（考题）

1. （2010）解方程 $e^z=1+i.$

$$\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi),k\in\mathbb{Z}.$$

2. （2010）求 $(-8i)^{1/3}$，用 $a+bi$ 表示.

$$2i,\sqrt{3}-i,-\sqrt{3}-i.$$

3. （2010）求证：在半径为 r 的半圆 C_r 上的线积分

$$\int_{C_r} z^n\mathrm{d}z=\begin{cases}\pi i, n=-1,\\ 0, n\text{为其它奇数},\\ -\dfrac{2r^{n+1}}{n+1}, n\text{为偶数}.\end{cases}$$

$$\int_{C_r} z^n\mathrm{d}z \overset{z=re^{i\theta}}{=} \int_0^{\pi}(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

4. （2008 或 2009）(a)设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 处处解析，写出 $f(z)$ 的 Cauchy-Riemann 条件，并用 u,v 的 n 阶偏导给出 $f^{(n)}(z)$ 的表达式；
(b)设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 处处解析，证明 $u(x,y)$ 满足 Laplace 方程。

$$\text{(a)}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{x};\ f^{(n)}(z)=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+i\frac{\partial^n v}{\partial x^n};$$

(b) $f'(z)$ 也解析.

5. （2008 或 2009）写出 $\cos(3x+2y\mathrm{i})$ 的实部、虚部；(b)求 $(4\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的一般值。
（求 sin(*x*+iy)、cos(*x*+iy)的实部和虚部，x，y∈R）

(a) $\mathrm{Re}[\cos(3x+2yi)]=\cos 3x\,\mathrm{ch}\,2y,$

$\mathrm{Im}[\cos(3x+2yi)]=-\sin 3x\,\mathrm{sh}\,2y;$

(b) $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}(\cos\ln 4+i\sin\ln 4),\mathrm{k}\in\mathbb{Z}.$

（sin(x+iy)=sinxchy+icosxshy,cos(x+iy)=cosxchy-isinxshy）

6. （2004.6）证明 Liouville 定理。

设 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ 且 $|f(z)|\le M$，则 $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\dfrac{f(z)}{z^{k+1}}\mathrm{d}z$，

$$|c_k|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z^{k+1}}\right||\mathrm{d}z|\le\frac{M}{r^k}.$$

令 $r\to\infty$，得 $c_k=0,k=1,2,3,\ldots$

故 f(z)=c_0 为常数.

7. （2011？）不恒为零的解析函数 f(z)满足 f(z_0)=0，则存在解析函数 φ(z)和正整数 n，使得 φ(z_0)≠0 且$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$.

f(z)可以在 z_0 处展开为 Taylor 级数：$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$，由于 f(z)不恒为零，必定存在 k 使得 c_k≠0，设最小的使 c_k≠0 的 k 为 n，则

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k=(z-z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n} (z-z_0)^k,$$

令 $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n} (z-z_0)^k$，则 φ(z)为解析函数且 φ($z_0$)=$c_n$≠0.

8. （2008 或 2009）求以下复积分：

(a)

$$I=\oint_{|z|=3} \frac{dz}{1+z^n}$$

(b)

$$J=\oint_{|z|=1} \frac{\cos 2z-1}{z^m} dz$$

$$(a) I=\begin{cases} 2\pi i, n=1, \\ -2\pi i, n=-1, \\ 0, n\text{为其他整数.} \end{cases}$$

$$J=\begin{cases} \pi i \dfrac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m-1)!} 2^m, m>2\text{且为奇数,} \\ 0, m\text{为其他整数.} \end{cases}$$

9. （2008 或 2009）求以下实积分：

(a)

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}$$

其中$-1<p<1$；

(b)

$$J=\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x\, dx}{x^2+a^2}$$

$(a)\dfrac{2\pi}{1-p^2},(b)\dfrac{\pi}{2e^{2a}}$ （默认 a>0）.

10. （2010，此题可能不准）将 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 分别在区域 $|z|<1$ 和 $|z-1|<1$ 内展开为 Laurent 级数。

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n, |z|<1,\\ \sum\limits_{n=-1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-z)^n}, |z|<1.\end{cases}$$

11. （2008 或 2009）(a)叙述 Abel 定理以及收敛半径的定义；

(b)证明：若 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$ 收敛，$\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k|r^k$ 发散，则原级数收敛半径为 r。

（举出在收敛圆上处处收敛、处处发散、有些点收敛有些点发散的例子）

（处处发散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ 、处处收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ 、有些点收敛有些点发散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ ）

Abel 定理和收敛半径参见课本 110 页.

此处为条件收敛，若收敛半径大于 r，则在 r 处为绝对收敛.

12. （2004.6）求证：设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n+i\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 $R=\min\{R_1,R_2\}$.

先证 $R\geq\min\{R_1，R_2\}$ 再证 $R>\min\{R_1，R_2\}$ 不可能.

13. （2010）求 $f(z)=\dfrac{z+e^{zi}}{z^3}$ 的留数，奇点类型，并在半径为 r 的半圆 Cr 上的积分 $\int_{Cr} f(z)\mathrm{d}z$.

$\mathrm{Res}[f(z),0]=-\dfrac{1}{2}$，0 为三级极点.

这个积分有问题，先搁置.

14. （2010，此题不全）(2)求

$$\int_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\mathrm{d}x.$$

$\dfrac{\pi}{4}$（这个积分也有问题）.

15. （2010）求 $0<\mathrm{Im}(z)<\frac{1}{2}$ 在 $w=\frac{1}{z}$ 映射下的像.

$\mathrm{Im}(w)<0$ 且 $|w+i|>1$.

16. （2010）把区域 $|z|<2$，$0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 共形地且互为单值地映射成上半平面，求出实现该映射的任一个函数.

$$w=-\left(\frac{z^4-16}{z^4+16}\right)^2.$$

17. （2008 或 2009）求将$|z-1|<r$映射成$|w-\mathrm{i}|<R$的分式线性映射的一般形式，其中$r>1,R>0$。

$$w=e^{i\theta}R\frac{\frac{z-1}{r}-\alpha}{1-\bar{\alpha}\frac{z-1}{r}}+i,|\alpha|<1,-\pi<\theta\leq\pi.$$

18. （2008 或 2009）求将$a<\mathrm{Re}(z)<b$映射成$|w|<1$的映射，其中$a<b,\ a,b\in\mathbb{R}$

$$w=\frac{e^{i\pi\frac{z-a}{b-a}}-i}{e^{i\pi\frac{z-a}{b-a}}+i}.$$

19. （2008 或 2009）若$a,b,c,d\in\mathbb{R}$，且$ad-bc>0$，证明分式线性映射$w=\frac{az+b}{cz+d}$将上半平面正向映射成上半平面，即把实轴正向映射成实轴。

即证明若 Im(z)>0，Im(w)>0.

20. （2004.6）设$0<a<b$，把$|z-a|>a$与$|z-b|<b$围成的区域映射为单位圆：$|w|<1$.

$$w=\frac{e^{i\pi\frac{b(z-2a)}{(b-a)z}}-i}{e^{i\pi\frac{b(z-2a)}{(b-a)z}}+i}.$$

21. （2008 或 2009）(1)求将$z_1=0,z_2=1,z_3=\infty$映射成$w_1=1,w_2=\mathrm{i},w_3=-1$的分式线性映射，要求最终表达式的形式为$w=\frac{az+b}{z+d}$;

(2)证明 ad-bc>0 的映射将上半平面映射为上半平面（a，b，c，d 均为实数）。

(1) $w=i+\frac{(z-1)(i-1)}{1-iz}=\frac{i-z}{i+z}$.

22. （2008 或 2009，2004.6）求将$|z|<1$映射成$|w|<1$的分式线性映射的一般表达式，并证明

$$\frac{|\mathrm{d}w|}{1-|w|^2}=\frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

提示：$\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|=\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2},1-|w|^2=\frac{(1-\bar{\alpha}z)(1-\alpha\bar{z})-(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})}{|1-\bar{\alpha}z|^2}.$

23. （以下为 2012.1 考题）求3^i和$(1+i)^i$的值。

$$3^i=e^{2k\pi}(\cos\ln 3+i\sin\ln 3),k\in\mathbb{Z},$$

$$(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}), k\in\mathbb{Z}.$$

24. （1）判定 w=zRe(z)在何处可导，何处解析？

（2）设函数 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$。问常数 a，b，c，d 取何值时，f(z)在复平面内处处解析？

（1）在 z=0 处可导，在复平面内处处不解析；

（2）a=d=2，b=c=-1.

25. 计算下列积分

（1）$\oint_C \frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}\mathrm{dz}$，其中 $C:|z|=2$，为正向圆周；

（2）$\oint_C \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}\mathrm{dz}$，$C:|z|=2$，为正向圆周。

（1）（可参照课本 136 页例 3（2））$\frac{-\pi i}{(3+i)^{10}}$；（2）$-\frac{2\pi i}{3}$.

26. 求下列幂级数的收敛半径：

（i）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}(p>0)$；（ii）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln(in)}\right)^n$。

（i）1；（ii）∞.

27. 求下列函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径：

（i）$\frac{z-1}{z+1}$，z_0=1；（ii）$\frac{1}{4-3z}$，z_0=1+i。

（i）$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n$，收敛半径为 2；（ii）$\frac{1}{1-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(3\frac{z-(1+i)}{1-3i}\right)^n$，收敛半径为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

28. 将 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列圆环域内展成 Laurent 级数：

（i）$1<|z|<2$，（ii）$0<|z-1|<1$。

（i）$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$；（ii）$-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$.

29. 计算定积分

（i）$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}$，(a>b>0)

（ii）$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$，(a>0，b>0).

（i）$2\pi\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$

$$=2\pi i\left(\frac{i}{2}\text{Res}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(bz^2+2az+b\right)},0\right]+\frac{i}{2}\text{Res}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(bz^2+2az+b\right)},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]\right);$$

（ii）$\frac{\pi}{2(a+b)}$.

30. 求一映射，将由圆盘$|z|<1$和$\left|z-\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}$所围成的月牙形区域保角地映射成为上半平面。

$w=e^{2\pi i\frac{z}{z-i}}$.

31. 求将上半平面 Im(z)>0 的映射成单位圆$|w|<1$且满足条件 w(2i)=0，arg w′(2i)=0 的分式线性映射。

$w=i\frac{z-2i}{z+2i}$.

32. 证明：

（i）（Cauchy 不等式）若函数 f(z)在圆盘上解析$|z-a|<R$，且$|f(z)|\le M$，其中 M 为大于零的常数，则

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\le\frac{n!M}{R^n},n=1,2,\ldots$$

（ii）（Liouville 定理）若函数 f（在）在复平面$\mathbb{C}$上解析且有界，则 f(z)必为一常数。

（iii）请叙述代数学基本定理，并利用 Liouville 定理证明之。

（i）$\left|f^{(n)}(a)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-a|=R}\left|\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}}\right|\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M2\pi R}{R^{n+1}}$；

（ii）参照第 6 题；

（iii）次数不低于 1 的复系数多项式必至少有一个零点.

设$P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n=z^n\left(c_n+\frac{c_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{c_0}{z^n}\right)$为 n 次多项式，可知$|z|\to\infty$时$P(z)\to\infty$.若$P(z)$无零点，则设$f(z)=\frac{1}{P(z)}$.$|z|\to\infty$时$|f(z)|\to0$，故$f(z)$有界.

由（ii）$f(z)$为常数，$P(z)$也为常数，与假设矛盾，故定理得证.

（上课讲过的题目）

1. 函数$f(z)=ax+iby(a,b\in\mathbb{R})$可导的条件

a=b.

2. $f(z)=e^{ax}(\cos by+i\sin by)$ 的高阶导数 $f^{(n)}(z)$.

a=b 时可导， $f^{(n)}(z)=a^n e^{az}$.

3. $\max\limits_{|\xi|\le r}\left|\xi^n+\alpha\right|$，并指出取得最大值的条件.

若 α≠0， $r^n+|\alpha|, |\xi|=r$ 且 $\arg\xi=\frac{1}{n}\arg\alpha+k\frac{2\pi}{n}, k=0,1,2,\dots,n-1$；

若 α=0， $|\xi|=r$.

4. $\ln(3+2i)$ 的实部和虚部.

$\mathrm{Re}[\ln(3+2i)]=\sqrt{13}, \mathrm{Im}[\ln(3+2i)]=\arctan\frac{2}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

5. 方程 $z^n=1$ 的根.

$e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k=0,1,2,\dots n-1.$

6. $1^{\sqrt{2}}$ 的所有值.

$\cos(2\sqrt{2}k\pi)+i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k\in\mathbb{Z}.$

7. $I_m=\oint\limits_{|z|=r}\frac{1-\cos z}{z^m}, m\in\mathbb{Z}.$

$$I_m=\begin{cases}2\pi i\dfrac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{(m-1)!}, m>2\text{且}m\text{为奇数},\\ 0, m\text{为其他整数}.\end{cases}$$

8. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $0<|z|<1$，$1<|z|<2$，$2<|z|<\infty$ 的 Laurent 级数.

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1\right)z^n, 0<|z|<1,\\ -\frac{1}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^n+\frac{1}{z^n}\right), 0<|z|<1,\\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}, 0<|z|<1.\end{cases}$$

9. f(z)、g(z)在区域 D 上解析，且 f(z)g(z)≡0，则必有 f(z)≡0 或 g(z)≡0.

有非孤立零点的解析函数恒为零.

10. $\oint_{|z|=r>1}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^n}$ 和 $\oint_{|z|=r>1}\frac{z^n\mathrm{d}z}{1+z^n}$（n 为正整数）.

参见考题第 7 题.

11. $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^n}(n\in\mathbb{N}_+,|a|<|b|,|a|,|b|\neq 1)$.

$\frac{2\pi i(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}},|a|<1<|b|.$

其他情况为 0.

12. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\sin\theta}(|a|>|b|).$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{-2i}{bz^2+2az+b},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right].$$

13. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}(a,b>0).$

$$\frac{2\pi}{ab}=8\pi\sum\mathrm{Res}\left[\frac{z}{a^2(z^2+1)^2-b^2(z^2-1)^2},\pm\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\right].$$

14. $I_n=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}=\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},n\in\mathbb{N}.$

提示：$-\frac{\pi i}{2n}\left(e^{i\frac{\pi}{2n}}+e^{i\frac{3\pi}{2n}}+e^{i\frac{5\pi}{2n}}+\ldots+e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2n}}\right).$

15. $I_a=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x(a>0)$ 和 Dirichlet 积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

$\frac{\pi}{2e^a},\frac{\pi}{2}.$

16. $I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

$\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\frac{\pi}{2^{2n-1}}.$

17. 设把上半平面映射为上半平面的分式线性映射为 $w=\frac{az+b}{cz+d},a,b,c,d\in\mathbb{R}.$，则

$ad-bc>0$.

参见考题第 18 题.

18. 把扇形区域：$|z|<r, 0<\arg z<\theta$ 映射为单位圆：$|w|<1$.

$$w=\frac{-\left(\frac{z^{\frac{\pi}{\theta}}-r^{\frac{\pi}{\theta}}}{z^{\frac{\pi}{\theta}}+r^{\frac{\pi}{\theta}}}\right)^2-i}{-\left(\frac{z^{\frac{\pi}{\theta}}-r^{\frac{\pi}{\theta}}}{z^{\frac{\pi}{\theta}}+r^{\frac{\pi}{\theta}}}\right)^2+i}.$$

f(z)在某点解析的充要条件是在这点满足 Cauchy-Riemann 方程：

f(z)=u(x,y)+iv(x,y)在点 z=x+iy 处的导数为

若 f(z)解析，则 u 和 v 都是调和函数（$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$）

并且称 v 是 u 的共轭调和函数（但 u 不一定是 v 的共轭调和函数）

解析函数 f(z)的高阶导数

$$f^{(n)}(z)=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+i\frac{\partial^n v}{\partial x^n}.$$

全平面上解析的函数（整函数）不可能是有界的，除非是常数函数（Liouville 定理）.

**设 f(z)是整函数，则令方程 f(z)=w 无解的复数 w 最多只能有一个，除非是常数函数（Picard 小定理）.

指数函数e^z=

对数函数 Ln z=

ln z=

注意 $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}z_2$，但 $\mathrm{Ln}z_1^2\neq 2\,\mathrm{Ln}\,z_1$.

幂函数（注意幂函数的多值性）$a^b=$

三角函数 sin z=

cos z=

双曲函数 sinh z=
cosh z=

试证明 $\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}$.

复变函数积分可以化为两个实积分计算：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

一个重要积分 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} =$

引用 Green 公式可得复合闭路定理，其中最外部曲线的正方向为逆时针，内部曲线的正方向为顺时针.

再引用 Taylor 级数可得：若 f(z)在区域 *D* 内处处解析，*C* 为 *D* 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，则

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z.(n=0,1,2,...)$$

闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得.（最大模原理）

复级数收敛的充要条件是其实部和虚部构成的级数分别收敛.
若级数绝对收敛，则级数收敛，且

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|.$$

Abel 定理：

收敛圆上必定存在至少一个奇点，f(z)在某点展开的 Taylor 级数的收敛半径是到该点最近一个奇点的距离.

若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ 或 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ 存在,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛半径等于该极限.

若幂级数的和函数解析，则和函数可以逐项求导或逐项积分.

解析函数 f(z)Taylor 在 z_0 处可展开为 Taylor 级数（根据奇点确定收敛域）：

几个初等函数在 z=0 处展开的 Taylor 级数：

$e^z =$

$\sin z =$

$\cos z =$

$*\sinh z =$

$*\cosh z =$

Laurent 级数包含负幂次项，$\frac{1}{1-z}$ 在 z=0 处展开的 Laurent 级数为

$$\frac{1}{1-z}=\begin{cases}1+z+z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, |z|<1; \\ -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, |z|>1.\end{cases}$$

若要把有理分式函数展开为 Laurent 级数，通常先分解，再根据上式展开.

Laurent 级数正幂次项的系数不能根据高阶导数计算.

奇点可分为孤立奇点和非孤立奇点（*在这个奇点的邻域内，不论多小都有别的奇点），孤立奇点又可分为极点和本性奇点（可去奇点不认为是奇点）.

从 Laurent 级数来看，极点处的负幂次项数有限，而本性奇点有有无穷多项.

$$*\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

若 z_0 是 f(z)的 m 级极点，则 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点.（不恒为零的解析函数的零点总是孤立的；反之，存在非孤立零点的解析函数必恒为零）

留数 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z=c_{-1}$.（$c_{-1}$ 是 z_0 点 Laurent 级数中负一次项的系数）

除展开为 Laurent 级数外，一级极点处的留数可用以下方法计算：

$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}$

若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 且 $Q(z_0)=0$，则 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=$

高级极点处的留数可根据高阶导数计算：

利用留数可以计算三类定积分：

(1) $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta;$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x;$（$P$，$Q$ 均为多项式且 Q 的次数比 P 至少高二次）

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}e^{aix}\mathrm{d}x(a>0).$（$P$，$Q$ 均为多项式且 Q 的次数比 P 至少高一次）

对于(1)，令 $z=e^{i\theta}$，则化为环路积分 $\oint\limits_{|z|=1}$

对于(2)(3)，等于 $2\pi i\sum\limits_{\mathrm{Im}(z_k)>0}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$

(3)可以用来计算含有三角函数的广义积分，例如

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{e}.$$

*无穷远处的留数 $\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=$

若 w=f(z)在 z_0 处解析且 f'(z_0)≠0，则 w 在 z_0 处是共形的；Arg f'(z)表示转动角.

分式线性映射可分解为平移（w=z+b）、旋转伸缩（w=αz）、反演（w=1/z）的复合.

圆的对称点：

直线的对称点仍然是通常意义.

分式线性映射在扩充复平面（加入无穷远点）上是一一对应的，且具有保角性、保圆性、保对称性（直线是半径无穷大的圆）.

若相异的三点 z_1、z_2、z_3 分别被映为 w_1、w_2、w_3，则分式线性映射被唯一确定：

可根据 $z_1\to z_2\to z_3$ 和 $w_1\to w_2\to w_3$ 的绕向异同判断内部是否被映射为外部.

把单位圆映射成单位圆的分式线性映射的一般形式为：

一般地，把圆心为 z_0，半径为 r 的圆映射成圆心为 w_0，半径为 R 的圆的分式线性映射的一般形式为：

把单位圆映射成上半平面的分式线性映射的一般形式为：

幂函数可扩张角形区域的张角（扩大到 2π 时有割痕）.

指数函数可把带形区域映射为角形区域，一般带形区域为 $0<\mathrm{Im}(z)<\pi$.

求映射时需要画简图.