复变复习之一定要背下来的公式

方根时有 n 个解哦，别忘了$\omega_n = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right), (k=0,\dots,n-1)$

柯西-黎曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$（函数解析的充要条件）

指数函数：记作$\exp(z) = e^x(cosy + isiny)$

对数函数$\mathrm{Lnz} = \ln|z| + \mathrm{iArgz}$（加减的变化还在，但是幂次不能直接提出来，涉及到 K 的问题）

幂函数：$a^b = e^{bLna}$多值...

三角函数$\mathrm{cosz} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \mathrm{sinz} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

双曲函数: $\mathrm{chz} = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \mathrm{shz} = \frac{e^z-e^{-z}}{2}, thz = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$（注意求导关系，以及 chz=cosiz,shz=siniz）

反三角函数和反双曲函数：

$$\mathrm{Arccosz} = -\mathrm{iLn}\left(\mathrm{z} + \sqrt{z^2-1}\right), \mathrm{Arcsinz} = -\mathrm{iLn}\left(\mathrm{iz} + \sqrt{1-z^2}\right), Arctgz = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz};$$

$$Arshz = Ln\left(\mathrm{z} + \sqrt{z^2+1}\right), Archz = Ln\left(\mathrm{z} + \sqrt{z^2-1}\right), Arthz = \frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}$$

解析函数在 z_0 处的任意阶导存在，$f^{(n)}(z_0) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i\frac{\partial^n v}{\partial y^n}$

如果函数在单连通域 B 内处处解析，那么函数沿 B 内的任何一条封闭曲线 C 的积分为 0.

$\mathrm{f}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$,c 是包含 z_0 的正向简单闭曲线（f(z)在该点解析）

$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$,C 同上

泰勒展开：

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

$$\mathrm{sinz} = \mathrm{z} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{cosz} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

ch,sh 由 sin,cos 推导，还有一个不是展开的公式：

$$(1+z)^n = 1 + \sum\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}z^k(\text{对于} - \mathrm{n}\text{ 也成立})$$

洛朗展开式：（f(z)在圆环域内解析），$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n; c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\alpha)}{(\alpha-z_0)^{n+1}}d\alpha$（定义

别忘了）

可去奇点，$Res[f(z),z_0]=0$

本性奇点，展开洛朗级数求

一级极点$Res[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

m 级极点$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m \mathrm{f(z)}\}$

设$\mathrm{f(z)}=\frac{P(z)}{Q(z)}$,P(z)及 Q(z)在 z_0 都解析，如果 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 f(z)的一级极点，而$Res[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

$Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz$（积分方向取负的）

无穷远点留数的计算$Res[f(z),\infty]=-Res\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

运用留数计算定积分

形如$\int_0^{2\pi}R(cos\theta,sin\theta)d\theta$换元：$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}, cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}, d\theta=\frac{dz}{iz}$。

所求的积分值：$2\pi i\sum Res[f(z),z_k]$

形如$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)dx$;转换为：$\int_{-R}^{R}R(x)dx+\int_{C_R}R(z)dz=2\pi i\sum Res[R(z),z_k]$取 R 为∞所以第二个约等于 0，舍去…

形如$\int_{-R}^{R}R(x)e^{aix}dx(a>0)$,转换为$2\pi i\sum Res\left[R(z)e^{aiz},z_k\right]$（遇到多项式乘 sinx 或者 cosx 也等效这种情况，因为可以只看实部、只看虚部）

决定分式线性映射$\frac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2}\cdot\frac{\omega_3-\omega_2}{\omega_3-\omega_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$

当二圆周上没有点映射成无穷远点时，二圆周的弧所围成的区域映射成而圆弧所围成的区域有一个点映射成…一个圆弧与一直线所围成的区域

当二圆周交点中的一个映射成无穷远点时，映射成角形区域

将上半平面映射到一个圆$\omega=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$(λ 是要映射到圆心的点)

单位圆映射到单位圆$\omega=e^{i\theta}\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right)$