Tarea evaluativa de Optimización

C312

Rachel Mojena González

2 de noviembre de 2025

1. Formulación del modelo

Se considera la función objetivo

$$f(x,y) = \cos x \, \sin y - \frac{x}{y^2+1}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

la cual es C^∞ en todo el plano. Dado que $f(x,0) = -x \to -\infty$ cuando $x \to +\infty$, el problema irrestricto no está acotado inferiormente y carece de mínimo global. Para efectos de análisis y verificación con KKT, se trabaja la versión acotada

$$\mathcal{B} = [-100, 100]^2 = \{(x,y) : -100 \leq x \leq 100, \ -100 \leq y \leq 100\}.$$

En forma estándar, las restricciones se escriben como

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= x - 100 \leq 0, \quad g_2(x,y) = -x - 100 \leq 0, \\ g_3(x,y) &= y - 100 \leq 0, \quad g_4(x,y) = -y - 100 \leq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Diagnóstico teórico

2.1. Gradiente y hessiana

Las derivadas parciales de primer orden son

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\sin x \, \sin y - \frac{1}{y^2+1}, \\ f_y(x,y) &= \cos x \, \cos y + \frac{2xy}{(y^2+1)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

La matriz hessiana resulta

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -\cos x \, \sin y & -\sin x \, \cos y + \dfrac{2y}{(y^2+1)^2} \\ -\sin x \, \cos y + \dfrac{2y}{(y^2+1)^2} & -\cos x \, \sin y + \dfrac{2x(1-3y^2)}{(y^2+1)^3} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2.2. No convexidad

Para que f fuera convexa en $\mathbb{R}^2$ sería necesario que su hessiana fuese semidefinida positiva (SDP) para todo (x, y).

Evalúese en el punto $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, donde $\sin y_0 = 1$ y $\cos y_0 = 0$:

$$\nabla^2 f\left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & \dfrac{2(\frac{\pi}{2})}{\left((\frac{\pi}{2})^2+1\right)^2} \\ \dfrac{2(\frac{\pi}{2})}{\left((\frac{\pi}{2})^2+1\right)^2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{\left((\frac{\pi}{2})^2+1\right)^2} \approx 0{,}261.$$

Para matrices simétricas 2×2, la condición SDP es equivalente a $a \geq 0$ y $\det \geq 0$ para $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Aquí $a = -1 < 0$, luego H no es SDP. De hecho, $\det(H) = (-1)^2 - \alpha^2 > 0$ y ambos autovalores son negativos $(-1 \pm \alpha)$, con lo cual la hessiana es definida negativa en ese punto. Por consiguiente, f no es convexa.

2.3. Puntos críticos del problema irrestricto

Los puntos críticos interiores satisfacen $\nabla f = 0$, esto es

$$\boxed{\sin x\, \sin y = -\frac{1}{y^2+1}}, \qquad \boxed{\cos x\, \cos y = -\frac{2xy}{(y^2+1)^2}}. \tag{5}$$

Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, existen infinitos candidatos en $\mathbb{R}^2$ y, en particular, dentro de $\mathcal{B}$.

3. Condiciones KKT en $\mathcal{B}$

Sea

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i g_i(x, y), \qquad \lambda_i \geq 0.$$

Las KKT necesarias bajo LICQ, que se satisface pues los gradientes activos son afines e independientes.

El análisis se realiza por *conjuntos activos* $I(x, y) = \{i : \ g_i(x, y) = 0\}$.

Interior $I = \varnothing$

Del problema irrestricto se obtiene $\lambda_i = 0$ y $f_x = 0$, $f_y = 0$. Se listan numéricamente algunos candidatos interiores dentro de $\mathcal{B}$, por ejemplo $(x, y) \approx (0{,}7946, -0{,}8935)$ con $f \approx -0{,}9878$ y $(x, y) \approx (4{,}4881, -3{,}2314)$ con $f \approx -0{,}4122$.

Borde derecho $I = \{1\}$ ($x = 100$)

Las ecuaciones KKT quedan

$$\cos(100)\cos y + \frac{200\,y}{(y^2+1)^2} = 0, \qquad \lambda_1 = -f_x(100, y) = \sin(100)\sin y + \frac{1}{y^2+1} \ \ (\geq 0).$$

Entre las soluciones en $[-100, 100]$, el valor

$$y \approx -0{,}0043117$$

satisface $\lambda_1 \approx 1{,}0022 \geq 0$ y produce

$$f(100, y) \approx -100{,}001859.$$

Borde izquierdo $I = \{2\}$ ($x = -100$)

Se obtiene

$$\cos(100)\cos y - \frac{200\,y}{(y^2+1)^2} = 0, \qquad \lambda_2 = f_x(-100, y) = \sin(100)\sin y - \frac{1}{y^2+1} \ \ (\geq 0).$$

Los candidatos resultantes presentan valores significativamente superiores (en valor absoluto menores) al del caso $x = 100$; por ejemplo $f(-100, -39{,}2737) \approx -0{,}7975$.

Borde superior $I = \{3\}$ ($y = 100$)

Las KKT imponen

$$-\sin x\ \sin(100) - \frac{1}{100^2+1} = 0, \qquad \lambda_3 = -f_y(x, 100) \ \ (\geq 0).$$

Entre las soluciones factibles en $[-100, 100]$, el mejor valor observado es $f(x, 100) \approx 0{,}4966$ en $x \approx 97{,}3892$.

Borde inferior $I = \{4\}$ ($y = -100$)

Análogamente,

$$-\sin x\ \sin(-100) - \frac{1}{100^2+1} = 0, \qquad \lambda_4 = f_y(x, -100) \ \ (\geq 0),$$

con mejores valores alrededor de 0,497, lejos del caso $x = 100$.

Esquinas $I = \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$

En las cuatro combinaciones, algún multiplicador resulta negativo, por lo que no satisfacen KKT; además, sus valores de f no son competitivos.

Conclusión en $\mathcal{B}$. Por comparación de los candidatos KKT dentro de $\mathcal{B}$ se obtiene

$$(x, y) = \big(100,\, y\big), \qquad y \approx -0{,}0043117, \qquad \lambda_1 \approx 1{,}0022, \quad \lambda_{2,3,4} = 0,$$

con valor $f(x, y) \approx -100{,}001859$. Dado que el dominio es compacto y f es continua, este punto corresponde al mínimo global del problema acotado.

Anexo: Algoritmos

En el archivo jupyter notebook se plasman los algoritmos utilizados: máximo descenso y Newton.