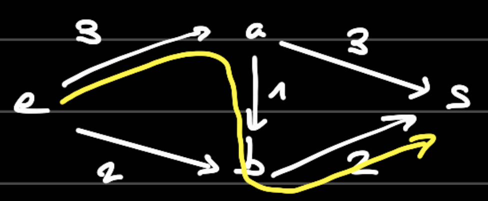
TD 25-11 (TD3)

Rappel sur les flots :

Deux règles principales.

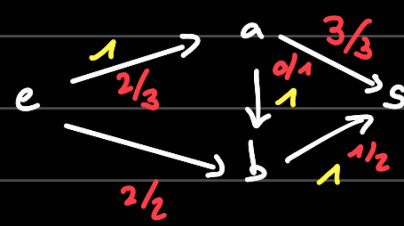
- Le poids des arêtes est entre 0 et leur charge maximale.
- Pour un sommet le total de la charge entrante est = total sortant.

Exercice 9:



Soit le chemin en jaune.

⇒ Flot actuel :



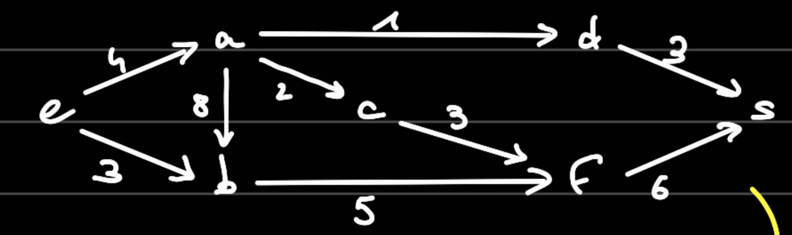
Flot actuel.

Charge restante.

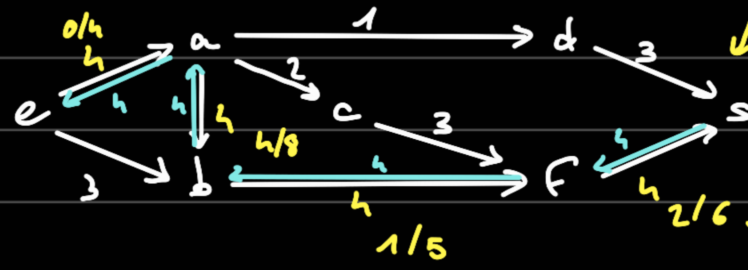
On prend un chemin 1-1-1... arbitrairement. On enlève de 1 chaque arête par lesquelles on passe.

L'idée est d'aller à la fin par n'importe quel chemin possible en utilisant le plus de chemin possible et d'avoir le plus gros flot (donc le plus d'arêtes à 0 à la fin).

Exercice 2.

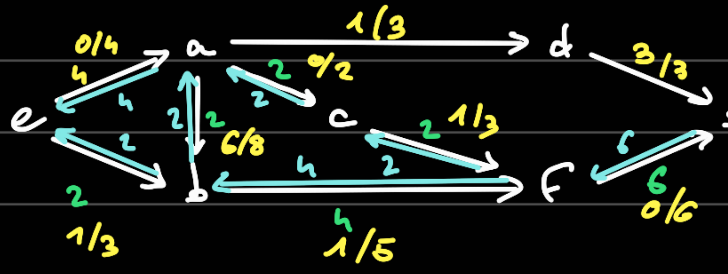


On prend eabfs * de poids 4 min.

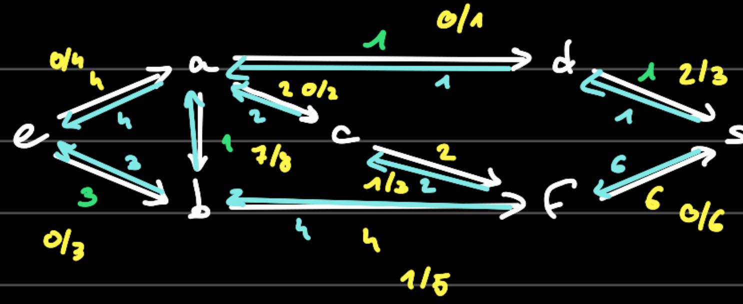


• On place les autres flots et les flots inverses.

ebacfs → 2



ebads → 1



On a terminé car aucune arête sortant de e a un poids non-nul.

Définition : Coupure d'un graphe : Ensemble d'arêtes qui séparent le graphe en 2 parties.

Ici, coupure de s,t sépare s de t

e,s

* Le plus long chemin de poids minimum maximal parmi tous.

Théorème : Max Flot / Min cut

Le flot maximal est égal à la plus petite coupure.

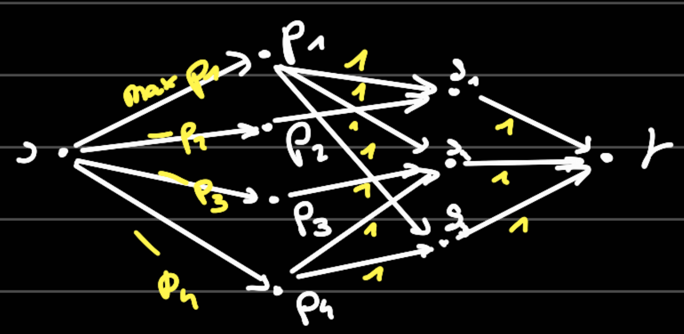
Si on trouve une coupure de la taille du flot l'algo est terminé et le flot est maximal.

Ici on a la capacité du flot = somme des arêtes à e et à s. (= 7 dans notre cas)

Or pour trouver une coupure dans le graphe initial, on a (e,a) et (e,b)
ou (a,d) et (f,s)
(toutes les deux de poids 7)
et des coupes minimales)

Exercice 3 :

1)



$\forall p_i \quad c(sp_i) = \lceil \Sigma \dots \rceil$

$\forall S_j \quad c(S_j r) = 1$

$\forall i,j.\ p_i \in S_j \ , \quad c(p_i S_j) = m$

2) Si le flot est de poids m (le nombre de jour) alors on a une répartition équitable.

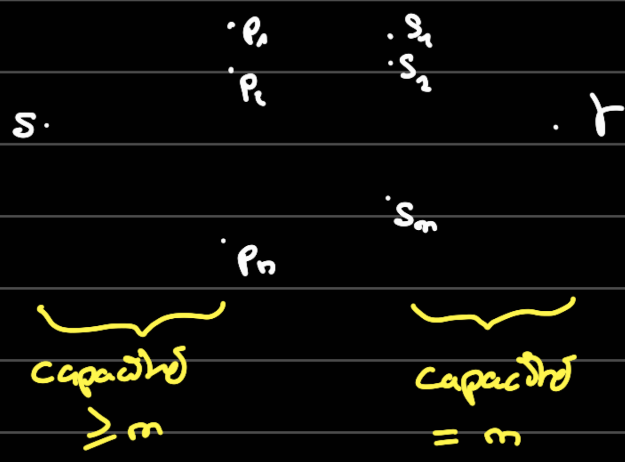
Car : Flot de poids m $\Rightarrow$ toutes les arêtes de la forme (S_j, t) sont saturées
$\Rightarrow$ Chaque jour 1 seul conducteur.

$$\sum \max p_j \geq m$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \left\lceil \sum_{j \in p_i S_j} \frac{1}{|S_j|} \right\rceil \geq \sum_i \sum_{j \in p_i S_j} \frac{1}{|S_j|}$$

$$\geq \sum_j \underbrace{\sum_{p_i \in S_j} \frac{1}{|S_j|}}_{=1} \geq m$$

donc



Les coupures possibles sont :

× De s à p_j $\rightarrow$ $\geq m$

× De S_j à t $\rightarrow$ $= m$

× Les autres passe au moins par 1 arête $p_j S_j$ où poids $= m$ donc $\geq m$.

Donc toute coupure est de poids au moins m
⇒ Il existe un flot de poids m.
⇒ Il existe une répartition équitable.

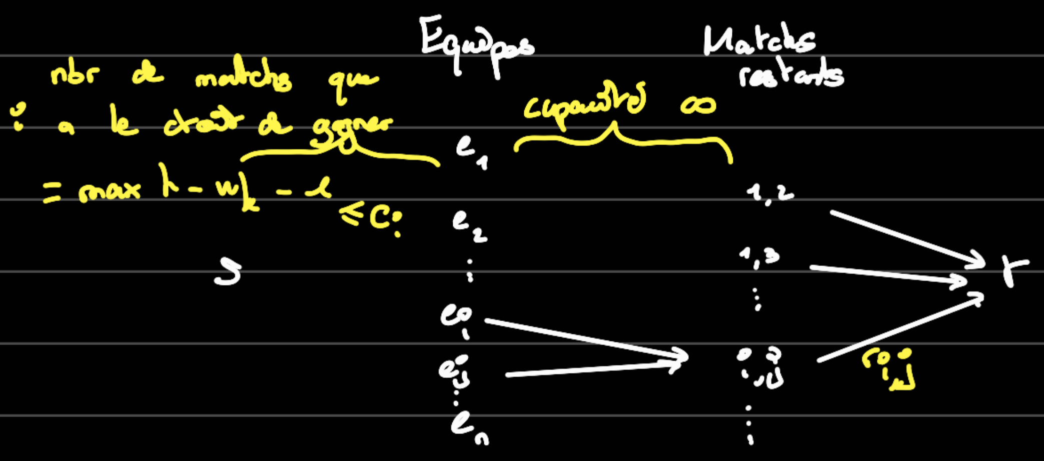
Exercice 4:

Score max atteignable par équipe j:

max k = nbr matchs gagnés + nombres matchs à faire

$$w_k + \sum_{k \neq j} r_{k,j}$$

Si $\exists j$ tq $w_j >$ max k, k ne peut pas gagner.



On enlève e_k On enlève les j,k

Flot = nombre de matchs gagnés.

Max flot sur ce graphe:

× Les arêtes $r_{i,j}$ sont saturées
⇒ Toutes les victoires restantes ont été réparties.
Et personne ne nous a battu car notre score

est plus grand que w_z + ce qu'ils ont gagné.

× Des arêtes ne sont pas saturées.

Toutes les victoires n'ont pas été attribuées.

On ne peut pas répartir toutes les victoires de r_{ij} sans que i ou j dépasse notre score max.

⇒ On ne peut plus gagner.