复变函数试题（2020年9月2日)（A卷）（共10题，每题10分)

以下记C为复数集合, R为实数集合, N为正整数集合（不包含0）.

1. 我们称形如$f(z)=z^n+\alpha$ 的多项式为分圆多项式, 其中$z\in C$, $n\in N$，$\alpha\in C$为非零复数. 证明：分圆多项式的n个零点构成（圆内接）正n边形的n个顶点.

2. 给出$\cos z=\cos(x+iy)$的实部和虚部的表达式，这里$x,\ y\in R$, $z\in C$, 并由此证明：对任意复数$C=A+iB$, 方程$\cos(x+iy)=A+iB$ 有无穷多个解, 这里$A,\ B\in R$.

3. 记$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$. 叙述幂级数$f(z)$的Abel定理的内容（2分）及收敛半径($R>0$)的定义(2分）, 并分别给出具体例子（每例2分），说明存在幂级数使其在收敛圆周上(I) 处处发散；(II) 既有收敛的点，又有发散的点；(III) 处处收敛. (并给出理由）.

4. 求实积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, 这里$a>0,\ b>0,\ k>0$ 是常数.

5. 求复积分$I_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 7z^5}{z^n}dz$, 这里$n\in N$是正整数.

6. 求实积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}$, 这里$A>0, B>0$ 是常数. (提示：可先求积分$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$, $a>|b|\geq 0,\ b\in R$).

7. 求出将第一象限$D=\{z=x+iy:\ x>0,\ y>0\}$ 映射到圆盘$|w-w_0|<r$的单值解析映射的一般形式, 这里$w_0\in C$, $r>0$ 是常数.

8. 求出将区域$D=\{z:\ a<x<b,\ -\infty<y<+\infty\}$ 到单位圆盘$|w|<1$的一个单值解析映射. 这里$a,\ b$是实常数, $z=x+iy,\ x,\ y\in R$.

9. 写出将单位圆盘$|z|<1$映到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射的一般形式，并证明其满足不变式：

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

10. 以下两题中任选一题（作两道题只给第一题的分数）

(I). 求实积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}},\qquad \text{这里}n\in N\text{是正整数，}r>0\text{是常数，}x\in R.$$

(II). 求实积分

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(r^2+x^2)^n},\qquad \text{这里}n\in N\text{是正整数, }r>0\text{是常数，}x\in R.$$