



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

Dipartimento di Informatica, Bioingegneria, Robotica e
Ingegneria dei Sistemi

Corso di Laurea Triennale in Informatica
Anno Accademico 2021/2022

Analisi di serie temporali Aspetti Applicativi

Candidato
Alex Valle

Relatore
Prof. Francesca Odone

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Premessa	3
1.2	Obbiettivi	3
1.3	Tecnologie utilizzate	3
1.4	Suddivisione del lavoro	4
2	Studio dei metodi e delle applicazioni	5
2.1	Cos'è una serie temporale	5
2.2	Metodi per la gestione dei dati	6
2.2.1	Pacchetti utilizzati	6
2.2.2	Caricamento di un dataset	7
2.2.3	Rinomina delle colonne relative alle serie	7
2.2.4	Scelta dell'indice	8
2.2.5	Individuazione dei valori nulli e possibili soluzioni	10
2.2.6	Filtraggio	13
2.3	Componenti di una serie temporale	17
2.3.1	Trend	17
2.3.2	Stagionalità	19
2.3.3	Residui	20
2.3.4	Decomposizione di una serie	21
2.4	Stazionarietà	24
2.4.1	Dickey Fuller Test	26
2.5	Smoothing	29
2.5.1	Moving average	29
2.5.2	Exponential	30
2.5.3	Double Exponential	32
2.6	Autocorrelazione ed Autocorrelazione parziale	34
2.6.1	Funzione di Autocorrelazione	34
2.6.2	Funzione di Autocorrelazione Parziale	39
3	Gestione dei dataset forniti	41
3.1	Descrizione dei dataset	41
3.2	Rinomina delle colonne dei dataset	42
3.3	Gestione dei valori nulli	43
3.4	Scelta dell'indice di tabella per ogni dataset	45
3.5	Filtraggio dei dataset	46

4	Analisi del problema e Soluzioni	50
4.1	Prima soluzione	50
4.1.1	Idea generale	50
4.1.2	Implementazione	51
4.1.3	Analisi dei risultati	53
4.1.4	Analisi di complessità	54
4.1.5	Conclusioni	54
4.2	Seconda Soluzione	54
4.2.1	Idea generale	54
4.2.2	Implementazione	54
4.2.3	Analisi dei risultati	54
4.2.4	Analisi di complessità	54
4.2.5	Conclusioni	54
5	Bibliografia	55

1 Introduzione

In tale capitolo introduttivo verranno spiegati gli obbiettivi e la suddivisione del tirocinio in merito al tempo disponibile, cercando di spiegare, in maniera sintetica, come è stato svolto ed organizzato.

1.1 Premessa

Lo scopo di questo elaborato è quello di descrivere l'esperienza di tirocinio svoltasi presso l'Università Degli Studi di Genova con durata complessiva di 300 ore con inizio 25 novembre 2022 e fine 27 febbraio 2023. Il tirocinio è stato svolto per la maggior parte del tempo da remoto con incontri, volti all'andamento di esso, mediante l'utilizzo di Teams (piattaforma sviluppata da Microsoft) che in presenza presso il dipartimento.

1.2 Obbiettivi

L'obbiettivo di questo tirocinio è stato quello di provare a individuare, se esistenti, uno o più metodi, relativi all'analisi di serie temporali, che permettano l'analisi di una serie di dati relative a soggetti sani e patologici con lo scopo di analizzare il cammino.

I dati utilizzati sono stati analizzati precedentemente da un gruppo di ricerca del dipartimento con tecniche differenti da quelle utilizzate durante il tirocinio quindi in caso di un metodo sicuro e soddisfacente all'analisi, i risultati ottenuti sarebbero serviti al gruppo di ricerca come un'ulteriore conferma delle analisi da loro eseguite.

1.3 Tecnologie utilizzate

Come scelta tecnologica principale per lo sviluppo, l'intero svolgimento del tirocinio, si è basato sul linguaggio di programmazione python per la sua semplicità, velocità nella scrittura di codice e ampia community che fornisce molti dei pacchetti utilizzati per eseguire analisi di ogni genere.

Per tenere traccia del lavoro e per esplorare velocemente le modifiche eseguite è stato utilizzato Git come VCS (version control system) e Github come servizio di hosting per i repository.

1.4 Suddivisione del lavoro

Per poter garantire la conoscenza necessaria allo sviluppo di un metodo relativo allo scopo del tirocinio, il lavoro è stato principalmente suddiviso in due fasi: studio dei metodi relativi all'analisi di serie temporali ed effettivo sviluppo, e ricerca, di un metodo per l'analisi del problema posto.

Nella prima fase sono stati studiati i metodi ed applicazioni di tecniche volte allo studio di serie temporali, sia da un lato pratico che da un lato teorico. Per quanto riguarda il lato pratico, queste tecniche sono state studiate mediante la ricerca di articoli e videotutorial online sull'applicazione di esse e poi, in una fase successiva, messe in pratica con piccoli esempi mediante l'utilizzo di dataset di vario genere, forniti in maniera gratuita da siti web trovati su internet, per poterne capire meglio il funzionamento.

Per quanto riguarda il lato teorico di esse è stato necessario studiare una piccola base di statistica inferenziale ed altre nozioni generali per interpretare al meglio i risultati e le tecniche utilizzate in ambito applicativo.

Nella seconda fase si è passati alla ricerca di un metodo, che utilizzi tecniche dell'analisi di serie temporali, per risolvere il problema richiesto. Prima di essere passare allo sviluppo vero e proprio, essendo che i dati forniti erano in uno stato "grezzo", è stato necessario applicare tutte le tecniche di manipolazione dei dati come filtraggio, rinomina delle colonne, tecniche per la sostituzione di valori nulli etc ... per poter ottenere un dataset pulito e lavorabile dal punto di vista applicativo.

2 Studio dei metodi e delle applicazioni

In tale capitolo verranno spiegati i metodi, le applicazioni ed i concetti generali studiati durante la prima fase del tirocinio, durata circa 1 mese, accostando ad ogni di essi una relativa implementazione e/o utilizzo.

In primo luogo si troverà una definizione di serie temporale, seguita da una spiegazione dei metodi per manipolare i dati inerenti a serie temporali su python, le componenti principali di una serie temporale e la loro visualizzazione ed infine metodi per l'analisi di essi.

Molti degli esempi forniti in questa sezione fanno riferimento a dataset disponibili al sito “UCI Machine Learning Repository” [6] più precisamente, come esempio, è stato utilizzato un dataset relativo alla qualità dell'aria della città di Beijing [8] (Pechino).

2.1 Cos'è una serie temporale

In statistica descrittiva, una serie storica (o temporale) si definisce come un insieme di variabili casuali ordinate rispetto al tempo, ed esprime la dinamica di un certo fenomeno nel tempo. Le serie storiche vengono studiate sia per interpretare un fenomeno, individuando componenti di trend, di ciclicità, di stagionalità e/o di accidentalità, sia per prevedere il suo andamento futuro [18]. In altre parole una serie storica (o temporale) è un'insieme/serie di dati capionati ed indicizzati nel tempo ad intervalli regolari come ore, giorni o anni.

In termini più matematici: indichiamo con \mathbf{Y} il fenomeno (ad esempio il prezzo della benzina dall'anno 1970 all'anno 2010) ed indichiamo con \mathbf{Y}_t un'osservazione al tempo t , con t un numero intero compreso tra 1 a T , dove T è il numero totale degli intervalli o periodi. Una serie temporale viene espressa in questa maniera $\mathbf{Y}_t = \{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_T\}$.

Esempio (*Prezzo della benzina*). Se consideriamo come fenomeno \mathbf{Y} il prezzo della benzina dal 1970 al 2010 avremmo come numero totale di osservazioni (o numero totale di periodi) $T = 40$ dove:

- \mathbf{Y}_1 : prezzo della benzina all'anno 1970
- \mathbf{Y}_2 : prezzo della benzina all'anno 1971
- $\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}_{40}$: prezzo della benzina all'anno 2010

2.2 Metodi per la gestione dei dati

In questo sottocapitolo verranno spiegati i metodi studiati ed utilizzati per la gestione dei dati in python, più nello specifico: come caricare un dataset, una possibile rinomina delle colonne relative alle serie per una maggiore comprensione, scelta di un indice, individuazione dei valori nulli ed infine una sezione relativa al filtraggio.

Cosa viene inteso per dataset Per dataset si intende un insieme di serie (nella nostra applicazione temporali) relative ad un'unica applicazione.

Esempio (*Qualità dell'aria*). Consideriamo, per esempio, come applicazione le misurazioni di diversi parametri relativi alla qualità dell'aria di Genova: livello di CO₂, livello di SO₂, livello di NO₂ e temperatura in °C. In un dataset possiamo considerare ogni parametro come una serie temporale diversa ma indicizzata nel tempo in ugual maniera, quindi se queste misurazioni avvengono ogni ora avremo per ogni istante di tempo t le misurazioni per ogni parametro in quell'istante.

- Y_1 : livello di CO₂, SO₂, NO₂ e temperatura in °C all'istante 1.
- Y_2 : livello di CO₂, SO₂, NO₂ e temperatura in °C all'istante 2.
- ...
- Y_T : livello di CO₂, SO₂, NO₂ e temperatura in °C all'istante T .

Ogni parametro in un dataset viene rappresentato come una colonna.

Da questo momento in poi, nel report, quando si parlerà di dataset varrà inteso il tipo `pandas.DataFrame`, cioè il modo in cui un dataset viene interpretato all'interno di python, mentre per serie si intenderà il tipo `pandas.Series` oppure un semplice tipo `list` di python.

2.2.1 Pacchetti utilizzati

Per effettuare tutte le manovre relative all'elaborazione e manipolazione dei dati sono state utilizzate funzionalità fornite da pacchetti python come `pandas`, `numpy` e `scipy`, essi semplificano la scrittura di codice e velocizzano il tempo di sviluppo organizzando in maniera ottimale i dati. Per essere utilizzati essi necessitano prima di essere installati tramite il gestore di pacchetti di python `pip`.

Snippet per l'installazione dei pacchetti

```
pip install pandas
pip install numpy
pip install scipy
```

Snippet per il caricamento in python

```
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy import signal
```

2.2.2 Caricamento di un dataset

Per poter utilizzare i dati all'interno di python è stata utilizzata la funzionalità di pandas `read_csv` dove, ogni colonna fa riferimento ad una serie.

Snippet

```
dataset = pd.read_csv('data.csv')
```

2.2.3 Rinomina delle colonne relative alle serie

In qualche case, il primo passo da eseguire, è quello di rinominare le colonne relative ad ogni serie così da poter avere una rappresentazione più accurata del dataset. Tramite l'utilizzo della funzione `display` e del metodo `head` del dataset possiamo controllare i primi 5 valori di un dataset controllando anche così il nome di ogni colonna.

Snippet

```
display(dataset.head())
```

Come si può notare nell'immagine 1 i nomi delle colonne non hanno nessun nome significativo, con il seguente esempio potremmo cambiare il nome delle colonne.

Snippet

```
# definizione di una lista di nomi per le colonne del dataset
dataset.columns = [ 'no',      'year',  'month', 'day', 'hour',
```

	NaN	NaN.1	NaN.2	NaN.3	NaN.4	NaN.5	NaN.6	NaN.7	NaN.8	NaN.9	NaN.10	NaN.11	NaN.12	NaN.13	NaN.14	NaN.15	NaN.16	NaN.17
0	1	2013	3	1	0	6.0	6.0	4.0	8.0	300.0	81.0	-0.5	1024.5	-21.4	0.0	NNW	5.7	Tiantan
1	2	2013	3	1	1	6.0	29.0	5.0	9.0	300.0	80.0	-0.7	1025.1	-22.1	0.0	NW	3.9	Tiantan
2	3	2013	3	1	2	6.0	6.0	4.0	12.0	300.0	75.0	-1.2	1025.3	-24.6	0.0	NNW	5.3	Tiantan
3	4	2013	3	1	3	6.0	6.0	4.0	12.0	300.0	74.0	-1.4	1026.2	-25.5	0.0	N	4.9	Tiantan
4	5	2013	3	1	4	5.0	5.0	7.0	15.0	400.0	70.0	-1.9	1027.1	-24.5	0.0	NNW	3.2	Tiantan

Figure 1: output del metodo head prima della rinomina delle colonne

```

        'pm2_5', 'pm10', 'so2', 'no2', 'co',
        'o3', 'temp', 'pres', 'dewp', 'rain',
        'wd', 'wspm', 'station']
display(dataset.head())

```

	no	year	month	day	hour	pm2_5	pm10	so2	no2	co	o3	temp	pres	dewp	rain	wd	wspm	station
0	1	2013	3	1	0	6.0	6.0	4.0	8.0	300.0	81.0	-0.5	1024.5	-21.4	0.0	NNW	5.7	Tiantan
1	2	2013	3	1	1	6.0	29.0	5.0	9.0	300.0	80.0	-0.7	1025.1	-22.1	0.0	NW	3.9	Tiantan
2	3	2013	3	1	2	6.0	6.0	4.0	12.0	300.0	75.0	-1.2	1025.3	-24.6	0.0	NNW	5.3	Tiantan
3	4	2013	3	1	3	6.0	6.0	4.0	12.0	300.0	74.0	-1.4	1026.2	-25.5	0.0	N	4.9	Tiantan
4	5	2013	3	1	4	5.0	5.0	7.0	15.0	400.0	70.0	-1.9	1027.1	-24.5	0.0	NNW	3.2	Tiantan

Figure 2: output del metodo head dopo la rinomina delle colonne

Come si può notare nell'immagine 2 assegnando la lista delle colonne come attuali nomi per le serie del dataset riusciamo ad ottenere un'interpretazione più accurata.

2.2.4 Scelta dell'indice

Molte delle funzionalità fornite da **pandas** ed altri pacchetti python richiedono che il dataset sia indicizzato nel tempo nel corretto modo. In figura 2 si può notare che la prima colonna senza nome e la seconda colonna con nome **no**, indicano il numero di riga per ogni misurazione, la differenza è che la prima colonna è generata automaticamente dal pacchetto **pandas**, ed impostata di default come indice, mentre la seconda con nome **no** è fornita direttamente dal file csv precedentemente caricato. Per l'analisi della maggior parte delle serie temporali un'idicizzazione per numero di riga non è significativa, sarebbe molto più conveniente lavorare avendo come indice di tabella la data ed ora di ogni effettiva misurazione. A questo proposito il dataset caricato ci fornisce delle colonne (**year**, **month**, **day** e **hour**) indicizzate per tempo

e relative ad ogni misurazione, che possono essere riformattate insieme ed usate come indice per il dataset.

Snippet

```
# unificazione delle colonne relative al tempo per ogni
# istante di tempo t in una nuova colonna
new_index_column = []
for i in range(len(dataset.year)):
    new_index_column.append("%s/%s/%s %s:0:0"
        % (dataset.day[i], dataset.month[i],
            dataset.year[i], dataset.hour[i]) )

# elimina le colonne relative al tempo
del dataset["year"], dataset["month"],
    dataset["day"], dataset["hour"],
    dataset["no"]

# imposta/crea la nuova colonna date e converti in datetime
dataset['date'] = new_index_column
dataset['date'] = pd.to_datetime(dataset.date, dayfirst=True)

# imposta come index la nuova colonna date
dataset.set_index("date", inplace=True)
display(dataset.head())
```

	pm2_5	pm10	so2	no2	co	o3	temp	pres	dewp	rain	wd	wspm	station
date													
2013-03-01 00:00:00	6.0	6.0	4.0	8.0	300.0	81.0	-0.5	1024.5	-21.4	0.0	NNW	5.7	Tiantan
2013-03-01 01:00:00	6.0	29.0	5.0	9.0	300.0	80.0	-0.7	1025.1	-22.1	0.0	NW	3.9	Tiantan
2013-03-01 02:00:00	6.0	6.0	4.0	12.0	300.0	75.0	-1.2	1025.3	-24.6	0.0	NNW	5.3	Tiantan
2013-03-01 03:00:00	6.0	6.0	4.0	12.0	300.0	74.0	-1.4	1026.2	-25.5	0.0	N	4.9	Tiantan
2013-03-01 04:00:00	5.0	5.0	7.0	15.0	400.0	70.0	-1.9	1027.1	-24.5	0.0	NNW	3.2	Tiantan

Figure 3: output del metodo head dopo aver impostato l'indice

Come si può notare dall'output del metodo head nell'immagine 3 date è stato impostato come indice di tabella e quindi da questo momento in poi possiamo accedere al dataset, scegliendo le misurazioni interessate, utilizzando la data.

Periodo di campionamento Un'altra importante modifica è impostare il periodo di campionamento del dataset, in poche parole impostare un corretto indice non basta a massimizzare il corretto funzionamento delle funzionalità di analisi delle serie temporali, bisogna anche specificare l'istante di tempo che occorre tra una misurazione e l'altra. Per fare ciò **pandas** fornisce un metodo che imposta il periodo di campionamento a quello desiderato, nel nostro caso sappiamo che le misurazioni sono state campionate ogni ora.

Snippet

```
# imposta il periodo di campionamento  
# del dataset ad ogni ora  
dataset = dataset.asfreq("h")
```

2.2.5 Individuazione dei valori nulli e possibili soluzioni

La presenza di valori nulli in una serie può avere molteplici cause, ad esempio, l'impossibilità da parte dello strumento di campionare ad un certo istante di tempo t , oppure se pensiamo ad una fotocamera che acquisisce delle coordinate relative ad un soggetto, l'uscita di esso dall'obiettivo.

Indifferentemente dal motivo per cui dei valori nulli sono presenti, in una serie o un dataset, la loro presenza può causare molti problemi sia nel corretto funzionamento di alcune funzionalità per l'analisi sia perchè non avere dei valori in determinati punti della serie, in certe applicazioni, potrebbe essere un problema. **pandas** fornisce dei metodi utili, e semplici, alla soluzione di questo problema ma ovviamente ogni problema è diverso e quindi, per applicazioni specifiche, potrebbe essere necessario cercare soluzioni differenti. In questa sezione ci limitiamo a descrivere le funzionalità fornite da **pandas** per la soluzione a questo problema.

Controllo Per controllare la presenza di valori nulli **pandas** fornisce un metodo chiamato **isna** che ritorna un dataset dove, per ogni misurazione, indica **True** se la misurazione è **NaN** altrimenti **False**. Sommando i valori **True** per ogni colonna possiamo controllare quanti valori nulli sono presenti per ogni serie.

Snippet

```
# controllo valori nulli
dataset.isna().sum()

pm2_5      677
pm10       597
so2        1118
no2        744
co         1126
o3         843
temp        20
pres        20
dewp        20
rain        20
wd          78
wspm        14
station      0
dtype: int64
```

Figure 4: output della somma dei valori nulli relativi ad ogni serie del dataset

Come si può notare dall'output del comando in figura 4 il nostro dataset contiene molteplici valori nulli, ora vediamo come poter risolvere il seguente problema

Back fill o Forward fill pandas fornisce la possibilità di “riempire” i valori nulli in due diverse modalità tramite l'utilizzo del metodo `fillna`

- **Back fill:** permette di sostituire i valori nulli con la successiva misurazione valida.
- **Forward fill:** permette di sostituire i valori nulli propagando l'ultima valida misurazione alla prossima valida.

Entrambi i metodi gestiscono i valori nulli più o meno nella stessa maniera ma la scelta di uno piuttosto che l'altro cambia da caso in caso dipendentemente dal risultato ottenuto dopo l'utilizzo di essi.

Per i nostri esempi il risultato nell'utilizzo di un metodo piuttosto che l'altro portava comunque ad un risultato soddisfacente.

Snippet

```
# rimpiazzamento dei valori nulli
# mediante il metodo di forward fill
dataset = dataset.fillna(method="ffill")
dataset.isna().sum()
```

```
pm2_5      0
pm10       0
so2         0
no2         0
co          0
o3          0
temp        0
pres        0
dewp        0
rain        0
wd          0
wspm        0
station     0
dtype: int64
```

Figure 5: output della somma dei valori nulli relativi ad ogni serie del dataset dopo l'utilizzo del metodo `fillna`.

Interpolazione Un possibile metodo, non fornito dalle funzionalità del pacchetto `pandas`, che potrebbe essere utilizzato è quello di interpolare i dati così da poter colmare i vuoti creati dai valori nulli. Questa funzionalità non è stata sviluppata in quanto non fine allo scopo di questo tirocinio ma, in certe applicazioni, si potrebbe voler utilizzare una metodologia basata su questa tecnica per ottenere una rappresentazione più accurata dei dati.

Altro metodo non convenzionale Un altro metodo non convenzionale, non presente tra le funzionalità fornite, è quello di poter eliminare i valori nulli dalle serie semplicemente eliminandoli. Ovviamente questo concetto di eliminare una misurazione nulla va contro a tutte le premesse fatte fino ad ora, non avendo così una “reale” serie temporale poichè mancherebbe una misurazione ad un determinato istante di tempo t , e molte delle analisi che si vorrebbero poter fare su una serie risulterebbero inapplicabili. Tuttavia, in qualche applicazione particolare (come vedremo in seguito), una funzionalità che semplicemente elimina i valori nulli da una serie potrebbe tornare comoda.

Snippet

```
import math as math # import del pacchetto math

def delete_nan(series: pd.Series | list):
    """ elimina i valori nulla da una serie
    """
    new_series = []
    for idx, value in enumerate(series):
        if not math.isnan(value):
            new_series.append(value)
    return np.array(new_series)
```

2.2.6 Filtraggio

Nella maggior parte dei casi quando si parla di serie temporali fonite direttamente da apparecchiature che eseguono le misurazioni, i dati si presentano in maniera “grezza” ed è quindi necessario filtrarli per poter rimuovere una buona parte del rumore presente. Questo passaggio è molto importante se parliamo di dati non elaborati in quanto avere del rumore in una serie temporale o, più in generale, in qualsiasi tipo di segnale, porta a leggere delle misurazioni “false”. Solitamente il rumore indesiderato risiede nelle frequenze alte del segnale, quindi, a questo proposito, vediamo come poter filtrare una sorgente “grezza” di dati mediante l’utilizzo del modulo `signal` del pacchetto `scipy`.

Filtro di Butterworth Per poter rimuovere una buona parte del rumore, come scelta generale, in questo tirocinio, si è utilizzato il filtro di Butterworth che permette di regolare parametri come la frequenza di taglio e l’inclinazione (slope) della curva di taglio.

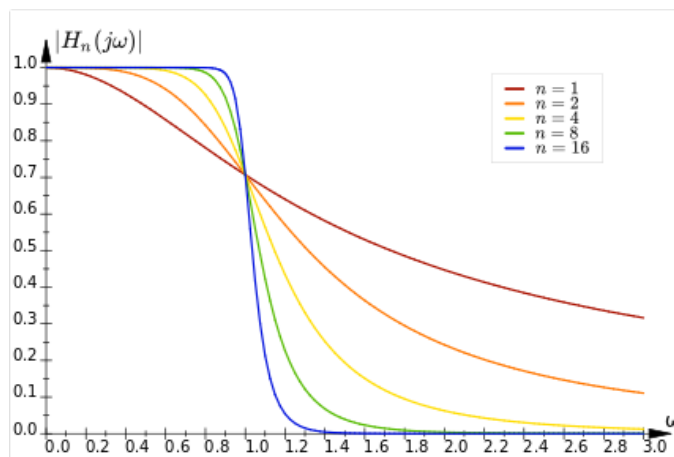


Figure 6: Filtro di Butterworth normalizzato.

Per poter apprezzare la differenza tra un segnale filtrato da un segnale “grezzo” seguirà un esempio su come questo filtro possa essere applicato tramite l'utilizzo delle funzionalità fornite dal modulo precedentemente citato.

Esempio (Utilizzo del filtro di Butterworth). Consideriamo un segnale la cui distanza tra ogni misurazione è di $\frac{1}{30}$ di secondo, presenta una frequenza di campionamento di 30Hz.

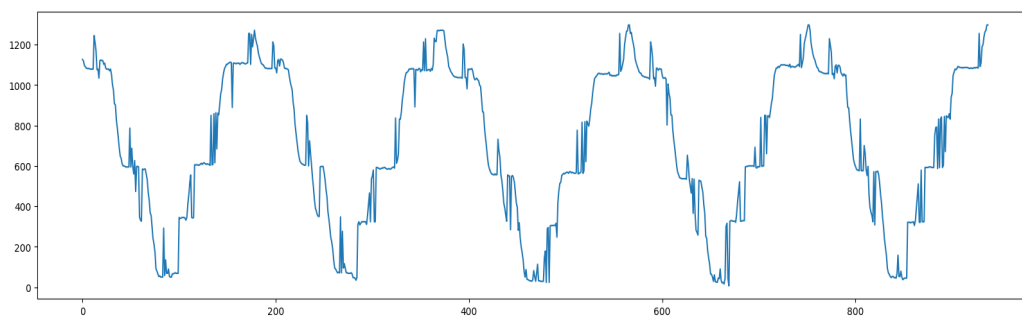


Figure 7: Segnale non filtrato.

In figura 7 possiamo notare come nel segnale in questione sia presente parecchio rumore, facilmente visibile da tutti i picchi presenti nel grafico. Provi-

amo ad applicare il filtro di Butterworth con una frequenza di taglio sulle 2Hz ed un'inclinazione della curva di taglio di 5, lasciando così passare le basse frequenze.

Snippet

```
# slope/inclinazione della curva di taglio
inclinazione = 5

# frequenza di taglio
frequenza_taglio = 2

# frequenza di campionamento
frequenza_di_campionamento = 30

# creazizione del filtro di Butterworth
b, a = signal.butter(inclinazione,
                    frequenza_taglio,
                    fs=frequenza_di_campionamento)

# applicazione del filtro sul segnale
segnale_filtrato = signal.filtfilt(b, a, series)
```

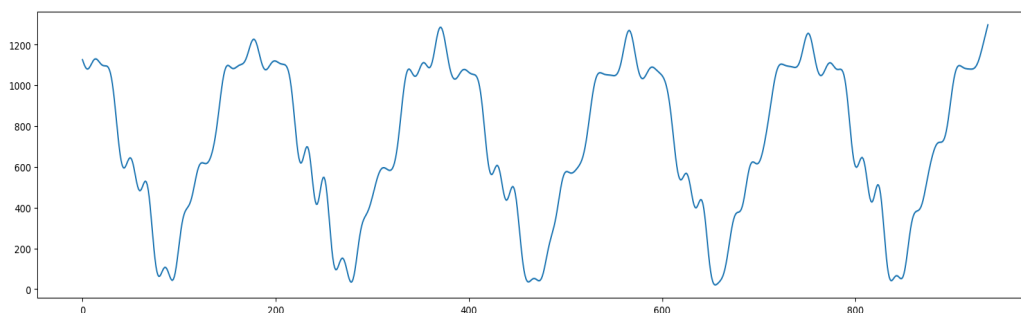


Figure 8: Segnale filtrato.

In figura 8 viene rappresentato il segnale dopo l'applicazione del filtro passa basse di Butterworth, come si può notare una buona parte del rumore non è più presente e non avendo i picchi presentati nella sua versione non filtrata.

Scelta dei parametri e del filtro Dipendendtemente dal tipo di filtraggio che si vuole ottenere conviene applicare un filtro piuttosto che un altro e la sua relativa scelta dei parametri cambia da applicazione ad applicazione e dal tipo di risultato che si vuole ottenere.

2.3 Componenti di una serie temporale

In questo sottocapitolo ci soffermeremo a spiegare le componenti principali che compongono una serie temporale per poterne analizzare l'andamento e/o eventuali pattern ricorrenti sull'intera serie.

Molte volte è utile suddividere una serie temporale in più diverse componenti distinte per poter analizzare singolarmente il loro comportamento e riuscire ad inferire sul generale andamento della serie. Possiamo quindi pensare ad una serie temporale come un insieme di 3 componenti principali: Trend (andamento/tendenza), Stagionalità e Residui (più comunemente detta Noise).

2.3.1 Trend

La componente di trend è un pattern nei dati che mostra che mostra il movimento (andamento) di una serie verso valori relativamente più alti o più bassi in un lungo periodo di tempo. In altre parole, si osserva una tendenza quando la serie temporale presenta una pendenza crescente o decrescente. La tendenza di solito si verifica per un certo periodo di tempo e poi scompare, non si ripete. Ad esempio, una nuova canzone, che diventa di tendenza per un po' di tempo e poi scompare. Non c'è alcuna possibilità che torni in tendenza [7]. Il trend potrebbe essere:

- **Uptrend:** L'analisi delle serie temporali mostra un andamento generale al rialzo, quindi si tratta di Uptrend.
- **Downtrend:** L'analisi delle serie temporali mostra un andamento al ribasso, quindi si tratta di un downtrend.
- **Trend orizzontale o stazionario:** Se non si osserva alcun pattern, si parla di trend orizzontale o stazionario.

Nella pratica il trend viene calcolato utilizzando delle tecniche di smoothing come *moving average* (questo argomento verrà successivamente trattato in una sezione dedicata) e quindi stimato.

Esempio (esempio pratico di trend). Consideriamo come serie temporale una serie la cui per ogni osservazione abbiamo la media giornaliera delle temperature nella città di Beijing a partire dal 01/01/2013 al 01/01/2017.

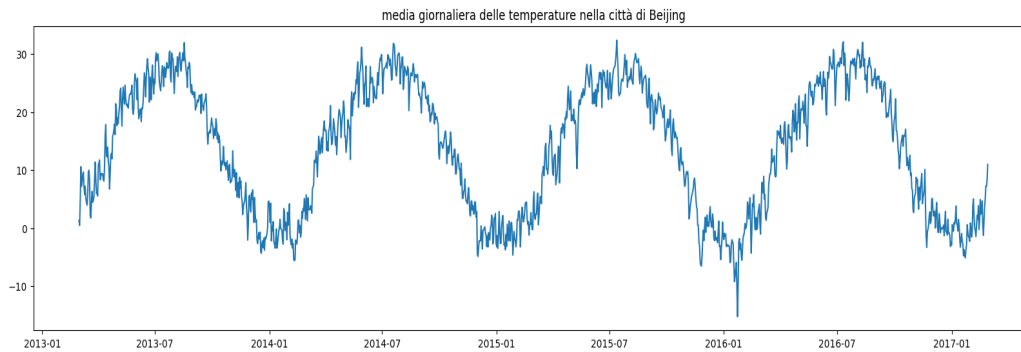


Figure 9: Media giornaliera delle temperature nella città di Beijing.

Consideriamo ora un periodo di un anno (365 giorni) il trend avrà un grafico come il seguente

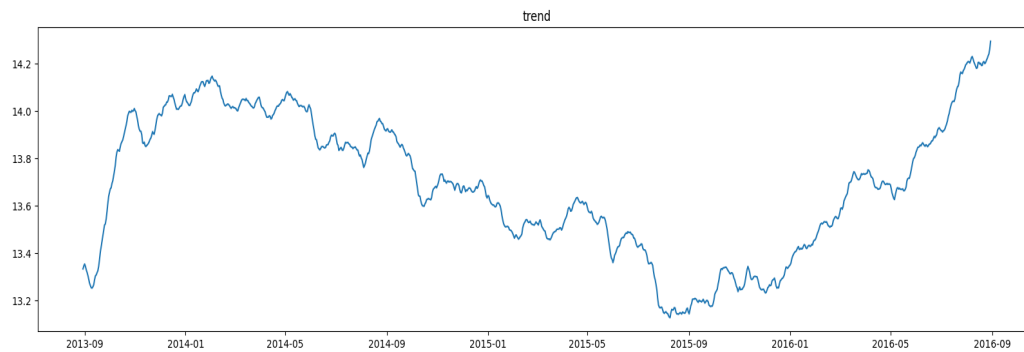


Figure 10: Trend della media giornaliera delle temperature nella città di Beijing.

Per poter capire meglio il grafico in figura 10 pensiamo che oggi sia il 01/01/2014 e volgiamo sapere, con periodo un anno, il trend. Quello che facciamo è prendere i precedenti 365 giorni e ne calcoliamo la media, se è positiva abbiamo un trend crescente, se negativa abbiamo un trend decrescente mentre se è 0 allora abbiamo un trend orizzontale. Se eseguiamo questo passaggio per ogni giornata otteniamo il grafico in figura 10.

2.3.2 Stagionalità

La stagionalità è un aspetto cruciale dell'analisi delle serie temporali. Poiché le serie temporali sono indicizzate in avanti nel tempo, sono soggette a fluttuazioni stagionali. Ad esempio, ci aspettiamo che le vendite di gelati siano maggiori nei mesi estivi e minori in quelli invernali.

La stagionalità può manifestarsi in diversi intervalli di tempo, come giorni, settimane o mesi. La chiave per l'analisi delle serie temporali è capire come la stagionalità influisce sulle nostre serie [3].

In sintesi possiamo quindi pensare alla stagionalità come un pattern che si ripete ad intervalli/periodi specifici nel tempo.

Esempio (esempio pratico di stagionalità). Se consideriamo come serie temporale, la stessa medesima serie utilizzata precedentemente nell'esempio sopra del trend, quindi una serie la cui ogni osservazione indica la media giornaliera delle temperature nella città di Beijing a partire dal 01/01/2013 al 01/01/2017

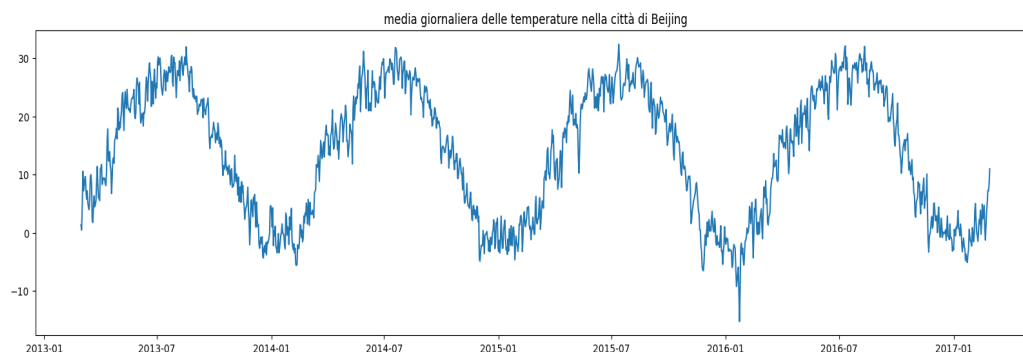


Figure 11: Media giornaliera delle temperature nella città di Beijing.

e consideriamo un periodo di un anno (365 giorni) la stagionalità avrà un grafico come il seguente

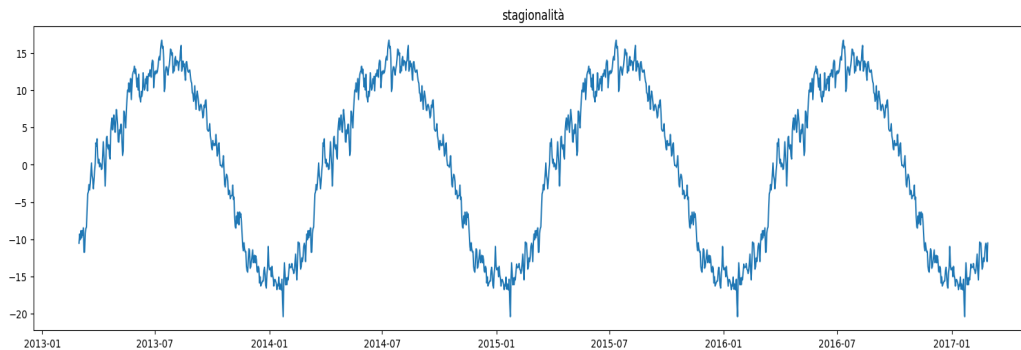


Figure 12: Stagionalità della media giornaliera delle temperature nella città di Beijing.

2.3.3 Residui

La componente di residui, o più comunemente detta noise, può essere considerata come la parte restante tra il trend e la stagionalità, quindi una sorta di errore.

Un metodo per poter capire meglio come rappresenta la componente di residui è considerare, ad esempio, una serie temporale con trend orizzontale e nessun pattern stagionale, ed applicare la definizione di residui, quindi tutto quello che rimane tolto il trend e la stagionalità.

Esempio (esempio pratico di stagionalità). Se consideriamo la serie temporale utilizzata negli esempi del trend e della stagionalità, la componente dei residui avrà un grafico come il seguente

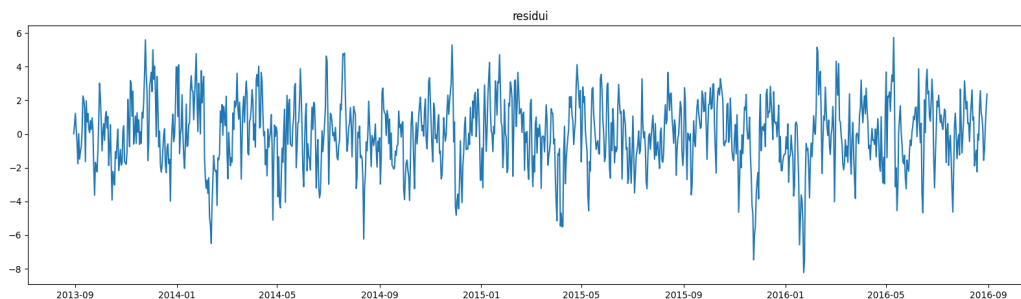


Figure 13: Residui della media giornaliera delle temperature nella città di Beijing.

2.3.4 Decomposizione di una serie

Esistono due modalità distinte per la decomposizione di una serie temporale nelle sue 3 componenti principali. La prima modalità è detta additiva in cui le componenti vengono semplicemente sommate, mentre la seconda è detta moltiplicativa dove le componenti, come suggerisce il termine, vengono moltiplicate.

Decomposizione additiva Una decomposizione additiva consiste nella somma delle componenti. Se consideriamo una serie temporale ad un istante t allora essa sarà composta da

$$y_t = S_t + T_t + R_t$$

dove y_t è l'osservazione, S_t è la componente di stagionalità, T_t è la componente di Trend ed R_t è la componente dei residui, tutti all'istante di tempo t .

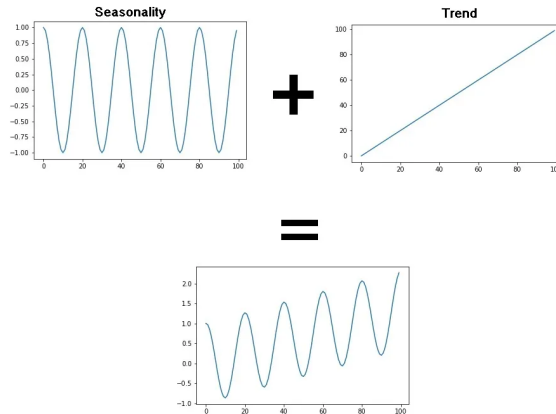


Figure 14: Decomposizione additiva (escluso residui). [ref imag [4]]

Decomposizione moltiplicativa Una decomposizione moltiplicativa consiste nella moltiplicazione delle componenti. Se consideriamo una serie temporale ad un istante t allora essa sarà composta da

$$y_t = S_t \times T_t \times R_t$$

dove y_t è l'osservazione, S_t è la componente di stagionalità, T_t è la componente di Trend ed R_t è la componente dei residui, tutti all'istante di tempo t .

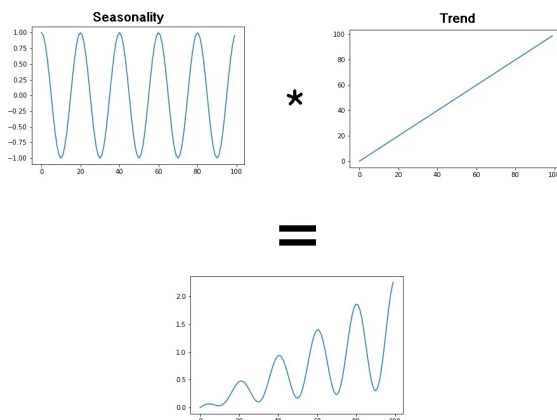


Figure 15: Decomposizione moltiplicativa (escluso residui). [ref imag [4]]

Scelta della modalità di decomposizione La scelta della modalità di decomposizione di una serie temporale è importante poiché la sua decomposizione potrebbe apparire insensata scelta la modalità sbagliata. Una decomposizione additiva è principalmente appropriata se il magnitudo della stagionalità non varia con il livello della serie temporale mentre se, la variazione della componente di stagionalità, appare proporzionale al livello della serie una modalità moltiplicativa potrebbe essere più appropriata.

Decomposizione in python Vediamo ora come poter decomporre una serie temporale utilizzando la funzione `seasonal_decompose` fornita dalle funzionalità del pacchetto `statsmodels`.

Installazione del pacchetto

```
pip install statsmodels
```


Snippet

```
# import del pacchetto
from statsmodels.tsa.seasonal import seasonal_decompose

# periodo utilizzato per il calcolo di trend e stagionalità
periodo = 365

# decomposizione della serie
decomposition = seasonal_decompose(serie, period=periodo)

trend    = decomposition.trend      # trend
stag     = decomposition.seasonal  # stagionalità
residui  = decomposition.resid     # residui
```

2.4 Stazionarietà

In questo sottocapitolo verrà spiegato il concetto di stazionarietà di una serie temporale e come poter capire se la serie interessata sia stazionaria.

Stazionarietà di una serie temporale Per essere stazionaria una serie temporale deve soddisfare una lista di requisiti:

1. **Media costante nel tempo:** La media della serie non deve essere una funzione del tempo. Il grafico rosso, in figura 16, non è stazionario perché la media aumenta nel tempo [5].

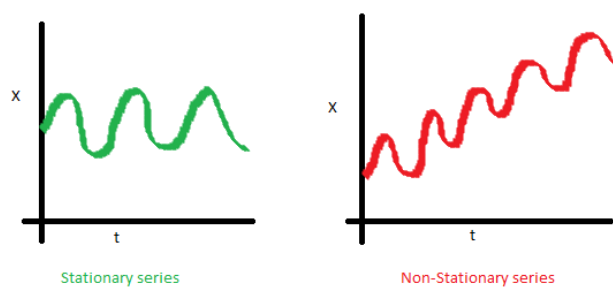


Figure 16: Media non costante nel tempo.

2. **Varianza costante nel tempo:** La varianza della serie non deve essere funzione del tempo. Questa proprietà è nota come omoscedasticità. Nel grafico rosso, in figura 17, si noti la variazione della varianza dei dati nel tempo [5].

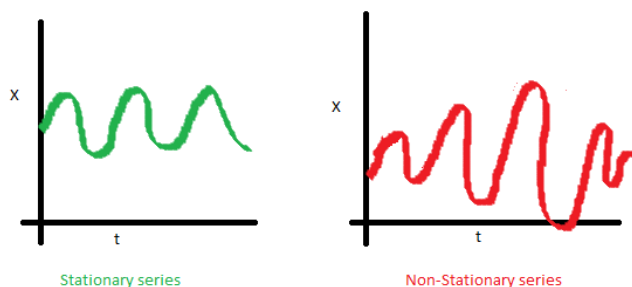


Figure 17: Varianza non costante nel tempo.

3. **Covarianza costante nel tempo:** Infine, la covarianza del termine i e del termine $(i+m)$ non deve essere funzione del tempo. Nel grafico, in figura 18, si può notare che lo spread diventa più vicino all'aumentare del tempo. Pertanto, la covarianza non è costante nel tempo per la “serie rossa” [5].

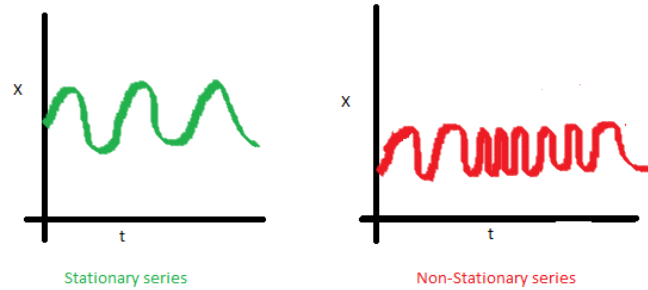


Figure 18: Covarianza non costante nel tempo.

Per capire meglio il concetto di covarianza costante nel tempo consideriamo una sequenza di variabili casuali, esse si definiscono con stazionarietà debole o stazionarietà della covarianza se:

- Tutti i termini della sequenza hanno la stessa media.
- La covarianza tra due termini qualsiasi della sequenza dipende solo dalla posizione relativa dei due termini e non dalla loro posizione assoluta.

Per posizione relativa di due termini si intende la distanza che li separa l'uno dall'altro nella sequenza mentre per posizione assoluta, si riferisce al punto in cui si trovano nella sequenza [11].

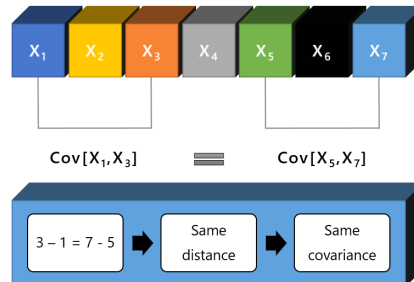


Figure 19: Stazionarietà della covarianza.

L'importanza di una serie stazionaria L'importanza di avere una serie temporale stazionaria deriva dal fatto che molti dei teoremi che a livello statistico valgono per le variabili casuali indipendenti valgono anche per variabili casuali stazionarie [5].

2.4.1 Dickey Fuller Test

Ci sono due modi per verificare la stazionarietà di una serie temporale. Il primo consiste nell'osservare i dati. Visualizzando i dati dovrebbe essere facile identificare una variazione della media o una variazione dei dati. Per una valutazione più accurata esiste il test di Dickey-Fuller [5].

In statistica, il test di Dickey Fuller verifica l'ipotesi nulla della presenza di una radice unitaria in un modello autoregressivo di una serie temporale. L'ipotesi alternativa è diversa a seconda della versione del test utilizzata, ma di solito è la stazionarietà o la trend-stazionarietà [19].

Modello autoregressivo Senza scendere troppo nei dettagli matematici diamo solamente la definizione di cos'è un modello autoregressivo: In statistica, econometria ed elaborazione dei segnali, un modello autoregressivo (AR) è una rappresentazione di un tipo di processo casuale; come tale, viene utilizzato per descrivere alcuni processi variabili nel tempo in natura, economia, comportamento, ecc. Un semplice modello AR è

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

dove y_t è la nostra osservazione all'istante di tempo t , ρ è un coefficiente e u_t è l'errore (assunta essere white noise, quindi stazionaria) [19].

In altre parole se pensiamo alla nostra serie temporale ogni osservazione ad istante t dipende da un numero arbitrario osservazioni precedenti più un errore.

Utilizzo del test nella pratica Per poter utilizzare questo test nella pratica verranno sfruttate le funzionalità del modulo `statsmodels.tsa.stattools` fornite dal pacchetto `statsmodels` precedentemente utilizzato. Più precisamente la funzione fornita dal modulo è il test di "Dickey-Fuller aumentato" che fornisce un numero negativo, questo più è negativo tanto maggiore è il rifiuto dell'ipotesi nulla che esista una unit root ad un certo livello di confidenza [12].

Snippet

```
# import del modulo stattools
import statsmodels.tsa.stattools as sts

# esecuzione del test
adf = sts.adfuller(serie)

# test statistic
print('T-stat      : {}'.format(adf[0]))

# p-value
print('P-value     : {}'.format(adf[1]))

# numero di osservazioni utilizzate
print('n-val-used: {}'.format(adf[3]))

# valori critici
print('Valori critici:')
print('\t1%      : {}'.format(adf[4]["1%"]))
print('\t5%      : {}'.format(adf[4]["5%"]))
print('\t10%     : {}'.format(adf[4]["10%"]))
```

T-stat : -2.026639644095428
P-value : 0.27501605636147636
n-val-used: 1455
Valori critici:
1% : -3.4348523191002123
5% : -2.8635284734563364
10% : -2.567828646449617

Figure 20: Output dello snippet sopra indicato (augmented dickey Fuller test).

In questo caso facendo riferimento all'output ottenuto, in figura 20, il valore interessato è **T-stat**, esso è da confrontare con i valori delle variabili relative alle percentuali di valore critico. Per ogni valore critico controlliamo se **T-stat** è maggiore o minore, nel nostro caso **T-stat** è maggiore del valore critico che si riferisce al 10% quindi si ha più del 10% di possibilità che la nostra ipotesi nulla non sia rifiutata. In altre parole abbiamo più del 10% di

possibilità che la nostra serie temporale non sia stazionaria. Solitamente per considerare una serie temporale stazionaria si necessita almeno di 5% quindi un livello di confidenza (che il test rifiuti l'ipotesi nulla e che quindi vede la nostra serie stazionaria) del 95%. Per semplificarci la vita possiamo direttamente controllare il valore di **p-value** (valore compreso tra $0 < \text{p-value} < 1$), se esso risulta minore di 0.05 possiamo considerare la serie stazionaria.

Come rendere una serie stazionaria Nel caso ci trovassimo di fronte ad una serie temporale non stazionaria esistono diverse tecniche per renderla stazionaria. Una delle tecniche più comuni, e che solitamente funziona per molte applicazioni, è calcolare la prima differenza (differenza di prim'ordine). Se consideriamo come Y una serie temporale e con \hat{Y} la medesima dopo aver calcolato la prima differenza ogni osservazione di essa sarà definita come

$$\hat{y}_t = y_{t+1} - y_t$$

dove \hat{y}_t è un'osservazione di \hat{Y} ed y_t un'osservazione di Y , ad un istante di tempo t .

2.5 Smoothing

In questa sezione parleremo di alcuni dei metodi che permettono di “levigare” le serie temporali così da poter essere successivamente analizzate.

2.5.1 Moving average

In statistica, la moving average (media mobile), chiamata anche rolling mean, è un calcolo che consente di analizzare dei dati creando una serie di medie di diversi sottoinsiemi dell’insieme dei dati.

Data una serie di numeri e un sottoinsieme fisso spesso chiamato finestra (window), il primo elemento della media mobile si ottiene prendendo la media del sottoinsieme fisso iniziale della serie di numeri. Poi il sottoinsieme finestra viene modificato “spostandosi in avanti”, escludendo il primo numero della serie e includendo il valore successivo nel sottoinsieme [16].

Da un punto di vista matematico se consideriamo Y la serie originale e \hat{Y} la sua rolling mean serie, e definiamo k dimensione della finestra, numero intero positivo, le osservazioni per ogni punto della rolling mean sono definite da

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k y_{t-n}$$

con \hat{y}_t e y_t rispettivamente osservazioni della rolling mean serie e della serie originale all’istante di tempo t .

Snippet

```
def rolling_mean(serie: list | pd.Series, window: int):  
  
    # controllo della finestra  
    if window <= 0 and not isinstance(window, int):  
        raise Exception('la finestra deve essere un \  
            numero intero > 0')  
  
    # nuova rolling serie  
    rolling_serie: list = []
```

```

# calcolo della rolling mean
for i in range(len(serie) - (window-1)):

    # calcolo singolo y hat
    rolling_serie.append( np.mean(serie[i: i + (window)]) )

return rolling_serie \
    if not isinstance(serie, pd.Series) \
    else pd.Series(
        rolling_serie,
        index=serie.index[(window-1)//2 : -(window-1)//2])

```

Esempio (Diversi valori per la finestra). Consideriamo come esempio la serie che descrive la media giornaliera delle temperature nella città di Benjing. Se applichiamo la funzione di rolling mean con diversi valori per la finestra, otterremmo dei grafici come quelli mostrati in figura 21.

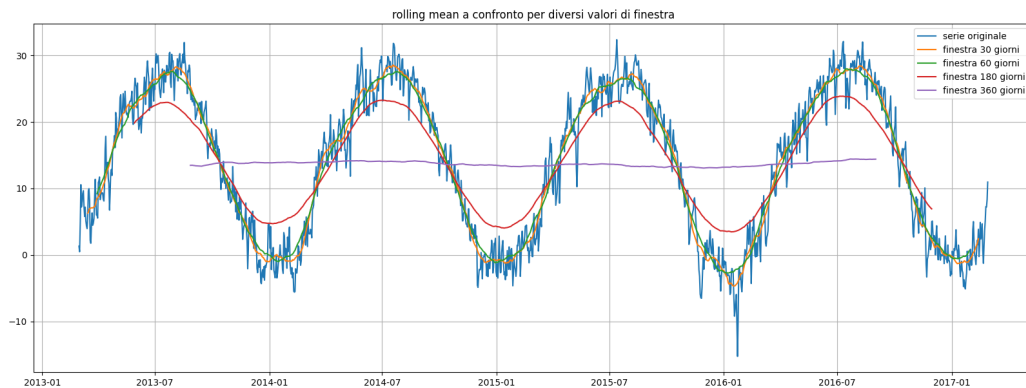


Figure 21: Funzione di rolling mean applicata a diversi valori per la finestra.

2.5.2 Exponential

Lo smoothing esponenziale è una tecnica di regola empirica per “levigare” i dati delle serie temporali utilizzando la funzione finestra esponenziale. Mentre nella rolling mean semplice le osservazioni passate vengono ponderate in modo uguale, le funzioni esponenziali vengono utilizzate per assegnare pesi esponenzialmente decrescenti nel tempo. Si tratta di una procedura di facile apprendimento e di facile applicazione per effettuare alcune determinazioni

basate su ipotesi precedenti dell'utente, come la stagionalità [15].

Da un punto di vista matematico se consideriamo Y la serie originale e \hat{Y} la sua exponential smoothing serie, dove $\hat{y}_0 = y_0$, cioè la prima osservazione della exponential smoothing serie è inizializzata con il primo valore della serie originale, allora le osservazioni successive per ogni punto della exponential smoothing serie sono definite come

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_{t-1}$$

con α numero intero positivo devinito nell'intervallo $0 < \alpha < 1$, \hat{y}_t e y_t rispettivamente osservazioni della exponential smoothing serie e della serie originale all'istante di tempo t definito in $t \in [1, \dots, N]$ con N numero totale delle osservazioni della serie originale.

Snippet

```
def smooth_exponential(serie: list | pd.Series, alpha: float):  
  
    # controllo per alpha  
    if not isinstance(alpha, float) or alpha < 0 or alpha > 1:  
        raise Exception("alpha deve essere \  
            nell'intervallo 0 < alpha < 1")  
  
    # calcolo della exponential serie  
    result = [serie[0]]  
    for n in range(1, len(serie)):  
        result.append(  
            alpha * serie[n] + (1 - alpha) * result[n - 1])  
  
    return result \  
        if not isinstance(serie, pd.Series) \  
        else pd.Series(result, index=serie.index)
```

Esempio (Diversi valori per alpha). Consideriamo come esempio la serie che descrive la media giornaliera delle temperature nella città di Benjing. Se applichiamo la funzione di exponential smoothing per diversi valori di alpha, otterremmo dei grafici come quelli mostrati in figura 22.

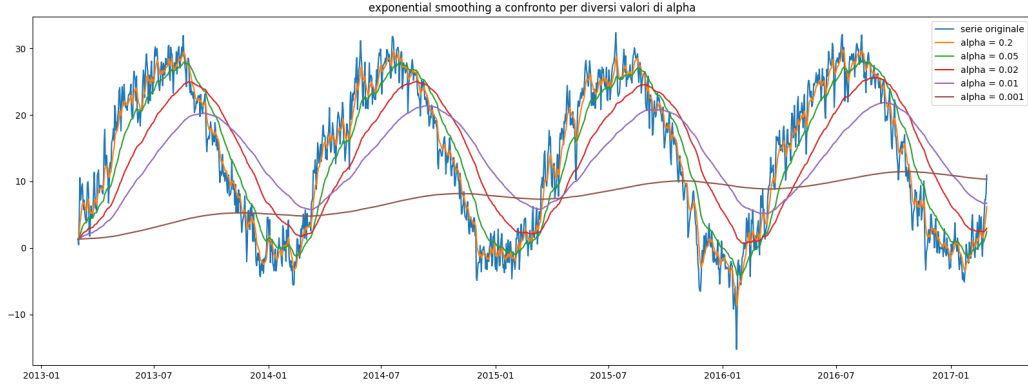


Figure 22: Funzione di exponential smoothing applicata a diversi valori di α .

2.5.3 Double Exponential

La tecnica di double exponential smoothing viene utilizzata nella previsione delle serie temporali quando i dati hanno una tendenza lineare ma non un andamento stagionale [10]. Questo tipo di smoothing utilizza lo stesso parametro α della tecnica di exponential smoothing vista precedentemente più un ulteriore parametro β che regola l'ammontare della componente di trend.

La decomposizione della serie ci aiuterà, quindi otteniamo così due componenti: il livello ed il trend. Con la funzione di exponential smoothing precedente abbiamo imparato a prevedere il livello; ora applicheremo lo stesso exponential smoothing al trend, assumendo che la direzione futura delle variazioni della serie temporale dipenda dalle variazioni precedenti. Di conseguenza, otterremmo le seguenti serie di funzioni [9]:

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 &= y_0 \\ \ell_0 &= y_0 \\ b_0 &= y_1 - y_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\ \hat{y}_{t+1} &= \ell_t + b_t\end{aligned}$$

dove α , β sono interi positivi nell'intervallo $(0, 1)$, ℓ_t componente che regola il livello, b_t componente che regola il trend, ed infine \hat{y}_t , y_t rispettivamente osservazioni all'istante di tempo t della double exponential serie \hat{Y} e della serie originale Y .

Esempio (Diversi valori per α). Consideriamo come esempio la serie che descrive la media giornaliera delle temperature nella città di Benjing. Se applichiamo la funzione di double exponential smoothing per diversi valori di α e β , otterremmo dei grafici come quelli mostrati in figura 23 e 24.

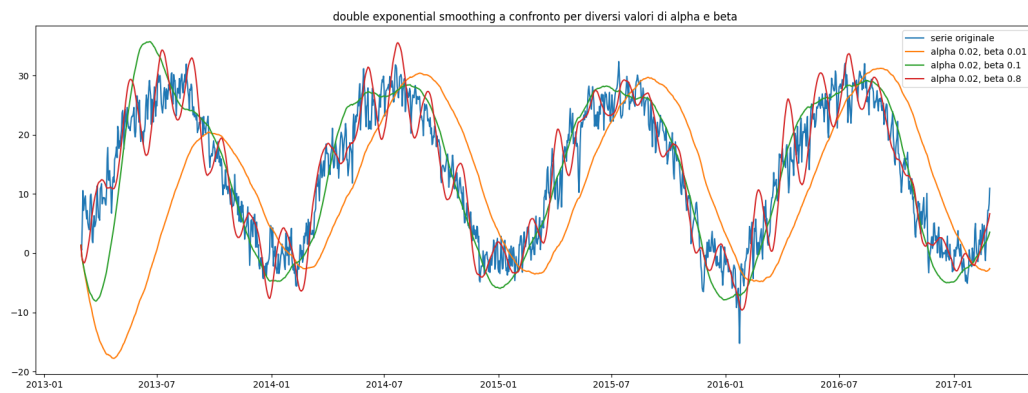


Figure 23: Funzione di double exponential smoothing applicata a diversi valori di α e β .

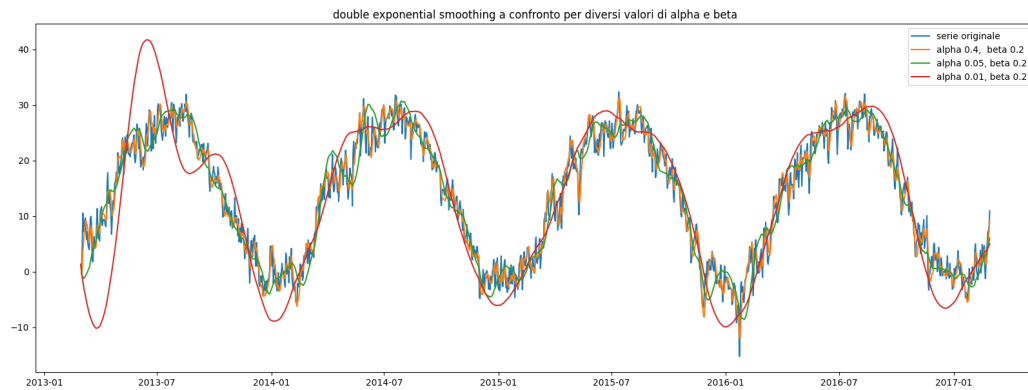


Figure 24: Funzione di double exponential smoothing applicata a diversi valori di α e β .

2.6 Autocorrelazione ed Autocorrelazione parziale

In questa sezione verranno presentate le funzioni di autocorrelazione ed autocorrelazione parziale utilizzate nell'analisi di serie temporali per poter trovare pattern e la correlazione diretta o indiretta della serie con una sua versione spostata lungo l'asse temporale.

Nota che per molte applicazioni (come l'analisi di pattern) che utilizzano le funzioni di autocorrelazione ed autocorrelazione parziale, le serie temporali devono essere stazionarie.

2.6.1 Funzione di Autocorrelazione

L'autocorrelazione definisce il grado di dipendenza tra i valori assunti da una funzione campionata nel suo dominio in ascissa.

Se è dimostrata l'autocorrelazione tra due valori, al cambiare delle peculiarità di uno di essi varierà anche l'altro.

L'autocorrelazione è uno strumento matematico usato frequentemente nella teoria dei segnali per l'analisi di funzioni o di serie di valori. Essa è la correlazione del segnale (o più in generale del valore di una variabile) con se stesso; in altre parole il segnale all'istante di tempo t viene confrontato con un altro valore di se stesso ritardato di una quantità τ (senza tale ritardo il segnale è logicamente sempre uguale) per verificare quanto si somigli (più precisamente quanto si correli) all'avanzare del tempo. Possiamo dedurre che se un segnale varia lentamente nel tempo, il valore degli istanti $y(t)$ e $y(t + \tau)$ sarà pressoché simile (l'autocorrelazione avrà segno positivo), mentre se varia rapidamente, il valore di tali istanti sarà molto diverso e l'autocorrelazione assume un valore prossimo allo zero. L'autocorrelazione si utilizza spesso per cercare porzioni periodiche che si ripetono all'interno di un segnale, in modo tale da determinare la presenza di un segnale periodico che è stato sepolto da un rumore, o identificare la frequenza fondamentale di un segnale [14].

Informalmente, è la somiglianza tra le osservazioni di una variabile casuale in funzione dell'intervallo di tempo che le separa [13].

Definizione matematica

Caso continuo Dato un segnale $f(t)$ continuo ed indicizzato nel tempo, l'autocorrelazione $R_{ff}(\tau)$ è definita come la cross-correlazione di $f(t)$ con se

stesso avente un ritardo di τ

$$R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \overline{f(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t - \tau)} dt$$

dove $\overline{f(t)}$ indica il complesso coniugato di $f(t)$. Nota come il parametro t nell'integrale è una variabile fittizia ed è solo necessaria a calcolare l'integrale. Non ha un significato specifico [13].

Caso discreto Nel caso discreto la funzione di autocorrelazione è definita come:

$$R_{ff}(\tau) = \mathbb{E} \left[f(t) \overline{f(t - \tau)} \right] = \mathbb{E} \left[f(t + \tau) \overline{f(t)} \right]$$

Normalizzazione del caso discreto La normalizzazione della funzione di autocorrelazione nel caso discreto ci fornisce la possibilità di avere una visualizzazione con valori compresi tra $[-1, 1]$. Sottraendo la media prima della moltiplicazione si ottiene la funzione di autocovarianza

$$K_{ff}(\tau) = \mathbb{E} \left[(f(t + \tau) - \mu) \overline{(f(t) - \mu)} \right] = \mathbb{E} \left[f(t + \tau) \overline{f(t)} \right] - \mu \bar{\mu}$$

dove μ è la media.

La funzione di autocorrelazione normalizzata viene definita come

$$\rho_{ff}(\tau) = \frac{K_{ff}(\tau)}{\sigma^2} = \frac{\mathbb{E} \left[(f(t + \tau) - \mu) \overline{(f(t) - \mu)} \right]}{\sigma^2}$$

Implementazione della funzione di autocorrelazione ed esempi Vediamo ora come poter implementare la funzione di autocorrelazione (normalizzata).

Snippet (*shift di una funzione*)

```
def shift(X, n):
    """ Shifta di n periodi la funzione X
    """
```

```

# controllo per n
if not isinstance(n, int):
    raise Exception('n deve essere un valore intero')

X_copy = X.copy() # copia e rendi numpy array
if not isinstance(X_copy, np.ndarray):
    X_copy = np.array(X_copy)

# se si shifta troppo impostiamo n
# alla lunghezza della funzione X
if np.abs(n) > len(X):
    n = np.sign(n) * len(X)

# dato n shiftiamo la funzione verso sinistra
# dato -n shiftiamo la funzione verso destra
for i in range(np.abs(n)):
    # togliamo il primo o l'ultimo valore
    # in base a dove vogliamo shiftare
    X_copy = X_copy[1:] if np.sign(n) == 1 else X_copy[:-1]

    # shifta la funzione aggiungendo uno
    # 0 in testa o in coda in base a dove
    # vogliamo shiftare
    X_copy = np.insert(X_copy, 0 if np.sign(n) == -1
                       else len(X_copy), 0)

return X_copy.tolist() if not isinstance(X, np.ndarray) \
    else np.array(X_copy)

```

Snippet (singola autocorrelazione)

```

def singola_autocorrelazione(X: list | np.ndarray,
tau: int, normalizzazione = True) -> float:

    """ Esegue una singola autocorrelazione data la latenza
        tau
    """

```

```

# controllo per tau
if not isinstance(tau, int) and tau < 0:
    raise Exception('tau deve essere un intero \
    maggiore di 0')

# controllo che X sia un array numpy
if not isinstance(X, np.ndarray):
    X = np.array(X)

if normalizzazione:
    mean = X.mean()
    var = X.var()

    #  $f(t-\tau) - \mu$ 
    primo_termine = shift(X - mean, -tau)

    #  $\text{coniugato}(f(t) - \mu)$ 
    secondo_termine = np.conjugate(X - mean)

    # ... /  $\sigma^2$ 
    return np.mean( primo_termine * secondo_termine ) / var

# aspettazione[  $f(t-\tau) * \text{coniugato}(f(t))$  ]
return np.mean( shift(X, -tau) * np.conjugate(X) )

```

Snippet *(funzione di autocorrelazione)*

```

def funzione_autocorrelazione(
    X: list | np.ndarray,
    norm = True
) -> list | np.ndarray:

    """ calcola la funzione di autocorrelazione
    """

    autocorrelazione: list = []
    # calcola la autocorrelazione singola per ogni
    # possibile tau

```

```

for i in range(len(X)):
    autocorrelazione.append(
        singola_autocorrelazione(X, i,
            normalizzazione=norm)
    )

return autocorrelazione if not isinstance(X, np.ndarray) \
    else np.array(autocorrelazione)

```

Esempio (Autocorrelazione). Prendiamo come esempio un segnale la cui velocità cambia di “poco” nel tempo.

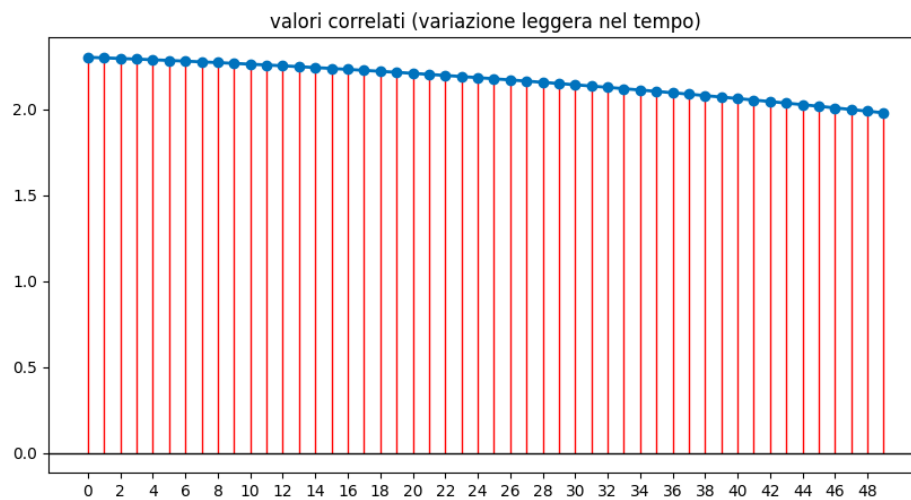


Figure 25: Autocorrelazione del segnale.

In figura 25 possiamo notare come l'autocorrelazione non normalizzata del segnale varia di poco nel tempo per segnali che variano lentamente.

Consideriamo ora più segnali la cui velocità cresce velocemente nel tempo.

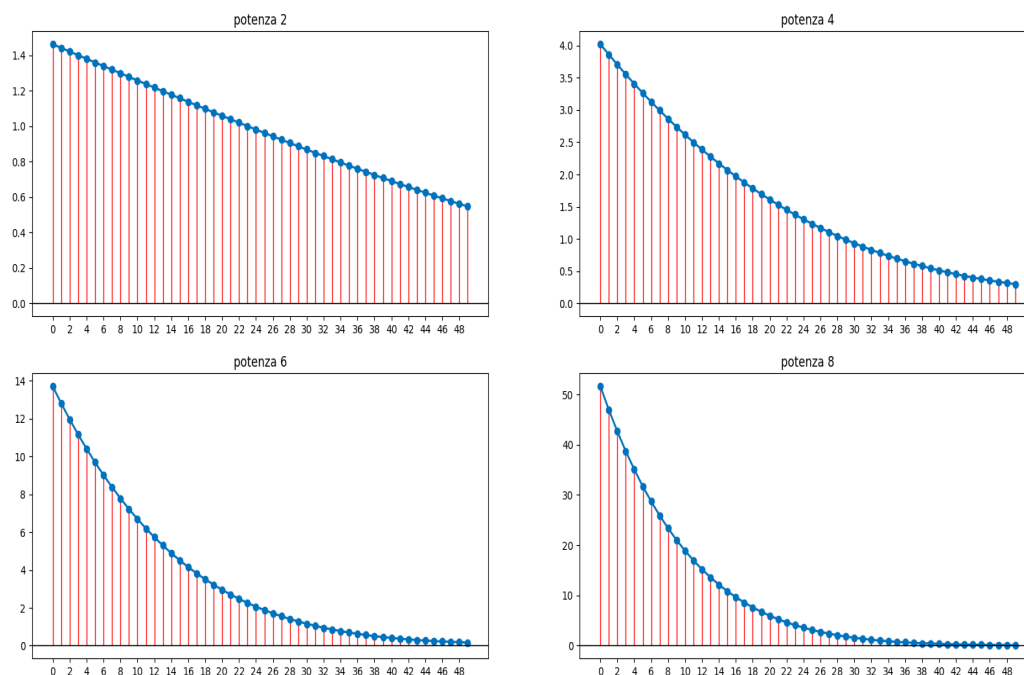


Figure 26: Autocorrelazione dei segnali.

In figura 26 possiamo notare come l'autocorrelazione non normalizzata dei segnali varia maggiormente nel tempo per segnali che variano velocemente.

Possiamo quindi osservare come segnali con minima variazione nel tempo avranno anche una minima variazione nell'autocorrelazione non normalizzata, mentre segnali che hanno un'ampia variazione tra un'osservazione e quella successiva avranno una maggiore variazione anche nell'autocorrelazione non normalizzata.

Un'ulteriore osservazione che nasce dagli esempi sopra è che i segnali più correlati tra loro sono i segnali con una variazione minore nel tempo, mentre i segnali meno correlati saranno i segnali con una maggior variazione.

2.6.2 Funzione di Autocorrelazione Parziale

L'autocorrelazione parziale, riassume la relazione tra un'osservazione di una serie temporale e le osservazioni di fasi temporali precedenti, come la normale autocorrelazione con la differenza che le relazioni delle osservazioni intermedie

vengono rimosse. In sostanza, le correlazioni indirette vengono eliminate lasciando visibile solamente l'effetto diretto [1].

Potreste, ad esempio, essere interessati alla relazione diretta tra i consumi di oggi e quelli di un anno fa. Non vi importa nulla di ciò che accade nel mezzo.

Il consumo dei 12 mesi precedenti ha un effetto sul consumo degli 11 mesi precedenti e il ciclo continua fino al periodo più recente. Nelle stime di autocorrelazione parziale, questi effetti indiretti vengono ignorati [2].

Calcolo della funzione di autocorrelazione parziale La funzione di autocorrelazione parziale teorica di una serie temporale stazionaria può essere calcolata utilizzando l'algoritmo di Durbin-Levinson:

$$\phi_{n,n} = \frac{\rho(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{n-1,k} \rho(n-k)}{1 - \sum_{k=1}^{n-1} \phi_{n-1,k} \rho(k)}$$

dove $\phi_{n,k} = \phi_{n-1,k} - \phi_{n,n} \phi_{n-1,n-k}$ per $1 \leq k \leq n-1$ and $\rho(n)$ è la funzione di autocorrelazione [17].

Quando è utile l'autocorrelazione parziale La funzione di autocorrelazione parziale gioca un ruolo molto importante, nell'analisi di serie temporali, per l'identificazione dei lag "importanti" per un modello autoregressivo (AR). Essendo che lo scopo del tirocinio è analizzare serie temporali senza eseguire nessuna predizione sui dati con modelli autoregressivi, non verrà data un'implementazione della formula presente sopra.

Pacchetto per l'utilizzo La funzione `pacf`, del modulo `statsmodels.tsa.stattools`, e la funzione `plot_pacf`, del modulo `statsmodels.graphics.tsaplots`, forniscono rispettivamente un'implementazione della funzione di autocorrelazione parziale ed il grafico di essa.

3 Gestione dei dataset forniti

Da questa sezione in poi il tirocinio entrò nella sua seconda fase di durata 1 mese e le successive sezioni e sottosezioni, inclusa la medesima, saranno in ordine cronologico di lavoro.

L'obiettivo di questa sezione è spiegare le scelte applicative che sono state attuate per l'elaborazione dei dataset e descriverne il loro contenuto, per riuscire a capire le analisi, le soluzioni ed i risultati ottenuti nelle seguenti sezioni.

3.1 Descrizione dei dataset

Durante il tirocinio sono stati forniti più dataset. Ogni dataset era relativo ad un soggetto, sano o patologico, con una specifica camminata, più nel dettaglio i dataset erano relativi a camminate normali, sulle punte o tacco punta. Ogni dataset era formato da più serie temporali, quindi indicizzate nel tempo, relative alla posizione di un particolare giunto (esempio: piede destro, piede sinistro, naso ...)

Campionamento dei dati I dati relativi ad ogni dataset sono stati ottenuti girando un video del soggetto in posizione laterale e lasciato camminare, avanti ed indietro per un corridoio, davanti all'obiettivo della telecamera. Successivamente, i video registrati, sono stati analizzati utilizzando una libreria open source che, con un algoritmo di machine learning, riconosce i punti relativi alle giunture interessate. Per ogni frame del video è stato quindi possibile fornire la posizione dei giunti in pixel, sia sull'asse delle ascisse che delle ordinate, in riferimento al pixel (0, 0) del frame analizzato.

Il campionamento dati e la successiva trasformazione di essi in dataset, contenenti le posizioni dei giunti di ogni soggetto, è stata svolta dal gruppo di ricerca del dipartimento che successivamente ci ha fornito i dataset elaborati.

Esempio (Giuntura del naso). Se per esempio prendiamo la giuntura del naso relativa ad uno dei dataset, indifferentemente dal fatto che esso sia relativo ad un soggetto sano o patologico, essa presenta nel dataset una serie chiamata `x_naso` e `y_naso` che rappresentano rispettivamente la posizione x ed y ad ogni frame acquisito dal video.

Frequenza di campionamento La fotocamera utilizzata per registrare i video ha una frequenza di campionamento di 30Hz, quindi ogni misurazione è distante dalla successiva circa 33,3ms. Detto ciò la fotocamera riuscirà a captare periodicità che avvengono al massimo ogni 66,6ms (15Hz), logicamente per sapere quando un certo evento inizia e finisce abbiamo bisogno di almeno 2 misurazioni, più che sufficienti a captare periodicità che risultino significative all'analisi del movimento di un soggetto.

Descrizione delle serie relative ad un dataset I giunti forniti dai dataset sono: naso, torace, spalla destra, gomito destro, polso destro, spalla sinistra, gomito sinistro, polso sinistro, cresta iliaca, anca destra, ginocchio destro, caviglia destra, anca sinistra, ginocchio sinistro, caviglia sinistra, occhio destro, occhio sinistro, zigomo destro, zigomo sinistro, piede sinistro (3 posizioni), piede destro (3 posizioni).

Per ognuno di questi giunti è presente una misura della posizione sull'asse delle ascisse, una misura della posizione sull'asse delle ordinate ed una misura di likelihood cioè un numero tra 0 ed 1 che esprime quanto siamo sicuri di aver trovato il giunto nella posizione giusta (questa misurazione è stata ignorata).

3.2 Rinomina delle colonne dei dataset

I dataset sono stati forniti sprovvisti di una rappresentazione significativa per ogni colonna quindi, come prima operazione, sono state ridenominate tutte le colonne.

Senza scendere troppo nei dettagli implementativi di come questa operazione è stata eseguita, poichè una tecnica per la ridenominazione delle colonne è stato fornita nella sezione precedente, vediamo come i dataset si presentano prima e dopo l'applicazione di essa.

	NaN	NaN.1	NaN.2	NaN.3	NaN.4	NaN.5	NaN.6	NaN.7	NaN.8	NaN.9	...
0	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
1	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
2	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
3	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
4	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...

Figure 27: Dataset prima della ridenominazione delle colonne.

	x_naso	y_naso	L_naso	x_torace	y_torace	L_torace	x_spalla_dx	y_spalla_dx	L_spalla_dx	x_gomito_dx	...
0	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
1	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
2	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
3	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...
4	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	...

Figure 28: Dataset dopo la ridenominazione delle colonne.

Come possiamo notare dalle figure 27 e 28 i nomi delle colonne dei dataset sono state ridenominate, esse ora rappresentano meglio la realtà ed il loro accesso su python facilitato in è possibile accedervi utilizzando il comando `dataset_name.nome_giunto` invece che `dataset_name['nome_giunto']`.

3.3 Gestione dei valori nulli

Nei dataset forniti erano presenti dei valori nulli causati dall'uscita del soggetto dall'obbiettivo e quindi l'impossibilità, da parte dell'algoritmo di machine learning, di ottenere una posizione per i giunti interessati.

Essendo che l'obbiettivo finale del tirocinio non è quello di eseguire delle predizioni sulle serie temporali ma quello di inferire sui dati utilizzando le tecniche dell'analisi di serie temporali, i valori nulli sono stati semplicemente eliminati. In questa maniera consideriamo consecutivi dati che effettivamente non lo sarebbero ma questo non è stato un problema nelle successive analisi poichè la maggior parte dei valori nulli era presente nei momenti in cui il soggetto si girava per eseguire un'ulteriore camminata davanti all'obbiettivo.

Guardiamo ora una esempio di serie prima e dopo l'eliminazione dei valori nulli così da avere un'idea di come i dati si presentano.

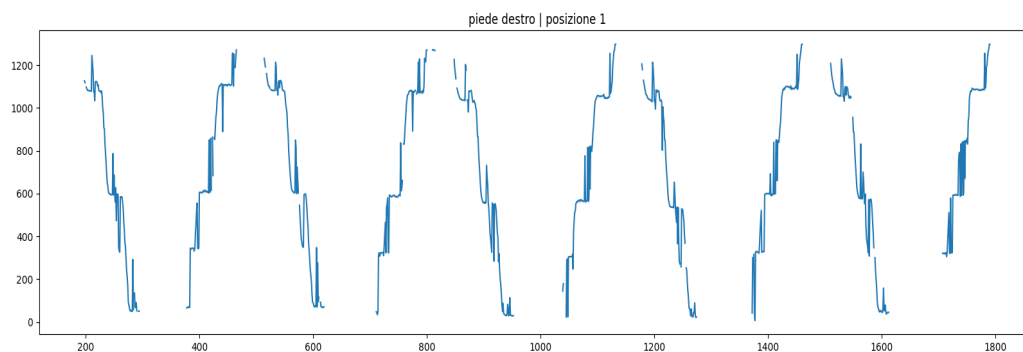


Figure 29: Piede destro posizione 1 con valori nulli.

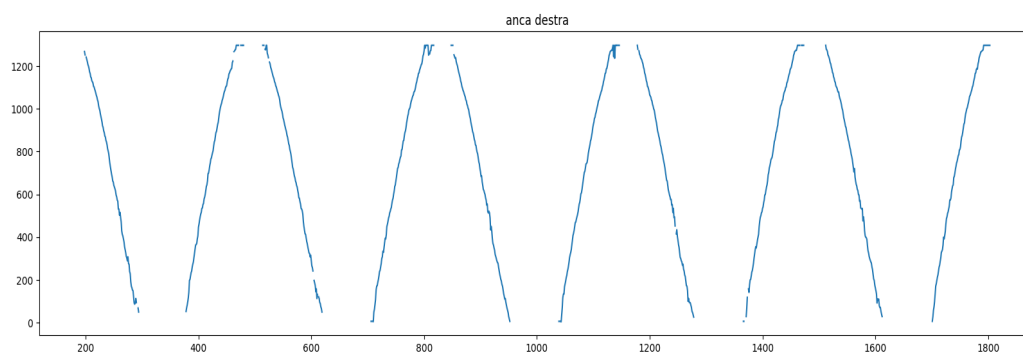


Figure 30: Anca destra con valori nulli.

Come possiamo notare dai grafici in figura 29 e 30 le serie contengono valori nulli nei punti in cui il soggetto esce dall'obiettivo girandosi per un'altra camminata davanti all'obiettivo.

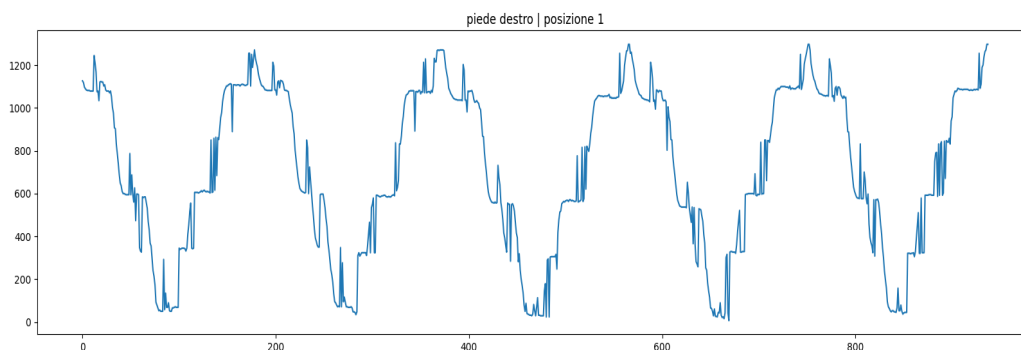


Figure 31: Piede destro posizione 1 senza valori nulli.

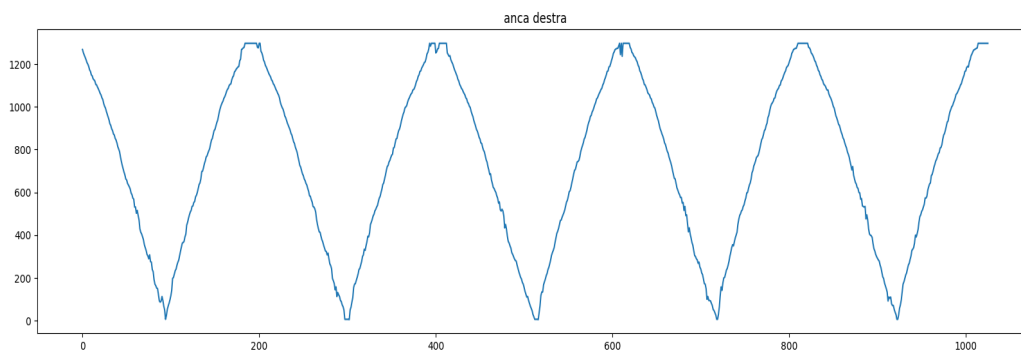


Figure 32: Anca destra senza valori nulli.

Guardando i grafici rappresentati in figura 31 e 32 possiamo notare come i valori nulli sono stati eliminati considerando così ogni camminata davanti all'obiettivo continua.

3.4 Scelta dell'indice di tabella per ogni dataset

Un'osservazione che nasce spontanea dall'osservazione dei grafici in figura 29, 30, 31 e 32 e dalle tabelle in figura 27 e 28 è che i dataset non sono indicizzati nel tempo utilizzando la classica indicizzazione come `anno/mese/giorno ora:minuti:secondi` ma sono indicizzati in base al frame di acquisizione quindi al numero di riga della tabella. Questo non è un problema dal punto di vista dell'analisi di ogni serie poichè noto il frame di acquisizione e la frequenza di campionamento si riuscirà facilmente a risalire ai secondi.

Nel nostro caso, sapendo che i dati sono stati acquisiti con una frequenza di campionamento di 30Hz, e presa una qualsiasi misurazione ad un certo frame risaliremo al secondo di tempo con la seguente formula

$$S_{\text{frame}} = \frac{\text{frame}}{30}$$

dove S_f sono i secondi trascorsi dal frame 0 al frame `frame` e `frame` è il numero del frame interessato.

3.5 Filtraggio dei dataset

Come si può notare dai grafici in figura 29, 30, 31 e 32 le serie dei dataset contengono molto rumore causato da una sbagliata lettura della posizione, di ogni giunto, da parte dell'algoritmo di machine learning.

Come spiegato nella precedente sottosezione sul filtraggio il rumore risiede principalmente nelle alte frequenze di un segnale.

In linea teorica si è pensato che tutte le frequenze più alte di 2Hz possano essere rumore, quindi in sostanza si andranno ad eliminare tutte le periodicità e movimenti periodici che avvengono sotto 0.5secondi.

Una soluzione migliore sarebbe stata quella di analizzare ogni serie e, per ciascuna di esse, applicare un filtro con una frequenza di taglio ottimale così da non eliminare informazioni importanti. Per lo scopo di questo tirocinio, come verrà spiegato in seguito, ci soffermeremo sull'analisi dei giunti relativi al piede e quindi una frequenza di taglio di 2Hz potrebbe essere sufficiente a non perdere nessuna informazione importante.

Per fare un esempio pratico supponiamo che l'intervallo di tempo tra due successivi istanti di contatto con il terreno dello stesso piede (stride), per un soggetto sano, avviene in media ogni 0.8secondi, allora la frequenza di taglio scelta non elimina la periodicità interessata e riusciremo ad individuarla nel grafico.

Nella pratica se applichiamo una frequenza di taglio di 2Hz il segnale rimane con del rumore e delle periodicità indesiderate, questo è dovuto al cruciale ruolo che svolge l'ordine del filtro. Dopo svariati tentativi si è riuscito ad ottenere un risultato soddisfacente utilizzando una frequenza di taglio di 1.2Hz con un ordine di filtro 10.

Guardiamo ora il risultato finale, ottenuto dopo l'applicazione del filtro con i parametri descritti precedentemente, ed una serie non filtrata.



Figure 33: Piede destro posizione 1 di un soggetto sano prima dell'applicazione del filtro.



Figure 34: Piede destro posizione 1 di un soggetto patologico prima dell'applicazione del filtro.

Come possiamo notare dai grafici in figura 33 e 34 le serie non sono filtrate e contengono molto rumore.

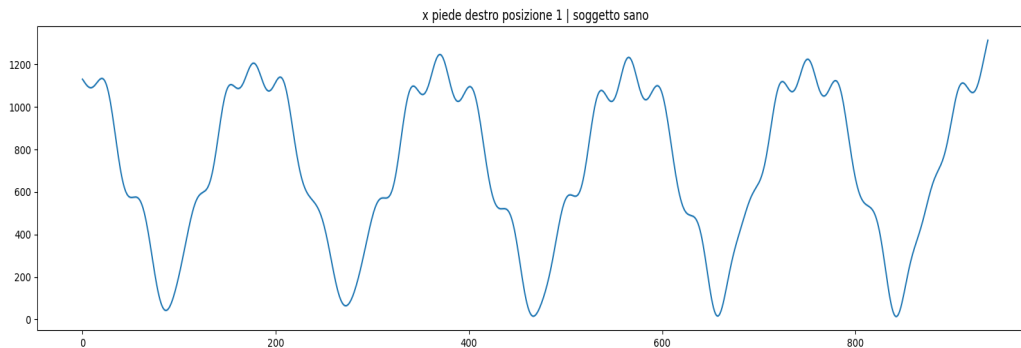


Figure 35: Piede destro posizione 1 di un soggetto sano dopo l'applicazione del filtro.

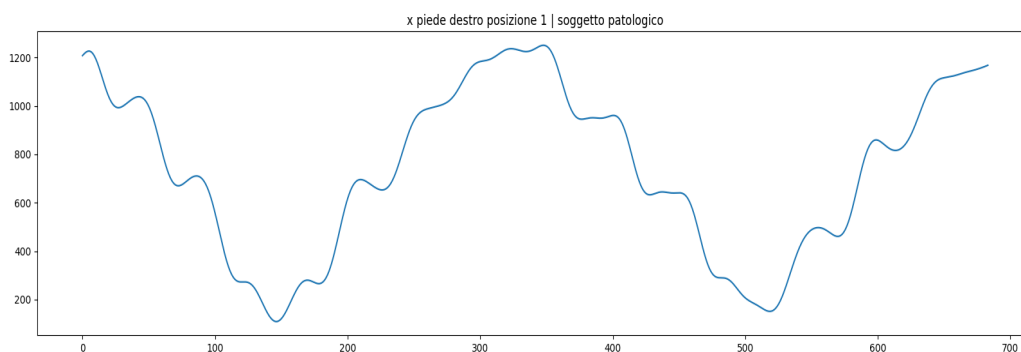


Figure 36: Piede destro posizione 1 di un soggetto patologico dopo l'applicazione del filtro.

Dai grafici in figura 35 e 36 il filtro ha rimosso il rumore e la presenza dello stride si nota maggiormente.

Un'ulteriore osservazione possibile sui grafici in figura 33, 34, 35 e 36 è che si nota la presenza della periodicità relativa ad un'andata e ritorno del soggetto, essendo che sicuramente avviene più lentamente della periodicità di uno stride, essa risiede nelle frequenze “molto basse”. Pensandola da un'ottica dell'analisi di serie temporali, è presente una stagionalità di periodo T riferita ad una andata ed a un ritorno del soggetto. Essendo una periodicità non voluta si è deciso di eliminarla andando a filtrare con un filtro passa alte le frequenze “bassissime” o almeno, abbastanza basse da rimuovere solamente

quella periodicità. Dopo qualche tentativo è stato deciso di utilizzare un filtro passa alte con frequenza di taglio 0.5Hz (periodicità che si ripetono ogni 2secondi e superiori) con un ordine di filtro di 10.

Vediamo ora i grafici delle due serie rappresentate in figura 35 e 36 dopo l'ultima fase di filtraggio.

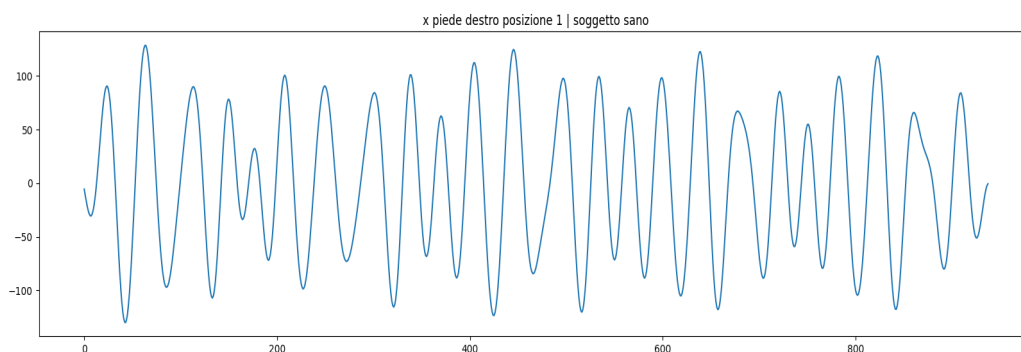


Figure 37: Piede destro posizione 1 di un soggetto sano dopo l'applicazione dell'ultima fase di filtraggio.



Figure 38: Piede destro posizione 1 di un soggetto patologico dopo l'applicazione dell'ultima fase di filtraggio.

Come possiamo notare dai grafici in figura 37 e 38 la componente periodica di andata e ritorno è stata eliminata.

4 Analisi del problema e Soluzioni

In questa sezione verrà descritto il problema affrontato, le soluzioni scelte ed i rispettivi risultati ottenuti.

Problema affrontato Il problema affrontato chiedeva di trovare pattern, anomalie e/o inferire sui dataset forniti, per ottenere, come risultato, informazioni su di essi mediante l'utilizzo di tecniche dell'analisi di serie temporali.

Per questioni di tempo il problema è stato ridotto all'analisi dei giunti del piede, più in particolare, il tirocinio, è stato basato, sulla ricerca di uno o più metodi necessari a trovare la lunghezza di un passo (stride) con successiva analisi dei risultati.

Risultati aspettati Come risultati aspettati è stata presa in considerazione l'eventualità della non riuscita dell'obiettivo finale, quindi l'impossibilità di trovare, tramite le tecniche dell'analisi di serie temporali, una possibile soluzione al problema.

In caso positivo, quindi di una possibile soluzione al problema posto, i risultati aspettati potrebbero essere:

- Capacità da parte del metodo sviluppato di rilevare la durata del passo.
- Capacità da parte del metodo sviluppato di rilevare incorrettamente la durata del passo.
- Impossibilità da parte del metodo sviluppato di rilevare un passo.

4.1 Prima soluzione

In questa sezione verrà mostrata la prima soluzione al problema posto, nello specifico verrà spiegata in breve l'idea generale, l'implementazione di alcuni dei metodi utilizzati, l'analisi dei risultati, l'analisi della complessità ed infine le conclusioni.

4.1.1 Idea generale

L'idea generale, fulcro di questa soluzione, ruota intorno all'analisi della funzione di autocorrelazione. Quest'ultima viene utilizzata per riconoscere pattern o una sorta di correlazione tra i dati non visibile direttamente.

4.1.2 Implementazione

Mediante l'ausilio del test di Dickey-Fuller ed il calcolo della prima differenza è stato possibile rendere le serie stazionarie, preparandole così alla successiva analisi di autocorrelazione.

Snippet (*Prima differenza*)

```
def compute_first_diff(series: list | np.ndarray):  
    """ Calcola la prima differenza  
    """  
  
    if not isinstance(series, np.ndarray):  
        series = np.array(series)  
  
    return series[1:] - series[:len(series)-1]
```

Snippet (*Metodo per rendere la serie stazionaria*)

```
def make_stationary(series, max_steps = 30):  
    """ Rende la serie stazionaria mediante il calcolo  
        della prima differenza  
    """  
  
    step = 0    # numero di step  
    s_copy = series.copy()    # copia della serie  
  
    # fino a quando il test ritorna che la serie  
    # non è stazionaria oppure sono stati superati  
    # il massimo di step  
    while(sts.adfuller(series)[1] > 0.05  
          and step < max_steps):  
  
        # calcola la prima differenza  
        serie = compute_first_diff(series)  
        step += 1  
  
    # se max_step è superato, non si è riusciti  
    # a rendere la serie stazionaria
```

```

if step > 30:
    series = s_copy

return series

```

Avendo reso ogni serie stazionaria guardiamo alcuni dei grafici relativi all'autocorrelazione di serie appartenenti a dataset dei soggetti 6 ed 8.

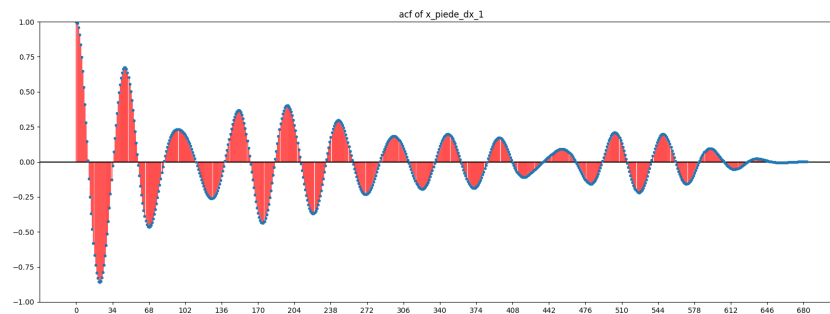


Figure 39: Soggetto 6 autocorrelazione x piede destro posizione 1.

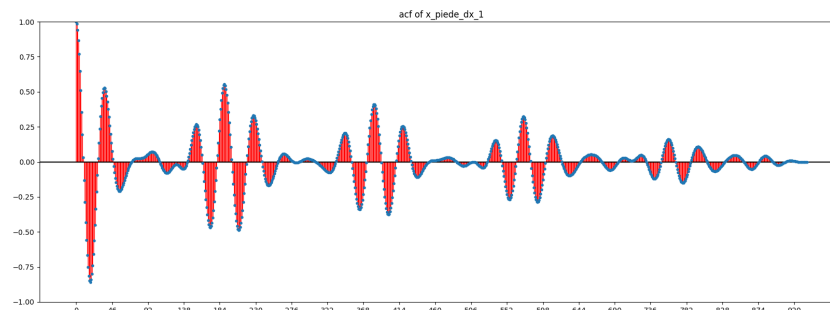


Figure 40: Soggetto 8 autocorrelazione x piede destro posizione 1.

Da come si può notare dai grafici in figura 39 e 40 l'autocorrelazione sembra riconoscere la durata di un passo in corrispondenza dei massimi locali.

Utilizzando la funzione `argrelextrema` del modulo `statsmodels.tsa.stattools` all'output della funzione di autocorre-

lazione è stato possibile recuperare gli argomenti (indici della lista) dei massimi locali. Per esempio se prendiamo in considerazione il grafico 39 gli argomenti dei massimi locali sono

[45, 95, 152, 197, 245, 297, 347, 395, 454, 504, 549, 592, 636, 678]

dove ogni argomento fa riferimento all'istante di tempo t , quindi al frame, in cui uno stride si ripete.

Questo ovviamente succede in linea teorica, non sempre è detto che il grafico dell'autocorrelazione riesca ad ottenere con precisione quest'informazione, soprattutto se i dati non sono filtrati correttamente.

Continuando con l'implementazione del metodo, calcolando la distanza tra un argomento e l'altro troveremo la durata di quel determinato passo. Prendendo sempre in considerazione la lista di argomenti sopra e calcolandone la prima differenza otterremo

[50, 57, 45, 48, 52, 50, 48, 59, 50, 45, 43, 44, 42]

dove ogni elemento rappresenta la durata di un singolo stride.

Se calcoliamo la media otterremo la durata media di uno stride, che per la lista sopra sarà di 48.69frame cioè 1.623secondi.

Questa serie di metodi è stata successivamente applicata ad ogni dataset ottenendo così la durata media di uno stride per ogni posizione del piede destro e sinistro. Per fare ciò è stato creato un “mini” programma che esegue automaticamente queste istruzioni ad ogni serie.

4.1.3 Analisi dei risultati

Analizzando i risultati soggetto per soggetto con camminata normale si è trovato che i soggetti patologici hanno in media una durata di stride più elevata

4.1.4 Analisi di complessità

4.1.5 Conclusioni

4.2 Seconda Soluzione

4.2.1 Idea generale

4.2.2 Implementazione

4.2.3 Analisi dei risultati

4.2.4 Analisi di complessità

4.2.5 Conclusioni

5 Bibliografia

Bibliografia

- [1] medium - by Marv. *What's The Difference Between Autocorrelation and Partial Autocorrelation For Time Series Analysis?* [Online; controllata il 8-marzo-2021]. 2021. URL: <https://emel333.medium.com/interpreting-autocorrelation-partial-autocorrelation-plots-for-time-series-analysis-23f87b102c64>.
- [2] analyticsindiamag - BY VIJAYSINH LENDAVE. *What are autocorrelation and partial autocorrelation in time series data?* [Online; controllata il 6-febbraio-2022]. 2022. URL: <https://analyticsindiamag.com/what-are-autocorrelation-and-partial-autocorrelation-in-time-series-data/>.
- [3] medium - towardsdatascience - by Egor Howell. *Seasonality of Time Series*. [Online; controllata il 26-ottobre-2022]. 2022. URL: <https://towardsdatascience.com/seasonality-of-time-series-5b45b4809acd>.
- [4] medium - towardsdatascience - by Spencer Hayes. *Finding Seasonal Trends in Time-Series Data with Python*. [Online; controllata il 8-giugno-2021]. 2021. URL: <https://towardsdatascience.com/finding-seasonal-trends-in-time-series-data-with-python-ce10c37aa861>.
- [5] Sean Abu. *Seasonal ARIMA with Python*. [Online; controllata il 22-marzo-2016]. 2016. URL: <http://www.seanabu.com/2016/03/22/time-series-seasonal-ARIMA-model-in-python/>.
- [6] Dheeru Dua and Casey Graff. *UCI Machine Learning Repository*. 2017. URL: <http://archive.ics.uci.edu/ml>.
- [7] geeksforgeeks. *What is a trend in time series?* [Online; controllata il 30-maggio-2022]. 2022. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_storica.
- [8] Zhang S. Guo B. Dong A. He J. Xu Z. Chen S.X. *Cautionary Tales on Air-Quality Improvement in Beijing*. 2017. URL: <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Beijing+Multi-Site+Air-Quality+Data>.
- [9] Dmitriy Sergeyev. *Topic 9. Part 1. Time series analysis in Python*. [Online]. 2022. URL: https://mlcourse.ai/book/topic09/topic9_part1_time_series_python.html#double-exponential-smoothing.
- [10] Simplilearn. *An Introduction to Exponential Smoothing for Time Series Forecasting in Python*. [Online; controllata il 30-settembre-2022]. 2022.

- URL: <https://www.simplilearn.com/exponential-smoothing-for-time-series-forecasting-in-python-article>.
- [11] StatLect. *Covariance stationary*. [Online]. URL: <https://www.statlect.com/glossary/covariance-stationary#:~:text=A%20sequence%20of%20random%20variables,not%20on%20their%20absolute%20position..>
 - [12] Wikipedia. *Augmented Dickey–Fuller test* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 30-novembre-2022]. 2022. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Augmented_Dickey%E2%80%93Fuller_test&action=history.
 - [13] Wikipedia. *Autocorrelation* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 3-gennaio-2023]. 2023. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Autocorrelation>.
 - [14] Wikipedia. *Autocorrelazione* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 17-gennaio-2023]. 2023. URL: <https://it.wikipedia.org/wiki/Autocorrelazione>.
 - [15] Wikipedia. *Exponential smoothing* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 4-febbraio-2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_smoothing.
 - [16] Wikipedia. *Moving average* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 16-dicembre-2022]. 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_average.
 - [17] Wikipedia. *Partial autocorrelation function* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 31-gennaio-2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_autocorrelation_function.
 - [18] Wikipedia. *Serie Storica* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 30-gennaio-2022]. 2022. URL: https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_storica.
 - [19] Wikipedia. *Serie Storica* — *Wikipedia, L’enciclopedia libera*. [Online; controllata il 30-marzo-2022]. 2022. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Dickey%E2%80%93Fuller_test.