第四章

2020年12月28日 星期一 下午6:13

1、Abel定理：

若 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$ 在 z_0 收敛，则 $\forall z: |z|<|z_0|$ 时，$f(z)$ 绝对收敛

反之若 $f(z)$ 在 z_1 发散，则 $\forall z, |z|>|z_1|$，$f(z)$ 发散。

2、收敛半径 $(R>0)$

$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 $R\ (R>0)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall z, |z|<R$ 时 $f(z)$ 绝对收敛

而 $|z|>R$ 时 $f(z)$ 发散

3、3个例子，在收敛圆周上

(1) 发散：$\sum_{n=1}^{+\infty}z^n$ 在收敛圆周 $|z|=1$ 上发散

证：$z^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$.

(2) 有的收敛有的发散：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$ $f(-1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收. (交错级数)

$f(1)=\sum\frac{1}{n}$ 发散. (调和级数)

(3) 收敛：$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

4、若 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lambda\ (\geqslant 0$ 或 $+\infty)$ 则 $R=\lambda$.

若 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=\lambda$ 存在，$R=\lambda$.

若 $f(z)$ 只有有限个奇点，则距离原点最近的奇点 z_0 的模 $|z_0|$ 即为收敛半径.

若 $f(z)$ 在 z_0 处条件收敛，则 $R=|z_0|$

5、若 $c_n=a_n+ib_n$ $a_n, b_n\in\mathbb{R}$，$\sum a_n z^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum b_n z^n$ 的收敛半径 R_2

则 $\sum c_n z^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1, R_2\}$

不妨设 $R_1\leqslant R_2$.

若 $|z|\leqslant R_1$，则 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n$ 绝对收敛，

则 $\sum|c_n z^n|\leqslant\sum|a_n z^n|+\sum|b_n z^n|<+\infty$.

即 $\sum c_n z^n$ 绝对收敛，则 $R\geqslant R_1$

若 $|z|\leqslant R$，则 $\sum c_n z^n$ 绝对收敛，

且 $|a_n|\leqslant|c_n|$ 则 $\sum a_n z^n$ 绝对收敛

则 $R_1\geqslant R$.

综上，$R=R_1$