SOMON
Bastien
21956725

DM n°2
Logique

Exercice n°1 :

1) premier $\wedge$ compris entre (strict) x et $y+1$

$$\text{entre}(p,x,y) : \text{premier}(p) \wedge x < p \wedge p < y+1$$

2) $\text{image}(x,y) = \forall p.\, \neg \text{entre}(p,0,y) \vee \text{entre}(F(p), x, x+y)$

3) $\text{injective}(x,y) = \forall p_1 . \forall p_2 .\, \text{entre}(p_1,x,y) \wedge \text{entre}(p_2,x,y) \wedge (\neg(F(p_1) = F(p_2)) \vee p_1 = p_2)$

4) $\text{nonImage}(x,y) = \exists p.\, \text{entre}(p,x,x+y) \wedge \forall k .(\text{entre}(k,0,y) \wedge \neg(k=p) \wedge \neg(F(k)=p))$

5)

Exercice 2 :

1) a. On voit que l'irreflexivité n'est pas valide. En effet, on voit que b pointe sur lui-même.

b. Ce n'est pas un modèle car il y a un cycle de longueur impair.

c. Oui, c'est un modèle.

d. Elle n'est pas un modèle car la E-congruence n'est pas satisfaite.

2) On note $\Psi = \forall x. \forall y. \forall z. ((E(x,y) \wedge E(y,z)) \Rightarrow \neg E(x,z))$

on cherche

$$
\begin{aligned}
nnf(\Psi) &= nnf(\forall x. \forall y. \forall z. ((E(x,y) \wedge E(y,z)) \Rightarrow \neg E(x,z))) \\
&= \forall x. \, nnf(\forall y. \forall z. ((E(x,y) \wedge E(y,z)) \Rightarrow \neg E(x,z))) \\
&= \forall x. \forall y. \forall z. \, nnf((E(x,y) \wedge E(y,z)) \Rightarrow \neg E(x,z)) \\
&= \forall x. \forall y. \forall z. \, nnf(\neg(E(x,y) \wedge E(y,z)) \vee \neg E(x,z)) \\
&= \forall x. \forall y. \forall z. \, nnf(\neg(E(x,y) \wedge E(y,z))) \vee nnf(\neg E(x,z)) \\
&= \forall x. \forall y. \forall z. \, \neg E(x,y) \vee \neg E(y,z) \vee \neg E(x,z) \\
&= \forall x. \forall y. \forall z. \, \neg(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z)) \\
&= \neg \exists x. \exists y. \exists z. \, (E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge E(x,z))
\end{aligned}
$$

On a $nnf(\Psi)$ est C_3 exclus donc $\Psi \in Th(\mathcal{A})$

Exercice 3 :

1) $\varphi_3 = (\forall x. (P(x) \Rightarrow P(f(x)) \wedge P(a)) \Rightarrow P(f(f(a))) \vee \forall x. P(x)$

2)

$$
\begin{aligned}
nnf(\varphi_3) &= nnf(\neg(\forall x. (\neg P(x) \vee P(f(x))))) \vee P(f(f(a))) \vee \forall x. P(x)) \\
&= nnf(\exists x. (\neg P(x) \vee P(f(x)))) \vee nnf(P(f(f(a)))) \vee nnf(\forall x. P(x)) \\
&= \exists x. (\neg P(x) \vee P(f(x))) \vee P(f(f(a))) \vee \forall x. P(x)
\end{aligned}
$$

3)