CM 10-11

LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Signatures : $L = (\mathcal{F}, P)$

$\mathcal{F}$: ensemble de symboles de fonctions
P : ensemble de symboles de relations.
$\mathcal{F} \cap P = \emptyset$, $P \neq \emptyset$
avec arités dans $\mathbb{N}$

Syntaxe : Soit X un ensemble de var.
L'ens. des termes $T(X, \mathcal{F})$
est déf par :

$$\left\{ t ::= x \in X \mid \begin{array}{l} f(t_1, \dots, t_m) \\ f \in \mathcal{F}_m \end{array} \right\}$$

L'ensemble des formules est défini par

$$\alpha ::= R(t_1, \dots, t_n)$$

$$R \in \mathcal{P}_n, t_1, \dots, t_n \in T(X, \mathcal{F})$$

$$\varphi ::= \alpha \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \exists x.\, \varphi \quad x \in X$$

Interprétations / Structures

$$I = (D_I, (f^I)_{f \in \mathcal{F}}, (R^I)_{R \in \mathcal{P}})$$

$D_I \neq \emptyset$ ens appelé domaine.

$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_m, \quad f^{\mathcal{I}} : D_{\mathcal{I}}^{m} \to D_{\mathcal{I}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall R \in \mathcal{P}_n, \quad R^{\mathcal{I}} : D_{\mathcal{I}}^{n} \to \mathbb{B}$

Sémantique: Une valuation $\rho : X \to D_{\mathcal{I}}$

$$\llbracket t \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} \in D_{\mathcal{I}}$$
$$\llbracket x \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} = \rho(x)$$
$$\llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} = f^{\mathcal{I}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}})$$
$$\llbracket \varphi \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} \in \mathbb{B}$$

$$\llbracket R(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} = R^{\mathcal{I}}(\llbracket t_1 \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}})$$

$$\llbracket \neg \varphi \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} = \text{not} \llbracket \varphi \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}}$$

$$\llbracket \varphi \lor \psi \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} \text{ or } \llbracket \psi \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}}$$

$$\llbracket \exists x . \varphi \rrbracket_{\rho}^{\mathcal{I}} = \underset{e \in D_{\mathcal{I}}}{\text{OR}} \llbracket \varphi \rrbracket_{\rho[e/x]}^{\mathcal{I}}$$

Exemple: (théorie des ordres)

$$L = (\emptyset, \{<^{(2)}, =^{(2)}\})$$

$$\varphi_1 = \forall x \; \exists y \mid y < x$$
$$\varphi_2 = \forall x \forall y \, . \, x < y \Rightarrow \exists z, \; x < z \land z < y$$
$$\varphi_3 = \forall x \; \exists y \; \forall z \; x < y \land \neg(x < z \land z < y)$$

Sur · $\mathcal{I} = (\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{Q},<), \rho \models \varphi_1$

(" φ_1 est une csq de $(\mathbb{Q},<),\rho$)

$(\mathbb{Q},<), \rho \models \varphi_2$

$(\mathbb{Q},<), \rho \not\models \varphi_3$ (principalement car φ_3 est la propriété inverse de φ_2)

· $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N},<), \rho \not\models \varphi_1$

$(\mathbb{N},<), \rho \not\models \varphi_2$

$(\mathbb{N},<), \rho \models \varphi_3$

· $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{N},<), \rho \models \varphi_1$

$\_\_\_\_\_\_ \not\models \varphi_2$

$\_\_\_\_\_\_ \models \varphi_3$

Exemple: (théorie de base de donnée)

FILMS			SEANCES	
titre	réalisation	interprète	Ciné	Titre
Shining	KUBRICK	NICHOLSON	Odéon	Easy rider
The Player	ALTMAN	ROBBINS	⋮	⋮
Easy rider	HOPPER	NICHOLSON		
Easy rider	HOPPER	HOPPER		
Apocalypse Now	COPPOLA	HOPPER		

Signature "relationelle"

$\mathcal{F} = \{ \text{shining}^{(0)}, \text{kubrick}^{(0)}, \text{nicholson}^{(0)}, \ldots \}$

$\mathcal{P} = \{ =^{(2)}, \text{Film}^{(3)}, \text{Séance}^{(2)} \}$

$$\varphi(\mathcal{I}) = \{(e_1,\dots,e_n) \in O_{\mathcal{I}}^n \mid \mathcal{I}, \rho^{[e_1/x_1,\dots,e_n/x_n]} \models \varphi\}$$

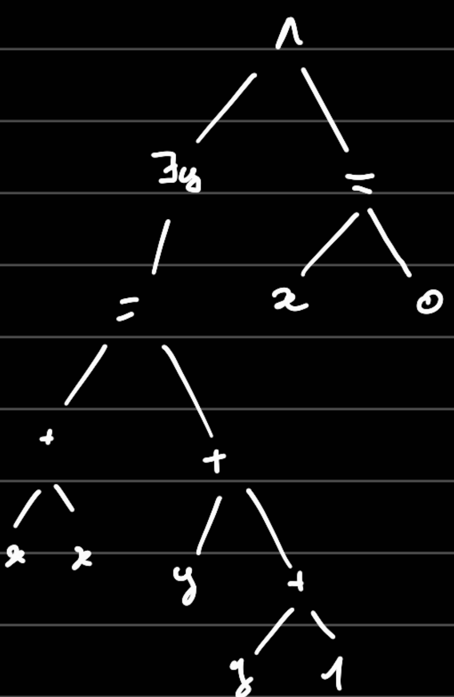
où $Fv(\varphi) = \{x_1,\dots,x_n\}$

$\exists r \exists q , \ Film(x, r, q)$ ← la liste des titres des films.

$\exists t. \exists r \ Seance(x, t) \wedge Film(t, r, HOPPER)$

= SELECT cinema FROM SEANCE
WHERE NATURAL JOIN Film
WHERE interprete = "HOPPER".

Variables libres et liées :



Pour une variable x, si en remontant on a un $\forall x$ ou $\exists x$ (quantificateur) alors x lié.

<u>Remarque:</u> x peut être lié et libre en même temps (selon le parcours dans l'arbre)

<u>Définition:</u> Une formule est "close" si elle n'a pas de variable libre
$(Fv(\varphi) = \emptyset)$

Corollaire : Si φ est close pour $\forall I$

$$(\forall \rho.\ I, \rho \models \varphi) \Leftrightarrow (\exists \rho.\ I, \rho \models \varphi)$$

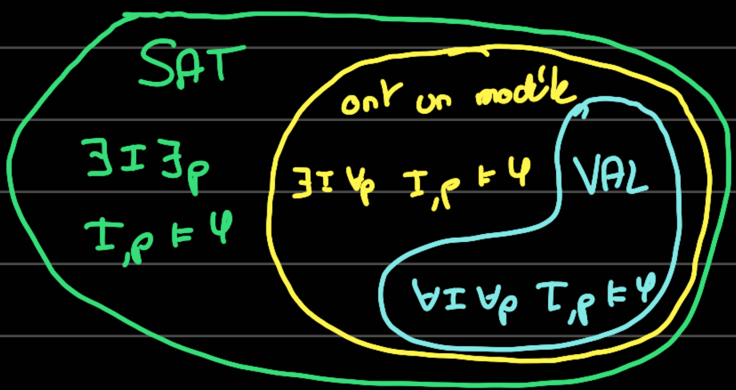
Définition :

- Une formule φ est <u>satisfiable</u> si $\exists I\ \exists \rho\quad I, \rho \models \varphi \ (\Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^I_\rho = 1)$
- Une formule φ est <u>valide</u> si $\forall I\ \forall \rho,\ I, \rho \models \varphi$
- Une interprétation I est un <u>modèle</u> de φ si $\forall \rho,\ I, \rho \models \varphi$

~~SAT~~

$\forall I\ \forall \rho$

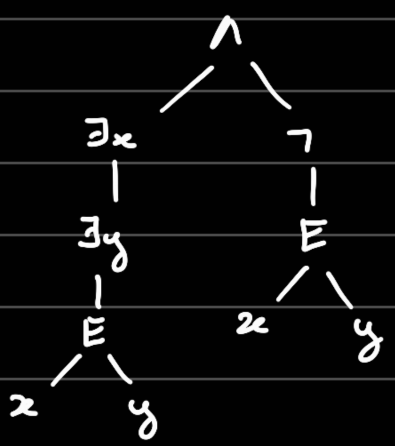
$I, \rho \not\models \varphi$



Exemple : $\exists x\ (B(x) \Rightarrow \forall y.\ B(y))$ est valide.

Exemple : $L = (\emptyset, \{E^{(2)}\})$

$$\varphi = (\exists x \exists y.\ x\ E\ y) \wedge \neg (x\ E\ y)$$



$\in$ SAT

$I : \rho(x) = 1 \quad \rho(y) = 0$

I <u>n'est pas un modèle</u>

φ n'a pas de modèle:

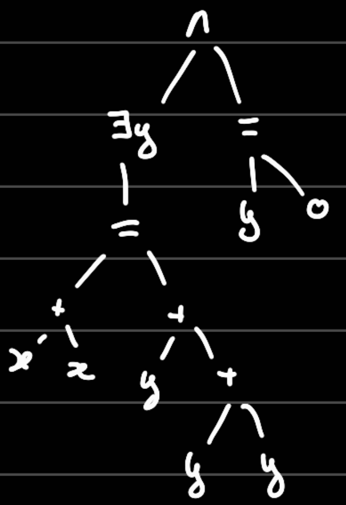
$\forall I, \exists \rho \;.\; I, \rho \not\models \varphi$

En effet, si $I \models \exists x \exists y \; x \, E \, y$

$\exists e \, \exists e' \in D_I$ tq $(e, e') \in E^I$

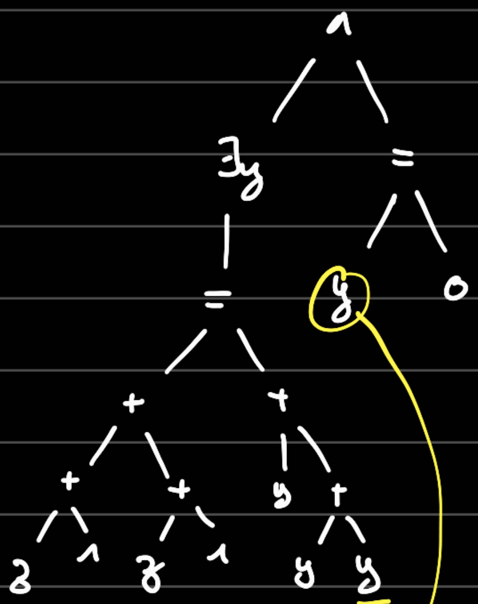
Alors $\rho(x) = e$, $\rho(y) = e'$ est bien tel que $I, \rho \not\models \varphi$

Substitution:



$[y+1/x]$ sur $(\mathbb{Z}, \{+, 0, 1\})$

$\Rightarrow$



ce y est "défini" par $\exists y$ et pas par $\rho(y)$

$\varphi[z+1/x]$ est vraie pour $\rho(y) = 1$, $\rho(z) = 1$

$(z+1 \leftrightarrow x)$

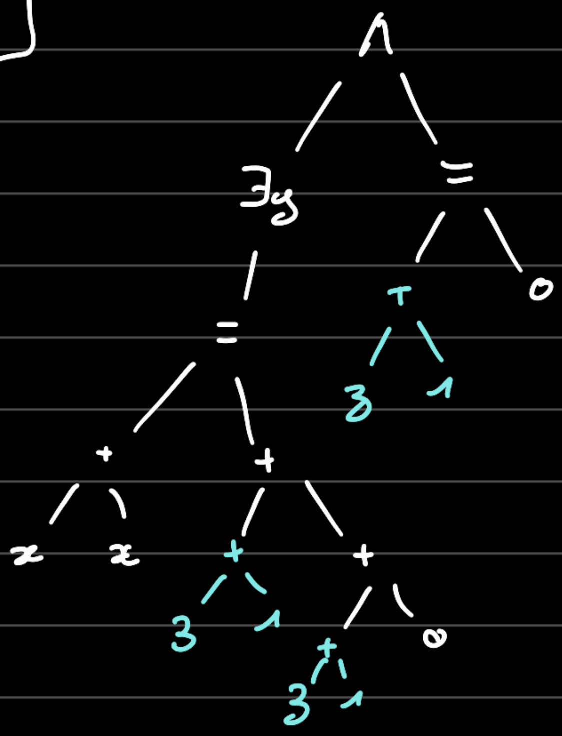
φ est vraie pour $\rho'(x) = 2$ (car $\rho'(x) = \rho(z) + 1$)

$\rho'(y) = 1$ (ne change pas)

⚠ On ne peut pas appliquer toutes les substitutions ⚠

Exemple:

$\left[{}^{3+1}/_{x}\right]$ (sur la même formule)



Ici on a substitué une variable liée (y) et ça ne fonctionne plus.

Idem pour $\left[{}^{y}/_{x}\right]$ (c'est un peu différent mais ça ne fonctionne pas non plus.

Donc :
- On ne substitue jamais une variable liée
- On ne change pas une variable pour une var. qui sera liée.

Un mécanisme consiste à faire :
- Si y liée : $y = y'$
- $\left[{}^{\cdots}/_{y}\right]$ ainsi on ne changera plus une var liée c'est y' qui est liée.