期末复习

2020年5月9日 星期六　　下午5:48

二重积分

矩形域上二重积分

平面区域 $I=[a,b]\times[c,d]$，对 $[a,b]$ 分割，对 $[c,d]$ 分割，若黎曼和存在，面积 $d\sigma$，则 $\iint_I f\,d\sigma$ 为二重积分

性质：$f(x,y)$，$I:[a,b]\times[c,d]$，下列命题等价

(1) $f\in R(I)$

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ I 的一个分割 T，使得 $U(f,T)-L(f,T)<\varepsilon$

(3) $\underline{\iint_I} f\,d\sigma=\overline{\iint_I} f\,d\sigma$.

定理. $f(x,y)\in C[a,b]\times[c,d]$，则 f 在 I 上可积.

因：有界闭集连续 $\Rightarrow$ 一致连续.

零面积集：面积和 $\to 0$.

可积的充分条件：在 I 上有界的函数 f 在 I 上的间断点的集合是零面积集.

积分中值定理：设 $D\subset R^2$ 为连通有界闭集，D 的边界 ∂D 为零面积集，

$f(x,y)$ $g(x,y)\in C(D)$ 且 g 在 D 上不变号，则 $\exists(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

重积分

- 二重 $\iint f(x,y)\,dx\,dy$　换元：$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$　$\iint f(u,v)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv$　$\rho\theta\Rightarrow\rho$.
- 三重 $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.　$\iiint f(x,y,z)\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$　$\rho\theta\varphi\Rightarrow\rho^2\sin\theta$.

$\to$ 累次积分 + 换序

曲线积分

- 第一型：$\int f(x,y,z)\,dl=\int f(x_t,y_t,z_t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt$
- 第二型　$F(x,y,z)=(X,Y,Z)$　$\int F(x,y,z)\,dl^\circ=\int X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$，$=\int X\cdot x_t'+Y\,y'(t)+Z\,z_t'\,dt$

曲面积分

- 第一型：$\iint f(x,y,z)\,ds=\iint f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dx\,dy$

$=\iint f(x_{uv},y_{uv},z_{uv})\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$　球坐标：$a^2\sin\theta$.

$\sqrt{EF-G^2}\,du\,dv$

- 第二型　$\iint V(x,y,z)\,dS^\circ=\iint V\cdot n^\circ\,ds=\iint X\,dy\wedge dz+Y\,dz\wedge dx+Z\,dx\wedge dy$

① $z=f(x,y)$

$=\pm\iint P f_x'+Q f_y'-R\,dx\,dy$,

Green公式：

$$\iint_D\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{\partial D}(X,Y)\,n^\circ\,dl$$

$$=\oint_{\partial D}(X,Y)(dy,-dx)$$

$$=\oint_{\partial D}X\,dy-Y\,dx$$

$$\oint_{\partial D}X\,dx+Y\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

$\begin{cases}dx\text{前的对}y\text{求导 取负.}\\ dy\text{前的对}x\text{求导}\end{cases}$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

+ + + −　sin cos $\to$ sin sin

+ + + −　cos cos $\to$ cos cos

− + − −　sin sin $\to$ cos cos

+ sin + + sin −

+ cos + + cos −

− cos + − cos −

+ cos + + cos −