, построенного по выборке $\vec{x}$

Замеч. 1) $P\{X_{(i)} \le X_{(i+1)}\} = 1$, $i = \overline{1, n-1}$

2) Пусть $F(t)$ - ф. распр. ген. совокуп. X. Тогда

а) $F_{X_{(n)}}(t) = P\{X_{(n)} < t\} = P\{X_1 < t, X_2 < t, ..., X_n < t\} =$

$= \left\{ \begin{array}{l} X_i \text{ - незав} \\ \text{в совокуп} \end{array} \right\} = P\{X_1 < t\} \cdot ... \cdot P\{X_n < t\} = F_{X_1}(t) \cdot ... \cdot F_{X_n}(t) =$

$= \left\{ \begin{array}{l} X_i \sim X \\ F_{X_i} = F_X \end{array} \right\} = [F(t)]^n$

б) $F_{X_{(1)}}(t) = P\{X_{(1)} < t\} = 1 - P\{X_{(1)} \ge t\} = 1 - P\{X_1 \ge t, ..., X_n \ge t\} =$

$= \{X_i \text{ - незав}\} = 1 - P\{X_1 \ge t\} \cdot ... \cdot P\{X_n \ge t\} = 1 - [1 - P\{X_1 < t\}] \cdot ... \cdot [1 - P\{X_n < t\}]$

$= \left\{ \begin{array}{l} X_i \sim X \\ F_{X_i} = F_X \end{array} \right\} = 1 - [1 - F_X(t)]^n$

II. Статистический ряд

Рассм. выборку $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ из ген. совокуп. X.
Среди чисел x_i, $i = \overline{1, n}$, могут встречаться одинаковые. Это может быть в том случае, когда X - дискр. с. в. или если при проведении наблюдений рез-ты округлялись с нек. точностью

Среди значений $x_1, ..., x_n$ компонент выборки $\vec{x}$ выберем все попарно различ. знач. обозначим их
$z_{(1)} < ... < z_{(m)}$

Составим табл.*

$z_{(1)}$	...	$z_{(i)}$	...	$z_{(m)}$
n_1	...	n_i	...	n_m

Здесь n_i - число компонент в-ра $\vec{x}$, кот. имеют знач-е $z_{(i)}$
$\left(\sum_{i=1}^{m} n_i = n\right)$

таб* наз. статистическим рядом, отвеч. выборке $\vec{x}$

Эти соображения приводят к след. опр-ю.

Опр Выборочным средним наз. статистика
$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Опр Выборочной дисп. наз статистика
$$\hat{\mathring{m}}_2(\vec{X}) = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Опр Начальным моментом порядка k наз. статистика
$$\hat{m}_k(\vec{X}) = \cancel{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Опр Центральным выборочн. моментом пор. k наз статистика
$$\hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$$

Замеч С учетом пред. замеч о том, что зак. распр св $\tilde{X}$ моделирует закон распр. ген. совокуп. X можно утв, что выборочные моменты явл. оценками своих теоретич. (т.е. "истинных", таких, кот. "на самом деле" и кот. нам неизв.) аналогов

Лекция 4
28.02

② Предварительная обработка рез-в эксперимента

I. Вариационный ряд

Рассмотрим выборку $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{x}$ из ген. сов. X

Опр Вариац. рядом, отвечающим выборке $\vec{x}$ называется вектор $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)})$,
полученный из вектора $\vec{x}$ путем расположения его компонент в порядке неубывания, то есть числа $x_1 \ldots x_n$ расп. в порядке неуб.

$$x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$$

Лекция 5
14.03

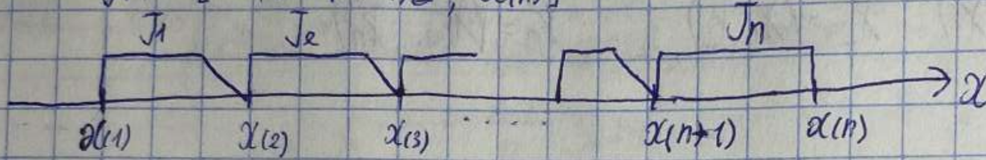
$\boxed{\text{IV}}$ Интервальный статистический ряд

Было понятие стат. ряда, однако, если объем выборки велик, то элементы выборки группируют в т.н. интерв. стат. ряд.

Для этого отрезок $J=[x_{(1)}, x_{(n)}]$ разбивают на m равновелик. ~~интервалов~~ промежутков. Ширина каждого из них $\Delta = \frac{|J|}{m} = \frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{m}$

$$J_i = [x_{(1)}+(i-1)\Delta;\ x_{(1)}+i\Delta),\ i=\overline{1,m-1}$$

$$J_m = [x_{(1)}+(m-1)\Delta;\ x_{(n)}]$$



Опр Интервальным статист. рядом, отвечающим выб. $\vec{x}$ наз. таб. вида

J_1	J_2	...	J_i	...	J_m
n_1	n_2	...	n_i	...	J_m

n_i – число элементов в выборке $\vec{x}$, попавш. в пром. J_i

Замеч 1) $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$

2) для выбора m исп. форм. $m=\lfloor \log_2 n \rfloor + 2$
или
$m=\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

Th Для любого фиксир. $t_0 \in R$ посл-ть случ. величин
$\hat{F}(t_0, \vec{X_1}), \hat{F}(t_0, \vec{X_2}), \ldots, \hat{F}(t_0, \vec{X_n}), \ldots$ сходится по вероятности
к значению теоретической (то есть „истинной") функции распр св X в точке t_0, т.е. $\hat{F}(t_0, \vec{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F(t_0)$

Выше мы обознач. случ. выб. $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ не включ. объем выборки в обознач. в-ра
$\vec{X_1} = (X_1)$ $\vec{X_2} = (X_1, X_2), \ldots, \vec{X_n} = (X_1, \ldots, X_n)$

Док-во

При фикс. $t_0 \in R$ сл. вел. $\hat{F}(t_0, \vec{X_n}) = \frac{\overbrace{n(t_0, \vec{X_n})}^{\text{биномиальн. с. в.}}}{n}$ равна
отн. частоте успеха, (то есть соб-я $\{X < t_0\}$) в серии из n исп. по сх Б.
В соотв. с ЗБЧ в форме Бернулли наблюденная частота сходится по вер к частоте теор: $\hat{F}(t_0, \vec{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \underbrace{p}_{\text{теор частота}}$,
но $p = P\{X < t_0\} = F(t_0)$

4° (из 2° и 3°)

$$\Gamma(n+1) = \{ n \cdot \Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots \} = n!$$

Часто говорят, что гамма-ф. явл. обобщением понятия факториала на вещ. (положит.) числа

5° $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

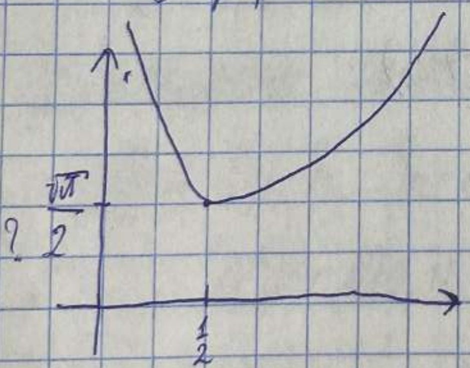
$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\, d\sqrt{t} = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{t} \\ t=0 \quad u=0 \\ t=+\infty \quad u=+\infty \end{array} \right.$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du}_{\text{инт. Пуассона}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

6° $$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \{\text{по } 2°\} = \left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right) = \ldots =$$

$$= \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

7° Эскиз графика гамма-функции



VI Полигон частот

Пусть для некот. выборки $\vec{x}$ постр. гистограмма. Л

Опр Полигоном частот наз. ломаная, звенья кот. соединяют середины верхних сторон соседних прямоуг. гистограммы

Некоторые распределения, используемые в математической статистике

① Гамма-функция Эйлера

Опр Гамма-функцией Эйлера наз. отобр

$$\Gamma: R^+ \to R,$$

определенное правилом $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, (*)
(т.е. x - параметр)

Замеч 1) Интеграл * явл. несобств. интегр. 1 рода (при $x \geq 1$)
При $x \in (0;1)$ этот инт. явл. также несобств и имеет 2 особ.:
1) в т. $t=0$ подынт. функция терпит разрыв 2го рода
2) верхний предел явл. бесконечным.

Легко проверить, что этот инт. сходится при $x>0$.
При ост. (вещ) x он расходится

Некот. св-ва гамма-ф.

1° $\Gamma(x)$ явл. бескон. число раз дифф. функцией. При этом

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^k dt, \quad k=0,1,\dots$$

2° $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $x \overset{\text{строго}}{>} 0$

3° $\Gamma(1)=\left\{ \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 \right\}=1$

V Эмпирическая плотность

Пусть для данной выборки $\vec{x}$ построен интерв. стат. ряд

(J_i, n_i), $i=\overline{1,m}$

Опр Эмпирич. ф. плотн. распр, соотв. выборке $\vec{x}$ наз. функцию

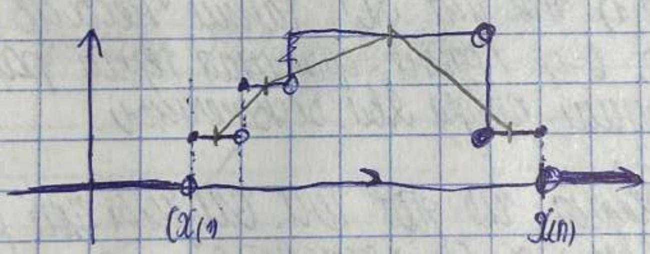
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & \text{если } x \in J_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замеч 1) Очевидно, что интегр. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_{x_{(1)}}^{x_{(n)}} f_n(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{J_i} f_n(x)dx =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n\Delta}\Delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i = \frac{n}{n} = 1$$

т. о. эмпир. плотность удов. усл-ю норм. Легко показ, что она обл. всеми св-ми ф. плотн.

2) $f_n(x)$ явл. кусочно-непр. ф.



3) ф. $f_n(x)$ явл. статистич. аналогом ф. плотн. распр. вероятн. аналогично доказанному выше рез-ту для ф. распр-я

$$\hat{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

можно док., что и ~~$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{}$~~ $f_n(x) \approx f(x)$ при $n >> 1$.

Опр График эмпирич. функции плотности наз. гистограммой

Замеч

1) $\xi_i \sim N(0,1) \Rightarrow \xi_i^2$ имеет распр Релея с парам $\sigma^2 = 1$, т.е.

$\xi_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Т.к. св $\xi_1, \dots, \xi_n$ незав, с учетом св-ва гамма-распр

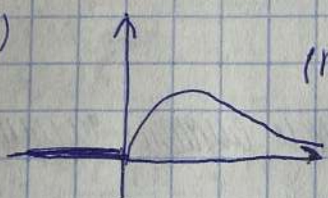
$$\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{n}{2}\right)$$

Т.о. $\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{n}{2}\right)$

2) Очевидно, что если незав св $\eta_1, \dots, \eta_n$ имеют распр χ^2 (т.е. $\eta_i \sim \chi^2(k_i)$)
то

$$\eta_1 + \dots + \eta_n \sim \chi^2(k_1 + \dots + k_n)$$

3) Пусть $\eta \sim \chi^2(n)$



$(n \geq 4)$

$n < 4$

⑤ Распределение Фишера

Пусть 1) ξ_1, ξ_2 – незав

2) $\xi_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = \overline{1,2}$

3) $$\eta = \frac{n_2 \xi_1}{n_1 \xi_2}$$

Опр В этом случае гов, что св η имеет распр Фишера со степ. своб n_1 и n_2

$\eta \sim F(n_1, n_2)$

③ Распределение Релея

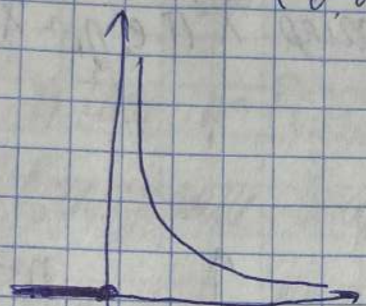
Пусть 1) $\xi \sim N(0, \sigma^2)$

2) $\eta = \xi^2$

Опр В этом случ. гов, что св η имеет распр Релея с парам σ

Замеч 1) Несложно показать, что

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



2) Распр Релея явл. частным случаем гамма распр для $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, $\alpha = 1/2$

т.е. $\eta \sim \Gamma\left(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{1}{2}\right)$

④ Распределение хи-квадрат

Пусть 1) $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ - незав св

2) $\xi_i \sim N(0, 1)$ $i = \overline{1,n}$

3) $\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$

Опр В этом случае гов, что св η имеет распр хи-квадрат с n степенями свободы.

Обозн. $\eta \sim \chi(n)$ "хи" χ

② Гамма-распределение

Опр Гов, что св ξ имеет гамма-распр с параметрами λ и α, если ее ~~ф. распр~~ плотность распр. вер. имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Замеч 1) Экспоненц распр. $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

явл. частным случаем гамма-распр-я для λ и $\alpha=1$,

т.е. $Exp(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$

Th Пусть 1) св $\xi_1 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1)$

2) $\xi_2 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_2)$

3) ξ_1 и ξ_2 незав.

Тогда $\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1+\alpha_2)$

След Если св $\xi_1, \dots \xi_n$ незав, прич. $\xi_i \sim \Gamma(\lambda, \alpha_i)$, $i=\overline{1,n}$, то

$$\xi_1 + \dots + \xi_n \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

Характеристики точечных оценок:
1) несмещенность
2) состоятельность
3) эффективность

② Несмещенность точечной оценки

Пусть θ - неизв параметр закона распр св X, а $\hat{\theta}(\vec{X})$ - точечная оценка для θ

Опр Точечная оценка $\hat{\theta}$ парам. θ наз несмещенной, если $\exists M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$

сл. выб

случ. величина

теоретическое знач. параметра

Пр Пусть X - ген. сов-ть, $\theta_1 = MX$

1) Покажем, что $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \overline{X}$ яв. несмещ. оценкой для θ

$$M[\hat{\theta}(\vec{X})] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \left\{\begin{array}{l}\text{из опр случ. выб.} \\ X_i \sim X,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow \\ \exists MX_i = MX = \theta\end{array}\right\} = \frac{1}{n}\cdot n\theta = \theta,$$

те $\hat{\theta}_1$ - несмещ. оценка для θ

2) Оценка $\hat{\theta}_4(\vec{X}) = X_1$ также яв. несмещ ос для θ

Пр X - ген совокуп, $\exists DX = \sigma^2$, $\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \mathring{m}_2(\vec{X}) = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}_{\text{выбороч. дисп.}}$ - исп. в кач-ве точечной оценки для парам σ^2

На сем. показано, что $M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$, то есть выбороч. дисп. является смещ. оценкой дисперсии.

Замеч 1) Рассмотрим статистику

$$S^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

тогда

$$M[S^2(\vec{X})] = M[\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

те $S^2(\vec{X})$ является несмещ. оценкой дисп.

2) можно пок, что при $k \geq 2$ выб. моменты яв. смещенными оценками всех ~~несм пар~~ теор. аналогов

Опр Статистика $S^2(\vec{X})$ наз. исправленной выбороч. дисперсией

Точечные оценки

① Основные понятия

<u>2 задача МС</u> <u>Дано:</u> X – св, закон распр кот известен с точностью до вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ неизвестных параметров

<u>Требуется:</u> оценить вектор $\vec{\theta}$

Для реш. этой задачи исп. различные подходы
1) постр. точечных оценок
2) постр. доверит. интервалов

Пусть θ – неизв. парам. закона распр. св X, общий вид кот. известен

<u>Опр</u> Точечной оценкой парам. θ наз. статистика $\underbrace{\hat{\theta}(\vec{X})}_{\text{дает сл. велич.}}$, выборочное знач. которой исп. в кач-ве знач. параметра θ, то есть принимается рав-во

$$\theta = \underbrace{\hat{\theta}(\vec{x})}_{\text{дает число – знач. статис. } \hat{\theta} \text{ на выборке } \vec{x}}$$

выборка те числ. вектор

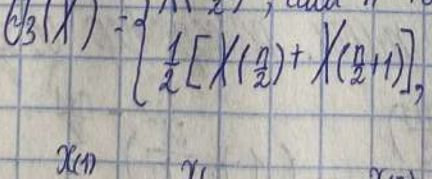
<u>Пример</u> Пусть X – св, $\theta = MX$

В кач-ве точ. оц. для θ можно исп. статистики:

$\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ – выбороч. среднее

$\hat{\theta}_2(\vec{X}) = \frac{1}{2} [X_{(1)} + X_{(n)}]$ – середина выбороч. интервала

$$\hat{\theta}_3(\vec{X}) = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{если } n \text{ – нечетное} \\ \frac{1}{2}[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}], & \text{если } n \text{ – четное} \end{cases}$$ – центральный элемент вариац. ряда



Замеч. В опр. точечной оценки не сказано, что она должна принимать знач., хоть сколько-нибудь близкое к знач. параметра ("истинному"). Очевидно, что разные оценки могут давать более или менее адекв. результаты. Для исслед. кач-ва точечной оценки исп. след. характеристики

$\hat{\theta}_4(\vec{X}) = X_1$

$\hat{\theta}_5(\vec{X}) = \sin[\Gamma(|X_1|+1) \cdot \Gamma(|X_2|+2) \cdot \ldots \cdot \Gamma(|X_n|+n)] + 5$

Замеч 1) Можно пок, что

$$f_\eta(x) = \begin{cases} C \cdot \dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{n_1 x}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x>0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $C = \dfrac{(n_1/n_2)^{n_1/2}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)}$

бета-функц. Эйлера

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ — бета-ф. Эйлера}$$

2) Если $\eta \sim F(n_1, n_2)$, то $\frac{1}{\eta} \sim F(n_2, n_1)$

Лекция 6
21.03.

⑥ Распределение Стьюдента

Пусть 1) $\xi \sim N(0,1)$

2) $\eta \sim \chi^2(n)$

3) ξ и η - незав

4) $\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n}$

дальше зависит от n

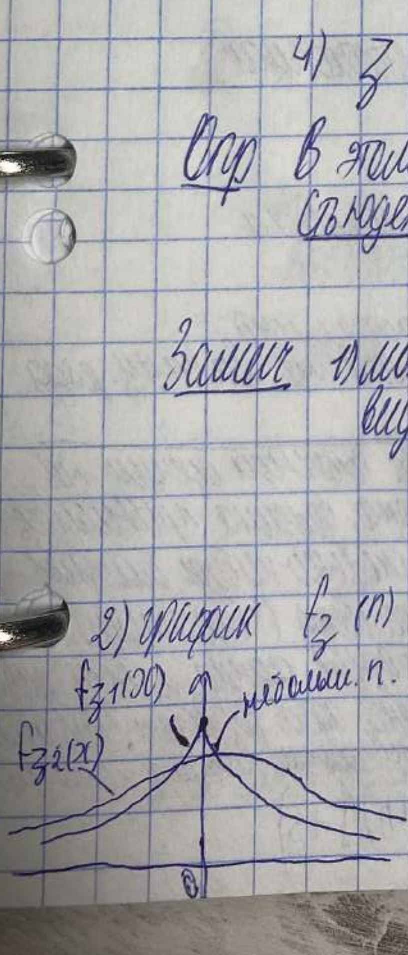
Опр В этом случае говорят, что св ζ имеет распред. Стьюдента с n степенями свободы

$$\zeta \sim St(n)$$

Замеч 1) можно пок, что ф. плотн. распр вер св $\zeta \sim St(n)$ имеет вид

$$f_\zeta(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2) график $f_\zeta(n)$



С ростом $n \to$ к ст. норм. распр

$\zeta_1 \sim St(n_1)$

$n_1 < n_2$

$\zeta_2 \sim St(n_2)$

Замеч. Иногда говорят не об эффективной "вообще" точечной оценке, а об оценке, эфф. в нек. классе

Пусть Θ - нек. класс несмещ. оценок для парам θ

Опр. Оценка $\hat{\theta} \in \Theta$ наз эфф. в классе Θ, если она имеет наим. дисперсию среди всех оценок этого класса, т.е.

$$(\forall \tilde{\theta} \in \Theta)(D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta})$$

Пример Пусть X - св; $\exists MX = m$; $\exists DX = \sigma^2$.
Док, что оценка $\hat{m}_1(\vec{X}) = \overline{X}$ явл. эфф. оценкой для m в классе линейных оценок.

Решение

1) Лин. оценка имеет вид $\hat{m}(\vec{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ $(*)$, где $\lambda_i \in R$, $i = \overline{1,n}$

а) Тогда матож лин. оценки $(*)$:

$$M[\hat{m}] = \lambda_1 MX_1 + \ldots + \lambda_n MX_n = \left\{ \begin{matrix} X_i \sim X \\ MX = m \end{matrix} \right\} = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) m$$

Т.к. оценка д.б несмещ, то $M[\hat{m}] = m \Rightarrow \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$

б) Дисперсия оценки $(*)$

$$D[\hat{m}] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 DX_i = \left\{ \begin{matrix} X_i \sim X \\ DX_i = \sigma^2 \end{matrix} \right\} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

2) Попробуем подобрать коэфф λ_i, $i = \overline{1,n}$ в $(*)$ так, чтобы $\begin{cases} D[\hat{m}] \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$

Для этого нужно решить задачу условной оптимизации

$$\begin{cases} \varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \longrightarrow \min\limits_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Замеч 1) Можно показать, что исправ. выбороч. дисп. $S^2(\vec{X}_n)$ явл. состоятельной оценкой дисперсии. Также можно док, что $\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ - также явл. состоятельной оц-дисп.

$$M[\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$\frac{n-1}{n} \to 1$ при $n \to \infty$ (наз асимптот. несмещенной)

2) Можно доказать и более общий рез-т: выборочные моменты

$$\mathring{m}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

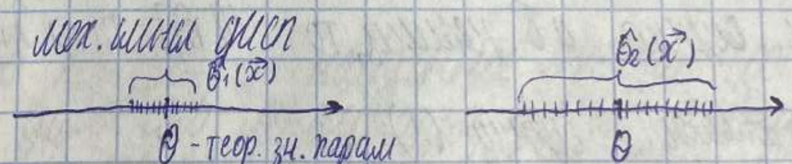
$$\mathring{m}_k(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k$$

Также явл. состоятельными оценками своих теоретич. аналогов при условии, что последние существуют

3) Можно показать, что при $k \geq 2$ выборочные моменты явл. смещенными оценками своих теорети. аналогов

④ Эффективность точечной оценки

Пусть 1) X - св, закон распр кот зависит от парам θ.
2) $\hat{\theta}_1(\vec{X})$, $\hat{\theta}_2(\vec{X})$ - несмещ точеч. оценки для θ
3) $\exists D\hat{\theta}_1$, $\exists D\hat{\theta}_2$, $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$



Опр Пусть $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ - две несмещ. оценки парам. θ $\exists D\hat{\theta}_i$, $i=\overline{1,2}$. Статистика $\hat{\theta}_1$ наз более эфф, чем ст. $\hat{\theta}_2$ если $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$

Опр Оценка $\hat{\theta}$ наз. эфф. оценкой параметра θ, если
1) $\hat{\theta}$ явл. несмещенной оценкой для θ
2) $\hat{\theta}$ облад. наим. дисп. среди всех несмещ. ~~оценок~~ точечных оценок парам θ.

③ Состоятельность точечной оценки

Пусть X – ген. сов., θ – парам закона распр св X, $\hat{\theta}(\vec{X_n})$ – точ. оц. парам. θ
{в наст. примере удобно включить n – объём выборки – в обознач. выборки $\vec{X_n} = (X_1, \dots, X_n)$}

Опр Точечная оценка $\hat{\theta}(\vec{X_n})$ парам. θ наз состоятельной, если

$$\underbrace{\hat{\theta}(\vec{X_n})}_{\text{посл св}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

Замеч 1) условие из опр-я состоятельности оценки эквив. условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\hat{\theta}(\vec{X_n}) - \theta| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2) если точ. оценка не явл. состоятельной, то она никому не нужна

Пример Покажем, что $\hat{\theta}_1$ явл сост. оценкой для θ в предп, что $\exists DX = \sigma^2 < \infty$

1) Рассм случ. выб. $\vec{X_n} = (X_1, \dots, X_n)$. При $n \to \infty$ получ. посл. $X_1, X_2, \dots$ незав (т.к. это компл. случ. выб) св

2) $X_i \sim X \Rightarrow \exists MX_i = \theta$ и $\exists DX_i = \sigma^2$, $i \in N$

3) Тогда согласно следствию th ~~Чебышева~~ ЗБЧ в форме Ч

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta, \text{ те } \hat{\theta}_1(\vec{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta \Rightarrow \text{оценка } \hat{\theta}_1 \text{ состоятельная}$$

Замеч Состоятельность этой оценки можно доказать, не предполагая существ. конечной дисперсии

Пример $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ – ген. совокуп. ~~X – ген. совокуп, $\theta = MX$~~. Покажем, что оценка $\hat{\theta}_4(\vec{X_n}) = X_1$ не явл сост. оц. θ.

$$P\{|\hat{\theta}_4(\vec{X_n}) - \theta| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \; ?$$

$$P\{|X_1 - \theta| \geq \varepsilon\} = P\{|X - \theta| \geq \varepsilon\} \overset{1-}{=} P\{-\varepsilon \leq X - \theta \leq \varepsilon\} \overset{1-}{=} P\{\theta - \varepsilon \leq X \leq \theta + \varepsilon\} \overset{1-}{=} \Phi\left(\frac{\theta+\varepsilon-\theta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\theta-\varepsilon-\theta}{\sigma}\right) \overset{1-}{=} 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{\sigma} = +\infty$$

То $\neg\left(\hat{\theta}_4(\vec{X_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0\right) \Rightarrow \hat{\theta}_4$ не явл. состоят. для θ

Пусть $\vec{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - случ. выборка из ген. совокуп X

Обознач. $n(t, \vec{X})$ - сл. величина, кот. для каждой реализации $\vec{x}$ случ. выборки $\vec{X}$ принимает значение, равное $n(t, \vec{x})$

<u>Опр</u> Выборочной ф. распр., отвеч. случайной выборке $\vec{X}$ наз. отображение, отображение $\hat{F}: R \to R$, опр. правилом

$$\hat{F}(t)=\frac{n(t, \vec{X})}{n}$$

<u>Замеч</u> 1) при каждом фикс. $t \in R$: $\hat{F}(t)$ явл. случ. величиной, которая может принимать значения

$$0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}=1$$

2) Зафикс. t_0. Обознач. $p=P\{X<t_0\}=const$

Тогда $P\{n(t_0, \vec{X})=k\}=P\{$среди $X_1, \dots, X_n$ ровно k штук принимают знач-е, которое $<t_0\}=C_n^k p^k q^{n-k}$

все X_i незав в совокуп и имеют одинак. с X распр $\Rightarrow$ $P\{$среди $X_1 \dots X_n$ ровно k штук $<p_0\}=P\{$в серии из n исп. СВ X прин знач $<t_0\}$.
Если счит. успехом $\{X<t\}$, то $P\{$в серии...$\}=P_n(k)$ - вер что в схеме Берн. усп. наступил k раз

Т.о. $n(t_0, X)$ имеет биномиальное распр, где $p=P\{X<t_0\}$

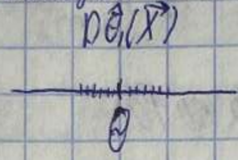
Из этого в частн. следует, что $P\{\hat{F}(t_0)=\frac{k}{n}\}=P\{n(t_0, \vec{X})=k\}=$
$=C_n^k p^k q^{n-k}$

Замеч 1) При доказательстве н Рао используются дифференцирование по параметру под знаком интеграла

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_G \varphi(\vec{X},\theta)\,d\vec{x} = \int\limits_G \frac{\partial\varphi(\vec{X},\theta)}{\partial\theta}\,d\vec{x}$$

Т.о., параметрические модели, для которых справедливо это рав-во, будем называть регулярными

2) Нерав Рао дает нижнюю границу для дисперсии всевозм. несмещ точечных оценок парам. θ



Величина $e(\hat\theta)=\dfrac{1}{I(\theta)D(\hat\theta)}$ наз. показателем эфф. по Рао точ. оценки $\hat\theta$

$$0<e(\hat\theta)\le 1$$

Если $e(\hat\theta)=1$, то точ. оценка $\hat\theta$ наз. эфф. по Рао

3) Как связаны эф. точечной оценки и её эф. по Рао

Очевидно, что оценка, эф. по Рао, будет "просто" эфф.

~~Вообще говоря,~~
Вопрос о том, для каких параметрич. моделей $\exists$ эф по Рао оценки (т.е $\exists$ оценки, дисп. которых равна $1/I(\theta)$), мы оставим без рассмотрения

4) В некоторых случаях вводят в рассмотрение величину

$$I_0(\theta)=M\left[\left(\frac{\partial p(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right],$$ где

$p(X,\theta)$ - имеет тот же смысл, что и в опр сл. прав., которую можно назвать кол-вом инф по Фишеру в одном испытании.

Для нек. парам. мод. справедливо

$$I(\theta)=nI_0(\theta),$$ где

n - объем сл выб.
(парам модель д.б. регулярной)

<u>Теорема</u> о единственности эффективной оценки.

Пусть $\hat{\theta}_1(\vec{X})$, $\hat{\theta}_2(\vec{X})$ - две эфф. ($\Rightarrow$ несмещ) оценки парам θ

Тогда $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \hat{\theta}_2(\vec{X})$

5 Неравенство Рао-Крамера

Пусть 1) X - случайная величина, закон распределения которой зависит от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ параметров

2) $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - случ. выборка из ген совок X

<u>Опр</u> Функцией правдоподобия, отвечающей случ. выборке X, наз функция

$$\underset{\text{явл. случ. велич.}}{L(\vec{X}, \vec{\theta})} = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \ldots \cdot p(X_n, \vec{\theta}), \text{ где}$$

$$p(X_i; \vec{\theta}) = \begin{cases} f(X_i, \vec{\theta}), \text{ если } X - \text{нсв} \\ P\{X = X_i\}, \text{ если } X - \text{дсв} \end{cases}$$

(здесь f - ф. плотн распр вер случ. велич. X)

Пусть $r = 1$, то есть вектор $\vec{\theta} = (\theta_1) \overset{\text{обознач.}}{=} (\theta)$

<u>Опр</u> Количеством информации по Фишеру, содержащейся в случ. выборке $\vec{X}$, наз число

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

<u>Теорема</u> неравенство Рао-Крамера

Пусть 1) рассматриваемая модель явл. регулярной

2) $\hat{\theta}(\vec{X})$ - несмещенная оценка параметра θ

Тогда

$$D[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

Запишем функцию Лагранжа

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) = \underbrace{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2}_{=f} - \mu \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right)}_{\varphi}$$

Необх. условие экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & i = \overline{1n} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \end{cases}$$

Считаем

там μ (1)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i - \mu = 0, \quad i = \overline{1n}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right) = 0$$

Из первых n уравнений $\Rightarrow \lambda_i = \dfrac{\mu}{2}$, $i = \overline{1n}$

Подставим в посл. ур-е:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\mu n}{2} = 1 \Rightarrow \mu = -\frac{2}{n}$$

Таким образом,

$$\lambda_i = \frac{\mu}{2} = \frac{1}{n}, \quad i = \overline{1n}$$

Можно показать что найденное решение соответствует точке условного минимума целевой функции. Таким образом, подставляя λ_i в (*) получаем искомую оценку для матож с миним. дисперсией в классе лин. оценок:

$$\hat{m}(\vec{X}) = \frac{1}{n} X_1 + \dots + \frac{1}{n} X_n = \overline{X}$$

Дисперсия этой оценки:

$$D[\hat{m}] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Пример. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, m - неизв, σ^2 - изв

Показать, что оценка $\hat{m}_1(\vec{X}) = \overline{X}$ для m явл эф по Рао

Решение

1) Нужно найти показатель эф. оценки $\hat{m}_1$:

$$e(\hat{m}) = \frac{1}{I(m) \cdot D[\hat{m}]}$$

Если $e(\hat{m}) = 1 \Rightarrow \hat{m}$ - эф. по Рао

Если $e(\hat{m}) < 1 \Rightarrow \hat{m}$ - не явл эф по Рао

2) $D[\hat{m}] = D[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$

3) $I[\hat{m}] = ?$

$$I[m] = M\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial m}\right)^2\right]$$

Составим ф L правдоподобия

$$L(\vec{X}, m) = p(X_1, m) \cdot \ldots \cdot p(X_n, m) = \left| X \text{ - непр} \Rightarrow p(X_i, m) = f(X_i, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2}$$

Тогда $\ln L(\vec{X}, m) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(m - X_i)^2$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X}, m)}{\partial m} = -\frac{2}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(m - X_i) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)$$

$$\left(\frac{\partial \ln L(\vec{X}, m)}{\partial m}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4}\left[(X_1 - m) + \ldots + (X_n - m)\right]^2 = \frac{1}{\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n}(X_i - m)(X_j - m)\right]$$

т.о.

$$I(m)=M\left[\left(\frac{\partial \ln L(\vec{X},m)}{\partial m}\right)^2\right]=\frac{1}{\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{n}M[(X_i-m)^2]+2\sum_{1\le i<j\le n}\overbrace{M[(X_i-m)(X_j-m)]}^{\text{тк } X_i, X_j \text{ независ } cov(X_i,X_j)=0}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2+0\right]=\frac{n}{\sigma^2}$$

4) Получаем

$$e(\hat{m})=\frac{1}{I(m)D(\hat{m})}=\frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}}=1 \Rightarrow \hat{m}(\vec{X})=\bar{X}\text{ - эф. по Рао}$$

(и, след, "просто" эф) оценка для матож норм св, при известной дисперсии

04.04.22
Лекция 7

⑥ Методы построения точечных оценок

2 метода: 1) моментов 2) макс. правдоподобия

I. Метод моментов

Пусть 1) X - св, закон распр кот. зависит от вектора $\vec{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_r)$ неизв. парам.

2) $\exists r$ первых моментов св X, те $\exists M[X^k]$, $k=\overline{1,r}$

Тогда в методе моментов

1) вычисляются теоретические моменты 1-го, 2-го, ... r-го пор, которые, вообще говоря, зависят от неизв. параметров

$$m_k(\theta_1,\dots,\theta_r)=\underbrace{M[X^k]}_{\text{теор. момент пор. } k},\quad k=\overline{1,r}$$

2) Теоретические моменты приравниваются к их выборочным аналогам

$$(*)\ \begin{cases} m_1(\theta_1,\dots,\theta_r)=\hat{m}_1(\vec{X}) \\ \dots \\ m_r(\theta_1,\dots,\theta_r)=\hat{m}_r(\vec{X}) \end{cases}$$ — сист. уравн. (возм, нелин) отн. парам. $\theta_1,\dots,\theta_r$

где $\hat{m}_k(\vec{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

2) Функция L явл. произведением n сомнож. и работать с ней не всегда удобно. Поэтому часто вместо задачи (*) расм. эквив. задачу

$$\ln L(\vec{X},\vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta}} \quad (**), \text{ те}$$

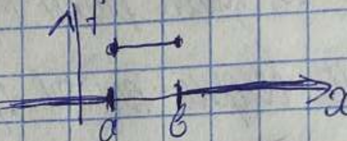
$$\hat{\vec{\theta}}(\vec{X}) = \arg\max_{\vec{\theta}} \ln L(\vec{X},\vec{\theta})$$

(задачи (*) и (**) эквивалентны, так как $\ln$ - монот. возраст. ф.)

<u>Пример</u> $X \sim R[a,b]$ a, b - неизв парам
с исп. метода макс. правдоп. построить ТО парам a и b

<u>Решение</u>

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$



$$L(\vec{X},a,b) \overset{*}{=} \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \quad ***$$

2) $\ln L = n \ln \frac{1}{b-a} = -n \ln(b-a) \longrightarrow \max_{a,b}$

Ур-я правдоп. $\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a} = -n \cdot \frac{-1}{b-a} = \frac{n}{b-a} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b} = -\frac{n}{b-a} = -\frac{n}{b-a} = 0 \end{cases}$ $n = 0$?!

3) Противоречие возникло из-за того, что неверно записали ***

$$L(\vec{X},a,b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & \text{если } X_{(1)} \geq a \text{ и } X_{(n)} \leq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial a}$, $\frac{\partial L}{\partial b}$ затруднит., так как от a и b также зав. границы обл., в кот. $L>0$

Попробуем "в лоб" найти $\max_{a,b} L(\vec{X},a,b)$: $\vec{X} = const$; $a,b = var$

а) если $\begin{cases} a \leq X_{(1)} \\ b \geq X_{(n)} \end{cases}$ то $L>0$ в противном случае $L = 0$

Т.к. $L \to \max$, то эти усл-я в любом случае д.б. выполнены

Замечание

1) Поскольку выборочные моменты $\hat{m}_k(\vec{X})$ и $\hat{\hat{m}}_k(\vec{X})$ явл. состоятельными оценками соотв. теоретич. моментов, то можно показать, что в случае непрерывной зависимости решения сист. * от $\hat{m}_k$' (или от $\hat{m}_k$), то оценки параметров, получ. с исп. этого метода, также будут состоятельными

2) Т.к. выборочные моменты порядка k при $k \geq 2$ явл. смещ. оценками своих теоретич. аналогов, то и оценки парам. получ. с исп. метода моментов, также м.б. смещенными

II Метод максимального правдоподобия

Пусть 1) X - св, закон распр которой зависит от век. парам $\vec{\theta}=(\theta_1,...,\theta_r)$

Ранее было введено понятие функции правдопод. случ. выб $\vec{X}$:

$$L(\vec{X},\vec{\theta}) = p(X_1,\vec{\theta}) \cdot ... \cdot p(X_n,\vec{\theta}), \text{ где } p(X_i,\vec{\theta}) = \begin{cases} f(X_i,\vec{\theta}) & \text{если } X \text{ нпв} \\ P\{X_\xi = X_i\} & \text{если } X \text{ дсв} \end{cases}$$

Можно показать, что ~~чем более удачно подобрано знач. век~~-ра ~~$\vec{\theta}$~~ чем ближе знач вектора $\vec{\theta}$ к теор. значению вектора $\vec{\theta}$, тем большее знач. принимает ф. $L(\vec{x},\vec{\theta})$ (при дост. больших n)

В методе макс. правдоподобия в кач-ве точечных оценок неизв. параметров используются значения, доставляющие макс. значение функции правдоподобия.

Для реализации метода необх. решить задачу

$$L(\vec{X},\vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta}}, \quad (*)$$

тогда

$$\hat{\vec{\theta}}(\vec{X}) = \arg\max_{\vec{\theta}} L(\vec{X},\vec{\theta})$$

Замечани 1) Для решения задачи * можно исп. необх усл-е экстремума дифф. функции неск. переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\vec{X},\vec{\theta})}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L(\vec{x},\vec{\theta})}{\partial \theta_r} = 0 \end{cases}$$

наз. ур-я правдопод.

3) Решаем получ. систему:

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}_1(\vec{X}) \\ \vdots \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

Полученные зависимости и исп. в кач-ве точ. оценок неизв. параметров

<u>Замеч</u> Иногда некот. ур-я системы* удобнее записывать относительно центральных, а не начальных моментов. В этом случае k-е уравн. будет иметь вид:

$$\mathring{m}_k(\theta_1, .., \theta_r) = \hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}), \text{ где}$$

$$\mathring{m}_k(\theta_1, ..., \theta_r) = M[(X - MX)^k]$$

$$\hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k$$

<u>Пример</u> Пусть $X \sim R[a, b]$, где a, b - неизв. парам. С исп. метода моментов построить точ. оц. для a и b.

<u>Решение</u> 1) $X \sim R[a, b] \Rightarrow$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2 неизв. парам. (a и b) $\Rightarrow r = 2 \Rightarrow$ потр. 2 ур-я

$$\begin{cases} m_1(a, b) = \hat{m}_1(\vec{X}) & \text{- отн. нач. мом. 1го пор} \\ \mathring{m}_2(a, b) = \hat{\mathring{m}}_2(\vec{X}) & \text{- отн. центр мом 2го пор} \end{cases}$$

2) Найдем теор. моменты $m_1(a, b) = MX = \frac{a+b}{2}$, $\mathring{m}_2(a, b) = DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

Запишем выб. моменты: $\hat{m}_1(\vec{X}) = \overline{X}$, $\hat{\mathring{m}}_2(\vec{X}) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2(\vec{X})$

3) Приходим к системе $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \overline{X} \\ \frac{(b-a)^2}{12} = S^2 \end{cases} \Rightarrow$ Ответ: $a(\vec{X}) = \overline{X} - \sqrt{3}S(\vec{X})$

$b(\vec{X}) = \overline{X} + \sqrt{3}S(\vec{X})$

б) при вып. этих условий

$$L = \frac{1}{(b-a)^n}$$

т.к. $L \to \max$, то ~~...~~ $b-a \to \min$

т.о. приходим к з-з.

$$\begin{cases} b-a \to \min \\ a \le X_{(1)} \\ b \ge X_{(n)} \end{cases}$$

т.о.

Ответ: $\begin{cases} \hat{a}(\vec{X}) = X_{(1)} \\ \hat{b}(\vec{X}) = X_{(n)} \end{cases}$

Интервальные оценки

① Основные понятия

Вторая задача МС: ...

Ранее для решения этой задачи исп. точечные оценки. ~~В кач-ве значений неизв. параметров использовали~~ Тогда принимали ра-ва

$$\theta_j = \hat{\theta}_j(\vec{x}), \quad j = \overline{1,r},$$

для нек. статистик $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_r$. Недостатком этого подхода явл. то, что он не дает информации о вероятн. харак. точности оценивания неизв. параметров

Кроме точ. оц. для решения 2 З МС исп. другой подход.

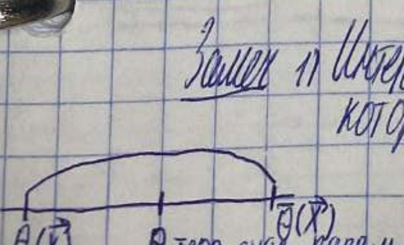
Будем считать, что $r=1$, т.е. $\vec{\theta} = (\theta_1) = (\theta)$

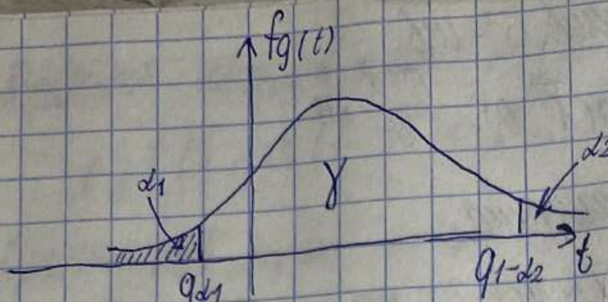
Опр Интервальной оценкой парам θ уровня γ (γ-интерв. оценкой) наз. пару статистик

$\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$$

Замеч 1) Интерв. оценка явл интервалом со случ. границами $\underline{\theta}(\vec{X})$, $\overline{\theta}(\vec{X})$, который накрывает неизв. теоретическое знач. параметра с вер γ





$\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma = 1$

Из свойств нсв $\Rightarrow P\{q_{\alpha_1} < g(\vec{X}, \theta) < q_{1-\alpha_2}\} = \gamma$

Запишем событие, стоящее под вероятн. в эквив. виде

$\{q_{\alpha_1} < g(\vec{X}, \theta) < q_{1-\alpha_2}\} \Leftrightarrow$ усл-е (2) $\Leftrightarrow \{g^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1}) < \theta < g^{-1}(\vec{X}, q_{1-\alpha_2})\}$

выражаем из двойного нерав. θ,
с учетом св-ва (2) знаки неравенств не изменятся

Обозн. $\underline{\theta}(\vec{X}) = g^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1})$;

$\overline{\theta}(\vec{X}) = g^{-1}(\vec{X}, q_{1-\alpha_2})$;

Тк события эквивалентны, то $P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma \Rightarrow \underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ –

– γ-доверит интервал для θ

Замеч.

1) Построенная интерв. оценка зависит от выбора α_1 и α_2.
Обычно исп. знач-я $\alpha_1 = \alpha_2 = (1-\gamma)/2$. Однако это не всегда так

2) и, например, если выбрать знач. $\alpha_1 = 1-\gamma$; $\alpha_2 = 0$, то

$q_{1-\alpha_2} = +\infty \Rightarrow \underline{\theta}(\vec{X}) = g^{-1}(\vec{X}, q_{1-\gamma})$

$\overline{\theta}(\vec{X}) = +\infty$

Т.о. $\underline{\theta}(\vec{X})$ – нижняя γ-дов. ~~оценка~~ граница для θ

3) Аналогично, при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 1-\gamma$

$\underline{\theta}(\vec{X}) = -\infty$ $\quad \overline{\theta}(\vec{X}) = g^{-1}(\vec{X}, q_{1-(1-\gamma)}) = g^{-1}(\vec{X}, q_\gamma)$ – верхняя γ-дов. граница для θ

Пр $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где θ - неизв, σ^2 - изв.

Рассмотрим статистику $g(\vec{X}, \theta) = \frac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}$

Покажем, что g - центр статистика

а) $X_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, $i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $\bar{X} \sim N(?,?)$ как лин. комб. нсв $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(\vec{X}, \theta) = \frac{\theta\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\bar{X} \sim N(m_g, \sigma_g^2)$ как лин. ф. от $\vec{X}$

Найдем m_g и σ_g^2

$$m_g = M[g(\vec{X}, \theta)] = M\left[\sqrt{n}\frac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}[\theta - \underbrace{M\bar{X}}_{\theta}] = 0$$

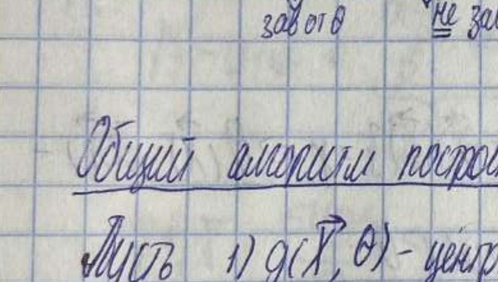
$$\sigma_g^2 = D[\underbrace{g(\vec{X}, \theta)}_{(\vec{X}, \theta)}] = D\left[\sqrt{n}\frac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\right] = \frac{n}{\sigma^2}D[\theta - \bar{X}] = \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot nDX = \frac{DX}{\sigma^2} = 1$$

Т.о. $\underbrace{g}_{\text{зав от } \theta} \sim \underbrace{N(0,1)}_{\text{не зав. от } \theta}$ $\Rightarrow$ $g(\vec{X}, \theta)$ - центральная статистика

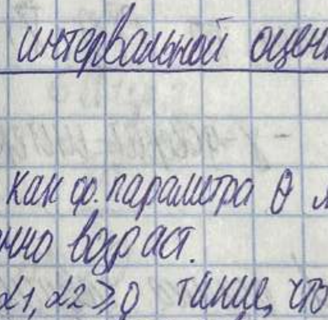
Общий алгоритм построения интервальной оценки с исп. центр. стат.

Пусть
1) $g(\vec{X}, \theta)$ - центр. ст.
2) $g(\vec{X}, \theta)$ как ф. параметра θ явл. монот. возр.)
3) $F_g(t)$ явл. монотонно возраст.
4) Выбраны некот. $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$, где γ - заданный уровень доверия

Замеч Из усл-я 3 следует, что ур-е $F_g(t) = \alpha$ для $\forall \alpha \in (0,1)$ имеет единств. реш. $t = q_\alpha$ — квантиль ур-ня α



При этом



$\Leftrightarrow P\{X < q_\alpha\} = \alpha$

2) Вероятность совершить ошибку при построении интервала уровня γ:

$$1-\gamma = P\{\theta \notin (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\}$$

3) Вероятностной характ. интерв. оценки уровня γ является случ. вел.

$l(\vec{X}) = \overline{\theta}(\vec{X}) - \underline{\theta}(\vec{X})$, которая наз. размахом инт. оценки

4) Иногда удобно строить т.н. односторонние интерв. оценки....

Опр Односторонней нижней (верхней) γ-доверит. границей для парам θ наз. статистику
$$\underline{\theta}(\vec{X}) \quad (\text{соотв } \overline{\theta}(\vec{X}))$$
такую, что
$$P\{\theta > \underline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma \quad (\text{соотв } P\{\theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma)$$

~~Опр~~

Опр γ-доверит. инт. (доверит. инт. ур. γ) для парам. θ наз. реализацию (выборочное значение) интерв. оценки уровня γ для этого параметра, т.е. интервал
$$(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x})) \text{ с детерм. границами.}$$

Замеч Иногда там, где это не будет приводить к путанице, мы будем допускать вольность не разделяя строго понятия интерв. оценки и доверит. интервала

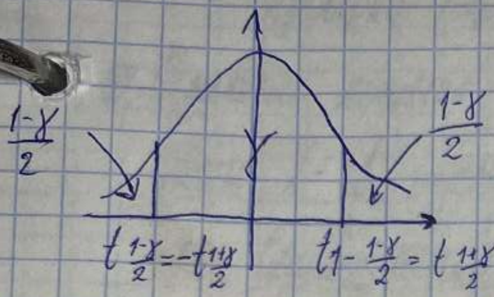
② Построение интервальных оценок

Пусть X - св, з-н распр. кот. известен с точностью до значения парам $\theta \in \mathbb{R}^1$

Требуется построить ~~и~~ интервальную оценку уровня γ для парам θ

Опр Статистика $g(\vec{X}, \theta)$ наз. центральной, если закон ее распр не зависит от неизв. параметра θ

2) Положим $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1-\gamma}{2}$



$$P\left\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m-\overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}=\gamma$$

t_α – квант. уровня α распр-я $St(n-1)$

Выразим m из дв. нерав

$$P\left\{\underbrace{\overline{X}-\frac{S(\vec{X})\,t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{X})} < m < \underbrace{\overline{X}+\frac{S(\vec{X})\,t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{X})}\right\}$$

18.04

Пример Пусть $X\sim N(m,\sigma^2)$, где σ^2 – неизв, m – изв/неизв.

Построить инт. оценку для σ^2

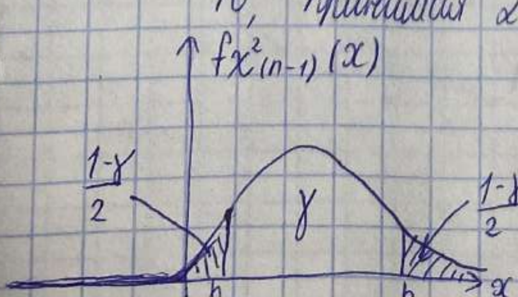
Решение Расс статистику $g(\vec{X},\sigma^2)=\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2}$

Можно показать (см. пред. пример), что $g\sim\chi^2(n-1)$

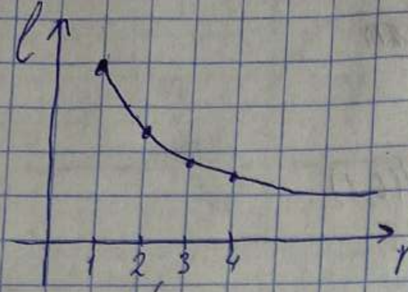
То, принимая $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1-\gamma}{2}$, получаем

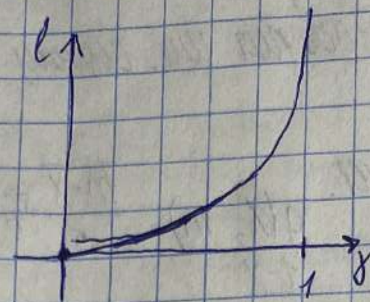
$h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}$ $h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$

квантили



2) Зависимость размера доверит. интервала от параметров





$l = \frac{const}{\sqrt{n}}$

Видно, что при $\gamma \to 1$ размер $\to +\infty$

Эта ситуац. явл. типичной для МС: чем более надежный рез-т мы хотим получить (т.е. $\gamma \uparrow$), тем менее определенным он будет ($l \uparrow$)

Единств. способом повышения надежности рез-в при сохранении размера доверит. интервала - увеличить n (объем выб.)

<u>Пример</u> $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m, σ^2 - неизв. Построить инт. оценку для m

<u>Решение</u>

1) Расм статистику $g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{s(\vec{X})}\sqrt{n} \sim ?$

а) представим g в виде $g(\vec{X}, m) = \dfrac{\frac{m-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}}{\frac{s(\vec{X})}{\sigma}} = \dfrac{\frac{m-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2(\vec{X})}{\sigma^2}}}\sqrt{n-1} =$

$$= \left| \begin{aligned} \xi &= \frac{m-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \\ \eta &= \frac{(n-1)s^2(\vec{X})}{\sigma^2} \end{aligned} \right| = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n-1}$$

б) $\xi \sim N(0,1)$ (показ. выше)

можно пок, что $\eta \sim \chi^2(n-1)$ и что ξ и η независимы

в) Т.о. $g(\vec{X}, m) \sim \underbrace{St(n-1)}_{\text{не зав. от } m} \Rightarrow g$ - центр. статистика

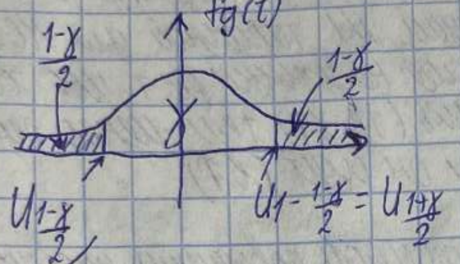
Пример Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m - неизв, σ^2 - изв.

Построить γ-доверит. инт. оценку для m

Решение

1) Рассм. статист. $g(\vec{X}, m) = \dfrac{m - \overline{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

Исп. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1-\gamma}{2}$



$u_{\frac{1-\gamma}{2}} = -u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ (т.к. $f_g(t)$ - четная ф.)

Тогда:

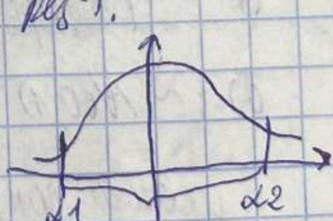
$$P\Big\{-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \underbrace{\frac{m-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n}}_{g(\vec{X}, m)} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\Big\} = \gamma$$

$$P\Big\{\underbrace{\overline{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{X})} < m < \underbrace{\overline{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{X})}\Big\} = \gamma$$

Замеч 1) Мы исп. $\alpha_1 = \alpha_2$, однако, решая эту задачу для произв α_1 и $\alpha_2 \geq 0$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma)$ мы получили бы рез-т:

$$\underline{m}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{m}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}$$



Очевидно, что $l(\vec{X}) \to \min$ при $\alpha_1 = \alpha_2$

В этом случае размах доверит. интервала

$l(\vec{X}) = \overline{m}(\vec{X}) - \underline{m}(\vec{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(u_{1-\alpha_2} - u_{\alpha_1})$ | В любом случае в рассм. примере размах явл. не случ., а детерм. величиной

$P\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < g(\vec{X}, \sigma^2) < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = \gamma$ (по св-ву $\overset{\text{непр}}{\text{нсв}}$)

$$P\left\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} = \gamma$$

$$P\{\underbrace{(n-1)S^2 / h_{\frac{1+\gamma}{2}}}_{\underline{\sigma}^2(\vec{X})} < \sigma^2 < \underbrace{(n-1)S^2 / h_{\frac{1-\gamma}{2}}}_{\overline{\sigma}^2(\vec{X})}\} = \gamma$$

то $\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \dfrac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$

$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \dfrac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$, где $h_q = h_q^{(n-1)}$ - квантиль уровня q распр-я $\chi^2(n-1)$

МОДУЛЬ 2

Проверка параметрических гипотез

① Основные понятия

Пусть X - св, закон распр кот неизвестен (изв. неполностью)

<u>Опр</u> <u>Статистической гипотезой</u> наз. любое утверждение о законе распр. св X

<u>Опр</u> Статистическая гипотеза наз. простой, если она однозначно опр закон распр. св X, т.е однозначно определяет ф. распр св X

В противном случ. статистич. гипотеза наз. сложной

<u>Опр</u> Статистич. гипотеза наз. параметрической, если она яв. утверждением относительно значений неизв. параметров закона распр, общий вид которого известен

В прот. случае стат. гип. наз непараметрической

<u>Пример 1</u> Пусть известно $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m и σ^2 - неизв

Рассмотрим гипотезы: $H_1 = \{m = 0, \sigma^2 = 1\}$ - простая параметр.

$H_2 = \{m > 0, \sigma^2 = 1\}$ - сложная параметр.

$H_3 = \{m = 1\}$ - сложная параметр.

<u>Пример 2</u> Пусть X - св, закон распр кот. неизвестен

Расм. гипотезы: $H_1 = \{X \sim N(0, 1)\}$ простая непар

$H_2 = \{X$ имеет норм распр-е$\}$ сложная непар

$H_3 = \{X$ имеет распр $N(1, \sigma^2)\}$ сложная непар

Замеч 1) Построенный критерий наз. критерием Неймана-Пирсона (для проверки двух простых гипотез)

$\theta=\theta_0$ тк H_0

Замеч 2) Если X - непр св, то $P\{\vec{X}\in W|H_0\} = \int\limits_W\ldots\int f_{\vec{X}}(t_1,\ldots,t_n,\theta_0)dt_1\ldots dt_n =$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Если } f(x,\theta) \text{ - ф. плотности св } X \text{, то} \\ f_{\vec{X}}(t_1,\ldots,t_n,\theta) \underset{\text{Xi незав. в совокуп}}{=} f_{X_1}(t_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(t_n,\theta) \underset{f_i=f}{=} f(t_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f(t_n,\theta) = \underset{\text{опр. ф. правдоп.}}{L(t_1,\ldots,t_n,\theta)} \end{array} \right\} =$

$= \int\limits_W\ldots\int L(t_1,\ldots,t_n,\theta_0)dt_1\cdot\ldots\cdot dt_n = \left\{ W=\{\vec{x}\in X_n : \varphi(\vec{x}) > C_\varphi\} \right\} =$

$= \int\limits_{\boxed{\{(t_1,\ldots,t_n):\ \varphi(t_1,\ldots,t_n)\geq C_\varphi\}} = W}\ldots\int L(t_1,\ldots,t_n,\theta_0)dt_1\cdot\ldots\cdot dt_n$

Т.о. в случае нсв усл-е (*) можно записать в виде

$$\int\limits_{\{(t_1,\ldots,t_n):\ \varphi(t_1,\ldots,t_n)\geq C_\varphi\}}\ldots\int L(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdot\ldots\cdot dt_n = \alpha$$

Пример Пусть $X\sim N(m,\sigma^2)$, где σ - изв, m - неизв.

Расм. задачу проверки гипотез $H_0=\{m=m_0\}$ против $H_1=\{m=m_1\}$, где $m_1>m_0$ (2 простые парам. гипотезы).

Используем критерий Неймана-Пирсона. Составим отн. правдоподобия

$$\varphi(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X},m_1)}{L(\vec{X},m_0)}$$

Запишем $L(\vec{X},m)$:

$$L(\vec{X},m) = f(X_1,m)\cdot\ldots\cdot f(X_n,m) = \left\{ \begin{array}{l} X\sim N(m,\sigma^2) \Rightarrow \\ f(X,m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} \end{array} \right\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-m)^2}$$

2) Ошибка II рода: принять основную гипотезу при истинности конкур. Вероятность осущ. этой ошибки

$$\beta = P\{\vec{X} \in X_n \setminus W \mid H_1\}$$

величину $1-\beta$ наз. мощностью критерия

Замеч Конечно хотелось бы построить критерий так, чтобы вероятности совершения обеих ошибок были мин. Однако это невозможно, поэтому при построении критерия обычно фиксируют уровень значимости (те α) и максимизируют мощность, те

$$\begin{cases} 1-\beta \to max, \\ \alpha = const \end{cases}$$

② Критерий Неймана-Пирсона проверки двух простых гипотез

Пусть X - св, общий вид закона распр кот известен с точностью до неизв параметра θ

Рассмотрим задачу проверки двух простых параметрич гипотез

$$H_0 = \{\theta = \theta_0\} \text{ против } H_1 = \{\theta = \theta_1\}, \text{ где } \theta_0 \neq \theta_1$$

Введем статистику $\varphi(\vec{X}) = \dfrac{L(\vec{X}, \theta_1)}{L(\vec{X}, \theta_0)}$, где L - ф. правдоп. выб. $\vec{X}$

Опр Статистику φ наз. отношением правдоподобия

Понятно, что чем больше значение $\varphi(\vec{X})$, тем более предпочт. будет гипотеза H_1. Поэтому критич. мн-во в рассматр. задаче будет иметь вид

$$W = \{\vec{x} \in X_n : \varphi(\vec{x}) \geq C_\varphi\},$$

для нек. подходящей конст. C_φ

Константу C_φ выбирают из условия $P\{\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi \mid H_0\} = \alpha$ (*)

то есть $P\{\vec{X} \in W \mid H_0\} = \alpha$

Т.к. проверяются две простые гипотезы, то при вып усл (*) значение β вероятности соверш ошибки II рода будет определено однозначно

Задачу проверки гипотез обычно ставят следующим образом:

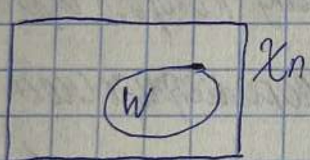
1) выдвигают гипотезу H_0, которую наз. основной
2) выдвигают гипотезу H_1, которую наз. альтернативной (конкурирующей)

При этом $H_0 H_1 = \varnothing$, но, возможно, $H_0 + H_1$ не исчерпывают все возможные случаи

3) На основании выборки принимают решение об истинности либо основной гипотезы, либо конкурирующей

Опр. Правило, в соотв с которым принимается решение об истинности H_0 или H_1 наз. критерием проверки гипотез

Как правило, критерий задают с исп. так называемого критического множества $W \subseteq X_n$ (выбороч. пр-во). При этом соотв правило имеет вид:



если $\vec{x} \in W$, $\Rightarrow$ {отклонить H_0 и принять H_1

если $\vec{x} \in X_n \setminus W$ $\Rightarrow$ {принять H_0 и отклонить H_1

Замеч 1) Критерий полностью задается критическим множеством W

2) Мн-во $X_n \setminus W$ наз доверительным

При использовании любого критерия возможны ошибки

1) ошибка I рода: принять конкурирующую гипотезу при условии, что истинна основная гипотеза. Вероятность совершения этой ошибки

$$\alpha = P\{\vec{X} \in W | H_0\}$$ наз. уровнем значимости критерия

Тогда $\varphi(\vec{X}) = \dfrac{L(\vec{X}, m_1)}{L(\vec{X}, m_0)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - m_0)^2\right]} =$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum\left[(X_i - m_1)^2 - (X_i - m_0)^2\right]\right]} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m_1 - X_i + m_0)(X_i - m_1 + X_i - m_0)\right]} =$$

$$= e^{-\frac{m_0 - m_1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(2X_i - (m_0 + m_1))} = e^{\frac{m_1 - m_0}{2\sigma^2}\sum 2X_i} \cdot e^{-\frac{m_1 - m_0}{2\sigma^2}\sum(m_0 + m_1)} =$$

$$= e^{\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum X_i} \cdot e^{-\frac{n(m_1^2 - m_0^2)}{2\sigma^2}}$$

$\boxed{13.05.22}$

2) Найдем конст. C_φ из усл. (*) $\underbrace{}_{P\{\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi | H_0\} = \alpha}$ (α - задано)

$$\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi \Leftrightarrow \ln\varphi(\vec{X}) \geq \ln C_\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2 - m_0^2) \geq \ln C_\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{m_1 > m_0\} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \geq \underbrace{\frac{\sigma^2}{m_1 - m_0}\left[\ln C_\varphi + \frac{n}{2\sigma^2}(m_1^2 - m_0^2)\right]}_{\text{обозн. } C}$$

и знак нерав-ва при делении на ⊕ число не меняется

Т.о. условие (*):

$$\alpha = P\{\varphi(\vec{X}) \geq C_\varphi | H_0\} = P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq C | H_0\} =$$

$\left\{ X_i \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow \text{при } H_0 = \{m = m_0\} \Rightarrow X_i \sim N(m_0, \sigma^2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(nm_0, n\sigma^2) \right.$ как сумма нсв

$$= 1 - P\{\sum X_i < C | H_0\} = 1 - \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \underbrace{\Phi(-\infty)}_{\to 0}$$

$$X \sim N(m, \sigma^2) \quad P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$

т.е. $\Phi\left(\dfrac{C - nm_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

Замеч 1) Условие из определения функции мощности записано в немного шаблонной виде, т.к в условии стоит терм, а не формула: θ - предметная переменная, а должно быть утверждение, т.е формула.

Более корректной явл. запись $M(a) = P\{\vec{X} \in W \mid \theta = a\}$

2) Заметим, что
$$M(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta), & \text{если } \theta \in \Theta_0 \text{ (т.е ист. } H_0) \\ 1-\beta(\theta) & \text{если } \theta \in \Theta_1 \text{ (т.е ист. } H_1) \end{cases}$$

Первая строка очевидна, прокомм. вторую

опр ош. II рода

$$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \notin W \mid H_1\} = 1 - P\{\vec{X} \in W \mid H_1\} = 1 - P\{\vec{X} \in W \mid \theta \in \Theta_1\} = 1 - M(\theta), \ \theta \in \Theta_1$$

$$\beta(\theta) = 1 - M(\theta) \Rightarrow M(\theta) = 1 - \beta(\theta) \text{ при } \theta \in \Theta_1$$

3) Формально рав-во ** можно рассм. при всех возм. значениях θ, а не только при $\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1$. Однако в этом случае функция $M(\theta)$ теряет свой смысл как вероятность совершения ошибки I или II рода.

Опр Критерий, который при заданном размере α максимизирует функцию мощности одновременно со всем возможным критериям при всех $\theta \in \Theta_1$, наз. равномерно наиболее мощным

Замеч 1) То, равномерно наиболее мощный критерий, если он $\exists$, миним. вероятн. соверш. ошибки II рода по всем $\theta \in \Theta_1$

2) Равномерно наиболее мощные крит. сущ. лишь в некот. частных случаях при проверке гипотез о значении одномерных параметров

③ Проверка сложных параметрических гипотез

Пусть 1) X - св

2) $F(x, \theta)$ - ф. распр св X (известна)

3) θ - неизв параметр

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез

$$H_0 = \{\theta \in \Theta_0\} \text{ против } H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}, \text{ где } \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$$

Пример

1) $\Theta_0 = \{\theta < \theta_0\}$ $\quad\Theta_1 = \{\theta \geq \theta_0\}$

2) $\Theta_0 = \{\theta < \theta_0\}$ $\quad\Theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$

В этой ситуации, как и ранее, критерий задается с пом. критич. множества $W \subseteq \mathcal{X}_n$, а решающее правило имеет вид

$$\vec{x} \in W \Rightarrow \begin{cases} \text{принять } H_1 \\ \text{отклонить } H_0 \end{cases}$$

$$\vec{x} \in \mathcal{X}_n \setminus W \Rightarrow \begin{cases} \text{принять } H_0 \\ \text{отклон. } H_1 \end{cases}$$

При этом ошибки I и II рода опр. как раньше, $\boxed{\text{НО}}$ теперь их вероятн. зависят от значения параметра θ:

$$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W \mid \underbrace{\theta \in \Theta_0}_{H_0}\}$$

$$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \mathcal{X}_n \setminus W \mid \overbrace{\theta \in \Theta_1}^{H_1}\}$$

Опр Величина $\alpha = \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$ наз размером критерия

точная верхняя грань

Опр Функцией мощности критерия наз функция

$$M(\theta) = P\{\vec{X} \in W \mid \theta\}$$ **

Т.о. из условия (*) $\Rightarrow \dfrac{C-nm_0}{\sigma\sqrt{n}} = u_{1-\alpha}$, где $u_{1-\alpha}$ - кв. уровня $1-\alpha$ распр. $N(0,1)$

Т.о. $C = nm_0 + \sigma\sqrt{n}\,u_{1-\alpha}$

3) Имеем: крит. мн-во ~~$\vec{X}$ т.ч. $\varphi(\vec{X}) \geqslant C_\varphi$ т.ч.~~ ~~$\sum x_i \geqslant nm_0$~~

$$W = \{\vec{x} : \varphi(\vec{x}) \geqslant C_\varphi\} = \{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant C\} = \{\vec{x} : \sum x_i \geqslant nm_0 + \sigma\sqrt{n}\,u_{1-\alpha}\}$$

Т.о. критерий принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \begin{cases} \geqslant nm_0 + \sigma\sqrt{n}\,u_{1-\alpha} & \Rightarrow \text{прин } H_1, \text{ откл } H_0 \\ \text{иначе} & \Rightarrow \text{прин } H_0, \text{ откл } H_1 \end{cases}$$

4) При этом вероятн. совершить ошибку II рода

$$\beta = P\{\vec{X} \notin W \mid H_1\} = P\{\sum X_i < C \mid H_1\} = \left\{\sum X_i \underset{\text{тк } H_1}{\sim} N(nm_1, n\sigma^2)\right\} = \Phi\left(\frac{C - nm_1}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

задача минимизации оказ. вырожденной, тк у β одно знач.

$$= \left\{C = nm_0 + \sigma\sqrt{n}\,u_{1-\alpha}\right\} = \Phi\left(u_{1-\alpha} - \frac{n(m_1 - m_0)}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

те мы обеспечим вер-ть ош. первого рода α и ост. одно ед. β

<u>Замеч</u> Если в усл. пред. примера $m_1 < m_0$, то, проведя аналогичные рассуждения, несложно показать, что

$$W = \{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant C\}, \text{ где } C = nm_0 - \sigma\sqrt{n}\,u_{1-\alpha}$$

Пример Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m-неизв, σ неизв

Рассм задачу пров. гип. $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$
(т.к σ-неизв, обе гипотезы яв. сложными)

1) В этом случае логично рассм. статистику $T(\vec{X}_n) = \dfrac{\overline{X}_n - m_0}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}$, которая при истинности H_0 имеет распр $St(n-1)$.

Поэтому крит. мн-во сообразно определить соотношением

$W = \{\vec{x}_n : T(\vec{x}_n) \geq t_{1-\alpha}^{n-1}\}$, где

$t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ - кв. уровня $1-\alpha$ распр $St(n-1)$

При этом вероятн совершить ошибку 1го рода равна α

Замеч Если $X \sim N(m, \sigma^2)$, m-неизв, σ^2-неизв и рассматривается задача провер.

а) $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m < m_0\}$

б) $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m \neq m_0\}$, то с исп. стат.

$$T(\vec{X}_n) = \frac{\overline{X}_n - m_0}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}$$

соотв. критич. мн-ва будут иметь вид:

а) $W = \{\vec{x}_n : T(\vec{x}_n) \leq -t_{1-\alpha}^{(n-1)}\}$

б) $W = \{\vec{x}_n : |T(\vec{x}_n)| \geq t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}\}$

В каждом из этих случаев соотв. критерий имеет разм α

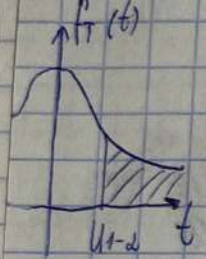
Пример. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, σ^2 изв. Решим задачу проверки гипотезы $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m \neq m_0\}$

1) В 2 пред. примерах обобщ. критерия Неймана-Пирсона для проверки простых гипотез приводило к рассмотр. статистики

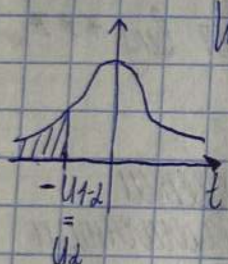
$$T(\vec{X}_n) = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

При истинности H_0 $T(\vec{X}_n) \sim N(0,1)$

Условия, определяющие критич. мн-во W, можно было записать в виде



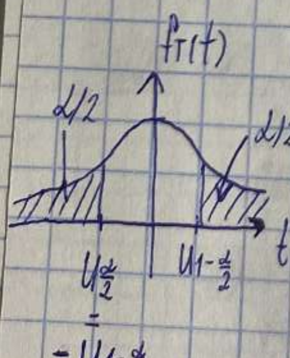
$W = \{\vec{x}_n : T(\vec{x}_n) \geq u_{1-\alpha}\}$, если $H_0 = \{m = m_0\}$, $H_1 = \{m > m_0\}$



$W = \{\vec{x}_n : T(\vec{x}_n) \leq -u_{1-\alpha}\}$, если $H_0 = \{m = m_0\}$, $H_1 = \{m < m_0\}$

2) Восп. этой же стат. в наст. примере. Тогда при истинности конкур. гипотезы статистика $T(\vec{X}_n)$ будет принимать "большие" по модулю значения. Поэтому крит. мн-во определим соотношением

$W = \{\vec{x}_n : |T(\vec{x}_n)| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$



В этом случае для построенного критерия вероятность совершить ошибку 1го рода равна α

Пример Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где σ^2 изв.

Рассм. задачу проверки гип. $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$

(H_0 - прост, H_1 - сложн)

Решение

1) Ранее была решена задача проверки $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m = m_1 > m_0\}$, причем крит. мн-во имело вид

$$W = \{\vec{x} \in \mathcal{X}_n : \sum x_i \geq \overbrace{\underbrace{n m_0 + \sigma \sqrt{n}\, u_{1-\alpha}}_{\text{не зав. } m_1}}^{c_0}\} \quad ***$$

2) Т.к. построенное ранее крит. мн-во фактически не зависело от m_1, то этот же критерий является равномерно наиболее общим и для проверки $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$. Поэтому в рассм. задаче критич. мн-во также имеет вид ***

Замеч Если в условиях пред. примера рассм. задача проверки гипотезы $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m < m_0\}$, то аналогичными рассужд. приходим к выводу, что равн. наиб. мощ. крит. размера α для данной задачи задается критич. мн-вом

$$W = \{\vec{x} \in \mathcal{X}_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n m_0 - u_{1-\alpha} \sigma \sqrt{n}\}$$

$\vec{X}_{n1} = (X_1, \dots X_{n1})$ | 16.05

$\vec{Y}_{n2} = (Y_1, \dots Y_{n2})$

Пр Пусть 1) $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ m_1 - неизв, σ_1^2 - изв

2) $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ m_2 - неизв, σ_2^2 - изв.

3) X и Y незав.

Рассмотрим задачи проверки гипотез

(а) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 > m_2\}$

(б) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 < m_2\}$

(в) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$

1) Рассмотрим сл. вел. $Z = X - Y$

Тогда $Z \sim N(m, \sigma^2)$, где $m = MZ = m_1 - m_2$

$$\sigma^2 = DZ = D[X - Y] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Это означает, что задачи (а-в) можно записать

(а') $H_0 = \{m = 0\}$ $H_1 = \{m > 0\}$

(б') $H_0 = \{m = 0\}$ $H_1 = \{m < 0\}$

(в') $H_0 = \{m = 0\}$ $H_1 = \{m \neq 0\}$

2) Рассм. статистику

$$T(\vec{X}_{n1}, \vec{Y}_{n2}) = c \cdot (\overline{X}_{n1} - \overline{Y}_{n2})$$

где $\overline{X}_{n1} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\overline{Y}_{n2} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$,

а c - нек. константа, кот. мы подберем позже

Очевидно, что знач-я статистики T, "близкие к 0", свидетельствуют в пользу стат. H_0. "Большие" знач. стат. свид. в пользу H_1

3) X, Y – норм св $\Rightarrow \bar{X}_{n1}, \bar{Y}_{n2}$ – норм. св $\Rightarrow T \sim N(m_T, \sigma_T^2)$

Нужно найти распределения статистики T при истинности $H_0 = \{m_1 = m_2\}$:

$$m_T = M[T] = c\,(M[\bar{X}_{n1}] - M[\bar{Y}_{n2}]) = c\,(m_1 - m_2) = \{H_0\} = 0$$

$$\sigma_T^2 = D[T] = c^2(D[\bar{X}_{n1} - \bar{Y}_{n2}]) = \{X \text{ и } Y \text{ незав} \Rightarrow \bar{X}_{n1} \text{ и } \bar{Y}_{n2} \text{ – незав}\} =$$
$$= c^2(D\bar{X}_{n1} + D\bar{Y}_{n2}) = c^2\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

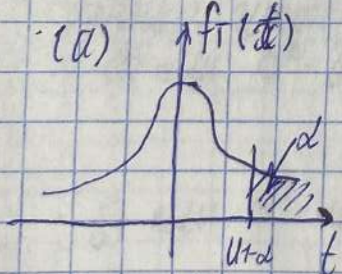
Чтобы статистика T имела типовое распр-е $N(0,1)$, выберем c так, чтобы

$$\sigma_T^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

4) Т.о. приходим к $T(\vec{X}_{n1}, \vec{Y}_{n2}) = \dfrac{\bar{X}_{n1} - \bar{Y}_{n2}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

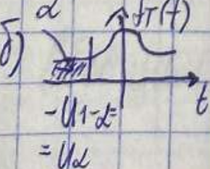
5) Запишем условия, опред. W:

(а)



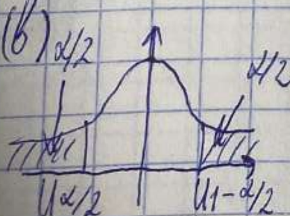
$W = \{(\vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n2}) : T(\vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n2}) \geq u_{1-\alpha}\}$

б)



$W = \{(\vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n2}) : T(\vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n2}) \leq -u_{1-\alpha}\}$

(в)



$W = \{(\vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n2}) : |T(\vec{x}_{n1}, \vec{y}_{n2})| \geq u_{1-\alpha/2}\}$

(u_q – кв. ур-ня q распр-я $N(0,1)$)

Пример Пуст. 1) $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ где m_1, σ_1^2 - неизв

2) $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ где m_2, σ_2^2 - неизв

3) X, Y - незав

4) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

неизв, но равны

Расм задачи проверки гипотез

(а) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ $H_1 = \{m_1 > m_2\}$

(б) — // — $H_1 = \{m_1 < m_2\}$

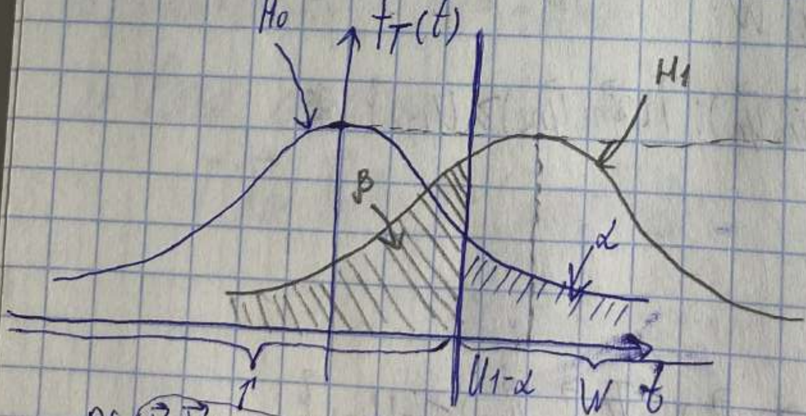
(в) — // — $H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$ (*)

Замеч к прив. примеру

(а) $H_0 = \{m_1 = m_2\} = \{m = 0\}$

$H_1 = \{m_1 > m_2\} = \{m > 0\}$

Сделаем рис



$\beta = P\{(\vec{X}, \vec{Y}) \notin W \mid H_1\}$

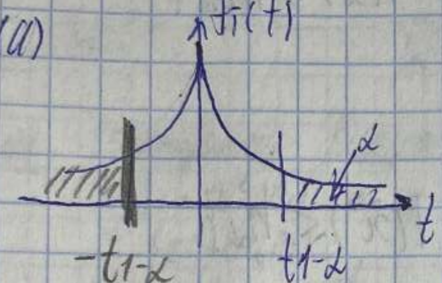
$$T=\frac{\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\cdot\frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\frac{1}{\sigma}\sqrt{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})+(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}}$$

Оконч.

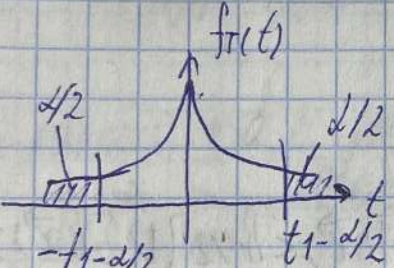
$$T=\frac{\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\cdot\frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})+(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}}\overset{\text{при } H_0}{\sim} St(n_1+n_2-2)$$

4) Запишем условия, опр. критич. мн-во

(а) $W=\{(\vec{x}_{n_1},\vec{y}_{n_2}) : T(\vec{x}_{n_1},\vec{y}_{n_2})\geq t_{1-\alpha}\}$



(б) $W=\{(\vec{x}_{n_1},\vec{y}_{n_2}) : T(\vec{x}_{n_1},\vec{y}_{n_2})\leq -t_{1-\alpha}\}$



(в) $W=\{(\vec{x}_{n_1},\vec{y}_{n_2}) : |T(\vec{x}_{n_1},\vec{y}_{n_2})|\geq t_{1-\alpha/2}\}$

<u>Пример</u> Пусть $X\sim N(m,\sigma^2)$ m,σ^2 – неизв

Рассм. задачи проверки гипотез:

(а) $H_0=\{\sigma=\sigma_0\}$, $H_1=\{\sigma>\sigma_0\}$

(б) " $H_1=\{\sigma<\sigma_0\}$

(в) $H_1=\{\sigma\neq\sigma_0\}$

2) Вспомним опр-е распр-я Стьюдента

Пусть 1) $\xi \sim N(0,1)$

2) $\eta \sim \chi^2(n)$

3) ξ, η - незав

Тогда
$$\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n} \sim St(n)$$

3) В нашем примере:

Рассм. стат.
$$T_\eta(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \overbrace{\boxed{\frac{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})}{\sigma_1^2}}}^{\chi^2(n-1)} + \overbrace{\boxed{\frac{(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}{\sigma_2^2}}}^{\chi^2(n-1)} \sim$$

$$\sim \{\text{св-во гамма-распр}\} \overset{\text{при } H_0}{\sim} \chi^2(n_1+n_2-2)$$

Рассм. стат.
$$T_\xi(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{\text{при } H_0}{\sim} N(0,1)$$

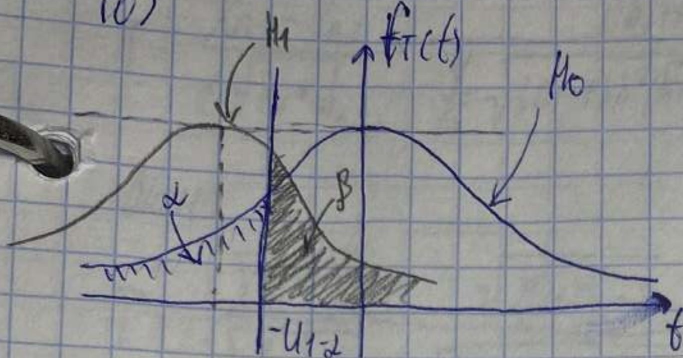
Тогда:
$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{T_\xi(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2})}{\sqrt{T_\eta(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2})}}\sqrt{n_1+n_2-2} \overset{\text{при } H_0}{\sim} St(n_1+n_2-2)$$

Запишем T в явном виде
$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \cdot \frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S^2(\vec{X}_{n_1})}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2-1)S^2(\vec{Y}_{n_2})}{\sigma_2^2}}}$$

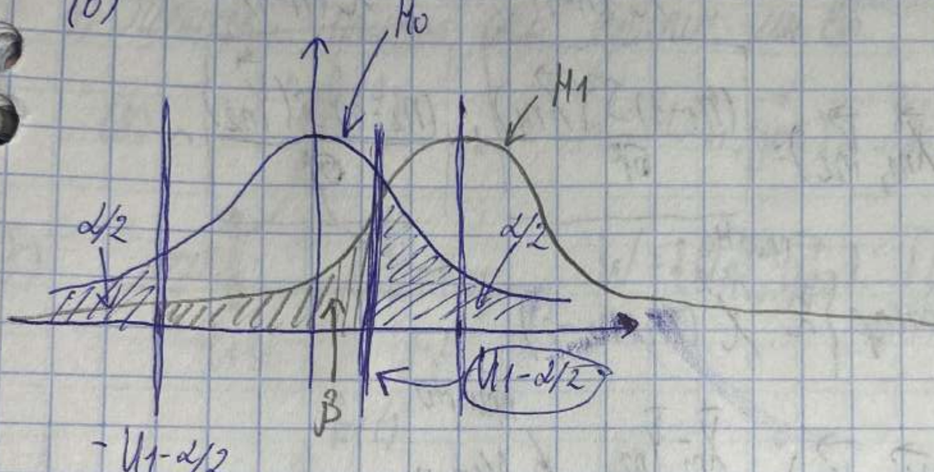
Проблема в том, что ст-ка T зависит от неизв σ_1^2, σ_2^2, которые "не убираются"

Используем предполож. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

(б)



(в)



Возвращаемся к примеру (*)

1) Вспомним проверку гипотезы $H_0=\{m=m_0\}$ (против "стандартных конкур. гипотез":

а) если σ^2 – изв, то $T(\vec{X})=\dfrac{\bar{X}-m_0}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$

б) если σ^2 – неизв, то $T(\vec{X})=\dfrac{\bar{X}-m_0}{s(\vec{X})}\sqrt{n}\sim St(n-1)$

Обобщим этот прием на случай двухвыборочной задачи.

Проверка непараметрических гипотез. Критерий согласия

① Основные понятия

• До сих пор рассматривались 2 ЗМС:

<u>Дано:</u> 1) $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - случ. выб. из ген совокуп X

2) $F(t, \vec{\theta})$ - ф. распр. случ. велич. X,

F - изв. функция, $\vec{\theta}$ - вектор неизв. параметров

<u>Требуется</u> оценить значения $\vec{\theta}$

• Первая ЗМС

<u>Дано:</u> 1) $\vec{X} = (X_1, \dots X_n)$ - случ. выборка из ген совокуп X (ее реализация $\vec{x}$)

<u>Требуется</u> на основании этих данных "найти" закон распр. случ. велич. X

Решение этой задачи сводится к проверке основной гипотезы

$H_0 = \{ F_X(t) = F_0(t, \vec{\theta})$ для некот. значения вектора $\vec{\theta}$ параметров $\}$

против конкур. гипотезы

$H_1 = \{ \neg H_0 = \{$ для любого знач-я $\vec{\theta}$ найдется $t \in R$: $F_X(t) \neq F_0(t, \vec{\theta})\}$

где F_X - ф. распр-я св X

$F_0(t, \vec{\theta})$ - предполаг. закон распред. св X

$\vec{\theta}$ - вектор параметров закона F_0 (возм., $\vec{\theta} = ()$)

23.05.22

Пример Пусть 1) $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$

2) $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

3) X_1, X_2 - незав

Требуется проверить гип.

а) $H_0 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$ против $H_1 = \{\sigma_1 > \sigma_2\}$

б) $H_0 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$ против $H_1 = \{\sigma_1 \neq \sigma_2\}$

~~в) $H_1 = \{\sigma_1 \neq \sigma_2\}$~~

Замеч Распределение Фишера

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \xi_1 \sim \chi^2(n_1) \\ 2)\ \xi_2 \sim \chi^2(n_2) \\ 3)\ \xi_1, \xi_2 \text{ - незав.} \end{array}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{n_2 \xi_1}{n_1 \xi_2} \sim F(n_1, n_2)$$

Для решения з. а, б рассм. стат.

$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{S^2(\vec{X}_{n_1})}{S^2(\vec{Y}_{n_2})}$$

Закон распр-я этой статистики при $H_0 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$

$$T = \frac{\frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2} = \left\{ \begin{array}{c} H_0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \\ \text{обозн} \end{array} \right\} = \frac{(n_2 - 1)}{n_1 - 1} \cdot \frac{\overbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}}^{\chi^2(n_1 - 1)}}{\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})}{\sigma^2}}_{\chi^2(n_2 - 1)}} \sim$$

$\sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

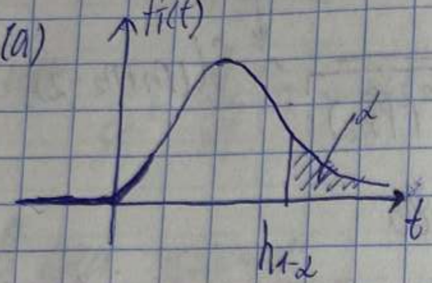
Крит. мн-ва самостоятельно

1) Рассм. статистику

$$T(\vec{X}) = \frac{(n-1)\, S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

2) Запишем условия, опред. критич. мн-во:

(а)

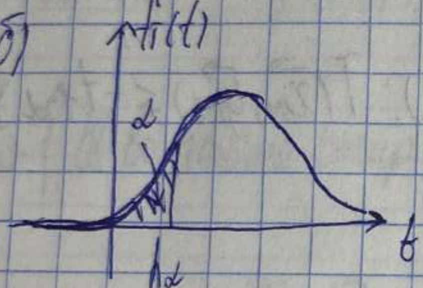


$\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \sim \chi^2(n)$

$\xi_i \sim N(0,1)$

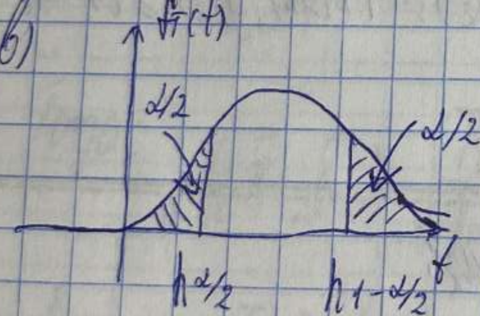
$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \geq h_{1-\alpha}\}$

б)



$W = \{\vec{x} : T(\vec{x}) \leq h_\alpha\}$

в)



$W = \{\vec{x} : [T(\vec{x}) < h_{\alpha/2}] \vee [T(\vec{x}) > h_{1-\alpha/2}]\}$

где h_q - кв урня q распр-я $\chi^2(n-1)$

<u>Пример</u> $H_0 = \{X$ явл. норм св$\} = \{(\exists \theta_1)(\exists \theta_2 > 0)(\forall t \in R)\left(F_X(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(u-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}du\right)$ –

$$H_1 = \neg H_0 = \{(\forall \theta_1)(\forall \theta_2)(\exists t \in R)\left(F_X(t) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_2}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(u-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}du\right)\} =$$

$= \{X$ не явл. норм. св$\}$

$$\begin{cases} \neg \forall a\, P(a) \equiv (\exists a)(\neg P(a)) \\ \neg \exists a\, P(a) \equiv (\forall a)(\neg P(a)) \end{cases}$$

Проверка основной гипотезы H_0 сводится к оценке величины рассогласования эмпирич. функции $F_n(t)$ (отвечающей выборке) и функции $F_0(t, \vec{\theta})$ предполагаемого закона распределения св X

<u>Опр</u> Критерием согласия наз. статистический критерий, предназначенный для проверки корректности гипотезы о том, что предп. закон распред $F_0(t, \vec{\theta})$ св X согласуется с экспериментальными данными, представленными эмпирической функцией распределения $F_n(t)$

<u>Замеч</u> При выдвижении осн. гипотезы H_0 могут быть использованы следующие соображения для предложения функции F_0:

1) анализ априорной информации об изучаемом явлении и ее сопоставление с исходными предпосылками построения конкретных моделей (биномиал, экспоненц, ...)

2) построение эмпирич. функции распределения $F_n(t)$ и соотнесение ее графика с графиками ~~известных распред.~~ функций распределения известных случ. величин

3) построение гистограммы и соотнесение ее с графиками функций плотности известных распред.

② Критерий Колмогорова для простой гипотезы

Пусть 1) X — непр св

2) $\vec{X}$ — случ. выб. объема n из ген. совокуп X

Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0 = \{F_X(t) \equiv F_0(t)\}$

против $H_1 = \neg H_0$,

где F_0 — некот. функция распределения

__Замеч__ здесь F_0 известна полностью и не зависит ни от каких неизв. параметров $\Rightarrow$ H_0 — простая гипотеза

Рассмотрим статистику

$$\Delta(\vec{x}) = \sup_{t \in R} |F_n(t) - F_0(t)|,$$ где $F_n(t)$ — эмпирич. функция распределения, отвечающая выборке $\vec{x}$

Очевидно, что в пользу H_0 свид. "малые", "близкие к 0" значения статистики Δ, а "большие" ее значения — в пользу H_1

По этой причине критич. мн-во имеет вид:

$W = \{\vec{x} \in \mathcal{X}_n : |\Delta(\vec{x})| \geq \delta_{1-\alpha}\}$, где $\delta_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ закона распределения случ. величины $\Delta(\vec{X})$ при истин. H_0

$\{\Delta(\vec{X}) = \sup |\hat{F}_n(t) - F_0(t)| \sim ?\}$

При этом решающее правило имеет стандартный вид:

$\vec{x} \in W \Rightarrow$ прин H_1

$\vec{x} \notin W \Rightarrow$ приним H_0

<u>Замеч</u> о законе распределения св $\Delta(\vec{X})$

1) Построенный критерий требует сост. квантили закона распр. св Δ при ист. H_0

~~2)~~ Вообще говоря, закон распределения этой св зависит от:
~~1)~~ выбранной функции $F_0(t)$. Однако в мат статистике доказано следующее:

2) Пусть 1) св $Y \sim R[0;1]$

2) $\hat{R}(t, \vec{Y}_n)$ - выборочная ф. распред., ~~построенная~~ отвечающая случ. выб. $\vec{Y}_n$

Тогда при истинной H_0 функция распред св $\Delta(\vec{X}_n)$ совпадает с функцией распред. св $Z(n) = \sup\limits_{t \in [0;1]} |\hat{R}(t, \vec{Y}_n) - t|$

$\{\{ \Delta(\vec{X}_n) \sim Z(n)$ при данном n $\}\}$

3) Для каждого $n \in N$ закон распр. св $Z(n)$ известен

Для $n \leq 100$ составлены таблицы квантилей св $Z(n)$

При $n > 100$?

a) Колмогоров доказал, что

$$\lim_{n \to \infty} P\{\sqrt{n} Z(n) < t\} = K(t), \quad t > 0,$$

где $K(t) = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i e^{-2i^2 t^2}$

Другими словами, Колмогоров доказал, что при $n \to \infty$ послед. случ. велич. $\sqrt{n} Z(n)$ слабо сходится к случ. величине A, функция распред. которой

$$F_A(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ K(t), & t > 0 \end{cases}$$

б) То при достаточно больших n ф. распр. св $\sqrt{n}\,Z(n)$ совпадает с $F_A(t)$, поэтому квантиль $\delta_{1-\alpha}$ св $Z(n)$ выражается через квантиль a_α св A:

$$\delta_{1-\alpha} \approx \frac{a_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

в) таблица значений $K(t)$ составлена, есть в литре

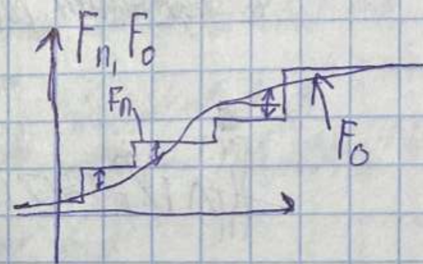
г) как показывает практика, соотношением * можно польз. при $n \geq 20$

X - св

$\vec{x}$ - выб.

Взяли откуда-то F_0 полн. изв.

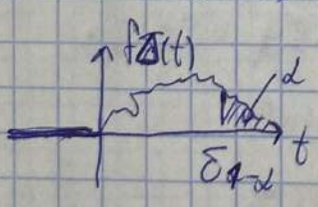
$H_0 = \{F_X(t) \equiv F_0(t)\}$ $\quad H_1 = \neg H_0$??



шп. $\Delta(\vec{x}) = \sup |\underbrace{F_n(t)}_{\text{по } \vec{x}} - F_0(t)|$

берем высотомер ↕ $\forall t \in \mathbb{R}$ и Δ приним. наибольшее расхождение

$W = \{\vec{x} : \Delta(\vec{x}) \geq \delta_{1-\alpha}\}$



чтобы она стала не числом, а св $\Delta(\vec{X}) \sim \boxed{?}$ вопрос (при H_0) от F_0

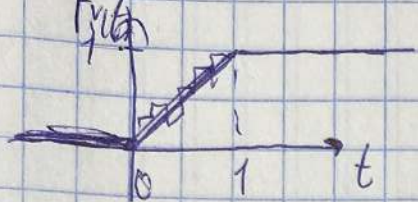
Th 1) $\Delta(\vec{X})$ закон распр не зав. от F_0, но зависит от n

2) закон распр $\Delta(\vec{X})$ совп с зак. распр $Z(n) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |\hat{R}(t, \vec{Y}_n) - t|$

где $Y \sim R[0,1]$

$Y \sim R[0,1]$

$$F_Y = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & 0 < t \le 1 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$R(t, \vec{Y_n})$ - выб. ф. распр. для $\vec{Y}$ из ген сов-ти Y

то есть $Z(n)$ в целом понятно как распр $\quad \Delta(\vec{X}_{\underline{n}})$

для всех $n = 1 \dots 100$ есть таблицы квант. $Z(\underline{n})$

а если >100

$$F_{\sqrt{n}Z(n)}(t) \Longrightarrow F_A(t)$$

$$F_A(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ K(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$K(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}$$

$n \geqslant 20$:

$$\Delta|_{H_0} = Z(n)$$

$$F_{\sqrt{n}Z(n)}(t) \approx F_A(t) \Rightarrow \sqrt{n}\,\delta_{1-\alpha} = a_{1-\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_{1-\alpha} = \frac{a_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$