

1-вариант

T1. Понятие о векторе. Линейные операции над векторами.

T2. Взаимное расположение прямой на плоскости.

A1. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны: 1) $3x - y + 5 = 0, x + 3y - 1 = 0$; 2) $3x - 4y + 1 = 0, 4x - 3y + 7 = 0$; 3) $6x - 15y + 7 = 0, 10x + 4y - 3 = 0$; 4) $9x - 12y + 5 = 0, 8x + 6y - 13 = 0$; 5) $7x - 2y + 1 = 0, 4x + 6y + 17 = 0$; Решить задачу, не вычисляя угловых коэффициентов данных прямых.

A2. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3), B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A .

A3. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости; 1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0, 2x - 3y + 5z + 3 = 0$; 2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0, 2x + y + 2z - 1 = 0$; 3) $x - 3z + 2 = 0, 2x - 6z - 7 = 0$.

B1. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

B2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, вычислить $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right)$.

B3. Составить параметрические уравнения следующих прямых: 1) $2x + 3y - z - 4 = 0, 3x - 5y + 2z + 1 = 0$; 2) $x + 2y - z - 6 = 0, 2x - y + z + 1 = 0$.

C1. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -1)$, а также уравнения высоты $3x - 4y + 27 = 0$ и биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$, проведенных из различных вершин.

C2. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}]^2 < \vec{a}^2 \vec{b}^2$; в каком случае здесь будет знак равенства?

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $5x - y - 2z - 3 = 0, 3x - 2y - 5z + 2 = 0$ перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

2-вариант

T1. Координаты вектора.

T2. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскости.

A1. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки до прямой в каждом из следующих случаев: 1) $A(2; -1), 4x + 3y + 10 = 0$; 2) $B(0; -3), 5x - 12y - 23 = 0$; 3) $P(-2; 3), 3x - 4y - 2 = 0$; 4) $Q(1; -2), x - 2y - 5 = 0$.

A2. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

A3. Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

B1. В каждом из следующих случаев составить уравнение прямой, параллельной двум данным прямым и проходящей посередине между ними: 1) $3x - 2y - 1 = 0, 3x - 2y - 13 = 0$; 2) $5x + y + 3 = 0, 5x + y - 17 = 0$; 3) $2x + 3y - 6 = 0, 4x + 6y + 17 = 0$.

B2. Доказать, что точки $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; -5)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{a}_2 = \{1; -2; 1\}$.

C1. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(4; -1)$ и уравнения двух биссектрис $x - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

C2. Доказать тождество $[\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -3), B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине C .

3-вариант

T1. Предмет и методы аналитической геометрии.

T2. Расстояние от точки до прямой. Уравнение пучка прямых.

A1. Даны вершины $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .

A2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

A3. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; -3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 4\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$; 3) прямой $x = 3t - 1, y = -2t + 3, z = 5t + 2$.

B1. Отклонения точки M от прямых $5x - 12y - 13 = 0$ и $3x - 4y - 19 = 0$ равны соответственно -3 и -5 . Определить координаты точки M .

B2. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$, Найти координаты векторных произведений: 1) $[\vec{a}, \vec{b}]$; 2) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; 3) $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

B3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$: 1) и через точку $M_1(4; -2; -3)$; 2) параллельно оси Ox ; 3) параллельно оси Oy ; 4) параллельно оси Oz .

C1. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B .

C2. Доказать, что необходимым и достаточным условием компланарности векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} является зависимость $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$, где по крайней мере одно из чисел α, β, γ не равно нулю.

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + z + 5 = 0$.

4-вариант

T1. Семейство линейно зависимых и линейно независимых векторов.

T2. Уравнении прямой на плоскости.

A1. Определить угол φ между двумя прямыми: 1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; 2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$; 3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$;

A2. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$.

A3. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

B1. Площадь треугольника $S = 3$, две его вершины суть точки $A(3; 1)$ и $B(1; -3)$, а третья вершина C лежит на оси Oy . Определить координаты вершины C .

B2. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ и $\vec{c} = \{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

B3. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ при каком значении l они пересекаются?

C1. Даны вершины треугольника $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$ и $C(-1; -2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A . (С помощью деления отрезка в данном отношении)

C2. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ перпендикулярен к вектору \vec{a} .

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{2; -1; -2\}$.

5-вариант

T1. Выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатах.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x + 2y - 9) + \beta(2x + 5y + 5) = 0$. Найти, при каком значении C прямая $4x - 3y + C = 0$ будет принадлежать этому пучку.

A2. Даны: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = 72$. Вычислить (\vec{a}, \vec{b}) .

A3. Найти точку пересечения прямой и плоскости: 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$;

2) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, $x - 2y + z - 15 = 0$; 3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

B1. Площадь треугольника $S = 3$, две его вершины суть точки $A(3; 1)$ и $B(1; -3)$, центр массе этого треугольника лежит на оси Ox . Определить координаты третьей вершины C .

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить 1) $||[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]||$; 2) $||[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]||$.

B3. Составить канонические уравнения следующих прямых: 1) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$; 2) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z + 5 = 0$; 3) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$.

C1. Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A .

C2. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ перпендикулярен к вектору \vec{a} .

C3. На плоскости Oxz найти такую точку P , разность расстояний которой до точек $M_1(3; 2; -5)$ и $M_2(8; -4; -13)$ была бы наибольшей.

6-вариант

T1. Векторное произведение и смешанное произведение векторов.

T2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

A1. Даны последовательные вершин однородной четырехугольной пластинки $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(-1; 7)$ и $D(-7; 5)$. Определить координат ее центра масс.

A2. Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$, убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

A3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данные точки: 1) $(1; -2; 1)$, $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$; 3) $(0; -2; 3)$, $(3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4)$, $(-1; 2; -4)$.

B1. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(2x + y + 1) + \beta(x - 3y - 10) = 0$. Найти прямые этого пучка, отсекающие на координатных осях отрезки равной длины (считая от начала координат).

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны; вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

B3. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла Oxy .

C1. Составить уравнения сторон треугольника ABC , зная одну его вершину $A(2; -1)$, а также уравнения высоты $7x - 10y + 1 = 0$ и биссектрисы $3x - 2y + 5 = 0$, проведенных из одной вершины. Решить задачу, не вычисляя координат вершин B и C .

C2. Какому условия должны удовлетворять векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ был перпендикулярен к вектору $\vec{a} - \vec{b}$.

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{7; 9; 17\}$.

7-вариант

T1. Скалярное произведение векторов.

T2. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой в пространстве и между двумя скрещивающимися прямыми.

A1. Центр масс однородного стержня находится в точке $M(1;4)$, один из его концов в точке $P(-2;2)$. Определить координаты точки Q - другого конца этого стержня.

A2. Даны: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$. Вычислить $|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]|$.

A3. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости: 1) $3x - 5y + lz - 3 = 0, x + 3y + 2z + 5 = 0$; 2) $5x + y - 3z - 3 = 0, 2x + ly - 3z + 1 = 0$; 3) $7x - 2y - z = 0, lx + y - 3z - 1 = 0$.

B1. Площадь треугольника $S = 4$, две его вершины суть точки $A(2;1)$ и $B(3;-2)$, а третья вершина C лежит на оси Ox . Определить координаты вершины C .

B2. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2;1;-1\}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{a}) = 3$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3;-1;4\}$.

C1. В треугольнике ABC даны уравнения высоты $AN: x + 5y - 3 = 0$, высоты $BN: x + y - 1 = 0$ и стороны $AB: x + 3y - 1 = 0$. Не определяя координат вершин и точки пересечения высот треугольника, составить уравнение двух других сторон и третьей высоты.

C2. Даны единичные векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

C3. Даны вершины треугольника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ и $C(5;1;-7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

8-вариант

T1. Преобразование декартовой системы координат на плоскости и пространстве.

T2. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой в пространстве и между двумя скрещивающимися прямыми.

A1. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$ и $C(-3;2;1)$ равнобедренный.

A2. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине B .

A3. Доказать, что прямая $x = 3t - 2, y = -4t + 1, z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

B1. Даны вершины треугольника $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$ и $M_3(3;2)$. Составить уравнения его высот.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны; вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

C1. Доказать, что прямая $2x + y + 3 = 0$ пересекает отрезок, ограниченный точками $A(-5;1)$ и $B(3;7)$.

C2. Какому условию должны удовлетворять векторы \vec{a}, \vec{b} , чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

C3. Даны вершины треугольника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$ и $C(-7;11;6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A .

9-вариант

T1. Предмет и методы аналитической геометрии.

T2. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскости.

A1. Даны вершины $M_1(3; 2; -5)$, $M_2(1; -4; 3)$ и $M_3(-3; 0; 1)$ треугольника. Найти середины его сторон.

A2. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha \vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

A3. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$; 3)

$2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$; 4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$, $16x + 12y - 15z + 25 = 0$;

B1. Вершины треугольника суть точки $A(3; 6)$, $B(-1; 3)$ и $C(2; -1)$. Вычислить длину его высоты, проведенной из вершины C . (С помощью площади треугольника)

B2. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений:

1) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$; 2) $[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}]$.

B3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

C1. На оси ординат найти такую точку P , чтобы разность расстояний ее до точек $M(-3; 2)$ и $N(2; 5)$ была наибольшей.

C2. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} связаны соотношениями $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$, $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$.

Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

C3. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

10-вариант

T1. Преобразование декартовой системы координат на плоскости и пространстве.

T2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

A1. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x + y - 1) + \beta(2x - y - 9) = 0$. Доказать, что прямая $x + 3y + 13 = 0$ принадлежит этому пучку.

A2. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису \vec{p} , \vec{q} .

A3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$.

B1. Даны три вершины параллелограмма $A(3; -5)$, $B(5; -3)$ и $C(-1; 3)$. Определить четвертую вершину D , противоположную B .

B2. Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha \vec{b}$, $\vec{a} - \alpha \vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

B3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: 1) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; 2) параллельна оси Ox ; 3) параллельна оси Oy ; 4) параллельна оси Oz .

C1. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x - 4y - 3) + \beta(2x + 3y - 1) = 0$. Написать уравнение прямой этого пучка, проходящей через центр масс однородной треугольной пластинки, вершины которой суть точки $A(-1; 2)$, $B(4; -4)$ и $C(6; -1)$.

C2. Доказать тождество $[\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

11-вариант

T1. Скалярное произведение векторов.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Точки $M(2; -1)$, $N(-1; 4)$ и $P(-2; 2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

A2. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ, \beta = 135^\circ, \gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 90^\circ, \beta = 150^\circ, \gamma = 60^\circ$?

A3. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки до плоскости в каждом из следующих случаев: 1) $M_1(-2; -4; 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$; 2) $M_2(2; -1; -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$; 3) $M_3(1; 2; -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$;

B1. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx + 8y + n = 0$, $2x + my - 1 = 0$ 1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.

B2. Вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = \{6; -8; -7, 5\}$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

B3. Доказать, что прямая $5x - 3y + 2z - 5 = 0$, $2x - y - z - 1 = 0$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

C1. Определить координаты точки O' - нового начала координат, если точка $A(3; -4)$ лежит на новой оси абсцисс, а точка $B(2; 3)$ лежит на новой оси ординат, причем оси старой и новой систем координат имеют соответственно одинаковые направления.

C2. Даны векторы $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC . Найти разложение вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD по базису \vec{b}, \vec{c} .

C3. Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

12-вариант

T1. Понятие о векторе. Линейные операции над векторами.

T2. Взаимное расположение прямой на плоскости.

A1. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого суть точки $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$ и $C(-3; 1)$. (С помощью площадью треугольника)

A2. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

A3. Привести каждое из следующих уравнений плоскостей к нормальному виду: 1) $2x - 2y + z - 18 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$; 3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; 4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$; 5) $5y - 12z + 26 = 0$;

B1. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ и делит пополам отрезок, ограниченный точками $M_1(5; -6)$ и $M_2(-1; -4)$. Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых.

B2. Даны векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = 4$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

C1. Стороны треугольника лежат на прямых $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Вычислить его площадь S .

C2. Даны единичные векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} , удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

C3. Найти точку Q , симметричную точке $P(4; 1; 6)$ относительно прямой $x - y - 4z + 12 = 0$, $2x + y - 2z + 3 = 0$.

13-вариант

T1. Выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатах.

T2. Уравнении прямой на плоскости.

A1. Определить, при каких значениях m и n прямая $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный -3 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.

A2. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если 1) $a = \{2; 3; -1\}$, $b = \{1; -1; 3\}$, $c = \{1; 9; -11\}$; 2) $a = \{3; -2; 1\}$, $b = \{2; 1; 2\}$, $c = \{3; -1; -2\}$; 3) $a = \{2; -1; 2\}$, $b = \{1; 2; -3\}$, $c = \{3; -4; 7\}$.

A3. Доказать перпендикулярность прямых: 1) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $3x + y - 5z + 1 = 0, 2x + 3y - 8z + 3 = 0$; 2) $x = 2t + 1, y = 3t - 2, z = -6t + 1$ и $2x + y - 4z + 2 = 0, 4x - y - 5z + 4 = 0$; 3) $x + y - 3z - 1 = 0, 2x - y - 9z - 2 = 0$ и $2x + y + 2z + 5 = 0, 2x - 2y - z + 2 = 0$

B1. Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

B2. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$, Найти координаты векторных произведений:

1) $[\vec{a}, \vec{b}]$; 2) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; 3) $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

B3. Доказать, что прямая $5x - 3y + 2z - 5 = 0, 2x - y - z - 1 = 0$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

C1. Точка $A(-4; 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

C2. Даны векторы $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC . Найти разложение вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD по базису \vec{b}, \vec{c} .

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $5x - y - 2z - 3 = 0, 3x - 2y - 5z + 2 = 0$ перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

14-вариант

T1. Векторное произведение и смешанное произведение векторов.

T2. Расстояние от точки до прямой. Уравнение пучка прямых.

A1. Даны вершины треугольника $A(1; -3), B(3; -5)$ и $C(-5; 7)$. Определить середины его сторон.

A2. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha \vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

A3. Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до следующих прямых: 1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$; 2) $x = t + 1, y = t + 2, z = 4t + 13$.

B1. Отрезок, ограниченный точками $A(1; -3)$ и $B(4; 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

B2. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; -5)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{a}_2 = \{1; -2; 1\}$.

C1. Последовательные вершины четырехугольника суть точки $A(-3; 5), B(-1; -4), C(7; -1)$ и $D(2; 9)$. Установить, является ли этот четырехугольник выпуклым.

C2. Доказать, что необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является зависимость $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$, где по крайней мере одно из чисел α, β, γ не равно нулю.

C3. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

15-вариант

T1. Координаты вектора.

T2. Взаимное расположение прямой на плоскости.

A1. Даны точки $A(1; -2; -3)$, $B(2; -3; 0)$, $C(3; 1; -9)$, $D(-1; 1; -12)$. Вычислить расстояние между: 1) A и C ; 2) B и D ; 3) C и D .

A2. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$.

A3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси Ox ; 4) оси Oy ; 5) оси Oz .

B1. Найти точку Q , симметричную точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

B2. Вектор \vec{c} перпендикулярен к векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

B3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

C1. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника.

C2. Доказать тождество $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$, где λ и μ — какие угодно числа.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

16-вариант

T1. Семейство линейно зависимых и линейно независимых векторов.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки: а) $M_1(2; -5)$, $M_2(3; 2)$; б) $P(-3; 1)$, $Q(7; 8)$; в) $A(5; -3)$, $B(-1; 6)$.

A2. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису \vec{p} , \vec{q} .

A3. Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

B1. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$ и 1) проходящей через точку $A(3; -1)$; 2) проходящей через начало координат; 3) параллельной оси Ox ; 4) параллельной оси Oy ; 5) параллельной прямой $4x + 3y + 5 = 0$; 6) перпендикулярной к прямой $2x + 3y + 7 = 0$.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить 1) $||\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}||$; 2) $||3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}||$.

B3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$: 1) и через точку $M_1(4; -2; -3)$; 2) параллельно оси Ox ; 3) параллельно оси Oy ; 4) параллельно оси Oz .

C1. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x + 2y - 11 = 0$ и $3x - 6y - 5 = 0$, в котором лежит точка $M(1; -3)$.

C2. Доказать, что $|([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})| < |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}|$; в каком случае здесь может иметь место знак равенства?

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{7; 9; 17\}$.

17-вариант

T1. Векторное произведение и смешанное произведение векторов.

T2. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой в пространстве и между двумя скрещивающимися прямыми.

A1. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных прямых: 1) $3x - y + 7 = 0$, $3x - y - 3 = 0$; 2) $x - 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$; 3) $5x - 2y - 6 = 0$, $10x - 4y + 3 = 0$.

A2. Установить, компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , если 1) $a = \{2; 3; -1\}$, $b = \{1; -1; 3\}$, $c = \{1; 9; -11\}$; 2) $a = \{3; -2; 1\}$, $b = \{2; 1; 2\}$, $c = \{3; -1; -2\}$; 3) $a = \{2; -1; 2\}$, $b = \{1; 2; -3\}$, $c = \{3; -4; 7\}$.

A3. Составить уравнение плоскости, которая проходит: 1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox ; 2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy ; 3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz .

B1. Даны две точки $P(2; 3)$ и $Q(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку \overline{PQ} .

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 2\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) (\vec{a}, \vec{b}) ; 2) \vec{a}^2 ; 3) \vec{b}^2 ; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

B3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: 1) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; 2) параллельна оси Ox ; 3) параллельна оси Oy ; 4) параллельна оси Oz .

C1. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $2x - 3y - 5 = 0$, $6x - 4y + 7 = 0$, смежного с углом, содержащим точку $C(2; -1)$.

C2. Какому условию должны удовлетворять векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ был перпендикулярен к вектору $\vec{a} - \vec{b}$.

C3. Даны вершины треугольника $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ и $C(5; 1; -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

18-вариант

T1. Преобразование декартовой системы координат на плоскости и пространстве.

T2. Уравнении прямой на плоскости.

A1. Даны точки $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$. Определить: координаты точки M , симметричной точке A относительно точки B ; координаты точки N , симметричной точке B относительно точки A .

A2. Даны: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $|(\vec{a}, \vec{b})| = 72$. Вычислить (\vec{a}, \vec{b}) .

A3. Найти точку пересечения прямой и плоскости: 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$; 2) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, $x - 2y + z - 15 = 0$; 3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

B1. Определить точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.

B2. Даны векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = 4$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

C1. На оси абсцисс найти такую точку P , чтобы сумма ее расстояний до точек $M(1; 2)$ и $N(3; 4)$ была наименьшей.

C2. Доказать, что $|([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})| < |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$; в каком случае здесь может иметь место знак равенства?

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{2; -1; -2\}$.

19-вариант

T1. Скалярное произведение векторов.

T2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

A1. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.

A2. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

A3. Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

B1. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 2\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) (\vec{a}, \vec{b}) ; 2) \vec{a}^2 ; 3) \vec{b}^2 ; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

B3. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла Oxy .

C1. Даны две вершины $A(3; -1)$ и $B(5; 7)$ треугольника ABC и точка $N(4; -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

C2. Доказать, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$, компланарны.

C3. Даны вершины треугольника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A .

20-вариант

T1. Выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатах.

T2. Расстояние от точки до прямой. Уравнение пучка прямых.

A1. Установить, лежат ли точка $M(1; -3)$ и начало координат по одну или по разные стороны каждой из следующих прямых: 1) $2x - y + 5 = 0$; 2) $x - 3y - 5 = 0$; 3) $3x + 2y - 1 = 0$; 4) $x - 3y + 2 = 0$; 5) $10x + 24y + 15 = 0$.

A2. Даны: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$. Вычислить $||[\vec{a}, \vec{b}]||$.

A3. Привести каждое из следующих уравнений плоскостей к нормальному виду: 1) $2x - 2y + z - 18 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$; 3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; 4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$; 5) $5y - 12z + 26 = 0$;

B1. Даны вершины треугольника $A(1; -1; -3)$, $B(2; 1; -2)$ и $C(-5; 2; -6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A .

B2. Вектор \vec{c} перпендикулярен к векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

B3. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ при каком значении l они пересекаются?

C1. На прямой $3x - y - 1 = 0$ найти такую точку P , разность расстояний которой до точек $A(4; 1)$ и $B(0; 4)$ была бы наибольшей.

C2. Доказать, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$, компланарны.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -3)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине C .

21-вариант

T1. Координаты вектора.

T2. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскости.

A1. Даны концы $A(3; -5)$ и $B(-1; 1)$ однородного стержня. Определить координаты его центра масс.

A2. Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$, убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

A3. Доказать, что прямая $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

B1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2; 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(5; -1)$ и $B(3; 7)$.

B2. Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha \vec{b}$, $\vec{a} - \alpha \vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

B3. Составить канонические уравнения следующих прямых: 1) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$; 2) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z + 5 = 0$; 3) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$.

C1. Составить уравнения сторон треугольника ABC , если даны одна из его вершин $A(1; 3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

C2. Какому условию должны удовлетворять векторы \vec{a} , \vec{b} , чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + z + 5 = 0$.

22-вариант

T1. Предмет и методы аналитической геометрии.

T2. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскости.

A1. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) $A(2; -3)$, $B(3; 2)$ и $C(-2; 5)$; 2) $M_1(-3; 2)$, $M_2(5; -2)$ и $M_3(1; 3)$; 3) $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$ и $P(4; 5)$.

A2. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

A3. Составить уравнение плоскости, которая проходит: 1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox ; 2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy ; 3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz .

B1. Даны три вершины $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ и $C(0; 5)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D .

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 2\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить: 1) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; 2) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]^2$; 3) $[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}]^2$.

B3. Составить параметрические уравнения следующих прямых: 1) $2x + 3y - z - 4 = 0$, $3x - 5y + 2z + 1 = 0$; 2) $x + 2y - z - 6 = 0$, $2x - y + z + 1 = 0$.

C1. Площадь треугольника $S = 8$, две его вершины суть точки $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$. Определить координаты вершины C .

C2. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}]^2 < \vec{a}^2 \vec{b}^2$; в каком случае здесь будет знак равенства?

C3. Найти точку Q , симметричную точке $P(4; 1; 6)$ относительно прямой $x - y - 4z + 12 = 0$, $2x + y - 2z + 3 = 0$.

23-вариант

T1. Семейство линейно зависимых и линейно независимых векторов.

T2. Взаимное расположение прямой на плоскости.

A1. Привести общее уравнение прямой к нормальному виду в каждом из следующих случаев: 1) $4x - 3y - 10 = 0$; 2) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$; 3) $12x - 5y + 13 = 0$; 4) $x + 2 = 0$; 5) $2x - y - \sqrt{5} = 0$.

A2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5$, вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси Ox ; 4) оси Oy ; 5) оси Oz .

B1. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x - 2y - 5 = 0, 2x + 3y + 7 = 0$ и одна из его вершин $A(-2; 1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

B2. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ и $\vec{c} = \{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

B3. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла Oxy .

C1. Написать формулы преобразования координат, если точка $M_1(2; -3)$ лежит на новой оси абсцисс, а точка $M_2(1; -7)$ лежит на новой оси ординат, причем оси старой и новой систем координат имеют соответственно одинаковые направления.

C2. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2}$ перпендикулярен к вектору \vec{a} .

C3. На плоскости Oxz найти такую точку P , разность расстояний которой до точек $M_1(3; 2; -5)$ и $M_2(8; -4; -13)$ была бы наибольшей.

24-вариант

T1. Понятие о векторе. Линейные операции над векторами.

T2. Расстояние от точки до прямой. Уравнение пучка прямых.

A1. Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$ 1) параллельна оси абсцисс; 2) параллельна оси ординат; 3) проходит через начало координат. В каждом случае написать уравнение прямой.

A2. Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ и $C(3; -2; 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B .

A3. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между параллельными плоскостями: 1) $x - 2y - 2z - 12 = 0, x - 2y - 2z - 6 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0, 4x - 6y + 12z + 21 = 0$; 3) $2x - y + 2z + 9 = 0, 4x - 2y + 4z - 21 = 0$; 4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0, 16x + 12y - 15z + 25 = 0$;

B1. Определить, при каком значении m две прямые $\begin{matrix} mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0 \\ (2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0 \end{matrix}$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.

B2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, вычислить $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

C1. Стороны треугольника даны уравнениями $4x - y - 7 = 0, x + 3y - 31 = 0, x + 5y - 7 = 0$. Определить точку пересечения его высот.

C2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} связаны соотношениями $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}], [\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

C3. Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}, \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

25-вариант

T1. Скалярное произведение векторов.

T2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

A1. Даны последовательные вершины $A(2; 3)$, $B(0; 6)$, $C(-1; 5)$, $D(0; 1)$ и $E(1; 1)$ однородной пятиугольной пластинки. Определить координаты ее центра масс.

A2. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A .

A3. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки до плоскости в каждом из следующих случаев: 1) $M_1(-2; -4; 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$; 2) $M_2(2; -1; -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$; 3) $M_3(1; 2; -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$;

B1. Даны вершины треугольника $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ и $C(-4; 7; 5)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .

B2. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$.

B3. Составить канонические уравнения следующих прямых: 1) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$; 2) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z + 5 = 0$; 3) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$.

C1. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

C2. Доказать тождество $([\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}], \vec{c} + \vec{a}) = 2([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + z + 5 = 0$.

26-вариант

T1. Векторное произведение и смешанное произведение векторов.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Определить угол φ , образованный двумя прямыми: 1) $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$; 2) $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0$, $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$; 3) $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$, $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$. Решить задачу, не вычисляя угловых коэффициентов данных прямых.

A2. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

A3. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

B1. Определить, лежат ли точки $M(2; 3)$ и $N(5; -1)$ в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных при пересечении двух прямых: 1) $x - 3y - 5 = 0$, $2x + 9y - 2 = 0$; 2) $2x + 7y - 5 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$; 3) $12x + y - 1 = 0$, $13x + 2y - 5 = 0$.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 2\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить: 1) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; 2) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]^2$; 3) $[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}]^2$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; -5)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{a}_2 = \{1; -2; 1\}$.

C1. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(1; 0)$.

C2. Доказать тождество $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$, где λ и μ — какие угодно числа.

C3. Даны вершины треугольника $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ и $C(5; 1; -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

27-вариант

T1. Выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатах.

T2. Уравнении прямой на плоскости.

A1. Точки P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 расположены на прямой $3x - 2y - 6 = 0$; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, -2 и -6. Определить ординаты этих точек.

A2. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

A3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данные точки: 1) $(1; -2; 1), (3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0), (1; 0, -3)$; 3) $(0; -2; 3), (3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4), (-1; 2; -4)$.

B1. Центр пучка прямых $\alpha(2x - 3y + 20) + \beta(3x + 5y - 27) = 0$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $x + 7y - 16 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

B2. Векторы a и b образует угол $\varphi = \pi/6$; зная, что $|a| = \sqrt{3}, |b| = 1$, вычислить угол α между векторами $p = a + b$ и $q = a - b$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3; -1; 2), M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

C1. Даны вершины треугольника $A(1; 4), B(3; -9)$ и $C(-5; 2)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B . (С помощью деление отрезка в данном отношении)

C2. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2}$ перпендикулярен к вектору \vec{a} .

C3. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -3), B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине C .

28-вариант

T1. Преобразование декартовой системы координат на плоскости и пространстве.

T2. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой в пространстве и между двумя скрещивающимися прямыми.

A1. Определить, при каких значениях a и b две прямые $ax - 2y - 1 = 0$, $6x - 4y - b = 0$ 1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают.

A2. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3 \vec{j} + 2 \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2 \vec{j} - \alpha \vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

A3. Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0, 2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

B1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0, 2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

B2. Доказать, что точки $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

B3. Составить параметрические уравнения следующих прямых: 1) $2x + 3y - z - 4 = 0, 3x - 5y + 2z + 1 = 0$; 2) $x + 2y - z - 6 = 0, 2x - y + z + 1 = 0$.

C1. Даны вершины треугольника $A(2; -5), B(1; -2)$ и $C(4; 7)$. Найти точку пересечения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B со стороной AC . (С помощью деление отрезка в данном отношении)

C2. Доказать тождество $([\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}], \vec{c} + \vec{a}) = 2([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $5x - 2y - z - 3 = 0, x + 3y - 2z + 5 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{7; 9; 17\}$.

29-вариант

T1. Понятие о векторе. Линейные операции над векторами.

T2. Взаимное расположение прямой на плоскости.

A1. Определить, какие из точек $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$ и какие не лежат на ней.

A2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, вычислить $|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]|$

A3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$.

B1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 7y - 8 = 0$, $3x + 2y + 5 = 0$ под углом 45° к прямой $2x + 3y - 7 = 0$. Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых.

B2. Вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = \{6; -8; -7, 5\}$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

B3. Доказать, что прямая $5x - 3y + 2z - 5 = 0$, $2x - y - z - 1 = 0$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

C1. В треугольнике ABC даны: уравнение стороны $AB : 5x - 3y + 2 = 0$, уравнения высот $AM : 4x - 3y + 1 = 0$ и $BN : 7x + 2y - 22 = 0$. Составить уравнения двух других сторон и третьей высоты этого треугольника.

C2. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $5x - y - 2z - 3 = 0$, $3x - 2y - 5z + 2 = 0$ перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

30-вариант

T1. Семейство линейно зависимых и линейно независимых векторов.

T2. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой в пространстве и между двумя скрещивающимися прямыми.

A1. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Определить угловой коэффициент k прямой: параллельной данной прямой; перпендикулярно к данной прямой.

A2. Даны: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$. Вычислить $|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]|$.

A3. Доказать перпендикулярность прямых: 1) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $3x + y - 5z + 1 = 0$, $2x + 3y - 8z + 3 = 0$; 2) $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = -6t + 1$ и $2x + y - 4z + 2 = 0$, $4x - y - 5z + 4 = 0$; 3) $x + y - 3z - 1 = 0$, $2x - y - 9z - 2 = 0$ и $2x + y + 2z + 5 = 0$, $2x - 2y - z + 2 = 0$

B1. Даны две вершины $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4; -1; 7)$. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

B2. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[\vec{AB}, \vec{BC}]$; 2) $[\vec{BC} - 2\vec{CA}, \vec{CB}]$.

B3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: 1) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; 2) параллельна оси Ox ; 3) параллельна оси Oy ; 4) параллельна оси Oz .

C1. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; 6)$, а также уравнения высоты $x - 7y + 15 = 0$ и биссектрисы $7x + y + 5 = 0$, проведенных из одной вершины.

C2. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$

C3. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

31-вариант

T1. Предмет и методы аналитической геометрии.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Даны точки $A(1; -2; -3)$, $B(2; -3; 0)$, $C(3; 1; -9)$, $D(-1; 1; -12)$. Вычислить расстояние между: 1) A и C ; 2) B и D ; 3) C и D .

A2. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

A3. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости: 1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$; 2) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$; 3) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

B1. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3; 5)$, $B(1; 7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1; 1)$. Определить две другие вершины.

B2. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2; 1; -1\}$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x}, \vec{a}) = 3$.

B3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$: 1) и через точку $M_1(4; -2; -3)$; 2) параллельно оси Ox ; 3) параллельно оси Oy ; 4) параллельно оси Oz .

C1. Даны точки $M_1(9; -3)$ и $M_2(-6; 5)$. Начало координат перенесено в точку M_1 , а координатные оси повернуты так, что положительное направление новой оси абсцисс совпадает с направлением отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$. Вывести формулы преобразования координат.

C2. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} связаны соотношениями $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$, $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

C3. Найти точку Q , симметричную точке $P(4; 1; 6)$ относительно прямой $x - y - 4z + 12 = 0$, $2x + y - 2z + 3 = 0$.

32-вариант

T1. Координаты вектора.

T2. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскости.

A1. Даны вершины треугольника $A(1; -3)$, $B(3; -5)$ и $C(-5; 7)$. Определить середины его сторон.

A2. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

A3. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости: 1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$; 2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$; 3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

B1. Найти проекцию точки $P(-6; 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

B2. Векторы a и b образует угол $\varphi = \pi/6$; зная, что $|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 1$, вычислить угол α между векторами $p = a + b$ и $q = a - b$.

B3. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ при каком значении l они пересекаются?

C1. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение его диагонали $3x + 7y - 10 = 0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.

C2. Доказать тождество $[\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

33-вариант

T1. Предмет и методы аналитической геометрии.

T2. Уравнении прямой на плоскости.

A1. Точки P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 расположены на прямой $3x - 2y - 6 = 0$; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, -2 и -6. Определить ординаты этих точек.

A2. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A .

A3. Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до следующих прямых: 1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$; 2) $x = t + 1, y = t + 2, z = 4t + 13$.

B1. Определить, лежит ли точка $M(-3; 2)$ внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$, $4x - y - 31 = 0$.

B2. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ и $\vec{c} = \{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

B3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

C1. Даны вершины треугольника $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ и $C(-2; 0)$. Составить уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A .

C2. Доказать, что $|([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})| < |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}|$; в каком случае здесь может иметь место знак равенства?

C3. Даны вершины треугольника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A .

34-вариант

T1. Координаты вектора.

T2. Расстояние от точки до прямой. Уравнение пучка прямых.

A1. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) $A(2; -3)$, $B(3; 2)$ и $C(-2; 5)$; 2) $M_1(-3; 2)$, $M_2(5; -2)$ и $M_3(1; 3)$; 3) $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$ и $P(4; 5)$.

A2. Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$, убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

A3. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; -3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 4\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$; 3) прямой $x = 3t - 1, y = -2t + 3, z = 5t + 2$.

B1. Даны середины сторон треугольника $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$ и $M_3(3; -4)$. Составить уравнение его сторон.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, вычислить 1) $|\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}|$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.

C1. Три вершины параллелограмма суть точки $A(3; 7)$, $B(2; -3)$ и $C(-1; 4)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .

C2. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

C3. На плоскости Oxz найти такую точку P , разность расстояний которой до точек $M_1(3; 2; -5)$ и $M_2(8; -4; -13)$ была бы наибольшей.

35-вариант

- T1. Выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатах.
T2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
- A1. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x + y - 1) + \beta(2x - y - 9) = 0$. Доказать, что прямая $x + 3y + 13 = 0$ принадлежит этому пучку.
A2. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису \vec{p} , \vec{q} .
A3. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; -3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 4\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$; 3) прямой $x = 3t - 1, y = -2t + 3, z = 5t + 2$.
- B1. Определить, лежит ли начало координат внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $7x - 5y - 11 = 0$, $8x + 3y + 31 = 0$, $x + 8y - 19 = 0$.
B2. Доказать, что точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.
B3. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ от координатного угла Oxy .
- C1. Даны две вершины треугольника $M_1(-10; 2)$ и $M_2(6; 4)$; его высоты пересекаются в точке $N(5; 2)$. Определить координаты третьей вершины M_3 .
C2. Доказать тождество $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$, где λ и μ — какие угодно числа.
C3. Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

36-вариант

- T1. Векторное произведение и смешанное произведение векторов.
T2. Расстояние от точки до прямой. Уравнение пучка прямых.
- A1. Даны концы $A(3; -5)$ и $B(-1; 1)$ однородного стержня. Определить координаты его центра масс.
A2. Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ и $C(3; -2; 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B .
A3. В каждом из следующих случаев вычислить расстояние между параллельными плоскостями: 1) $x - 2y - 2z - 12 = 0, x - 2y - 2z - 6 = 0$; 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0, 4x - 6y + 12z + 21 = 0$; 3) $2x - y + 2z + 9 = 0, 4x - 2y + 4z - 21 = 0$; 4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0, 16x + 12y - 15z + 25 = 0$;
B1. Определить, при каком значении m две прямые $(m-1)x + my - 5 = 0$, $mx + (2m-1)y + 7 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на ось абсцисс.
B2. Даны векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = 4$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.
B3. Составить параметрические уравнения следующих прямых: 1) $2x + 3y - z - 4 = 0, 3x - 5y + 2z + 1 = 0$; 2) $x + 2y - z - 6 = 0, 2x - y + z + 1 = 0$.
- C1. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $B(-4; -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$.
C2. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2}$ перпендикулярен к вектору \vec{a} .
C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0, x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{2; -1; -2\}$.

37-вариант

T1. Преобразование декартовой системы координат на плоскости и пространстве.

T2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

A1. Определить, какие из точек $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$ и какие не лежат на ней.

A2. Установить, компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , если 1) $a = \{2; 3; -1\}$, $b = \{1; -1; 3\}$, $c = \{1; 9; -11\}$; 2) $a = \{3; -2; 1\}$, $b = \{2; 1; 2\}$, $c = \{3; -1; -2\}$; 3) $a = \{2; -1; 2\}$, $b = \{1; 2; -3\}$, $c = \{3; -4; 7\}$.

A3. Составить уравнение плоскости, которая проходит: 1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox ; 2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy ; 3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz .

B1. Найти проекцию точки $P(-6; 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

B2. Вектор \vec{c} перпендикулярен к векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right)$.

B3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$: 1) и через точку $M_1(4; -2; -3)$; 2) параллельно оси Ox ; 3) параллельно оси Oy ; 4) параллельно оси Oz .

C1. На прямой $2x - y - 5 = 0$ найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-7; 1)$, $B(-5; 5)$ была бы наименьшей.

C2. Даны векторы $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC . Найти разложение вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD по базису \vec{b} , \vec{c} .

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + z + 5 = 0$.

38-вариант

T1. Семейство линейно зависимых и линейно независимых векторов.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого суть точки $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$ и $C(-3; 1)$. (С помощью площадью треугольника)

A2. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$.

A3. Найти точку пересечения прямой и плоскости: 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$; 2) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, $x - 2y + z - 15 = 0$; 3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$, $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

B1. Определить, при каком значении m две прямые $(m-1)x + my - 5 = 0$, $mx + (2m-1)y + 7 = 0$ пересекаются в точке, лежащей на ось абсцисс.

B2. Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[\vec{AB}, \vec{BC}]$; 2) $[\vec{BC} - 2\vec{CA}, \vec{CB}]$.

B3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

C1. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1; 3)$ и $C(6; 2)$. Составить уравнения его сторон.

C2. Доказать тождество $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$, где λ и μ — какие угодно числа.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -3)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине C .

39-вариант

T1. Понятие о векторе. Линейные операции над векторами.

T2. Взаимное расположение прямой на плоскости.

A1. Привести общее уравнение прямой к нормальному виду в каждом из следующих случаев: 1) $4x - 3y - 10 = 0$; 2) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$; 3) $12x - 5y + 13 = 0$; 4) $x + 2 = 0$; 5) $2x - y - \sqrt{5} = 0$.

A2. Даны: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = 72$. Вычислить (\vec{a}, \vec{b}) .

A3. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости: 1) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$; 2) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$; 3) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

B1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

B2. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; 4; -5)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = \{3; 1; -1\}$ и $\vec{a}_2 = \{1; -2; 1\}$.

C1. Точка $A(-4; 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

C2. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} связаны соотношениями $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$, $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $5x - y - 2z - 3 = 0$, $3x - 2y - 5z + 2 = 0$ перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

40-вариант

T1. Скалярное произведение векторов.

T2. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскости.

A1. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3; -1; 2)$, $B(0; -4; 2)$ и $C(-3; 2; 1)$ равнобедренный.

A2. Вычислить косинус угла, образованного векторами $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$.

A3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$.

B1. Точка $A(2; -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

B2. Даны векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ и $|\vec{c}| = 4$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

B3. Составить канонические уравнения следующих прямых: 1) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$; 2) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z + 5 = 0$; 3) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$.

C1. Последовательные вершины четырехугольника суть точки $A(-3; 5)$, $B(-1; -4)$, $C(7; -1)$ и $D(2; 9)$. Установить, является ли этот четырехугольник выпуклым.

C2. Доказать тождество $([\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}], \vec{c} + \vec{a}) = 2([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{2; -1; -2\}$.

41-вариант

T1. Выражение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов в координатах.

T2. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой в пространстве и между двумя скрещивающимися прямыми.

A1. Определить угол φ между двумя прямыми: 1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; 2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$; 3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$;

A2. Установить, компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , если 1) $a = \{2; 3; -1\}$, $b = \{1; -1; 3\}$, $c = \{1; 9; -11\}$; 2) $a = \{3; -2; 1\}$, $b = \{2; 1; 2\}$, $c = \{3; -1; -2\}$; 3) $a = \{2; -1; 2\}$, $b = \{1; 2; -3\}$, $c = \{3; -4; 7\}$.

A3. Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

B1. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $2x + y - 2 = 0$, $x - 5y - 23 = 0$ и делит пополам отрезок, ограниченный точками $M_1(5; -6)$ и $M_2(-1; -4)$. Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны; вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\pi/3$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

B3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: 1) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; 2) параллельна оси Ox ; 3) параллельна оси Oy ; 4) параллельна оси Oz .

C1. Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A .

C2. Даны единичные векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Вычислить $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

C3. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $5x - 2y - z - 3 = 0$, $x + 3y - 2z + 5 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = \{7; 9; 17\}$.

42-вариант

T1. Координаты вектора.

T2. Уравнении прямой на плоскости.

A1. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x + 2y - 9) + \beta(2x + 5y + 5) = 0$. Найти, при каком значении C прямая $4x - 3y + C = 0$ будет принадлежать этому пучку.

A2. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Определить его внешний угол при вершине A .

A3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данные точки: 1) $(1; -2; 1)$, $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$, $(1; 0; -3)$; 3) $(0; -2; 3)$, $(3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4)$, $(-1; 2; -4)$.

B1. Отрезок, ограниченный точками $A(1; -3)$ и $B(4; 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 2\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить: 1) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; 2) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]^2$; 3) $[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}]^2$.

B3. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ при каком значении l они пересекаются?

C1. Стороны треугольника лежат на прямых $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Вычислить его площадь S .

C2. Доказать, что необходимым и достаточным условием компланарности векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} является зависимость $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$, где по крайней мере одно из чисел α, β, γ не равно нулю.

C3. Найти точку Q , симметричную точке $P(4; 1; 6)$ относительно прямой $x - y - 4z + 12 = 0$, $2x + y - 2z + 3 = 0$.

43-вариант

T1. Понятие о векторе. Линейные операции над векторами.

T2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

A1. Даны последовательные вершины $A(2; 3), B(0; 6), C(-1; 5), D(0; 1)$ и $E(1; 1)$ однородной пятиугольной пластинки. Определить координаты ее центра масс.

A2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = \pi/6$. Зная, что $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5$, вычислить $\left| \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \right|$

A3. Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до следующих прямых: 1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$; 2) $x = t + 1, y = t + 2, z = 4t + 13$.

B1. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$ и 1) проходящей через точку $A(3; -1)$; 2) проходящей через начало координат; 3) параллельной оси Ox ; 4) параллельной оси Oy ; 5) параллельной прямой $4x + 3y + 5 = 0$; 6) перпендикулярной к прямой $2x + 3y + 7 = 0$.

B2. На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ и $\vec{c} = \{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

B3. Доказать, что прямая $5x - 3y + 2z - 5 = 0, 2x - y - z - 1 = 0$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

C1. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(3x - 4y - 3) + \beta(2x + 3y - 1) = 0$. Написать уравнение прямой этого пучка, проходящей через центр масс однородной треугольной пластинки, вершины которой суть точки $A(-1; 2), B(4; -4)$ и $C(6; -1)$.

C2. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$, компланарны.

C3. Даны вершины треугольника $A(1; -2; -4), B(3; 1; -3)$ и $C(5; 1; -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

44-вариант

T1. Векторное произведение и смешанное произведение векторов.

T2. Уравнении прямой на плоскости.

A1. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных прямых: 1) $3x - y + 7 = 0, 3x - y - 3 = 0$; 2) $x - 2y + 3 = 0, x - 2y + 7 = 0$; 3) $5x - 2y - 6 = 0, 10x - 4y + 3 = 0$.

A2. Даны: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 26$ и $||\vec{a}, \vec{b}|| = 72$. Вычислить (\vec{a}, \vec{b}) .

A3. Доказать, что прямая $x = 3t - 2, y = -4t + 1, z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

B1. Определить, лежат ли точки $M(2; 3)$ и $N(5; -1)$ в одном, в смежных или вертикальных углах, образованных при пересечении двух прямых: 1) $x - 3y - 5 = 0, 2x + 9y - 2 = 0$; 2) $2x + 7y - 5 = 0, x + 3y + 7 = 0$; 3) $12x + y - 1 = 0, 13x + 2y - 5 = 0$.

B2. Доказать, что точки $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

B3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

C1. Определить координаты точки O' - нового начала координат, если точка $A(3; -4)$ лежит на новой оси абсцисс, а точка $B(2; 3)$ лежит на новой оси ординат, причем оси старой и новой систем координат имеют соответственно одинаковые направления.

C2. Даны векторы $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC . Найти разложение вектора, приложенного к вершине B этого треугольника и совпадающего с его высотой BD по базису \vec{b}, \vec{c} .

C3. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

45-вариант

T1. Преобразование декартовой системы координат на плоскости и пространстве.

T2. Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой в пространстве и между двумя скрещивающимися прямыми.

A1. Даны последовательные вершин однородной четырехугольной пластинки $A(2;1)$, $B(5;3)$, $C(-1;7)$ и $D(-7;5)$. Определить координат ее центра масс.

A2. Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$, убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

A3. Привести каждое из следующих уравнений плоскостей к нормальному виду: 1) $2x - 2y + z - 18 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$; 3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; 4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$; 5) $5y - 12z + 26 = 0$;

B1. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

B2. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

B3. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

C1. На оси абсцисс найти такую точку P , чтобы сумма ее расстояний до точек $M(1;2)$ и $N(3;4)$ была наименьшей.

C2. Доказать, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$, компланарны.

C3. На плоскости Oxz найти такую точку P , разность расстояний которой до точек $M_1(3;2;-5)$ и $M_2(8;-4;-13)$ была бы наибольшей.

46-вариант

T1. Семейство линейно зависимых и линейно независимых векторов.

T2. Взаимное расположение прямой на плоскости.

A1. Точки $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ и $P(-2;2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

A2. Даны вершины треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине B .

A3. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$?

B1. Определить, лежит ли точка $M(-3;2)$ внутри или вне треугольника, стороны которого даны уравнениями $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$, $4x - y - 31 = 0$.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить 1) $|\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}|$.

B3. Составить параметрические уравнения следующих прямых: 1) $2x + 3y - z - 4 = 0$, $3x - 5y + 2z + 1 = 0$; 2) $x + 2y - z - 6 = 0$, $2x - y + z + 1 = 0$.

C1. На прямой $2x - y - 5 = 0$ найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-7;1)$, $B(-5;5)$ была бы наименьшей.

C2. Доказать тождество $[\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}, \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$.

C3. Даны вершины треугольника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$ и $C(-7;11;6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A .

47-вариант

T1. Скалярное произведение векторов.

T2. Расстояние от точки до прямой. Уравнение пучка прямых.

A1. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны: 1) $3x - y + 5 = 0, x + 3y - 1 = 0$; 2) $3x - 4y + 1 = 0, 4x - 3y + 7 = 0$; 3) $6x - 15y + 7 = 0, 10x + 4y - 3 = 0$; 4) $9x - 12y + 5 = 0, 8x + 6y - 13 = 0$; 5) $7x - 2y + 1 = 0, 4x + 6y + 17 = 0$; Решить задачу, не вычисляя угловых коэффициентов данных прямых.

A2. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ, \beta = 135^\circ, \gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 90^\circ, \beta = 150^\circ, \gamma = 60^\circ$?

A3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно: 1) вектору $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; 3) оси Ox ; 4) оси Oy ; 5) оси Oz .

B1. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.

B2. Дано, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

B3. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая: 1) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; 2) параллельна оси Ox ; 3) параллельна оси Oy ; 4) параллельна оси Oz .

C1. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(4; -1)$ и уравнения двух биссектрис $x - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

C2. Какому условию должны удовлетворять векторы \vec{a}, \vec{b} , чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

C3. Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}, \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

48-вариант

T1. Предмет и методы аналитической геометрии.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки до прямой в каждом из следующих случаев: 1) $A(2; -1), 4x + 3y + 10 = 0$; 2) $B(0; -3), 5x - 12y - 23 = 0$; 3) $P(-2; 3), 3x - 4y - 2 = 0$; 4) $Q(1; -2), x - 2y - 5 = 0$.

A2. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9; 4\}$ по базису \vec{p}, \vec{q} .

A3. Вычислить величину отклонения δ и расстояние d от точки до плоскости в каждом из следующих случаев: 1) $M_1(-2; -4; 3), 2x - y + 2z + 3 = 0$; 2) $M_2(2; -1; -1), 16x - 12y + 15z - 4 = 0$; 3) $M_3(1; 2; -3), 5x - 3y + z + 4 = 0$;

B1. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3; 5), B(1; 7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1; 1)$. Определить две другие вершины.

B2. Дано, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{a} - \alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

B3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - y + 2z + 9 = 0, x + z - 3 = 0$: 1) и через точку $M_1(4; -2; -3)$; 2) параллельно оси Ox ; 3) параллельно оси Oy ; 4) параллельно оси Oz .

C1. В треугольнике ABC даны: уравнение стороны $AB : 5x - 3y + 2 = 0$, уравнения высот $AM : 4x - 3y + 1 = 0$ и $BN : 7x + 2y - 22 = 0$. Составить уравнения двух других сторон и третьей высоты этого треугольника.

C2. Доказать, что необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является зависимость $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$, где по крайней мере одно из чисел α, β, γ не равно нулю.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7), B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .

49-вариант

T1. Векторное произведение и смешанное произведение векторов.

T2. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскости.

A1. Даны вершины $M_1(3; 2; -5), M_2(1; -4; 3)$ и $M_3(-3; 0; 1)$ треугольника. Найти середины его сторон.

A2. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

A3. Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

B1. Определить, при каком значении m две прямые
$$\begin{cases} mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0 \\ (2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0 \end{cases}$$
 пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.

B2. Даны точки $A(2; -1; 2), B(1; 2; -1)$ и $C(3; 2; 1)$. Найти координаты векторных произведений: 1) $[\vec{AB}, \vec{BC}]$; 2) $[\vec{BC} - 2\vec{CA}, \vec{CB}]$.

B3. Доказать, что прямая $5x - 3y + 2z - 5 = 0, 2x - y - z - 1 = 0$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

C1. Составить уравнения сторон треугольника ABC , зная одну его вершину $A(2; -1)$, а также уравнения высоты $7x - 10y + 1 = 0$ и биссектрисы $3x - 2y + 5 = 0$, проведенных из одной вершины. Решить задачу, не вычисляя координат вершин B и C .

C2. Доказать, что вектор $\vec{p} = \vec{b} - \frac{\vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2}$ перпендикулярен к вектору \vec{a} .

C3. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

50-вариант

T1. Координаты вектора.

T2. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых.

A1. Даны точки $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$. Определить: координаты точки M , симметричной точке A относительно точки B ; координаты точки N , симметричной точке B относительно точки A .

A2. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

A3. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости; 1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$; 2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$; 3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.

B1. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx + 8y + n = 0$, $2x + my - 1 = 0$ 1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.

B2. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 2\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить: 1) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$; 2) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}]^2$; 3) $[\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}]^2$.

B3. Составить канонические уравнения следующих прямых: 1) $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$; 2) $5x + y + z = 0$, $2x + 3y - 2z + 5 = 0$; 3) $x - 2y + 3z + 1 = 0$, $2x + y - 4z - 8 = 0$.

C1. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B .

C2. Доказать тождество $([\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}], \vec{c} + \vec{a}) = 2([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

C3. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C .