① Рассм. 2 задачи мат. статистики: случ. вел. X имеет з-н распр., общий вид кот. известен, но кот зав. от неизв. пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - вектор неизв. пар-ов. Треб. оценить эти п-ры

γ-довер. интервалом для п-ра θ наз-ся пара стат-и $\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))\} = \gamma$$

Пусть 1) θ - неизв. п-р закона распр. сл. вел. X
2) $g(\vec{x}, \theta)$ - некот. ст-ка

Стат. $g(\vec{x}, \theta)$ наз централ., если з-н её распр. не завис. от θ, т.е. $F_g(x, \theta) \equiv F_g(x)$, где F_g - ф-я распр. сл. вел. g.

Пример: $X \sim (m, \sigma^2)$, где m - неизв., σ^2 - неизв. Оценим σ^2. Рассм стат.

$$g(\vec{x}, \sigma^2) = \frac{S^2(\vec{x})}{\sigma^2} \cdot (n-1) \sim \chi^2(n-1)$$

Положим $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2}$

$$\gamma = P\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < g(\vec{x}, \sigma^2) < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} <$$

$$< h_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{\frac{1}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \frac{\sigma^2}{S^2(n-1)} < \frac{1}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\} =$$

$$= P\{\underbrace{\frac{S^2(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}}_{\underline{\sigma}^2} < \sigma^2 < \underbrace{\frac{S^2(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}}_{\overline{\sigma}^2}\}$$

т.о. $$\underline{\sigma}^2 = \frac{S^2(\vec{x})(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{S^2(\vec{x})(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

1) $\xi \sim N(0,1)$

2) Можно показ, что $y \sim \chi^2(n-1)$, причем сл. вел. ξ и y - независ.

3) т.о. сл. вел. g имеет распр. $St(n-1)$

γ-Дов. инт. для m: $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$

Из с-ва непр. случ. вел.:

$$\gamma = P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < g(\vec{x}, m) < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} = P\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m-\bar{x}}{S(\vec{x})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}\} =$$

$$= P\{\underbrace{\bar{x} - \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{x})} < m < \underbrace{\bar{x} + \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{x})}\}$$

т.о. $\underline{m}(\vec{x}) = \bar{x} - \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$

$\overline{m}(\vec{x}) = \bar{x} + \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$

2/

① Расм. г задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет ф-н распр., общий вид кот. известен, но кот. зав. от неизв. п-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$. – вектор неизв. п-ов. треб. оцен. эти парам-ры.

γ – довер. интерв. для п-ра θ наз-ся пара статистик $\underline{\theta}(\vec{x})$, $\overline{\theta}(\vec{x})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))\} = \gamma$$

Пусть 1) θ – неизв. п-р ф-на распр. сл. вел. X
2) $g(\vec{x}, \theta)$ – некот. статистика

Стат. $g(\vec{x}, \theta)$ наз. централ. если ф-н её распр. не завис. от θ, т.е. $F_g(x, \theta) \equiv F_g(x)$, где F_g – ф-я распр. сл. вел. g.

Пример: $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизв, σ^2 – неизв.
Постр. дов. инт. для m.

Исп. ст-ку $g(\vec{x}, m) = \frac{m - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n}$ не выйдет, т.к. σ – неизв.
Вместо σ исп. исправл. оценку для среднекв. отклон

$$S(\vec{x}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$g(\vec{x}, m) = \frac{m - \bar{x}}{S(\vec{x})}\sqrt{n}$$

$$g(\vec{x}, m) = \frac{\overbrace{\frac{m-\bar{x}}{\sigma}\sqrt{n}}^{\xi}}{\sqrt{\underbrace{\frac{(n-1)S^2(\vec{x})}{\sigma^2}}_{\eta}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} = \left\{ \xi = \frac{m-\bar{x}}{\sigma}\sqrt{n},\ \eta = \frac{(n-1)S^2(\vec{x})}{\sigma^2} \right\} =$$

$$= \frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\sqrt{n-1}$$

① Рассм. задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет ф-н распр., общий вид кот. известен, но кот. завис. от неизв. пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - вектор неизв. пар-ов. Треб. оценить эти п-ры.

γ-довер. интервалом для п-ра θ наз-ся пара стат-к $\underline{\theta}(\vec{x})$, $\overline{\theta}(\vec{x})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))\} = \gamma$$

Пусть 1) θ - неизв. п-р ф-на распр. сл. вел. X
2) $g(\vec{x}, \theta)$ - некот. стат.

Стат. $g(\vec{x}, \theta)$ наз. централ., если ф-н её распред. не завис. от θ, т.е. $F_g(x, \theta) \equiv F_g(x)$, где F_g - ф-я распр. сл. вел. g

Пример: пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m - неизв., σ^2 - изв.

$$g(\vec{x}, m) = \frac{m - \overline{x}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

с помощью этой статист. постр. γ-довер. инт. для m

$$\gamma = P\{u_{\alpha_1} < g(\vec{x}, m) < u_{1-\alpha_2}\} = P\{u_{\alpha_1} < \frac{m - \overline{x}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\alpha_2}\} =$$

$$= P\{\underbrace{\overline{x} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}(\vec{x})} < m < \underbrace{\overline{x} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}}_{\overline{m}(\vec{x})}\}$$

Т.о. $\underline{m}(\vec{x}) = \overline{x} + \frac{\sigma u_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}$

$\overline{m}(\vec{x}) = \overline{x} + \frac{\sigma u_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}$

19

① Рассм. 2 задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет з-н распр., общий вид кот. извест., но кот. зависит от неизв. п-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ — вектор неизв. параметров. Треб. оцен. эти п-ры.

γ-доверит. интервалом для пар-ра θ наз-ся пара статистик $\underline{\theta}(\vec{x})$, $\overline{\theta}(\vec{x})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))\} = \gamma$$

Пусть 1) θ — неизв. п-р з-на распр. сл. вел. X
2) $g(\vec{x}, \theta)$ — некот. статистика

Стат. $g(\vec{x}, \theta)$ наз центральной, если закон её распр. не зависит от θ, т.е. $F_g(x, \theta) \equiv F_g(x)$
(F_g — ф-я распр. случ. велич. g)

Пусть 1) $g(\vec{x}, \theta)$ яв-ся центр. стат.
2) сл. вел. g — непрерыв. сл. вел., т.е. $F_g(x)$ — непр.
3) $g(\vec{x}, \theta)$ как ф-я п-ра θ яв-ся монотон. возр.
4) выбр. зн-я $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$: $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$

Из св-в непрер. случ. велич:

$$\gamma = P\{q_{\alpha_1} < g(\vec{x}, \theta) < q_{1-\alpha_2}\} = \{g \text{ монот возр. с ростом } \theta\} =$$

$$= P\{\underbrace{g^{-1}(\vec{x}, q_{\alpha_1})}_{\underline{\theta}(\vec{x})} < \theta < \underbrace{g^{-1}(\vec{x}, q_{1-\alpha_2})}_{\overline{\theta}(\vec{x})}\}$$

В соотв. с опред. γ-довер. интервала, в кач-ве его границ можно взять отрезки

$$\underline{\theta}(\vec{x}) = g^{-1}(\vec{x}, q_{\alpha_1}), \quad \overline{\theta}(\vec{x}) = g^{-1}(\vec{x}, q_{1-\alpha_2})$$

Ур-я правдопод.:

$$\begin{cases} \frac{\delta \ln L}{\delta a} = \frac{n}{n-a} = 0 \\ \frac{\delta \ln L}{\delta b} = \frac{-n}{b-n} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b - a = \infty$? границы обл., в кот. $f(x, a, b) > 0$, зависят от неизв. п-ов a и b $\Rightarrow$ дифф-е по п-ам затрудн.
Нужно максим. L не исп. ~~н~~ усл. экстремума

3) $L(\vec{x}, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & x \in [a; b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

a) если $X_{(1)} < a$ или $X_{(n)} > b$, то $L = 0$. $\Rightarrow a \le X_{(1)}, X_{(n)} \le b$

b) чем меньше размер отр. $[a, b]$, т.е. чем меньше $b-a$, тем больше $\frac{1}{b-a}$ $\Rightarrow$ тем больше $L(x, a, b) = \frac{1}{(b-a)^n}$
т.о. для макс. L нужно взять a, b так, чтобы $b - a \to \min$

c) Из a) и b) $\Rightarrow \hat{a}(\vec{x}) = X_{(1)}, \hat{b}(\vec{x}) = X_{(n)}$

18

① Рассм. 2 задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет закон распр., общий вид кот. извест., но кот. завис. от неизв. п-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - - вектор неизв. п-ов. Треб. оценить эти п-ры.

Точечной оценкой п-ра θ наз. стат. $\hat{\theta}(\vec{x})$, выбор зн-е кот прин. в кач.-ве зн-я пар-ра θ, т.е. прин. р-во $\theta := \hat{\theta}(\vec{x})$

Ф-я правдопод. случ. выбор $\vec{X}$ наз. ф-я

$$L(\vec{X}, \theta) = p(x_1, \theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n, \theta), \text{ где}$$

$$p(x_i, \theta) = \begin{cases} P\{X = x_i\}, & \text{если } X - \text{дискр. сл. вел.} \\ f(x_i, \theta), & \text{если } X - \text{непр. сл. вел.} \end{cases}$$

↑ ф-я плот. распр. сл. вел. X

Метод макс. правдопод.:

Пусть 1) X - сл. вел, з-н распр. кот. завис. от неизв. п-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$

2) $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - случ. выб. из ген. совокуп. X

Пример:

$X \sim R[a; b]$. Постр. для a, b оценки макс. правдопод.

1) $f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2) Ф-я правдопод.: $L(\vec{X}, \vec{\theta}) = f(X_1, a, b) \cdot \ldots \cdot f(X_n, a, b) =$

$= \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \le X_{(1)}, X_{(n)} \le b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\ln L = \begin{cases} -n \ln(b-a), & a \le X_{(1)}, X_{(n)} \le b \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}_1(\vec{X}) \\ \ldots \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

Пример:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a;b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

a, b - неизв. пар-ры $\Rightarrow r = 2$. Сост. сист. из 2 ур. для 1 и 2 мом.:

$m_1(a,b) = MX = \frac{a+b}{2}$ - 1ый нач. м-т

$m_2(a,b) = DX = \frac{(b-a)^2}{12}$ - 2ой центр. м-т

2) Сост. сист: $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \hat{m}_1(\vec{X}) \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \hat{m}_2(\vec{X}) \end{cases}$

$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X}$, $\hat{m}_2(\vec{X}) = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}_{\hat{\sigma}^2(\vec{X}) \text{ - выбор. дисп.}}$

3) Реш. сист. относ. a и b:

$\begin{cases} a + b = 2\bar{X} \\ (b-a)^2 = 12\hat{\sigma}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \bar{X} \mp \sqrt{3}\hat{\sigma} \\ b = \bar{X} \pm \sqrt{3}\hat{\sigma} \end{cases} \Rightarrow$ т.к. $a < b \Rightarrow$

$$\begin{cases} \hat{a}(\vec{X}) = \bar{X} - \sqrt{3}\hat{\sigma}(\vec{X}) \\ \hat{b}(\vec{X}) = \bar{X} + \sqrt{3}\hat{\sigma}(\vec{X}) \end{cases}$$

17

① Рассм. задачу мат статистики: случ. вел. X имеет закон распр., общий вид кот. известен, но кот. завис. от неизвест. пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ - вектор неизв. п-ов. Треб. оценить эти п-ры.

Точечной оценкой п-ра θ наз. стат $\hat{\theta}(\vec{x})$, выбор. зн-е кот прин. в кач-ве зн-я п-ра θ, т.е. прин. р-во $\theta := \hat{\theta}(\vec{x})$

Метод моментов:

Пусть 1) X - случ. вел., закон распр. кот. изв., но завис. от неизв пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ - в-р неизв. п-ов. (Треб. оцен. зн-я п-ов $\theta_1, ..., \theta_r$)

2) У случ. вел. X $\exists r$ первых моментов

Постр. точеч. оц. п-ов $\theta_1, ..., \theta_r$ с исп. мет. моментов:

1) Найдем выр-я для r первых теор. моментов сл. вел. X (теор. моменты будут зав. от п-ов $\theta_1, ..., \theta_r$, т.к. ф-я распр. сл. вел. X зав. от этих п-ов)

$m_1(\theta_1, ..., \theta_r) = M[X]$

...

$m_r(\theta_1, ..., \theta_r) = M[X^r]$

2) Приравн. выр-я для теор. мом-ов и их выбор. аналогов:

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, ..., \theta_r) = \hat{m}_1(\vec{x}) \\ \cdots \\ m_r(\theta_1, ..., \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{x}) \end{cases}$$

3) В п.2) получили сист. из r нелин. ур-ий относ. r неизв. $\theta_1, ..., \theta_r$.

Решим систему относ $\theta_1, ..., \theta_r$:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x},\theta) = f_{X_1}(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(x_n,\theta) = \{X_i \sim N(\theta,\sigma^2)\} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln f_{\vec{X}}(\vec{x},\theta) = -n\ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2\right)$$

$$\frac{\partial \ln f_{\vec{X}}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2\sigma^2}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i + n\theta\right)$$

$$\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{X}}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4}\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2 +$$

$$+ 2\sum_{1\le i<j\le n}(X_i-\theta)(X_j-\theta)\Big]$$

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln f_{\vec{X}}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^4}\Big[\sum_{i=1}^{n}\overbrace{M[(X_i-\theta)^2]}^{DX} +$$

$$+ 2\sum_{1\le i<j\le n}\underbrace{M\{(X_i-\theta)(X_j-\theta)\}}_{0}\Big] = \frac{1}{\sigma^4}\,n\sigma^2 = \frac{n}{\sigma^2}$$

показ. эфф. погл. оц. по Рао-Крамеру

$e(\bar{X}) = 1 \Rightarrow \bar{X}$ – эфф. по Рао-Крамеру $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ «просто» эфф.

Замечание: $e(\hat{\theta}) = \dfrac{1}{D(\hat{\theta})\cdot I(\theta)}$

в нашем случае: $e(\bar{x}) = \dfrac{1}{\frac{\sigma^2}{n}\cdot \frac{n}{\sigma^2}} = 1$

16

① Рассм. г задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет закон распр., общий вид кот. известен, но кот. завис. от неизв. пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ — вектор неизв. п-ов. Треб. оценить эти п-ры.

Точечной оценкой пар-ра θ наз. стат. $\hat{\theta}(\vec{X})$, выбор. зн-е кот. ~~~~ прин. в кач.-ве зн-я п-ра θ, т.е. прин. р-во $\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$

Оценка неизв. п-ра θ наз. эффект., если
1) $\hat{\theta}$ явл. несмещ. оценкой для θ
2) $\hat{\theta}$ обл. наименьш. дисп. среди всех несмещ. оценок п-ра θ

Оценка $\hat{\theta}_1$ наз. более эфф., чем оценка $\hat{\theta}_2$, если
1) $\exists D\hat{\theta}_1, \exists D\hat{\theta}_2$
2) $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$

Пример:

Пусть $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где θ — неизв., σ^2 — изв.

Покажем, что $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ явл. эфф. по Рао-Крамеру, а, след-но, и просто эфф.

1) Нужно пок-ть, что $D[\bar{X}] = \frac{1}{I(\theta)}$

2) $D[\bar{X}] = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2} D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \{\forall i \neq j \; X_i \text{ и } X_j \text{ - независ.}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

3) $I(\theta)$ — ?

L — ф-я правдопод. сл. выб. $\vec{X}$

$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L(\vec{X}, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$ (кол-во инф-и по Фишеру)

Замечание 1:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{G}\varphi(\vec{x},\theta)\,d\vec{x} = \int\frac{\partial\vec{\varphi}(\vec{x},\theta)}{\partial\theta}\,d\vec{x}$$ – использ. в док-ве н-ва Рао-Крамера.

дифф-ние по п-ру под знаком интегр.

Стар. модель наз регулярной, если для нее верен вышеопис. переход.

Зам 2:

Эффективность точеч. оценки θ по Рао-Крамеру – величина

$$e(\hat{\theta}) = \frac{1}{D(\hat{\theta})\cdot I(\theta)}.$$

Из н-ва Рао-Крамера $\Rightarrow 0 < e(\hat{\theta}) \leq 1 \Rightarrow$

точечные оценки $\hat{\theta}$, для кот. $e(\hat{\theta}) = 1$, наз. эфф по Рао-Крамеру

Зам. 3:

Оценка, эфф. по Рао-Крамеру, будет „просто" эфф.

V5

① Рассм. 2 задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет закон распр., общий вид. кот. извест., но кот. зависит от неизв. пар.-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - вектор неизв. пар.-ов. Требуется оценить эти п-ры.

Точечной оценкой пар-ра θ наз-ся стат. $\hat{\theta}(\vec{X})$, выбор. зн-е кот. приним. в кач-ве зн-я п-ра θ, т.е. приним. р-во $\theta := \hat{\theta}(\vec{x})$

Оценка $\hat{\theta}(\vec{x})$ неизв. п-ра θ наз. эффективной, если
1) $\hat{\theta}$ явл. несмещ. оценкой для θ
2) $\hat{\theta}$ явл. наименьш. дисп-ей среди всех несмещ. оценок п-ра θ

Оценка $\hat{\theta}_1$ наз-ся более эфф., чем оценка $\hat{\theta}_2$, если
1) $\exists D\hat{\theta}_1$, $\exists D\hat{\theta}_2$
2) $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$

Ф-я правдопод. случ. выбор. $\vec{X}$ наз-ся ф-я

$$L(\vec{X}, \theta) = p(X_1, \theta) \cdot \ldots \cdot p(X_n, \theta), \text{ где}$$

$$p(X_i, \theta) = \begin{cases} P\{X = X_i\}, & \text{если } X \text{ - дискр. сл. вел.} \\ p(X_i, \theta), & \text{если } X \text{ - непр. сл. вел.} \end{cases}$$

ф-я плот. распр. сл. вел. X

Кол-во инф-и по Фишеру, отвеч. случ. выб. $\vec{X}$, наз. число ~~(...)~~

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L(\vec{X}, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

Теорема о н-ве Рао-Крамера

Пусть 1) рассм. парам. модель регулярная
2) θ - п-р з-на распр. сл. вел. X
3) $\hat{\theta}(\vec{X})$ - несмещ. точ. оценка п-ра θ з-на распр. сл. вел. X

Тогда $D\hat{\theta}(\vec{X}) \geq \frac{1}{I(\theta)}$, где $I(\theta)$ - кол-во инф-и по Фишеру

① Рассм. г задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет з-н распр-я, общий вид кот известен, но кот зависит от неизвестн. пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - вектор неизв. пар-ов. Треб. оценить эти п-ры.

Точечной оценкой пар-ра θ наз-ся статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выбор. зн-е кот. приним. в кач-ве зн-я пар-ра θ, т.е. прин. р-во $\theta := \theta(\vec{x})$

Оценка $\hat{\theta}(\vec{X})$ неизв. п-ра θ наз. эффективной, если
1) $\hat{\theta}$ явл. несмещ. оценкой для θ
2) $\hat{\theta}$ обл. наим. дисп-ей среди всех несмещ. оценок п-ра θ

Оценка $\hat{\theta}_1$ наз-ся более эффект, чем оценка $\hat{\theta}_2$, если
1) $\exists D\hat{\theta}_1$, $\exists D\hat{\theta}_2$
2) $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$

Теорема о ед. эфф. оценки:

Пусть 1) $\vec{X}$ - сл. вел, з-н распр. кот. завис. от п-ра θ
2) $\hat{\theta}_1(\vec{X})$, $\hat{\theta}_2(\vec{X})$ - эфф. оценки п-ра θ

Тогда $\hat{\theta}_1(\vec{x}) = \hat{\theta}_2(\vec{x})$

Это р-во поним. в вероят. смысле (т.к. явл. р-ом двух случ. величин $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$):

$$P\{\vec{X} \in \{\vec{x} : \hat{\theta}_1(\vec{x}) \neq \hat{\theta}_2(\vec{x})\}\} = 0$$

$M[\hat{m}] = m$, т.е. $M[\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{MX_i}_{m} =$

$= \{X_i \sim X \Rightarrow MX_i = MX = m\} = m \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = m$ (т.к. $\hat{m}$ – несмещ.)

т.о. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ – усл. несмещ. оценки $\hat{m}(\vec{x}) = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$

2) Дисп. оценки $\hat{m}$: $D[\hat{m}(\vec{x})] = D[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i] = \{X_i$ незав. в совок.$\} =$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 DX_i = \{$одн. $DX = \sigma^2 \Rightarrow DX_i = \sigma^2\} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$

т.о. дисп. оценки $\hat{m}(\vec{x}) = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ опред. зн-ем $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$

3) Попроб. подобр. λ_i, $i = \overline{1,n}$ так, чтобы $D[\hat{M}]$ была миним.
Для этого (задача поиска услов. min):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \longrightarrow \min\limits_{\lambda_i,\ i=\overline{1,n}} \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \iff \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1}^{\varphi_1} = 0 \end{cases}$$

Сост. ф-ю Лагранжа: $L(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right)$
Необх. усл. ф-и L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i - \alpha = 0, \quad i = \overline{1,n} & \Rightarrow \lambda_i = \dfrac{\alpha}{2}; \ i = \overline{1,n} \quad (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \alpha} = -\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Подст. (1) в (2):
$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \frac{n\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{n}$
Подст. в выр-е для λ_i: $\lambda_i = \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$; $i = \overline{1,n}$
Исп-я λ_i в $\hat{m}(\vec{x}) = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$:

$$\hat{m}(\vec{x})\Big|_{\lambda_i = \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} X_1 + \ldots + \frac{1}{n} X_n = \bar{X}$$

Можно пок., что при $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$, ф-я $D\hat{M}$ имеет миним. (провер. дост. ~~...~~ усл. экстр.)

При этом $D[\hat{M}|_{\lambda_i = \frac{1}{n}}] = \frac{\sigma^2}{n}$

① Рассм. задачу мат. статистики: общий вид кот. случ. велич. X имеет з-н распр., но кот. зависит от неизв. парам. известен, $\vec\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ – вектор неизв. пар-ов.
Треб. оценить эти пар-ры.

Точечной оценкой пар-ра θ наз. стат. $\hat\theta(\vec X)$, выбор. зн-е кот. прин. в кач-ве зн-я п-ра θ, т.е. прин. р-во $\theta := \hat\theta(\vec x)$

Оценка $\hat\theta(\vec X)$ неизв. п-ра θ наз. эффект., если

1) $\hat\theta$ явл. несмещ. оценкой для θ
2) $\hat\theta$ обл. наим. дисп. среди всех несмещ. оценок п-ра θ.

Оценка $\hat\theta_1$ наз. более эфф., чем оценка $\hat\theta_2$, если

1) $\exists D\hat\theta_1, \exists D\hat\theta_2$
2) $D\hat\theta_1 < D\hat\theta_2$

Оценка $\hat\theta$ наз. эфф. в классе (H) несмещ. оценок, если

1) $\hat\theta \in$ (H)
2) $\hat\theta$ обл. наименьшей дисперс. среди всех оц. класса (H)

Пример:

Пусть X – случ. вел., $m = MX$. Показ., что выбор. сред. ($\hat m(\vec X) = \bar X$) явл. эфф. оценкой в классе линейн. несмещ. оценок.

1) Лин. оценка им. вид $\hat m(\vec X) = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$, где $\lambda_i \in R$, $i \in \overline{1;n}$

Рассматривая несмещ. оценки,

Рассм. сл. выбор. $\vec{X_n} = (X_1, \dots, X_n)$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ эл-ты этой выб.

а) независ.
б) один. распр. $(X_i \sim X)$
в) $\exists DX_i = \sigma^2 < \infty$

т.о. посл. $X_1, X_2, \dots$ удовл. усл-ю ЗБЧ в ф. Чебышева (для один. распр. сл. вел.), поэтому

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\underbrace{\bar{X_n}}_{\hat{\theta}_n} - \underbrace{MX}_{\theta}| > \varepsilon\}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\hat{\theta}(\vec{X_n}) - \theta| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

т.о. $\hat{\theta}$ - сост. оценка п-ра θ

Пример:

Пусть 1) $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где θ - неизв. п-р
2) $\hat{\theta}(\vec{X}) = X_1$ - р-т 1го наблюд.

Явл. ли $\hat{\theta}$ сост. оценкой для θ

$P\{|\hat{\theta}(\vec{X_n}) - \theta| \le \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{?} 1$

$P\{|\hat{\theta}(\vec{X_n}) - \theta| < \varepsilon\} = P\{|X_1 - \theta| \le \varepsilon\} = \{X_1 \sim X \sim N(\theta, \sigma^2)\} =$

$= P\{\theta - \varepsilon \le X \le \theta + \varepsilon\} = \Phi_0\left(\frac{\theta + \varepsilon - \theta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\theta - \varepsilon - \theta}{\sigma}\right) =$

$= 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$

Верно ли, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}_{\text{не завис. от } n\text{, т.е. явл. const } (\varepsilon)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$?

Поэтому, к примеру, для $\varepsilon = \sigma \Rightarrow 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(1) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

т.о. рассм. оценка не явл. сост.

12

① Рассм. 2 задачу мат. статистики: случ. вел. X имеет закон распр., общий вид которого известен, но кот. зависит от неизв. пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - вектор неизв. пар-ов. Треб. оценить зн-я этих п-ов.

Точечной ~~оцен~~ оценкой пар-ра θ наз. статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выбор. зн-е кот. прин. в кач-ве зн-я п-ра θ, т.е. прин. р-во $\theta := \hat{\theta}(\vec{x})$

Пусть 1) X - сл. вел., зн-я распр. кот. завис. от неизв. пар-ра θ
2) $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ - точ. оценка для θ, где n - объем сл. выборки $\vec{X}_n$
3) $F(x, \theta)$ - ф-я распр. сл. вел. X

Оценка $\hat{\theta}$ пар-ра θ наз. состоятельной, если $\hat{\theta}(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\hat{\theta}(\vec{X}_n) - \theta| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Пример:

Пусть 1) X - случ. велич.
2) $\exists MX = m$
3) $\hat{\theta}(\vec{X}) = \bar{X}$
4) $\exists DX = \sigma^2 < \infty$

Покажем, что выбор. ср. $\bar{X}$ явл. сост. оценкой для m

~~1) Посл-ть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ явл. посл-ю независ. один. распр. случ. велич~~

~~2) $\exists MX_i = m$, $\exists DX_i = \sigma^2$, $i \in N$~~

~~3) (1) и 2)) ⇒ посл. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ удовл. з-ну бол. чисел в форме Чебышева~~

~~$\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\bar{X} - m| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$~~

11

① Рассм. 2 задачу мат. статистики: случ. вел. X им. закон. распр., общий вид кот. известен, но кот. зависит от неизв. пар-ов $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - вектор неизв. пар-ов
треб. оценить зн-я этих пар-ров.

Точечной оценкой пар-ра θ наз-ся стат. $\hat{\theta}(\vec{X})$, выбор. зн-е кот. прин. в кач-ве зн-я пар-ра θ, т.е. приним. р-во $\theta := \hat{\theta}(\vec{x})$

Несмещённость:

Пусть 1) X - случ. велич.
2) $F(x, \theta)$ - ф-я распр. случ. вел. X
3) F как ф-я известна, но при этом неизв. зн-е п-ра θ
4) $\hat{\theta}(\vec{X})$ точ. оценка для θ

Точечная оценка $\hat{\theta}$ п-ра θ наз. несмещ., если $\exists M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$ (теор. зн-е пар-ра θ)

Пример:

Пусть 1) X - сл. вел.
2) $\exists DX = \sigma^2$

В кач-ве оценки дисп. σ^2 рассм. выбор. дисп. $\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
Явл. ли эта оценка несмещ.?

Можно показ., что $M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{\sigma}^2(\vec{X})$ явл. смещ. оценкой дисп.

Исправл. выбор. дисперсия: $S^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
Для испр. выбор. дисп.:

$M[S^2(\vec{X})] = \frac{n}{n-1} M[\hat{\sigma}^2] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 \Rightarrow S^2(\vec{X})$ явл. несмещ. выбор. дисп.

① Интервал. стат. рядом наз. таблицу вида

J_1	J_2	...	J_m
n_1	n_2	...	n_m

где n_i – кол-во эл-тов выборки $\vec{x}$, принадл. J_i, $i=\overline{1,m}$
(для выбора m об. использ. ф-лу $m=[\log_2 n]+1$, где $[a]$ – целая часть a

(При большом ~~объеме~~ объеме выборки ЈН-я выб. групп. не только в стат. ряд, ~~но~~ но и в интерв. стат. ряд.
Для этого отрезок $[x_{(1)}; x_{(n)}]$ разб. на m равновел. частей J_i, $i=\overline{1,m}$, для кажд. части указ. кол-во попавш. в ней эл-тов выборки.
Ширина одного ин-ла $\Delta = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m}$
т.о. $J_i = [x_{(1)} + (i-1)\Delta,\ x_{(1)} + i\Delta)$, $i = \overline{1,m-1}$
$J_m = [x_{(1)} + (m-1)\Delta,\ x_{(n)}]$)

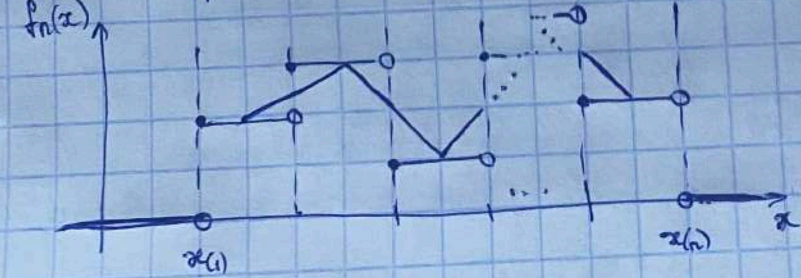
Пусть $\vec{x}$ – выбор. из ген. совокуп. X
Предпол., для $\vec{x}$ постр. интер. стат. ряд (J_i, n_i), $i=\overline{1,m}$

Эмпир. ~~ф-ей~~ плотностью, отвеч. выбор. $\vec{x}$, наз-ся ф-я

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Гистограмма – график ф-и $f_n(x)$

Полигон частот, отвеч. выборке $\vec{x}$ – ломаная, звенья кот. соед. середины верхних сторон. соседн. прямоугол. гистогр., отвеч. этой выборке



3) По ЗБЧ в форме Бернулли $\nu_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} p$, т.е. $\hat{F}_n(x, \vec{X}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{P} F(x)$

① Пусть $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ - выборка из ген. сов-ти X

Обозн. $n(x,\vec{x})$ - число эл-тов выборки $\vec{x}$, кот. принимают зн-е меньше x

Эмпир. ф-ей распр., отвеч. выборке $\vec{x}$, наз-ся ф-я

$$\vec{F_n}(x,\vec{x})=\frac{n(x,\vec{x})}{n},\quad x\in R$$

Пусть $\vec{X}$ - случ. выбор. из ген. совокуп. X

Обозн. $n(x,\vec{X})$ - сл. вел., кот. для каждой реализ. $\vec{x}$ сл. выбор. $\vec{X}$ прин. зн-е $n(x,\vec{x})$

Выбор. ф-ей распр. наз. ф-я $\hat{F}_n(x,\vec{X})=\frac{n(x,\vec{X})}{n}$

Теорема:

Для любого фикс. $x\in R$ послед-ть $\hat{F}_n(x,\vec{X}_n)$ сход. по вер-ти к зн-ю $F(x)$ при $n\to\infty$, где F – теор (истин.) ф-я распр. сл. вел. X, т.е.

$$\forall x\in R\quad \hat{F}_n(x,\vec{X}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{P}F(x)\quad (\vec{X}_n=(X_1,\dots,X_n))$$

Д-во:

1) ~~$\hat{F}_n(x,\vec{X}_n)$ относ. част. усп. в серии из n исп. по схеме Бернулли с вер-ю успеха p~~ $\cancel{\hat{F}_n(x,\vec{X}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{P}p}$, ~~в соотв. с ЗБЧ в форме Бернулли~~ ~~но $p=P\{X<x\}=F(x)$~~

1) $F(x)=P\{X<x\}=p$ (теор. част. успеха в серии исп. по схеме Бернулли)

2) $\hat{F}(x,\vec{X}_n)=\frac{n(x,\vec{X}_n)}{n}$ (где $n(x,\vec{X}_n)$ - число успехов в серии, n - объем серии) $=$

$= r_n$ - относ. частота успеха

выбор. дисп.

Пример 2:

Пусть 1) X - случ. вел.
2) $\exists DX = \sigma^2$

В кач. оценки дисперс. σ^2 рассм. выбор. дисп.: $\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
Явл. ли она несмещ.?

Покажем, что $M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2(\vec{X})$ явл. смещ. оценкой дисперсии

① Любую ф-ю g от случ. выборки наз. статистикой.

Выбор. средним наз. статист. $\hat{m}(\vec{X}) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Выбор дисперсией наз. статист. $\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

Нач. выбор. моментом порядка k наз. стат-ку $\hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

Центр. выбор. моментом пор. k наз. стат-ку $\hat{\mathring{m}}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k$

(Очевидно: $\bar{X} = \hat{m}_1(\vec{X})$, $\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \hat{\mathring{m}}_2(\vec{X})$)

Точечной оценкой пар-ра θ наз. стат-ка $\hat{\theta}(\vec{X})$, выбор. зн-е кот. приним. в кач-ве зн-я пар-ра θ, т.е. прин. р-во $\theta := \hat{\theta}(\vec{x})$

Несмещенность:

Пусть
1) X - случ. вел.
2) $F(x, \theta)$ - ф-я распр. сл. вел. X
3) F как ф-я известн, но неизв. явл. зн-е п-ра θ
4) $\hat{\theta}(\vec{X})$ точечная оценка для θ

Точечная оценка $\hat{\theta}$ пар-ра θ наз. несмещённой, если $\exists M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$ (теор. зн-е п-ра θ)

Пример 1:

Рассм. точечн. оценку МО $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \bar{X}$. Явл. ли она несмещ.?

$M[\hat{\theta}(\vec{X})] = M[\bar{X}] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i =$

$= \{X_i$ — эл-ты сл. выб. $\Rightarrow X_i \sim X \Rightarrow MX_i = MX = \theta\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ выбор. сред. явл. несмещ. оценкой МО

Теорема: для любого фикс. $x \in R$ посл. $\hat{F}_n(x)$ сход. по вероят. к ф-ю $F(x)$ ф-и распр-я случ. вел. X:

$$\forall x \in R \quad \hat{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F(x)$$

Д-во: $\hat{F}_n(x)$ - относит. част. успеха в серии из n испыт. по схеме Бернулли с вер. успеха p.

По зак. бол. чисел в форме Бернулли

$\hat{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$, но $p = P\{X < x\} = F(x)$

7

① Пусть X - случ. величина

Генеральная совокупность - мн-во всех возм. зн-ий сл. вел. X

Случайной выборкой из ген. совоуп. X наз. сл. вектор $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$, где коорд-ты $X_1, ..., X_n$ независ. в совокупности и кажд. из кот. имеет то же распред., что и X.

n называют объемом случ. выборки $\vec{X}$.

Выборкой объема n из ген. сов-ти X наз любую реализацию $\vec{x}$ случ. выборки $\vec{X}$ объема n из этой ген. совоуп.

число x_k наз. k-ым элементом выборки $\vec{x}$.

Распол. эл-ты выборки $\vec{x}$ в порядке неубыв. получ. послед. обозн. $x_{(i)}$, $i = \overline{1,n}$: $x_{(1)} \le ... \le x_{(n)}$
i-ый эл-т ($x_{(1)}$ - наим. эл-т ряда, $x_{(n)}$ - наибольш. эл-т ряда)

Послед. $x_{(1)}, ..., x_{(n)}$ наз. вариац. рядом выборки $\vec{x}$
при это $x_{(i)}$ - i-ый член вар. ряда. $(i = \overline{1,n})$

Вариац. рядом случ. выборки $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ наз-ся послед. случ. велич. $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$, где для кажд. реализ. $\vec{x}$ случ. выборки $\vec{X}$ случ. велич. $X_{(i)}$ прин. зн-е, равное i-ому члену вариац. ряда для выборки $\vec{x}$.

Выборочной ф-ей распр., отвеч. случ. выборке $\vec{X}$, наз-ся ф-я

$\hat{f}_n = \frac{n(x, \vec{X})}{n}$, где $n(x, \vec{X})$ - случ. велич., кот. для кажд. реализ. $\vec{x}$ случ. выборки $\vec{X}$ приним. зн-е, равное $n(x, \vec{x})$

Д-60:

1) Пусть X_i – случ. вел.,

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ если в i-ом исп. им. место успех} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \quad i = \overline{1,n}$$

тогда:

а) сл. вел. $X_1, \dots, X_n$ независ.

б) $MX_i = p$, $DX_i = pq$, $i \in N$

в) X_i одинак. распр.

2) $$P\{k_1 \le k \le k_2\} = P\{k_1 \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le k_2\} = P\{\frac{k_1}{n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \le \frac{k_2}{n}\} =$$

$$= \{M\overline{X}_n = MX_i = p\} = P\{\frac{k_1}{n} - p \le \overline{X}_n - p \le \frac{k_2}{n} - p\} =$$

$$= \{\sqrt{DX_i} = \sqrt{pq}\} = P\{\frac{k_1 - np}{\frac{n\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}} \le \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{pq}/\sqrt{n}} \le \frac{k_2 - np}{\frac{n\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}}\} =$$

$$= P\{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le Y_n \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\} = P\{x_1 \le Y_n \le x_2\} =$$

$= \{$ т.к. $X_1, X_2, \dots$ – незав (сх. Бернулли), один. распред., $MX_i = p$, $DX_i = pq$, то при $n >> 1$ $Y_n \sim N(0,1)$ $\} =$

$$= \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

6

① ЦПТ

Пусть 1) $X_1, X_2, \ldots$ – послед. независ., один распр. сл. вел.
2) $\exists MX_i = m$, $\exists DX_i = \sigma^2$, $i \in \mathbb{N}$

Рассм. сл. вел. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $i \in \mathbb{N}$, т.е. $\overline{X}_1 = X_1$,
$\overline{X}_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ и т.д. тогда * $M\overline{X}_n = m$, $n \in \mathbb{N}$, $D\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Рассм. случ. вел. $Y_n = \frac{\overline{X}_n - M\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

тогда $MY_n = M\left[\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left[M\overline{X}_n - m\right] = 0$

$DY_n = D\left[\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{\sigma^2/n} D\left[\overline{X}_n - m\right] = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = 1$

(* $M[\overline{X}_n] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m$
$D[\overline{X}_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \{X_1, X_2, \ldots \text{ – незав.}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}$)

Пусть выполнены усл. 1–2, тогда посл-ть вел. Y_n при $n \to \infty$ слабо сход. к случ. велич. Z, им. стандарт. норм. распр., т.е. $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_Y(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Z(x)$

где $Z \sim N(0,1)$, т.е. $F_Z(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Интегр. теор. Муавра-Лапласа

Пусть 1) провод. $n \gg 1$ число испыт. по схеме Бернулли с вер-ю p успеха в одном исп.
2) k – общее число успехов в серии

тогда $P\{k_1 \le k \le k_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

где $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = \overline{1;2}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

1) З-н распр. сл. вел. X_i:

X_i	0	1
p	$q = 1-p$	p

$MX_i = p$

$DX_i = pq$

2) $DX_i \equiv pq$ – огранич. в совокуп.

3) отдел. испыт. в сх. Бернулли независ. $\Rightarrow X_i$ независ.

4) т.о. послед. $X_1, X_2, \ldots$ удовл. 1-му след. из теор. Чебышева

и для нее справед.: $\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\tau_n \text{ - общ. число успехов в исп.}} - \underset{p}{m}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; P\{|\tau_n - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. $\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$

?

① Теор. Чебышева (дост. усл. вып-ти ЗБЧ для посл. сл. велич.):

Пусть
1) $X_1, X_2, \ldots$ - посл. попар. независ. случ. велич.
2) $\exists MX_i = m_i$, $\exists DX_i = \sigma_i^2$, $i \in N$
3) $\underbrace{\text{зн-я } DX_i}_{\text{дисперсии сл. вел. } X_1, X_2 \ldots}$, $i \in N$ огранич. в сов-ти, т.е. $(\exists C > 0)(\forall i \in N)(\sigma_i^2 \leq C)$

Тогда послед-ть $X_1, X_2, \ldots$ удовл. ЗБЧ

Следствие 1:

Пусть
1) вып. усл. теор. Чебышева
2) $X_1, X_2, \ldots$ - попар. независ. и один. распред. (обозн. $m \equiv m_i \equiv MX_i$)

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Д-во:

т.к. $m_i \equiv m$, то $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = m$ и исп. ЗБЧ в форме Чебышева

Следствие 2:

Пусть
1) провод. серия испыт. по сх. Бернулли с вер-ю p успеха в отдел. исп.
2) $r_n = \frac{\{\text{число успехов в серии из } n \text{ исп.}\}}{n}$ - относит. (наблюдательная) частота успеха

Тогда $r_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} p$ ~~(Бернулли теорема)~~

Д-во:

Рассм. сл. вел. X_i, $i \in N$, где $X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом исп. имел место успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Тогда

4

(1) ЗБЧ:

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ - посл. случ. велич., задан. на одном вер. пр-ве
2) $\exists MX_i = m_i$, $i \in N$

Обознач. $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $n \in N$

Посл-ть $X_1, X_2, \dots$ сл. вел. удовл. з-ну больш. чисел, если
$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (m_i = MX_i, i \in N)$

Теор. Чебышева (дост. усл. вып-ти ЗБЧ для посл. сл. величин):

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ - пос-ть попарно независ. случ. велич.
2) $\exists MX_i = m_i$, $\exists DX_i = \sigma_i^2$, $i \in N$
3) $\underbrace{\text{Зн-я } DX_i, i \in N}_{\text{дисперсии случ. велич. } X_1, X_2, \dots}$ огранич. в совокуп-ти, т.е. $(\exists C > 0)(\forall i \in N)(\sigma_i^2 \leq C)$

Тогда посл-ть $X_1, X_2, \dots$ удовл. ЗБЧ.

Д-во:

1) Рассм. $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Тогда
$M\overline{X_n} = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] \overset{\text{линейность М.О}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$

$D\overline{X_n} = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2} D[\sum_{i=1}^{n} X_i] \underset{X_i \text{ попар независ.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

2) Примен. к $\overline{X_n}$ 2-е н-во Чебышева: $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq P\{|\overline{X_n} - M\overline{X_n}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\overline{X_n}}{\varepsilon^2}$

$D\overline{X_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \leq \{\sigma_i^2 \leq C\} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n}$

Т.о. $0 \leq P\{|\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}_{D\overline{X_n} \leq \frac{C}{n}}$

$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \leq \{\sigma_i^2 \leq C\} \leq \sum_{i=1}^{n} C = nC$

$0 \leq P\{|\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{C}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$

По теор. о 2х милиционерах при $n \to \infty$
$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. посл. $X_1, X_2, \dots$ удовл. ЗБЧ

Замечание 1:

$M\bar{X}_n = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$

Выполн. з-на больших чисел для $X_1, X_2, \ldots$ (посл. сл. чисел) означ., что $\forall \varepsilon > 0$ $P\{|\bar{X}_n - M\bar{X}_n| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[x\to\infty]{} P$

При дост. больших n сл. вел. $\bar{X}_n$ приним. детерм. зн-е $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$ с близкой к 1 вер-ю.
т.о., при дост. больших n случ. вел. $\bar{X}_n$ теряет случ. характ.

Замечание 2:

Вып. з-на бол. чисел для посл. $X_1, X_2, \ldots$ означ., что посл. (н) $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i)$ при $n \to \infty$ сход. по вероят. к 0.

$\forall \varepsilon > 0$ $P\{|Y_n - 0| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

① Пусть $X_1, X_2, \dots$ - послед. случ. велич., заданных на одном вероят. пр-ве

Послед-ть $X_1, X_2, \dots$ случ. величин сходится по вероятности к случ. величине Z, если $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Обозначают: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Z$

Послед-ть $X_1, X_2, \dots$ случ. велич. слабо сходится к случ. величине Z, если послед.-ть $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots$ (н): поточечно сход. к ф-и $F_Z(x)$ во всех точках $x \in \mathbb{R}$, в соот. $F_Z(x)$ непрерывна, т.е.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ ~~ф-я $F_Z(x)$ непрерывна~~ (x - точка непр. ф-и F_Z)

$$\underbrace{F_{X_n}(x)}_{\text{числ. послед}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{F_Z(x)}_{\text{число}}$$

Обозн.: $X_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} Z$

(Здесь F_{X_i} - ф-я распр. сл. вел. X_i)
F_Z - ф-я распр. сл. вел. Z

Закон больших чисел:

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ - послед. сл. вел., зад. на одном вероят пр-ве
2) $\exists MX_i = m_i, \ i \in N$

Обозн. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \ n \in N$

Послед. $X_1, X_2, \dots$ сл. вел. удовл закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

где $m_i = MX_i, \ i \in N$

① 2-е н-во Чебышева:

Пусть 1) X - случайная величина

2) $\exists DX$ $\quad (\exists DX = M[(X-MX)^2] \Rightarrow \exists MX)$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Доказ-во:

$DX = M[(X-MX)^2] \geq$ $\{$ Рассм. случ. велич. $Y = (X-MX)^2 \geq 0$

Из 1-го н-ва Чебышева: $\forall \delta > 0 \quad P\{Y \geq \delta\} \leq \frac{MY}{\delta}$,

использ. $\delta = \varepsilon^2$ $\}$ $\geq \varepsilon^2 P\{(X-MX)^2 \geq \varepsilon^2\} = \varepsilon^2 P\{|X-MX| \geq \varepsilon\}$

т.о. $DX \geq \varepsilon^2 P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

① 1-е н-во Чебышева:

Пусть 1) X - случайная величина
2) $X \geq 0$ (т.е. $P\{X < 0\} = 0$)
3) $\exists MX$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$

Доказ-во:

ф-я плот. распр. случ. велич. X

(Для непрер. случ. вел. X) $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx =$

$= \{X \geq 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ при $x < 0\} = \int_{0}^{+\infty} x f(x)\,dx =$

по св-ву аддитивности

$= \int_{0}^{\varepsilon} \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x)\,dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x)\,dx \geq \{x \in [\varepsilon; +\infty)$

$\Rightarrow x \geq \varepsilon\} \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon f(x)\,dx = \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$

Т.о. $MX \geq \varepsilon \; P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$