СОДЕРЖАНИЕ

1. Общее представление о сущности процессов, протекающих в исследуемой динамической системе.

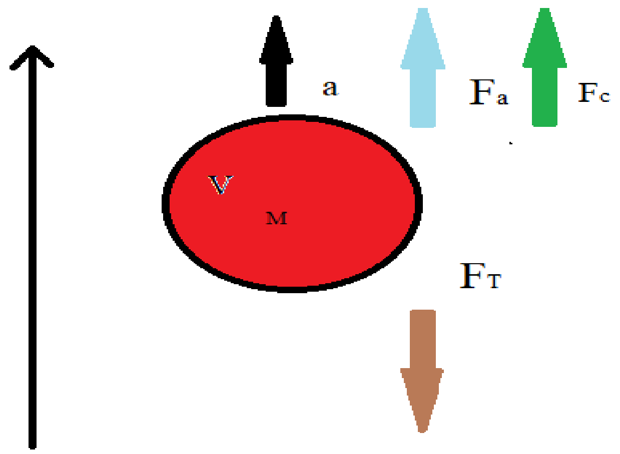
Изучается процесс подъема шара в воздух. Рассматривается воздушный шар, поднимающийся в воздух под действием силы Архимеда. Опыт будет происходить при нормальном условиях, ветер отсутствует.

Воздушный шар– это шар, плавающий в воздухе под действием силы Архимеда. Шар наполняется каким-либо газом, который легче воздуха что позволяет ему плавать в воздухе. Шар поднимается до тех пор, пока сила Архимеда и силы тяжести не уравновесят друг друга, то есть плотности газа внутри шара и вне шара не станут эквивалентными.

Ограничимся рассмотрением движения его центра масс под действием следующих сил: силы тяжести, архимедовой силы и силой аэродинамического сопротивления. Сила тяжести направлена вниз, архимедова сила – вверх, а сила аэродинамического сопротивления всегда направлена «против движения».

2. Представление общей структуры и принципов функционирования системы в графической форме.

Графическая иллюстрация рассматриваемого процесса:



V— объем шара;

$F_т$ — сила тяжести;

$F_а$ — сила Архимеда;

$F_с$ — сила сопротивления воздуху.

M — масса оболочки.

a — ускорение.

3. Описание физических процессов, протекающих в исследуемой системе.

Воздушный шар сферической формы поднимается в воздух под действием сил Архимеда. Газ в шаре греется, в следствии чего его объем увеличивается и шар начинает подъем. Шар поднимается до тех пор, пока сила Архимеда и силы тяжести не уравновесят друг друга, то есть плотности газа внутри шара и вне шара не станут эквивалентными. Или же, другими словами, его вытесняет наверх до тех пор, пока вес, заключённый в его объёме, не будет равняться такому же весу воздуха, способного занять данный объём. Кроме того, при подъеме в воздух, воздух создаёт дополнительный тормозящий эффект.

4. Перечень входных и выходных сигналов.

При поднятии в воздух объем шара будет изменяться поэтому V — входной сигнал, а h — выходной сигнал.

5. Перечень управляющих и возмущающих воздействий.

Управляющим воздействием системы будет объем шара V, возмущающим – температура окружающей среды T .

6. Гипотезы, используемые при построении модели.

Сформулируем перечень гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования:

- движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения g;
- мы ограничимся рассмотрением только этапа подъема шара, когда сила аэродинамического сопротивления направлена вниз и, следовательно, будет учтена в уравнениях движения со знаком минус;
- динамика объекта моделирования описывается уравнениями классической механики Ньютона;
- система изолирована от внешних воздействий.

7. Статическая модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий.

Статическая модель — это модель, отражающая состояние системы в некоторый фиксированный момент времени.

Найдём эту модель, приравняв все производные выходной величины к нулю.

В начале построим математическую модель нашей исследуемой системы.

Сила тяжести направлена вниз, архимедова сила – вверх, а сила аэродинамического сопротивления всегда направлена «против движения», поэтому корректный учет этой силы в уравнениях движения требует введения множителя $-sing(\frac{dh}{dt})$.

Однако, для наших целей этот факт не имеет принципиального значения, и мы ограничимся рассмотрением только этапа подъема шара, когда сила аэродинамического сопротивления направлена вниз и, следовательно, будет учтена в уравнениях движения со знаком минус. Зависимость плотности воздуха от высоты будем полагать экспоненциальной:

$$Ma = -Mg + F_a - F_c,$$

$$F_c = \rho(h)Vg,$$

$$\bar{v} = \frac{dh}{dt},$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2},$$

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-bh}.$$

Или же имеем из этого:

$$M\frac{d^2h}{dt^2} = -Mg + \rho_0 e^{-bh}Vg - k\frac{dh}{dt}$$

1. $M - 8$ кг Масса шара;
2. $h - 1$ м Высота, с которой поднимается шар;
3. $g -$ Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м$/c^2$;
4. $\rho_0 -$ плотность воздуха в начальный;
5. $k -$Коэффициент сопротивления воздуху;
6. $b -$ константа, связанная с плотностью воздуха.
7. $V -$ объем шара

Статическая модель:

$$0 = -Mg + \rho_0 e^{-bh}Vg$$

$$Mg = \rho_0 e^{-bh} V g$$

Или же:

$$-\frac{ln\frac{V\rho_0}{M}}{b} = h$$

8. Динамическая модель исследуемой системы при отсутствии возмущающих воздействий.

Динамическая модель — это модель, отражающая процесс изменения состояния исследуемой системы.

Начальные условия будут иметь вид:

$$\begin{cases} h(0) = h_0; \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Таким образом, исходная задача свелась к решению задачи Коши для системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} M = -Mg + \rho_0 e^{-bh} V g - k\frac{dh}{dt}; \\ \frac{dh}{dt} = v. \end{cases}$$

9. Исследование динамики системы численным методом при различных входных воздействиях.

В рассматриваемом случае применение имитационного моделирования является необходимым, так как рассматриваемый процесс является достаточно сложным. Поэтому будем искать численное решение поставленной задачи с использованием методов вычислительной математики.

Для решения задачи Коши воспользуемся методом Эйлера. При этом значение производной может быть приближенно заменено отношением:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{v(i+1) - v(i)}{h}.$$

Здесь $v(i)$— значение функции в текущей точке, $(i+1)$— значение функции в следующей точке, а величина h равна интервалу времени между двумя отсчётами и называется **шагом интегрирования**.

Перейдя от дифференциальных уравнений к разностным, получим

$$\begin{cases} \dfrac{v(i+1)-v(i)}{h} M = -g + \rho_0 e^{-bh(i)} V g - k v(i); \\ \dfrac{h(i+1)-h(i)}{h} = v(i). \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(0) = h_0; \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Откуда в явном виде выразим значение функции в следующей точке:

$$\begin{cases} v(i+1) = v(i) + h\left(-g + \dfrac{\rho_0 e^{-bh(i)} V g}{M} - \dfrac{k}{M} v(i)\right); \\ h(i+1) = h(i) + h v(i). \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(0) = h_0; \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Полученные соотношения позволяют определить значения искомых функций в последующий момент времени, зная их значения в предыдущий момент времени.

Исследуем зависимость получаемых решений задачи от различных входных воздействий.

Выберем для определённости следующие параметры процесса:

8. Масса шара $M = 8$ кг;
9. Высота, с которой поднимается шар $h = 1$ м;
10. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81\ \text{м}/c^2$;
11. Плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}28\ \ \text{кг}/\text{м}^3$;
12. Коэффициент сопротивления воздуху $k = 0{,}4$.
13. $b = 0{,}000128$ константа, связанная с плотностью воздуха.

Исследуем, как зависит угол наклона маятника от силы, оказываемой на маятник. На рисунке 1 показаны графики для трёх значений объема $V = 20\ \text{м}^3$, $V = 40\ \text{м}^3$, $V = 60\ \text{м}^3$при начальных условиях $h(0) = 0$ м и $v(0) = 0\ \text{м/с}$.

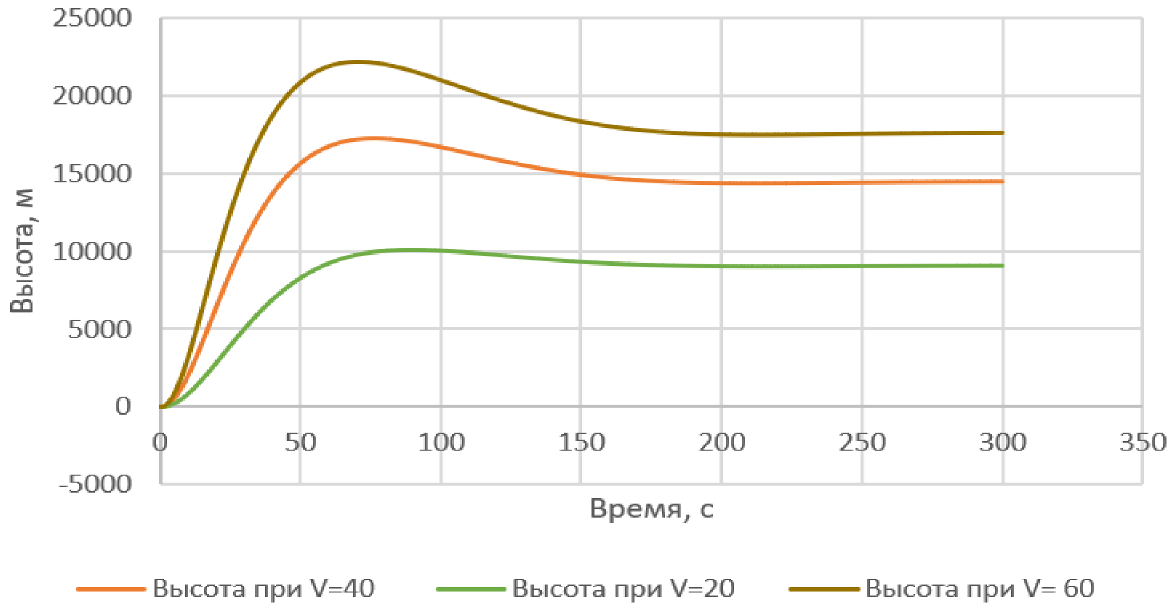


Рисунок 1 — Графики изменения высоты при различных значениях объема шара

Графики отчётливо иллюстрирует зависимость высоты, на которую поднимется шар от его объема.

Построим графики с теми же параметрами, но с другим начальным условием. На рисунке 1 показаны графики для трёх значений объема $V = 20$ м^3, $V = 40$ м^3, $V = 60$ м^{3}при начальных условиях $h(0) = 2000$ м и $v(0) = 0$ м/с.

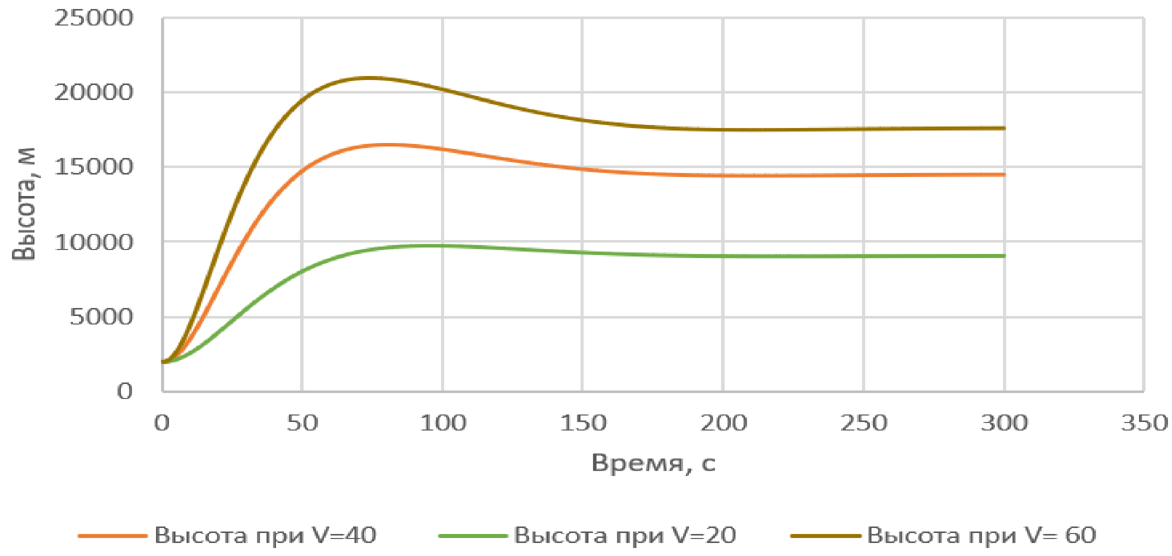


Рисунок 2 — Графики изменения высоты при различных значениях объема шара

Напрашивается вывод, что начальная высота не зависит от установившегося значения.

Далее, исследуем, как зависит высота шара зависит от его массы. На рисунке 3 показаны графики для трёх значений массы $m = 8, m = 16, m = 24, V = 40$ при начальном условии $h(0) = 0$ м и $v(0) = 0$ м/с.

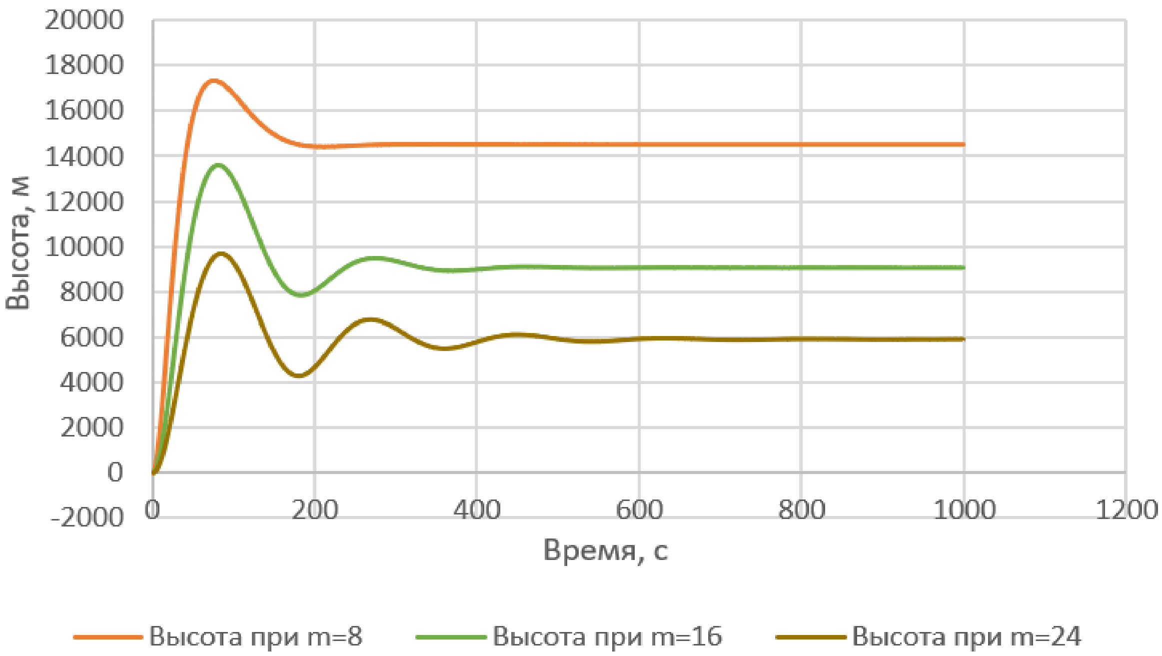


Рисунок 3 — Графики изменения угла при различных значениях m

Можем наблюдать, что чем больше масса тем ниже шар и дольше стабилизируется к установившемуся значению.

Также проверим работу системы при различных начальных значениях. На рисунке 4 показаны графики при начальных условиях $h(0) = 100$ м, $h(0) = 500$ м, $h(0) = 1000$ м, $v(0) = 0$ м/с и при массе $m = 10$.

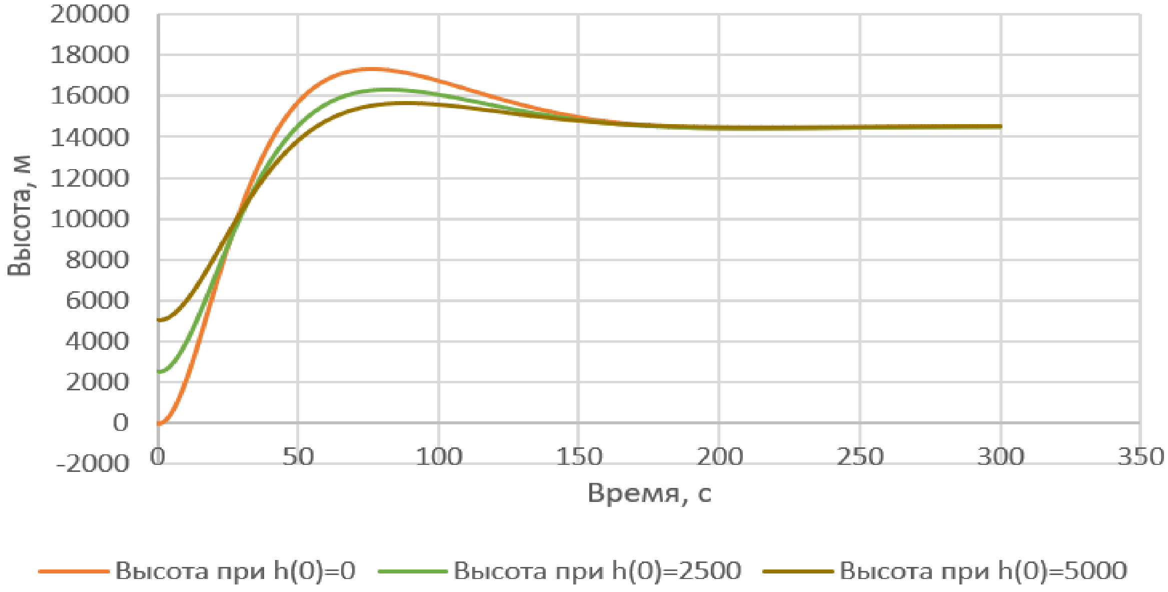


Рисунок 4 — Графики изменения высоты при различных начальных значениях h

Видим, что независимо от начальной высоты, при прочих равных значениях, шар придёт к одному и тому же установившемуся значению.

10. Уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима.

Установившимся называют такой режим, при котором интересующая нас выходная величина не изменяется с течением времени.

Определим установившийся режим. Чтобы найти условия установившегося режима, приравняем все производные выходной величины к нулю.

Исходное уравнение динамики:

$$M\frac{d^2h}{dt^2} = -Mg + \rho_0 e^{-bh}Vg - k\frac{dh}{dt}.$$

Установившийся режим:

$$0 = -Mg + \rho_0 e^{-bh_0}V_0 g;$$

Выразим высоту:

$$-\frac{ln\frac{V_0\rho_0}{M}}{b} = h_0.$$

При изменении объема на величину ΔV будет изменяться и высота на некоторую величину Δh. Используя это, представим наши мгновенные значения величин V и h в виде: $V = V_0 + \Delta V$ и $h = h_0 + \Delta h,$ где V_0, h_0 — опорные значения, а ΔV, Δh — отклонения от опорных значений.

Подставим эти равенства в наше уравнение динамики. Искомое уравнение будет иметь вид:

$$M\frac{d^2(h_0+\Delta\mathrm{h})}{dt^2} = -Mg + \rho_0 e^{-b(h_0+\Delta\mathrm{h})}(V_0+\Delta\mathrm{V})g - k\frac{d(h_0+\Delta\mathrm{h})}{dt}.$$

11. Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в отклонениях от установившегося режима.

Линеаризация — это процесс сведения нелинейного уравнения к линейному путём отбрасывания всех членов, имеющих порядок выше первой.

Разложим в ряд Тейлора экспоненту:

$$e^{-bh} = e^{-bh_0} + \frac{-be^{-bh_0}}{1!}(h-h_0) + \frac{b^2e^{-bh_0}}{2!}(h-h_0)^2 + \dots$$

Или же:

$$e^{-bh} = e^{-bh_0} + \frac{-be^{-bh_0}}{1!}\Delta\mathrm{h} + \frac{b^2e^{-bh_0}}{2!}\Delta\mathrm{h}^2 + \dots \approx e^{-bh_0} - be^{-bh_0}\Delta\mathrm{h}.$$

Сделаем замену. Получим:

$$M\frac{d^2(h_0+\Delta\mathrm{h})}{dt^2} = -Mg + \rho_0(e^{-bh_0} - be^{-bh_0}\Delta\mathrm{h})\Delta\mathrm{h}(V_0+\Delta\mathrm{V})g - k\frac{d(h_0+\Delta\mathrm{h})}{dt};$$

Преобразуем его:

$$M\frac{d^2(\Delta\mathrm{h})}{dt^2} = -Mg + \rho_0(e^{-bh_0} - be^{-bh_0}\Delta\mathrm{h})(V_0+\Delta\mathrm{V})g\Delta\mathrm{h} - k\frac{d(\Delta\mathrm{h})}{dt};$$

Так как $(0 = -Mg + \rho_0 e^{-bh_0}V_0 g)$,то мы можем упростить наше уравнение:

$$M\frac{d^2(\Delta\mathrm{h})}{dt^2} = \rho_0 g e^{-bh_0}\Delta\mathrm{V} - \rho_0 g b e^{-bh_0}(V_0+\Delta\mathrm{V})\Delta\mathrm{h} - k\frac{d(\Delta\mathrm{h})}{dt};$$

Раскроем скобки:

$$M\frac{d^2(\Delta\mathrm{h})}{dt^2} = \rho_0 g e^{-bh_0}\Delta\mathrm{V} - \rho_0 g b e^{-bh_0}V_0\Delta\mathrm{h} + \rho_0 g b e^{-bh_0}\Delta\mathrm{V}\Delta\mathrm{h} - k\frac{d(\Delta\mathrm{h})}{dt};$$

$$\rho_0 g b e^{-bh_0}\Delta\mathrm{V}\Delta\mathrm{h} \approx 0.$$

Перенесём выходные величины в левую сторону, а входные — в правую. Искомое уравнение будет иметь вид:

$$M\frac{d^2(\Delta h)}{dt^2}+k\frac{d(\Delta h)}{dt}+\rho_0 gbe^{-bh_0}V_0\Delta h=\rho_0 ge^{-bh_0}\Delta V.$$

12. Линеаризованное уравнение динамики исследуемой системы в относительных безразмерных величинах.

Изначально имеем:

$$M\frac{d^2(\Delta h)}{dt^2}+k\frac{d(\Delta h)}{dt}+\rho_0 gbe^{-bh_0}V_0\Delta h=\rho_0 ge^{-bh_0}\Delta V.$$

Делим и умножаем Δh и ΔV на соответствующие им величины:

$$h_0M\frac{d^2(\frac{\Delta h}{h_0})}{dt^2}+h_0k\frac{d\left(\frac{\Delta h}{h_0}\right)}{dt}+h_0\rho_0 gbe^{-bh_0}V_0\frac{\Delta h}{h_0}=V_0\rho_0 ge^{-bh_0}\frac{\Delta V}{V_0};$$

Разделим получившееся уравнение на h_0:

$$M\frac{d^2(\frac{\Delta h}{h_0})}{dt^2}+k\frac{d\left(\frac{\Delta h}{h_0}\right)}{dt}+\rho_0 gbe^{-bh_0}V_0\frac{\Delta h}{h_0}=V_0\rho_0 ge^{-bh_0}\frac{\Delta V}{V_0}\frac{1}{h_0};$$

Разделим получившееся уравнение на M:

$$\frac{d^2(\frac{\Delta h}{h_0})}{dt^2}+\frac{k}{M}\frac{d\left(\frac{\Delta h}{h_0}\right)}{dt}+\frac{1}{M}\rho_0 gbe^{-bh_0}V_0\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{1}{M}V_0\rho_0 ge^{-bh_0}\frac{\Delta V}{V_0}\frac{1}{h_0};$$

Разделим все слагаемые на коэффициент перед $\Delta h/h_0$:

$$\frac{Me^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{d^2(\frac{\Delta h}{h_0})}{dt^2}+\frac{Me^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{k}{M}\frac{d\left(\frac{\Delta h}{h_0}\right)}{dt}+\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{Me^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{1}{M}V_0\rho_0 ge^{-bh_0}\frac{\Delta V}{V_0}\frac{1}{h_0};$$

Получаем:

$$\frac{Me^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{d^2(\frac{\Delta h}{h_0})}{dt^2}+\frac{e^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{k}{1}\frac{d\left(\frac{\Delta h}{h_0}\right)}{dt}+\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{1}{b}\frac{\Delta V}{V_0}\frac{1}{h_0}.$$

13. Передаточная функция системы.

Передаточная функция динамической системы — это отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу входной переменной при нулевых начальных условиях.

$$\frac{Me^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{d^2(\frac{\Delta h}{h_0})}{dt^2}+\frac{e^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{k}{1}\frac{d\left(\frac{\Delta h}{h_0}\right)}{dt}+\frac{\Delta h}{h_0}=\frac{1}{b}\frac{\Delta V}{V_0}\frac{1}{h_0};$$

Введём оператор $s=d/dt$ и сделаем замены $\Delta\varphi/\varphi_0=Y, \Delta F/F_0=U$.

Получим:

$$\frac{Me^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}S^2y+\frac{e^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\frac{k}{1}Sy+y=\frac{1}{b}u\frac{1}{h_0};$$

Для повышения компактности записи, введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{Me^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}; \\ a_2=\dfrac{e^{bh_0}}{\rho_0 gbV_0}\dfrac{k}{1}; \\ b=\dfrac{1}{b}\dfrac{1}{h_0}. \end{cases}$$

Тогда приведённое выше уравнение можно будет записать в виде:

$$a_1s^2Y(s)+a_2sY(s)+Y(s)=bU(s);$$

Откуда, приведя подобные, получим:

$$(a_1s^2+a_2s+1)Y(s)=bU(s);$$

Передаточную функцию найдём по формуле:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b}{a_1s^2+a_2s+1}.$$

Укажем конкретные числовые значения параметров:

Масса шара $M=8$ кг;

Ускорение свободного падения $g=9{,}81$ м$/c^2$;

Плотность воздуха $\rho_0=1{,}28$ кг/м^3;

Коэффициент сопротивления воздуху $k=0{,}4$.

$b=0{,}000128$ константа, связанная с плотностью воздуха

h_0 можно найти из уравнения статики. $h_0\approx 14502{,}328$ м^3.

Передаточная функция будем иметь вид:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{0{,}539}{797{,}28s^2+39{,}864s+1}.$$

14. Переходная и весовая характеристики системы.

Переходной характеристикой называется реакция системы на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях.

Весовой характеристикой называется реакция системы на дельта-функцию при нулевых начальных условиях

1. Определим реакцию системы на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях. Входной сигнал как функция времени будет определяться выражением:

$U(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$ — единичный ступенчатый сигнал (функция Хэвисайда)

Его изображение по Лапласу:

$U(s) = \frac{1}{s}.$

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{0{,}539}{s(796{,}48s^2 + 39{,}824s + 1)}.$$

Найдём выражение для выходного сигнала.

$$Y(s) = \frac{0{,}539}{s(796{,}48s^2 + 39{,}824s + 1)} =$$

$$= \frac{0{,}539}{s} - \frac{429{,}73s}{796{,}48s^2 + 39{,}824s + 1} - \frac{21.49}{796{,}48s^2 + 39{,}824s + 1}.$$

Разложим дробь $\frac{21.49}{796{,}48s^2+39{,}824s+1}$:

$$\frac{21.49}{796{,}48s^2 + 39{,}824s + 1} = \frac{21.49}{\frac{1}{0{,}02511}} \frac{0{,}02511}{\left(s - (-0{,}025)\right)^2 + (0{,}02511)^2}.$$

Её оригинал:

$0{,}537 * e^{-0{,}025t} * \sin(0{,}02511t)$

Разложим дробь $\frac{429{,}73s}{796{,}48s^2+39{,}824s+1}$:

$$\frac{429{,}73s}{796{,}48s^2+39{,}824s+1} = 429{,}73\left(\frac{\big(s-(-0{,}025)\big)-0{,}025}{\big(s-(-0{,}025)\big)^2+(0{,}02511)^2}\right) =$$

$$= \frac{429{,}73}{\frac{1}{0{,}02511}}\left(\frac{0{,}02511\big(s-(-0{,}025)\big)}{\big(s-(-0{,}025)\big)^2+(0{,}02511)^2} - \frac{0{,}02511*0{,}025}{\big(s-(-0{,}025)\big)^2+(0{,}02511)^2}\right).$$

Её оригинал:

$$\frac{429{,}73}{\frac{1}{0{,}02511}}(0{,}02511e^{-0{,}025t}*\cos(0{,}02511t)-0{,}025*e^{-0{,}025t}*\sin(0{,}02511t))$$

Оригинал функции $Y(s)$:

$$Y(t) = (0{,}539 - 0{,}537e^{-0{,}025t}\sin(0{,}02511t) - 0{,}271e^{-0{,}025t} * \cos(0{,}02511t) + 0{,}27e^{-0{,}025t} * \sin(0{,}02511t)) * 1(t)$$

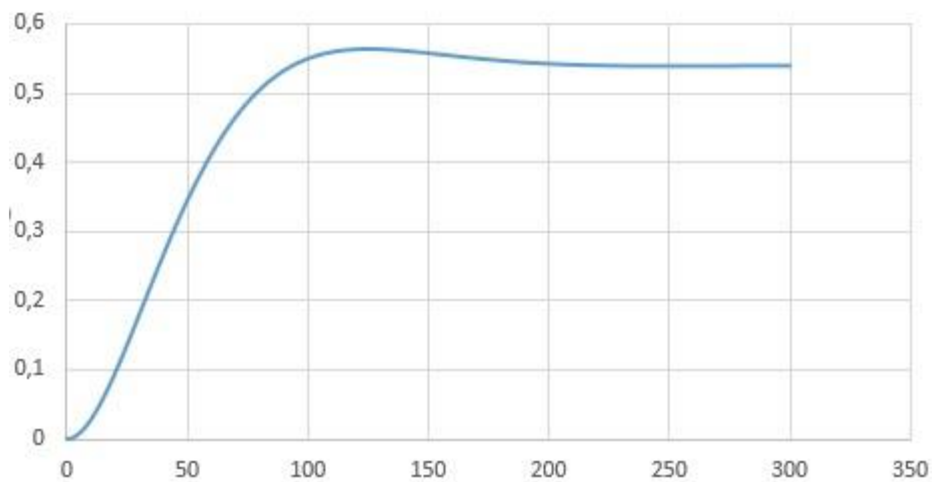


Рисунок 5 — График реакции на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях в Excel.

Проверим соответствует ли действительности этот график используя инструментарий MatLab.

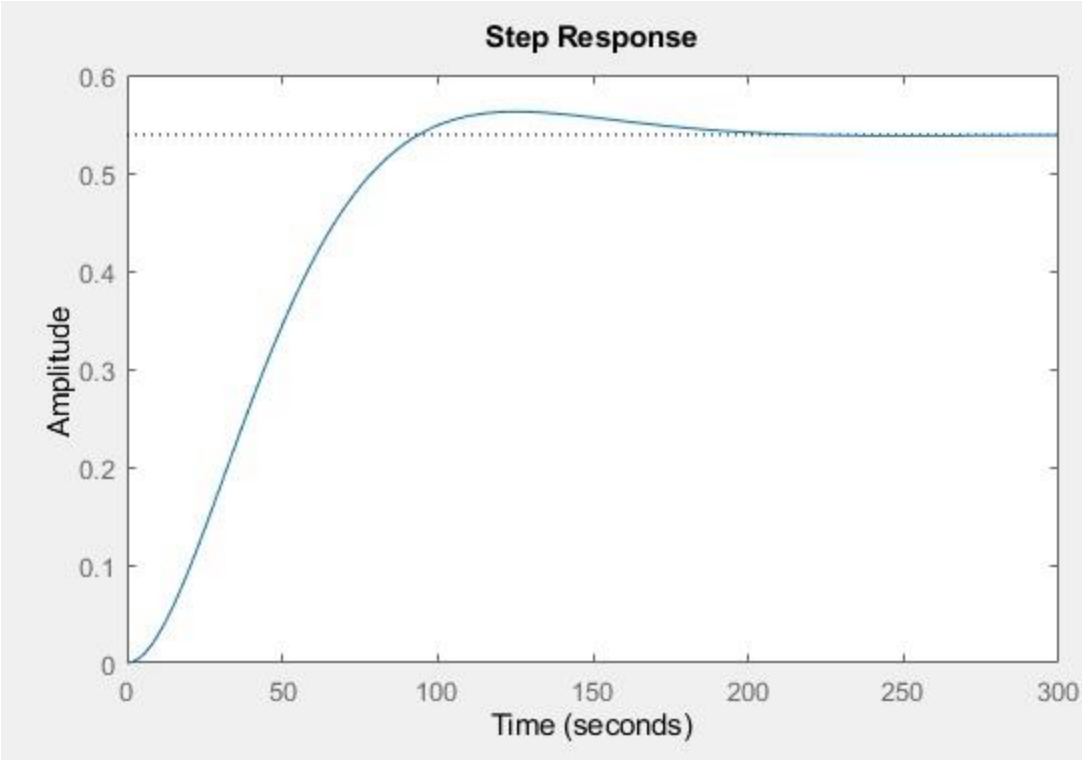


Рисунок 5 — График реакции на единичный ступенчатый сигнал при нулевых начальных условиях в MatLab.

2. Определим реакцию системы на дельта-функцию при нулевых начальных условиях. Входной сигнал как функция времени будет определяться выражением:

$$U(t) = \begin{cases} \infty, t = 0; \\ 0, t \neq 0. \end{cases}$$ — дельта-функция (функция Дирака)

Его изображение по Лапласу:

$U(s) = 1.$

Тогда изображение выходного сигнала будет определяться выражением:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{0{,}539}{s(796{,}48s^2 + 39{,}824s + 1)}$$

Найдём выражение для выходного сигнала.

Разложим дробь $\frac{0{,}539}{s(796{,}48s^2+39{,}824s+1)}$:

$$\frac{0{,}539}{s(796{,}48s^2 + 39{,}824s + 1)} = \frac{0{,}539}{\frac{1}{0{,}02511}} \frac{0{,}02511}{\left(s - (-0{,}025)\right)^2 + (0{,}02511)^2}.$$

Оригинал функции $Y(s)$:

$Y(t) = 0{,}013475 * e^{-0{,}025t} * \sin(0{,}02511t) * 1(t)$.

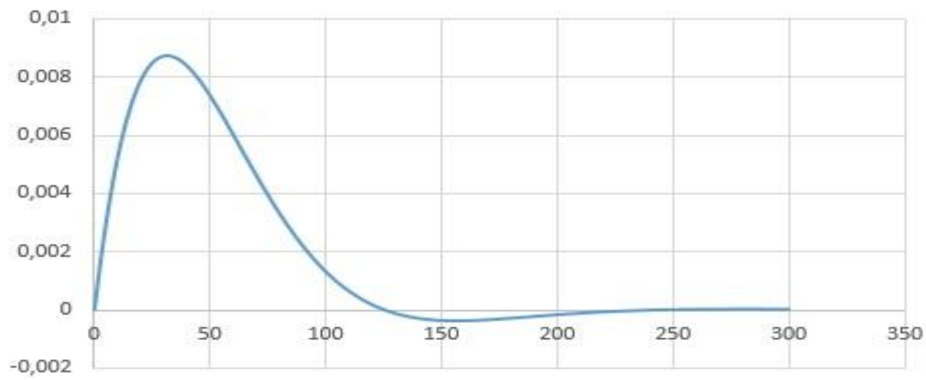


Рисунок 6 — График реакции на дельта-функцию при нулевых начальных условиях в Excel.

Проверим соответствует ли действительности этот график используя инструментарий MatLab.

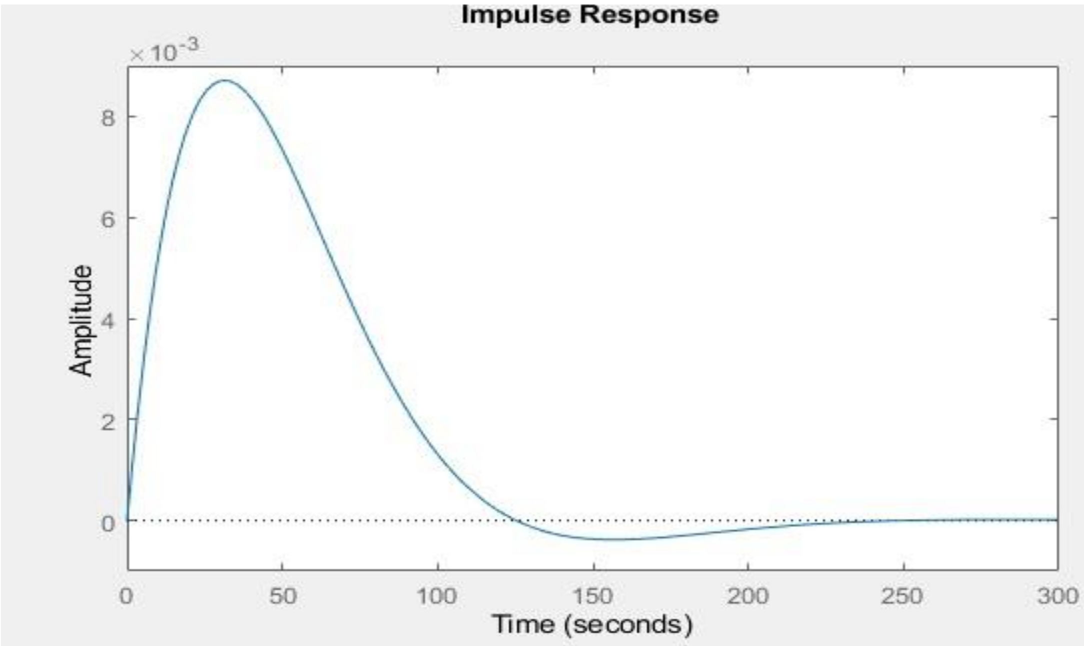


Рисунок 7 — График реакции на дельта-функцию при нулевых начальных условиях в Matlab

15. Показатели качества переходного процесса.

Оценим эффективность функционирования динамической системы, используя прямые показатели качества. Для их нахождения целесообразно будет использовать пакет MATLAB.

1) Перерегулирование

Перерегулирование δ — это отношение разности максимального значения переходной характеристики h_{max} и её установившегося значения h_∞ к величине установившегося значения выраженная в процентах.

$h_{max} \approx 0{,}563,$ а $h_\infty \approx 0{,}539.$

Найдём значение перерегулирования:

$$\delta = \frac{h_{max} - h_\infty}{h_\infty} * 100\% = \frac{0{,}563 - 0{,}539}{0{,}539} * 100\% \approx 4.45\%$$

2) Время переходного процесса

Время переходного процесса t_p — это момент времени, после которого отклонения переходной характеристики не будут превышать 5% от установившегося значения $t_p \approx 168$ секунд.

3) Время нарастания переходного процесса

Время нарастания переходного процесса $t_н$ — это абсцисса точки пересечения переходной характеристики с уровнем установившегося значения $t_н \approx 101$ сек.