第三章 复变函数的积分

2020年12月25日 星期五　　下午6:25

1、Cauchy高阶导数公式：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad \forall n\in N,$$ $f(z)$在圆盘上可导在圆周上连续.

2、① $f(z)$在圆盘上可导，圆周上连续，若令 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ 则 $|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!M(r)}{r^n}$

由 $f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$、$\Longrightarrow |f^{(n)}(0)|=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z^{n+1}|}|dz|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{M(r)}{|z|^{n+1}}|dz|=\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}|dre^{i\theta}|$

$$=\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M(r)}{r^n}d\theta=\frac{n!M(r)}{r^n}$$

② Liouville定理，若$f(z)$有界，则$f(z)\equiv const$

由①，$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!M(r)}{r^n}$，则 $M(r)<C$

令$r\to+\infty$，$\frac{n!M(r)}{r^n}=0$ 即 $f^{(n)}(0)=0$.

将$f(z)$在$z=0$泰勒展开，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=f(0)\equiv const.$$

③ 若∃常数$M_0>0$，$m\in N$，$R_0>0$，s.t. $|z|\geqslant R_0$时有 $|f(z)|\leqslant M_0\sum\limits_{k=0}^{m}|z|^k$，则$f(z)$为次数不超过$m$的多项式.

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!M(r)}{r^n}\leqslant\frac{n!M_0\sum_{k=0}^{m}r^k}{r^n}=n!M_0\frac{\sum_{k=-m}^{0}r^k}{r^{n-m}}$$

当$r\to+\infty$时，可知 $\forall n\geqslant m+1$，$|f^{(n)}(0)|=0$. 即$f^{(m+k)}(0)=0$，$\forall k\geqslant1$.

3、由平均值公式证最大模定理(圆周上为const)

$f^{(0)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$，不妨令 $z_0=0$，?

$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz$，　$z=re^{i\theta}$.

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}dre^{i\theta}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{e^{i\theta}}de^{i\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})d\theta.$$

$r\to0$，$f(re^{i\theta})\to f(0)$

4、由Lionville证代数学基本定理

$P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_kz^k$　$C_k\in\mathbb{C}$　$C_n\neq0$，$n\geqslant1$

则 $P_n(z)$在$\mathbb{C}$上至少有一个零点

?