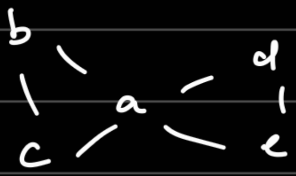
CMTD 29-10

COURS

Définition: Liste de sommets $(v_1, \dots, v_r)$
r est la longueur de la arche
où il peut exister i, j tq $v_i = v_j$
Un chemin est une marche
où $\forall (i, j)$, $v_i \neq v_j$

Définition. Un cycle est une marche
qui revient à son point de départ.
et $(v_0, v_1, \dots v_{r-1}, v_r)$ avec $v_r = v_0$
et $r > 2$

Exemple.



$(a, b, a, e, a, \dots)$ est une marche
(a, e, d, a, c) n'est pas un cycle
(a, e, d, a) est un cycle.

Exemple: Sur K_5
- Toute suite de sommet est une marche (car graphe complet)
- $(\underline{A}, B, C, \underline{A}, D, E, A)$ n'est pas un cycle car $v_0 = v_3$

Définition: Un chemin maximal est un chemin $(v_0, \dots, v_n)$ tq'il n'existe pas de v_{n+1} pour le prolonger

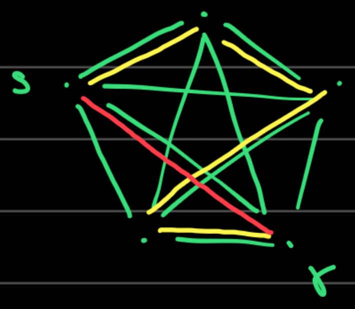
TD 3

Exercice 3:

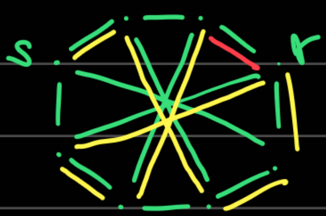
$\gamma = (s, s_1, \dots, s_{r-1}, r)$

1) Supposons par l'absurde qu'on ne soit pas passé par un des voisins de r. alors γ ne serait pas maximal car on pourrait le prolonger par ce voisin.

Or on sait que γ est maximal donc voisins$(r) \in \gamma$

2) 

$k = 4$



Considérons γ un chemin max. $(v_0, \dots, v_k)$ $v_0 = s$ et $v_k = r$ comme l'exemple précédent.

Tous les voisins de r sont dans γ par construction.

Soit $i = \min \{ j \mid v_j$ voisin de $r \}$
(voisin le $\oplus$ loin s/ le cycle)

Alors $(v_i, \ldots, \underset{\overset{\|}{r}}{v_k}, v_j)$ est un cycle

(car $(v_j, \ldots, v_k)$ est un chemin)

il y a donc au moins $\underbrace{k}_{\text{voisins de } r} + \underbrace{1}_{r}$ éléments.

Cours

Définition: Un graphe est connexe ssi $\forall x, y \in V(G)$
$\exists (x, \ldots, y)$ une marche.
Il existe alors un chemin de x à y.

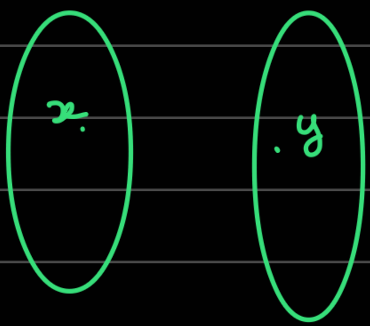
TD

Exercice 1:

Par l'absurde

Supposons $\exists G (V$ tq $|V| = n, E)$ non-connexe
et $\forall v \in V \ \deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$

Soit x et y 2 sommets dans 2 composantes connexes distinctes



· Combien y a-t-il de sommets au minimum ds la compos. connexe de x/y ?
il y en a au moins
$$\underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\deg(x/y)} + \underbrace{1}_{x/y}$$

pour chacune des composantes connexes

ainsi pour les deux on aura

$$|V| = 2\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$$

$$= n-1+2$$

$= n+1$ ce qui est contradictoire

alors G est connexe.

Exercice 2:

1) • Si G est complet
alors il est par définition connexe

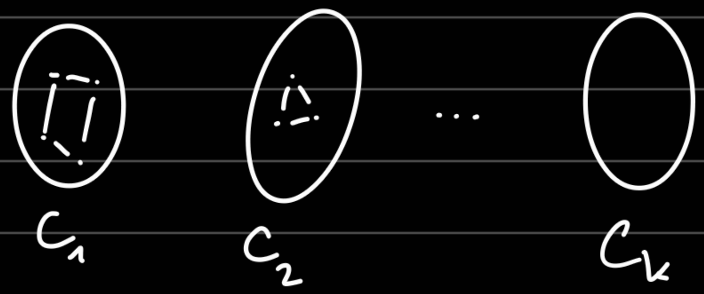
• Si G n'est pas complet :

- Si $\exists u \in V(G) : \deg(u) = n-1$
  alors il n'y a pas d'autres sommets seul, donc G connexe
- Sinon $(\forall u \in V(G), \deg(u) < n-1$
  dans ce cas il peut exister u tq il n'y a pas d'arête de u vers un autre sommet de G.
  mais dès lors $\bar{G}$ le rendra connexe et $\bar{G}$ ne créera pas d'autre sommet seul car pour créer un sommet seul il faut $\deg(u) = n-1$ or on aurait été dans le cas précédent.

Ou :

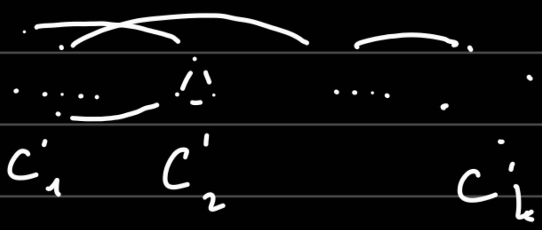
1) Si G connexe c'est bon donc on va montrer que si G n'est pas connexe alors $\bar{G}$ l'est.

G :



Dans $\bar{G}$ on aura

$\bar{G}$:



$\forall x \in C'_1$, x sera relié vers tous les y de $C'_2, C'_3, \ldots C'_k$

De manière générale

$\forall i,j \in [\![1;k]\!], \forall x_i \in C'_i$, x_i est relié vers C'_j où $j \neq i$

-> "Chaque élément de C'_i sera relié à tous les éléments de $C'_1, \ldots, C'_{i-1}, C'_{i+1}, \ldots C'_k$"

donc on pourra toujours trouver un chemin de $i \in C_1$, $j \in C_2$.

- Soit $i \in C_1, j \in C_2$

$\{i,j\} \notin G \Leftrightarrow \{i,j\} \in \bar{G}$

- Soit $i, k \in C_1$ et $j \in C_2$

$\{i,j\} \in \bar{G}$ et $\{j,k\} \in G$

donc (i,j,k) est chemin de i à k par j. et seront dans la même composante connexe de $\bar{G}$.

Exercice 4: pour les vacances

Indication: Utiliser exo 3.