Exercice 1 :

a. A : Pizza pâte épaisse
B : Pizza possède roquette
C : ________ champignons

$$A \wedge (B \vee C)$$

b. $(A \wedge B) \vee C$

café servi — tartine — thés

c. $A \Rightarrow B$

Paris — Terre ronde

d. $A \Rightarrow B$

Rome — Terre ronde

e. $\neg(A) \Rightarrow B$

Terre est ronde — mange mon chapeau

Exercice 2 :

P	Q	R	$\overset{C}{Q \Rightarrow R}$	$\overset{A}{P \Rightarrow Q}$	$\overset{B}{P \Rightarrow R}$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

$$(P \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) = \varphi'$$

P	A	B	C	$\overbrace{P \Rightarrow C}^{\varphi}$	$\overbrace{A \Rightarrow B}^{\psi}$	φ'
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

φ' est valide et $\varphi \Rightarrow \psi$ est une tautologie

de plus, $\varphi \models \psi$

Exercice 3:

1) $\varphi = P \Rightarrow Q$, $\psi = \neg Q \Rightarrow \neg P$

$\equiv \neg P \vee Q$ $\qquad = Q \vee \neg P$

donc $\varphi \equiv \psi$ (A. est vrai)

2) $\varphi = P \wedge (\neg Q \vee R)$

$\psi = (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$

$\varphi \nvDash \psi$ et $\psi \nvDash \varphi$ (D)

3) $\varphi = P \Rightarrow Q$

$\psi = P \Rightarrow (Q \vee R)$

$\varphi \vDash \psi$ " ψ est une conséquence de φ "

et $\psi \nvDash \varphi$ (B)

4) $\varphi = (P \wedge Q) \Rightarrow R$

$\psi = P \Rightarrow (\neg Q \vee R)$

$\varphi \Leftrightarrow \psi$ (A)

Exercice 4 :

Théorème de déduction :

Soient φ, ψ des FP

$\varphi \models \psi \Leftrightarrow \varphi \Rightarrow \psi \in UAL$

Démonstration : " $\Rightarrow$ " :

Soit I une interprétation quelquonque des variables dans φ et ψ

On montre que $[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]^I = 1$

Supposons que $\varphi^I = 1$, alors par hypothèse, $\psi^I = 1$

donc $[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]^I = 1$

" $\Leftarrow$ " : Supposons $\varphi \Rightarrow \psi \in UAL$ et soit I une interprétation quelcquonque des variables tq $[\![\varphi]\!]^I = 1$.

Alors puisque $[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]^I = 1$ alors $[\![\psi]\!]^I = 1$.

donc $\varphi \models \psi$

Montrer de $\Rightarrow$ est plus difficile.

Exercice 5 :

a. Soit $\varphi \in VAL$ et $\psi \in VAL$.

$\Leftrightarrow \varphi \wedge \psi \in VAL$

"$\Rightarrow$" : Soit I tq $[\![\varphi]\!]^I = 1$
et $[\![\psi]\!]^I = 1$

on a bien

$[\![\varphi]\!]^I \wedge [\![\psi]\!]^I = 1 \wedge 1 = 1$

$AND([\![\varphi]\!]^I, [\![\psi]\!]^I) = AND(1,1) = 1$

donc $\varphi \wedge \psi \in VAL$

"$\Leftarrow$" : Soit I tq $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^I = 1$

φ et ψ doivent être égaux à 1 dans l'interprétation I.

donc $[\![\varphi]\!]^I = 1$, et $[\![\psi]\!]^I = 1$

donc $\varphi = 1$ et $\psi = 1$

Pourquoi doivent-ils être égaux ?

Par l'absurde.

Si $[\![\varphi]\!]^I = 0$ et $[\![\psi]\!]^I = 0$

alors $AND([\![\varphi]\!]^I, [\![\psi]\!]^I) = AND(0, 0)$

$= 0$

$\neq [\![\varphi \wedge \psi]\!]^I$

mais c'est absurde

b. Non : contre-exemple :

$\varphi = P \qquad \psi = \neg P$

ψ est validé mais $\varphi \notin VAL$ et $\psi \notin VAL$

c. $(\varphi \text{ et } \psi) \in SAT \Rightarrow \exists I \text{ tq } [\![\varphi]\!]^I = 1$
$\text{et } \exists J \text{ tq } [\![\psi]\!]^J = 1$

$\varphi \vee \psi$ satisfiable par v_1 et v_2
$\varphi \wedge \psi$ pas toujours satisfiable.
<u>exemple:</u> $\varphi = P$, $\psi = \neg P$
$\in SAT$, $\in SAT$

mais $\varphi \wedge \psi \notin SAT$

<u>Remarque:</u> Si $\varphi \notin SAT$
alors $\neg\varphi \in VAL$

<u>Exercice 6:</u>

Soit I une interprétation:
Alors $[\![\psi\tau]\!]^I = [\![\psi]\!]^{I\tau}$
$= [\![\psi]\!]^{I\tau}$
$= [\![\psi\tau]\!]^I$