

домашнее задание 1

1. Дайте определение кольца.

Кольцо (ring) множество A , на котором заданы две бинарные операции, называемые сложение (+) и умножение (\cdot), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in A$:

- $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
- $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ и $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (дистрибутивность);
- существует такой элемент $0 \in A$, что $a + 0 = 0 + a = a$ (существование нуля)
- существует такой элемент $1 \in A$, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование единицы);
- для любого $a \in A$ существует такой элемент $b \in A$, что $a + b = b + a = 0$ (существование противоположного элемента относительно сложения)

1. Дайте определение поля.

- Поле — это алгебраическая структура (множество с заданными на нём операциями), которая является частным и очень важным случаем кольца.

Поле (field) кольцо K , обладающее дополнительным свойством: для любого его элемента $a \neq 0$ существует такой элемент $b \in K$, что $ab = ba = 1$.

1. Элемент e кольца A называется единицей, если $ae = ea = a$. Докажи- те, что $e = 1$.
Если в кольце A существуют элементы 1 и e такие, что для любого $a \in A$ выполняются равенства:

$$a * 1 = 1 * a = a$$

$$a * e = e * a = a$$

Тогда $e = 1$.

1. Элемент e кольца A называется единицей, если $ae = ea = a$. Докажите, что $e = 1$. в
кольце A существует элемент $1 \in A$ (аксиома 7), такой что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого $a \in A$.
Элемент e называется единицей, если он удовлетворяет тому же свойству: $a \cdot e = e \cdot a = a$
для любого

Практические задания.

RR(pi^2)

9.86960440108936

1. Совпадает ли QQ(RR(pi)) с числом π ? Совпадает ли QQ(RR(1/3)) с числом $1/3$?

QQ(RR(pi))

245850922/78256779

- $QQ(RR(\pi))$ вернёт дробь вроде 245850922/78256779 которая очень близка к π , но не равна ему И как таковые мы заключаем, что нет, не совпадает.
- $QQ(RR(1/3))$ и $1/3$: Нет, не совпадает. $RR(1/3)$ — это приближённое десятичное представление числа $1/3$

3.

- $1/3$: Sage интерпретирует это как точное рациональное число (элемент поля QQ), тип `Rational`.
- $1.0/3$: Sage интерпретирует 1.0 как приближённое десятичное число (элемент поля RR). Операция деления / между числом из RR и целым числом из ZZ даст результат в RR (приближённое десятичное число), тип `RealNumber`.
- Элемент $1/3$ принадлежит полю (QQ). Элемент $1.0/3$ не принадлежит полю Q (QQ), он принадлежит полю вещественных чисел (RR). Это объекты разных типов, хранящиеся по-разному.

```
print(1/3 in QQ)
print(1.0/3 in QQ)
print(1/3 == 1.0/3)
```

```
True
True
True
```

4

```
n = var('n')
expr = 5*(n - 2)^3 - 6*(n + 3)^3 - 3*(2*n - 9)^3
expr.expand()

-25*n^3 + 240*n^2 - 1560*n + 1985
```

5

```
x = var('x')
expr = sin(x^2 + 2*x) + x^3
# Подставляем x = pi и преобразуем результат в RR для приближённого
вычисления
result = expr.subs(x=pi)
RR(result)

30.5759754632997
```

6

```
x, y = var('x y')
expr = x^2 + y^2 - x*y
# Подставляем x = y^2 + 3
new_expr = expr.subs(x = y^2 + 3)
new_expr.expand()

y^4 - y^3 + 7*y^2 - 3*y + 9
```