



Mathématiques discrètes

Projet : Permutations triables par une pile, arbres binaires et mots bien parenthésés

Consignes Le but du projet est de présenter une application dans laquelle les mathématiques discrètes jouent un rôle fondamental.

Le rendu final du projet consistera en un article destiné au grand public au format pdf de 800-1000 mots plus une annexe numérique, qui pourra contenir par exemple une démonstration interactive, une vidéo explicative et/ou des graphiques générés par du code écrit par vous-même ; cette annexe sera rendue sous la forme d'un lien vers un dépôt en ligne. La forme exacte et la technologie utilisée pour l'annexe peut varier et est donc laissée au libre choix des étudiants. L'article et son annexe seront jugés non seulement sur le contenu mais aussi sur la clarté de la présentation, la qualité de rédaction, et la créativité.

Contenu Le sujet détaille quelques points à développer mais ceux-ci sont seulement proposés comme point de départ de votre travail. Vous êtes encouragés à développer d'autres pistes en lien avec les mathématiques discrètes. De même, la bibliographie conseillée est un point de départ. Vous pouvez vous appuyer sur d'autres sources sur lesquelles vous porterez un œil critique et que vous prendrez soin de citer correctement.

Charte de bonne conduite Lisez attentivement la charte de bonne conduite. Portez une attention particulière à citer toutes vos sources, y compris les exemples et les images que vous utiliserez. L'utilisation d'outils d'IA tels que ChatGPT est formellement interdite. L'équipe pédagogique sera très attentive à tous ces aspects lors de la correction.

Calendrier Consultez la page Moodle du cours pour les dates des principales étapes du projet.

Bref descriptif du sujet

Une permutation triable par une pile est une permutation dont les éléments peuvent être triés à l'aide de l'algorithme suivant, qui utilise une pile : pour chaque élément x , tant que x est plus grand que l'élément y sur le haut de la pile, dépiler et envoyer y vers la sortie. Empiler x et passer au prochain élément à trier.

Cet algorithme ne trie pas toutes les permutations correctement. Par exemple, 3,2,1,4 est bien trié : on empile 3,2,1, puis on dépile 1,2,3, on empile 4 et on dépile 4. Cependant 2,3,1 n'est pas bien trié par cet algorithme : on empile 2, on dépile 2, on empile 3, on empile et dépile 1, puis 3, ce qui retourne les éléments dans l'ordre 2,1,3.

Les permutations triables par une pile sont comptées par les nombres de Catalan, qui comptent aussi d'autres structures combinatoires, parmi lesquelles les arbres binaires ou les mots bien parenthésés.

Le but du projet est de comprendre la notion de permutations triables par une pile, de savoir les dénombrer et de décrire une bijection avec les arbres binaires et les mots bien parenthésés.

Bibliographie conseillée

- Băşna, Miklášs (2002), "A survey of stack-sorting disciplines", *Electronic Journal of Combinatorics* 9(2):A1, MR2028290.
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Catalan#Mots_de_Dyck
- https://en.wikipedia.org/wiki/Stack-sortable_permutation

Pistes de développement

1. Définir la notion de permutation triable par une pile (écrire les premières permutations de taille 1,2,3,4).
2. Définir la notion de permutation qui évite un motif et expliquer pour quoi la classe de permutations triables par une pile avec n éléments est exactement la classe de permutations qui évitent le motif 231.
3. Décrire une bijection entre permutations triables par une pile avec n éléments et arbres binaires avec n noeuds et l'implémenter.
4. Décrire une bijection entre arbres binaires de longueur n et mots bien parenthésés de longueur $2n$.
5. Écrire la formule qui donne le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$ et en présenter une preuve.
6. Écrire un programme qui prend un entier n et engendre toutes les permutations triable par une pile avec n éléments. Analyser la complexité.