Université Paris Cité

Coloration de graphes ; graphes planaires

CM nº10 — Algorithmique (AL5)

Matěj Stehlík

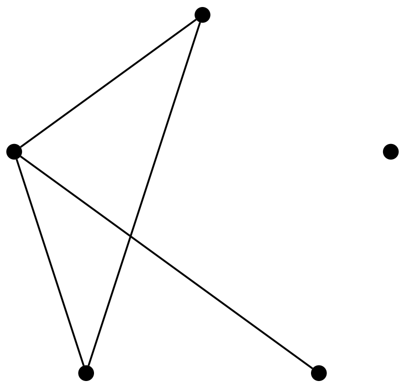
1/12/2023

Cliques

Définition

- Une *clique* de G est un sous graphe induit de G qui est complet, c'est-à-dire, il contient toutes les arêtes possibles.
- Le *nombre de clique*, noté $\omega(G)$, et le nombre de sommets d'une plus grande clique dans G.

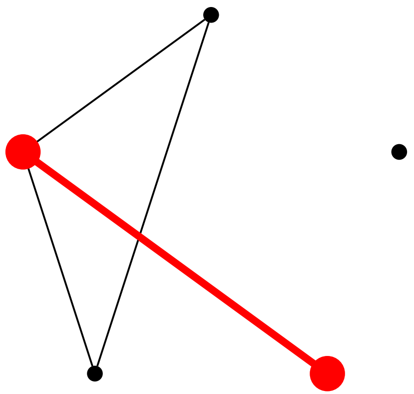
omega



Cliques

Définition

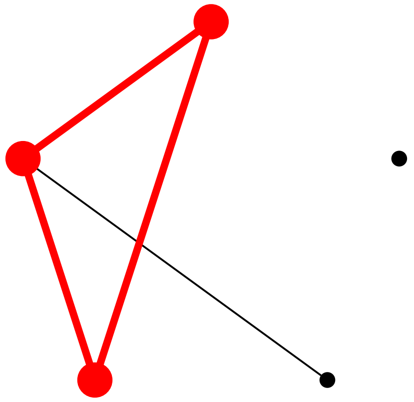
- Une *clique* de G est un sous graphe induit de G qui est complet, c'est-à-dire, il contient toutes les arêtes possibles.
- Le *nombre de clique*, noté $\omega(G)$, et le nombre de sommets d'une plus grande clique dans G.



Cliques

Définition

- Une *clique* de G est un sous graphe induit de G qui est complet, c'est-à-dire, il contient toutes les arêtes possibles.
- Le *nombre de clique*, noté $\omega(G)$, et le nombre de sommets d'une plus grande clique dans G.

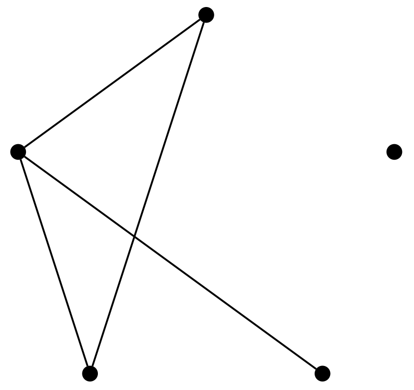


$\omega(G) = 3$

Ensembles stables

Définition

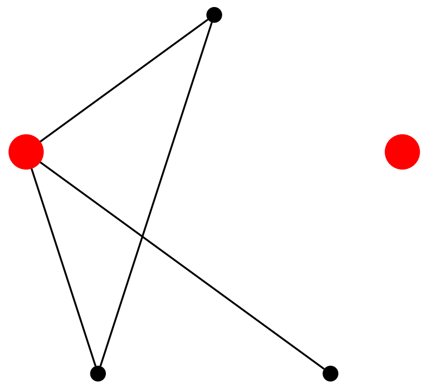
- Un *stable* de G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents : il induit un sous graphe sans arêtes.
- Autrement dit, $U \subseteq V$ est un stable si et seulement si $uv \notin E$ pour toute paire de sommets $u, v \in U$.
- Le *nombre de stabilité*, noté $\alpha(G)$, est le nombre de sommets d'un plus grand stable de G.



Ensembles stables

Définition

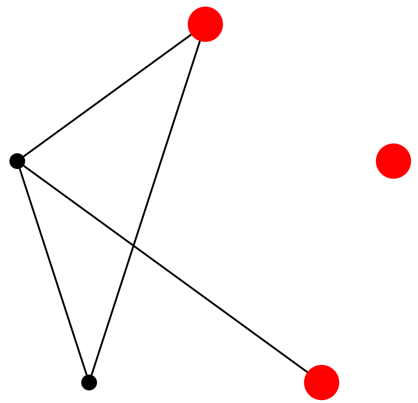
- Un *stable* de G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents : il induit un sous graphe sans arêtes.
- Autrement dit, $U \subseteq V$ est un stable si et seulement si $uv \notin E$ pour toute paire de sommets $u, v \in U$.
- Le *nombre de stabilité*, noté $\alpha(G)$, est le nombre de sommets d'un plus grand stable de G.



Ensembles stables

Définition

- Un *stable* de G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents : il induit un sous graphe sans arêtes.
- Autrement dit, $U \subseteq V$ est un stable si et seulement si $uv \notin E$ pour toute paire de sommets $u, v \in U$.
- Le *nombre de stabilité*, noté $\alpha(G)$, est le nombre de sommets d'un plus grand stable de G.

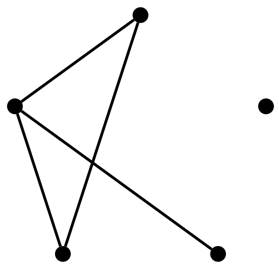


$\alpha(G) = 3$

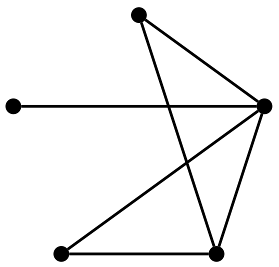
Relation entre cliques et stables

Observation

Les sommets d'une clique de G correspondent à un stable du complémentaire $\overline{G}$, et un stable de G correspond à l'ensemble de sommets d'une clique de $\overline{G}$. En particulier, $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ et $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.



G

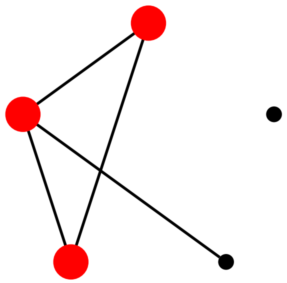


$\overline{G}$

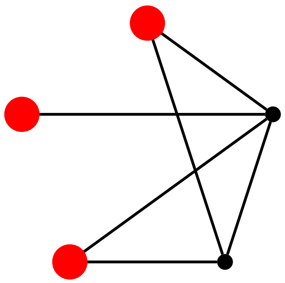
Relation entre cliques et stables

Observation

Les sommets d'une clique de G correspondent à un stable du complémentaire $\overline{G}$, et un stable de G correspond à l'ensemble de sommets d'une clique de $\overline{G}$. En particulier, $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ et $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.



G



$\overline{G}$

Relation entre cliques et stables

Observation

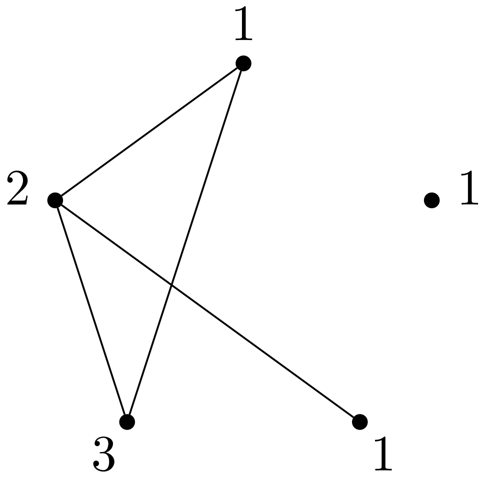
Les sommets d'une clique de G correspondent à un stable du complémentaire $\overline{G}$, et un stable de G correspond à l'ensemble de sommets d'une clique de $\overline{G}$. En particulier, $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ et $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

G $\qquad\qquad$ $\overline{G}$

Coloration

Définition

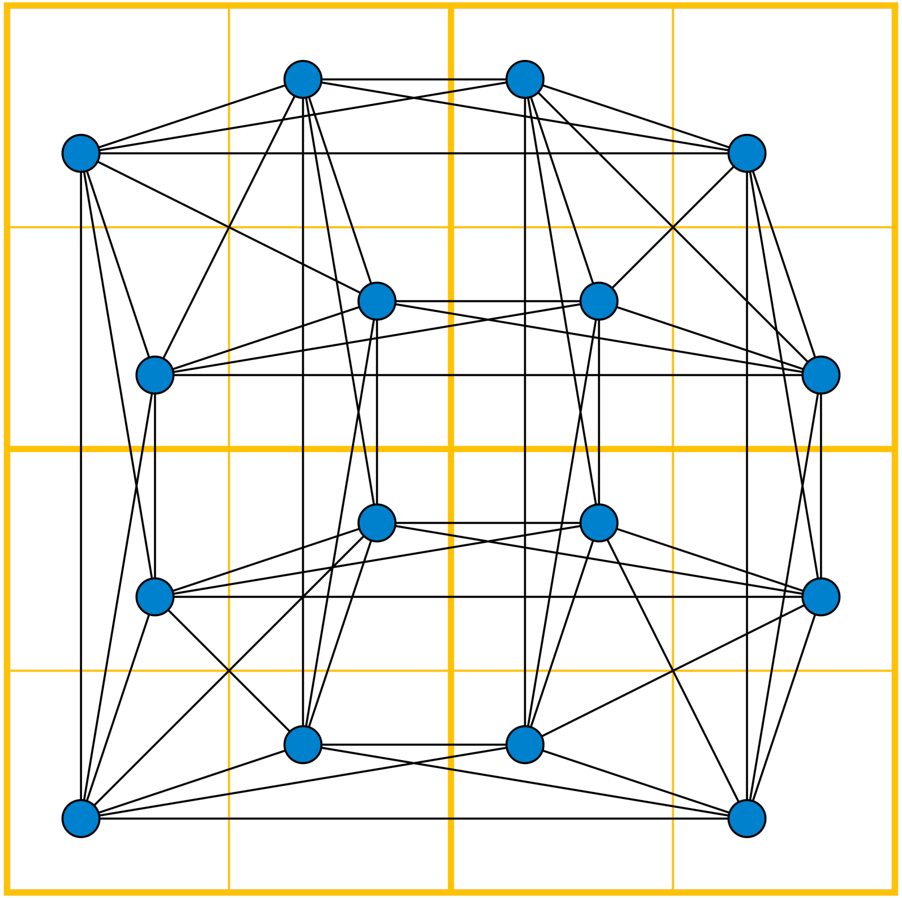
- Une k-*coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ telle que $c(u) \neq c(v)$ pour toute arête $uv \in E$.
- *Classe chromatique* : l'ensemble des sommets d'une couleur.
- Les classes chromatiques sont des stables.
- Le plus petit entier k tel qu'il existe une k-coloration de G est le *nombre chromatique* de G, qu'on note $\chi(G)$.



Application : planning des examens

- Les étudiants ont des examens dans toutes les UE auxquelles ils s'inscrivent.
- Les examens de deux UE différentes ne peuvent avoir lieu en même temps s'il y a des étudiants inscrits à ces deux cours.
- Pour trouver un planning avec le moins de sessions, considérons le graphe G dont l'ensemble de sommets est l'ensemble de toutes les UE, deux UE étant reliés par une arête s'il font l'objet d'un conflit.
- Les stables de G correspondent aux groupes de UE sans conflit.
- Ainsi le nombre minimum de sessions requis est le nombre chromatique de G.

Application : Sudoku



Nombre chromatique de certains graphes

Exemple

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

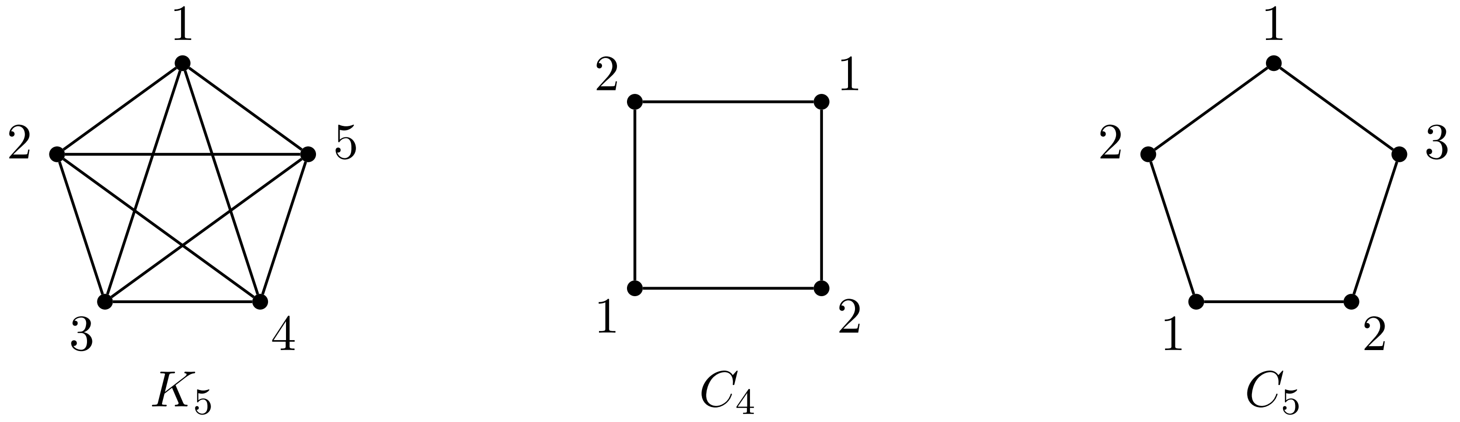
Remarque : pour prouver que $\chi(G) = k$, il faut prouver :

(i) $\chi(G) \leq k$ et

(ii) $\chi(G) \geq k$.

il existe une k-coloration

il n'existe pas de (k-1)-coloration



Nombre chromatique et sous-graphes

Observation

Si $H \subseteq G$, alors $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Démonstration

- Soit c une coloration de G.
- La restriction de c aux sommets de H définit une coloration de H.
- Donc, $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Relation entre χ et ω

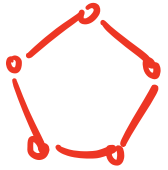
Proposition

Soit G un graphe quelconque. Alors, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Démonstration

- Par la définition de ω, G contient un sous-graphe complet H à $\omega(G)$ sommets.
- Par l'observation précédente, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

- L'écart entre χ et ω peut être arbitrairement grand.
- Pour tout $k \geq 2$, il existe un graphe G tel que $\chi(G) = k$ et $\omega(G) = 2$.

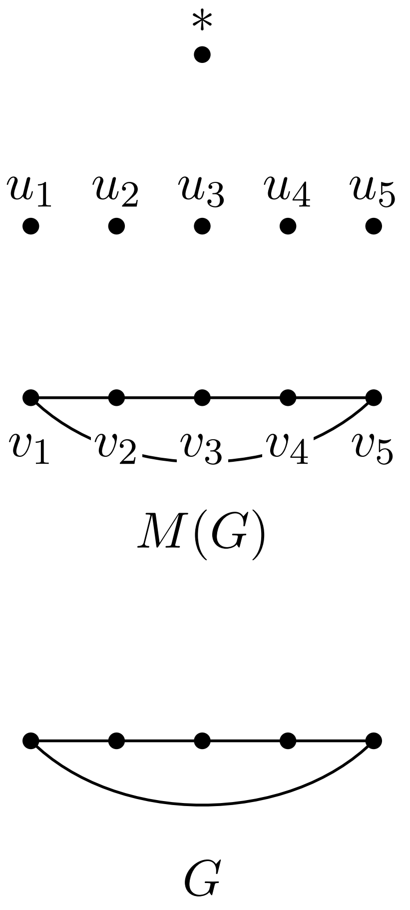


$\omega = 2$

$\chi = 3$

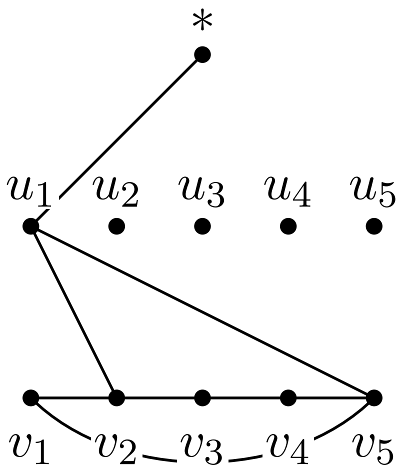
La construction de Mycielski

- Soit G un graphe quelconque, avec sommets $v_1, \ldots, v_n$.
- Formons le graphe $M(G)$ à partir de G comme suit.
- Nous ajoutons $n+1$ nouveaux sommets $u_1, \ldots, u_n, *$.
- Nous relions chaque u_i aux voisins de v_i dans G, ainsi qu'à $*$.

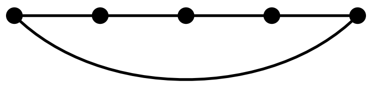


La construction de Mycielski

- Soit G un graphe quelconque, avec sommets $v_1, \ldots, v_n$.
- Formons le graphe $M(G)$ à partir de G comme suit.
- Nous ajoutons $n+1$ nouveaux sommets $u_1, \ldots, u_n, *$.
- Nous relions chaque u_i aux voisins de v_i dans G, ainsi qu'à $*$.



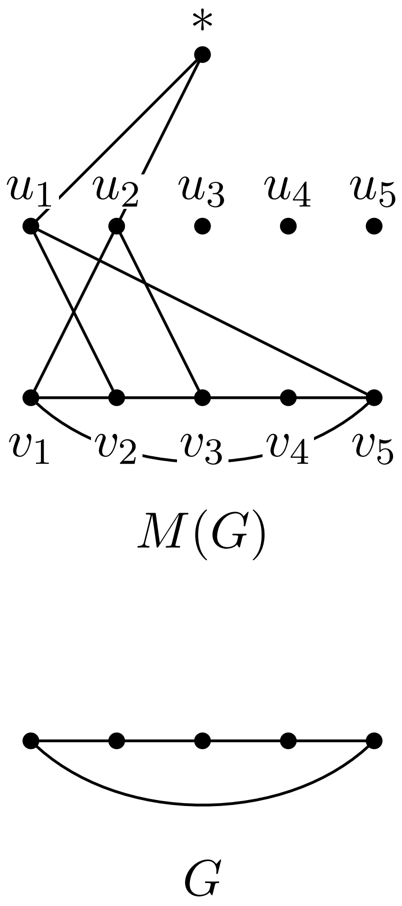
$M(G)$



G

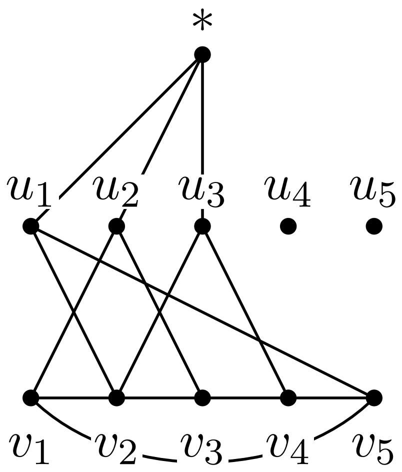
La construction de Mycielski

- Soit G un graphe quelconque, avec sommets $v_1, \ldots, v_n$.
- Formons le graphe $M(G)$ à partir de G comme suit.
- Nous ajoutons $n+1$ nouveaux sommets $u_1, \ldots, u_n, *$.
- Nous relions chaque u_i aux voisins de v_i dans G, ainsi qu'à $*$.

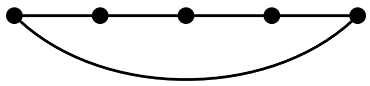


La construction de Mycielski

- Soit G un graphe quelconque, avec sommets $v_1, \ldots, v_n$.
- Formons le graphe $M(G)$ à partir de G comme suit.
- Nous ajoutons $n+1$ nouveaux sommets $u_1, \ldots, u_n, *$.
- Nous relions chaque u_i aux voisins de v_i dans G, ainsi qu'à $*$.



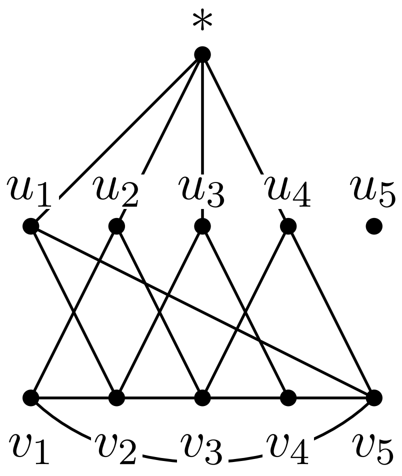
$M(G)$



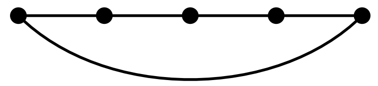
G

La construction de Mycielski

- Soit G un graphe quelconque, avec sommets $v_1, \ldots, v_n$.
- Formons le graphe $M(G)$ à partir de G comme suit.
- Nous ajoutons $n+1$ nouveaux sommets $u_1, \ldots, u_n, *$.
- Nous relions chaque u_i aux voisins de v_i dans G, ainsi qu'à $*$.



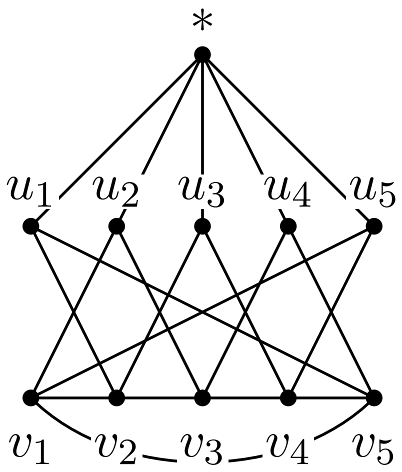
$M(G)$



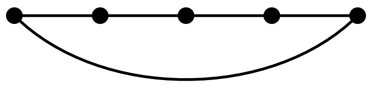
G

La construction de Mycielski

- Soit G un graphe quelconque, avec sommets $v_1, \ldots, v_n$.
- Formons le graphe $M(G)$ à partir de G comme suit.
- Nous ajoutons $n+1$ nouveaux sommets $u_1, \ldots, u_n, *$.
- Nous relions chaque u_i aux voisins de v_i dans G, ainsi qu'à $*$.

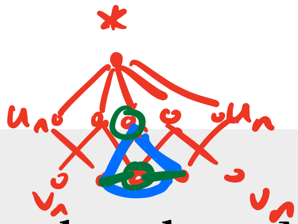


$M(G)$



G

Le théorème de Mycielski (1/2)



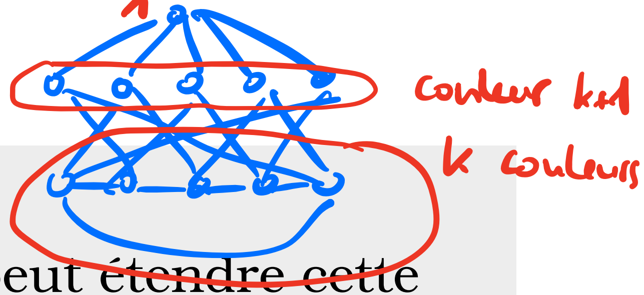
Théorème (Mycielski)

$\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$ pour tout graphe G. Si G est sans triangle, alors $M(G)$ est sans triangle.

Démonstration

- Nous allons d'abord prouver l'assertion sur les triangles.
- Supposons que $M(G)$ contient un triangle T.
- Comme les sommets u_i forment un stable, soit T est dans G (et on a terminé), soit T contient deux sommets v_i, v_j de G et un sommet u_k.
- Dans ce cas, les sommets v_i, v_j, v_k forment un triangle de G.
- Nous avons montré que si G est sans triangle, alors $M(G)$ est sans triangle.

Le théorème de Mycielski (2/2)

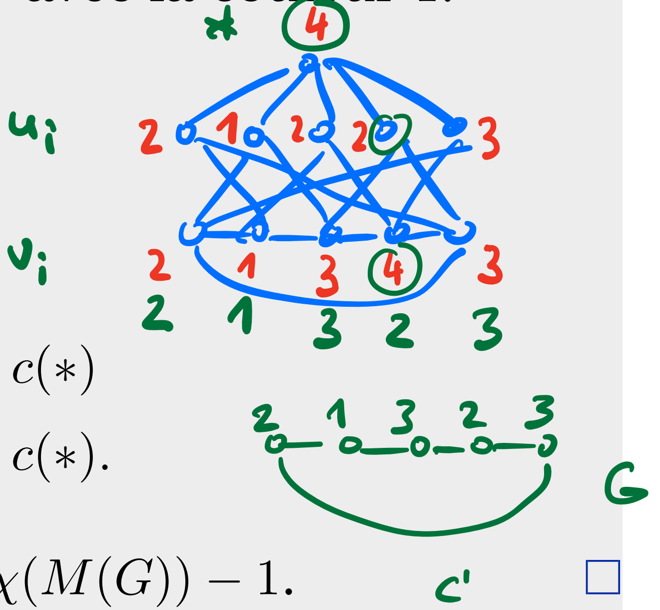


Démonstration (suite)

- Étant donné une k-coloration optimale de G, on peut étendre cette coloration à une $(k+1)$-coloration de $M(G)$ en coloriant les sommets $u_1, \ldots, u_n$ avec la couleur $k+1$, et le sommet $*$ avec la couleur 1.
- Cela montre que $\chi(M(G)) \leq \chi(G) + 1$.
- Soit c une coloration optimale de $M(G)$.
- On définit une coloration c' de G comme

$$c'(v_i) = \begin{cases} c(v_i) & \text{si } c(v_i) \neq c(*) \\ c(u_i) & \text{si } c(v_i) = c(*). \end{cases}$$

- On a économisé la couleur $c(*)$, donc $\chi(G) \leq \chi(M(G)) - 1$. □



Relation entre χ et α

Proposition

Soit G un graphe à n sommets. Alors, $\chi(G) \geq \lceil n/\alpha(G) \rceil$.

Démonstration

- Une coloration est une partition des sommets en stables.
- Comme chaque stable est de taille inférieure ou égale à $\alpha(G)$, il faut au moins $n/\alpha(G)$ stables pour recouvrir tous les sommets.
- Donc, $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$, et comme $\chi(G)$ est un entier, on a $\chi(G) \geq \lceil n/\alpha(G) \rceil$.

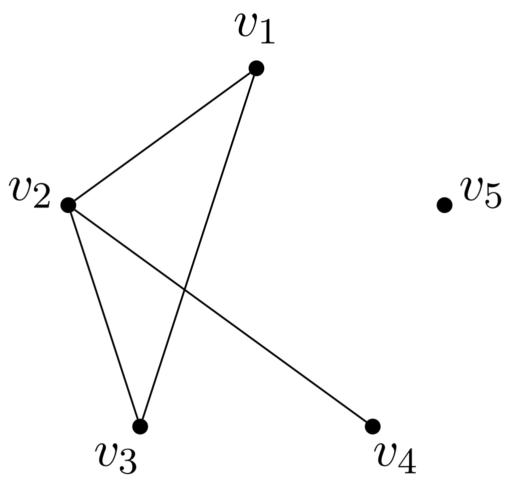
- L'écart entre χ et n/α peut être arbitrairement grand.
- Pour tout $k \geq 2$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un graphe G tel que $\chi(G) = k$ et $\alpha(G) < n/2 + \varepsilon$.

Algorithme glouton de coloration

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ avec un ordre total $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sur les sommets

Sorties : Une coloration de G

Colorier les sommets l'un après l'autre suivant l'ordre total, en attribuant à v_i la plus petite couleur qui n'est attribuée à aucun de ses voisins déjà coloriés.

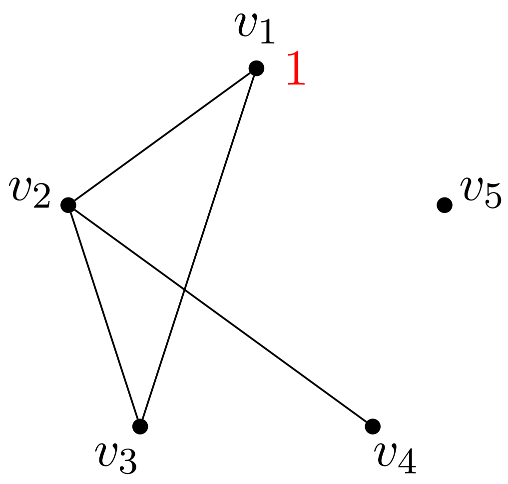


Algorithme glouton de coloration

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ avec un ordre total $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sur les sommets

Sorties : Une coloration de G

Colorier les sommets l'un après l'autre suivant l'ordre total, en attribuant à v_i la plus petite couleur qui n'est attribuée à aucun de ses voisins déjà coloriés.

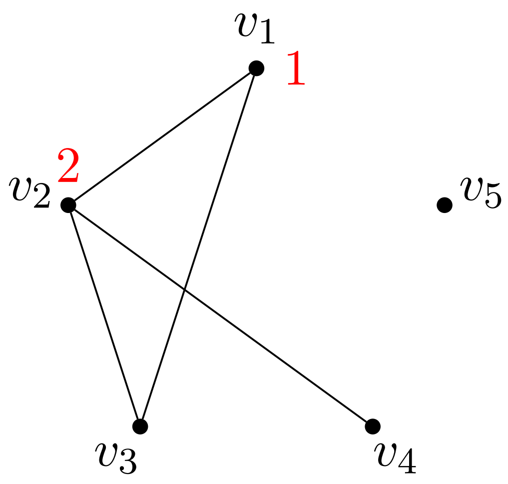


Algorithme glouton de coloration

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ avec un ordre total $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sur les sommets

Sorties : Une coloration de G

Colorier les sommets l'un après l'autre suivant l'ordre total, en attribuant à v_i la plus petite couleur qui n'est attribuée à aucun de ses voisins déjà coloriés.

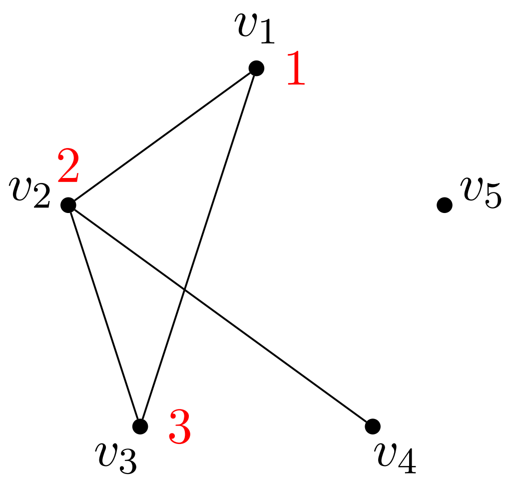


Algorithme glouton de coloration

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ avec un ordre total $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sur les sommets

Sorties : Une coloration de G

Colorier les sommets l'un après l'autre suivant l'ordre total, en attribuant à v_i la plus petite couleur qui n'est attribuée à aucun de ses voisins déjà coloriés.

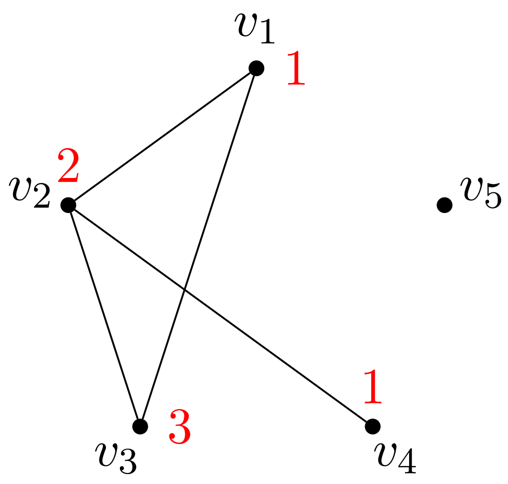


Algorithme glouton de coloration

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ avec un ordre total $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sur les sommets

Sorties : Une coloration de G

Colorier les sommets l'un après l'autre suivant l'ordre total, en attribuant à v_i la plus petite couleur qui n'est attribuée à aucun de ses voisins déjà coloriés.

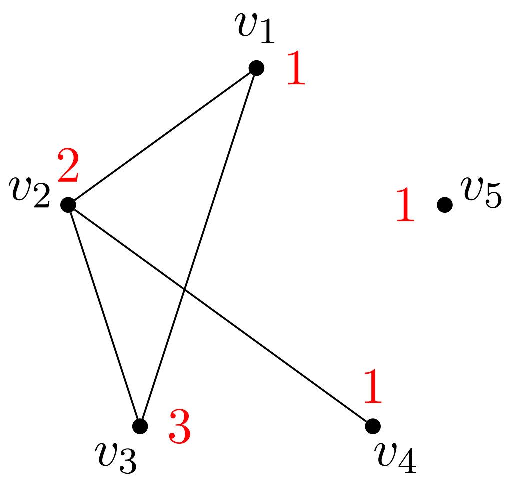


Algorithme glouton de coloration

Entrées : Un graphe $G = (V, E)$ avec un ordre total $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sur les sommets

Sorties : Une coloration de G

Colorier les sommets l'un après l'autre suivant l'ordre total, en attribuant à v_i la plus petite couleur qui n'est attribuée à aucun de ses voisins déjà coloriés.



Une conséquence de l'algorithme glouton

Théorème

Soit G un graphe avec degré maximum Δ. Alors, $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

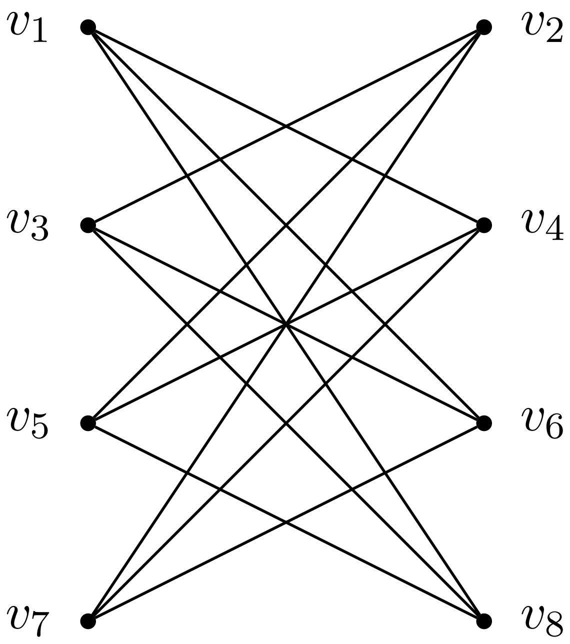
- Cette borne est serrée pour deux familles de graphes :
  - les graphes complets : $\Delta(K_n) = n - 1$, $\chi(K_n) = n$
  - les cycles impairs : $\Delta(C_{2k+1}) = 2$, $\chi(C_{2k+1}) = 3$
- La borne est stricte pour tout graphe n'appartenant pas à une de ces deux familles.

Théorème de Brooks

Si G est un graphe connexe de degré maximum Δ, qui n'est ni un cycle impair ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta$.

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

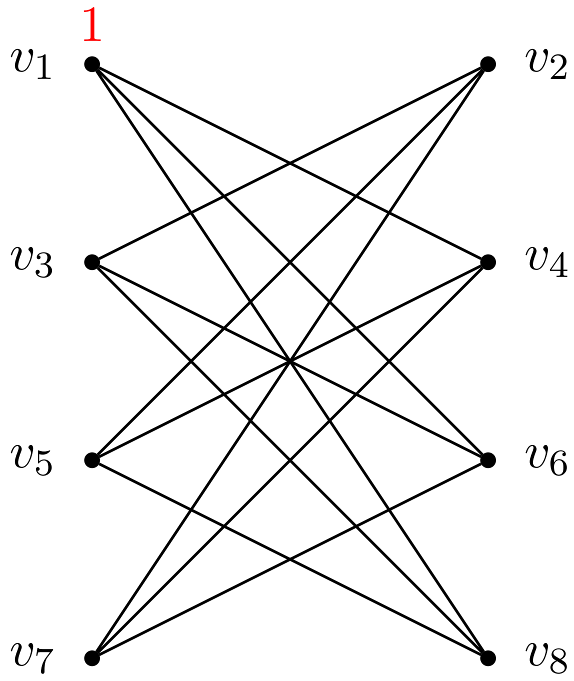
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_i v_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

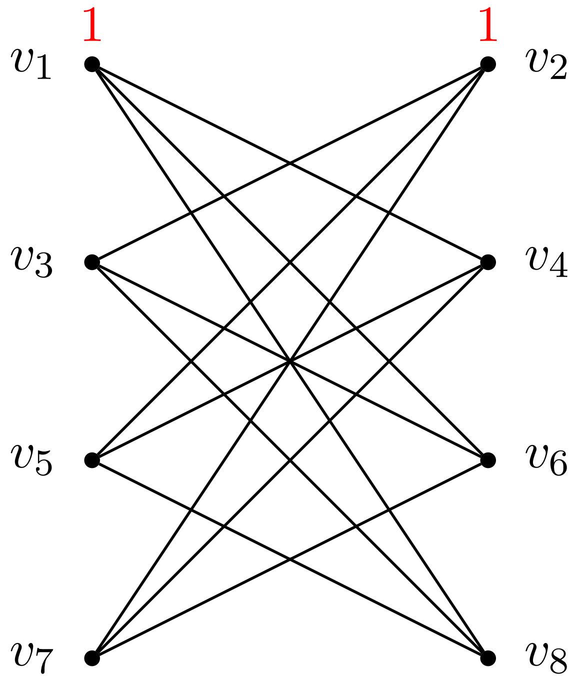
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_iv_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

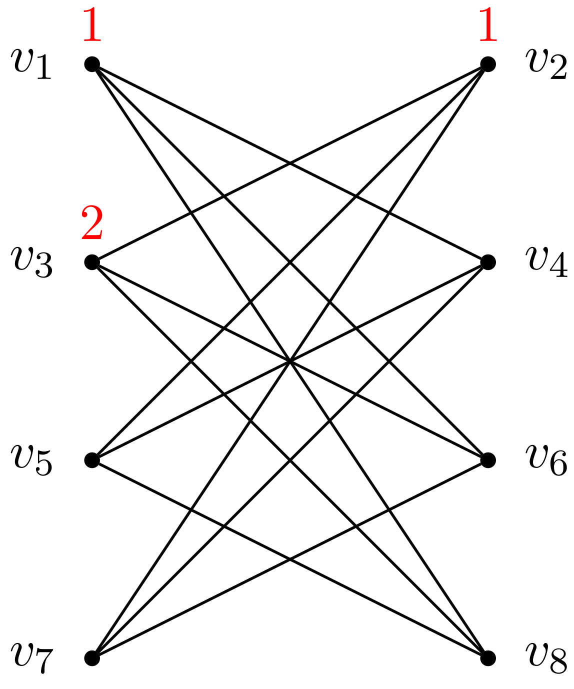
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_i v_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

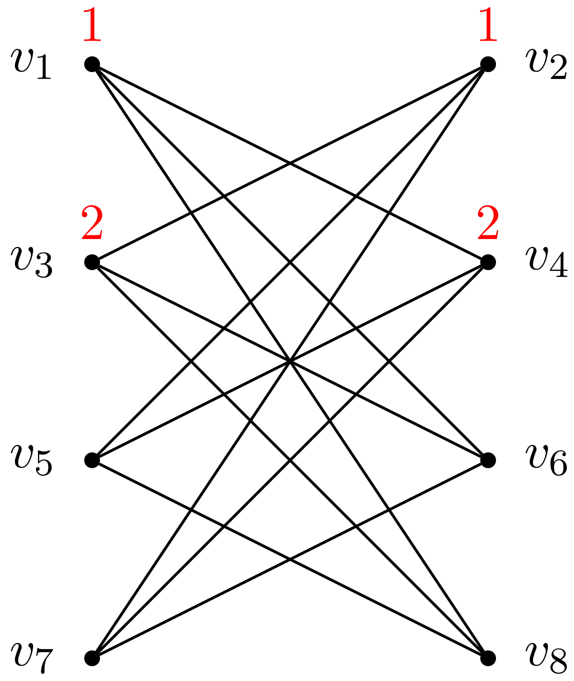
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_iv_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

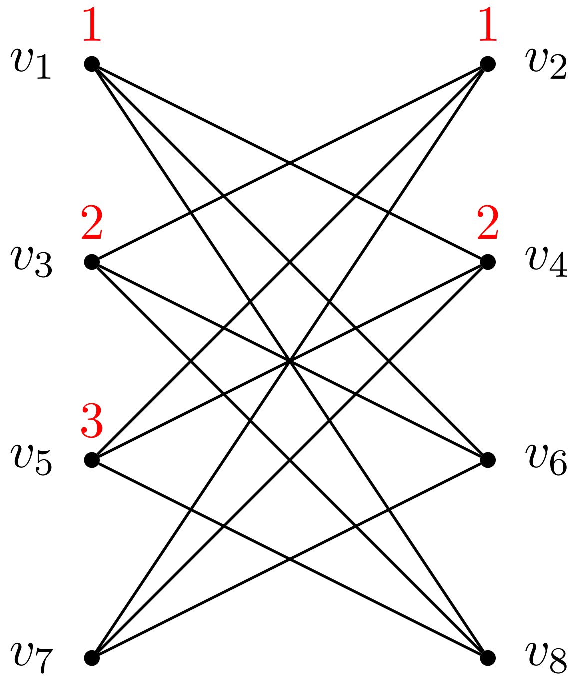
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_i v_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

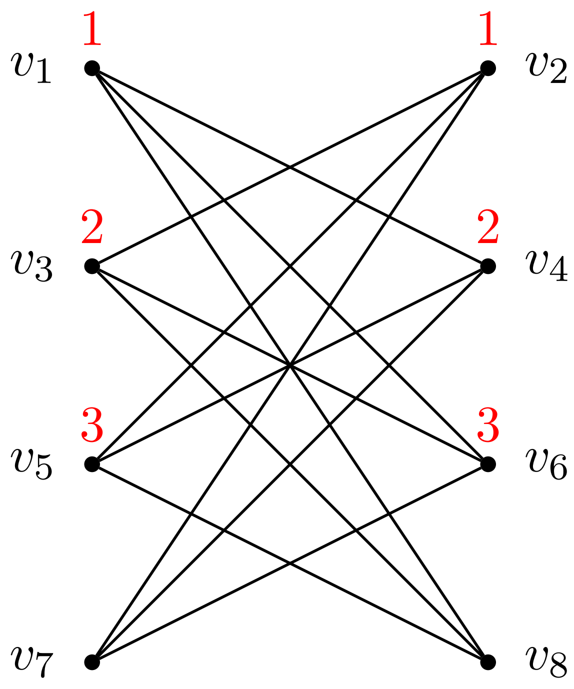
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_i v_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

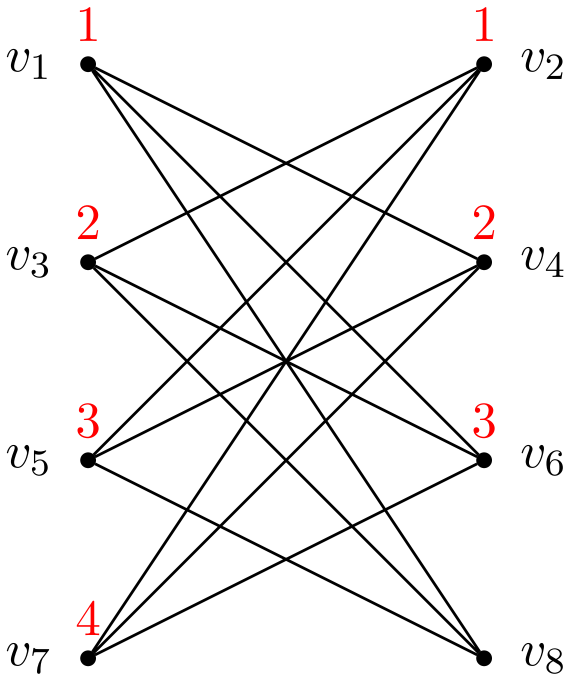
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_i v_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

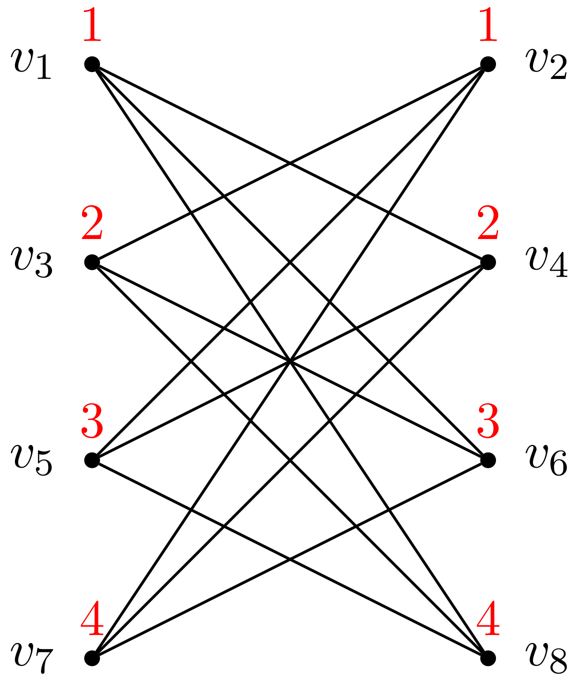
- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_i v_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.



G_4

L'algorithme glouton peut produire de très mauvaises colorations !

- Considérons le graphe G_k avec sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$
- $v_i v_j \in E(G_{2k})$ ssi i est impair, j est pair, et $j - i \neq 1$
- L'algorithme glouton utilise k couleurs.
- Pourtant, $\chi(G) = 2$.

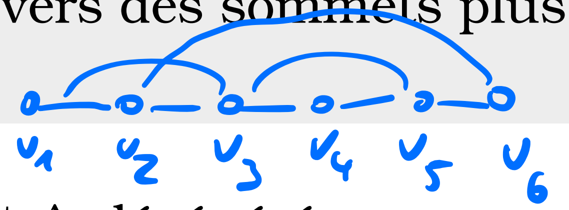


G_4

Dégénérescence

Définition

Un graphe est *d-dégénéré* s'il existe un ordre sur les sommets tel que, pour tout sommet, le nombre d'arêtes vers des sommets plus petits dans l'ordre est au plus d.



2-dégénéré

- Graphes de degré maximum Δ sont Δ-dégénérés.
- Arbres sont 1-dégénérés.
- Le théorème suivant est une conséquence directe de l'algorithme glouton.

Théorème

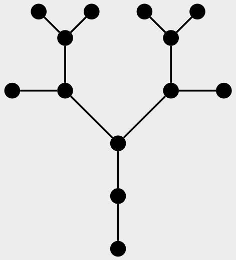
Si G est d-dégénéré, alors $\chi(G) \leq d + 1$.

Graphes bipartis

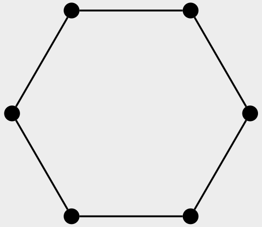
Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est *biparti* si $\chi(G) \leq 2$. C'est-à-dire, on peut partitionner l'ensemble de sommets V en deux sous-ensembles stables A, B.

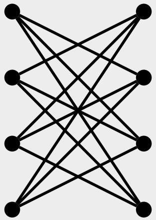
Exemples de graphes bipartis



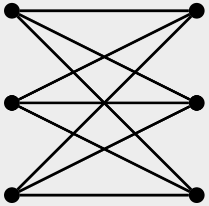
arbres



C_6



G_4



$K_{3,3}$

Caractérisation de graphes bipartis

Théorème

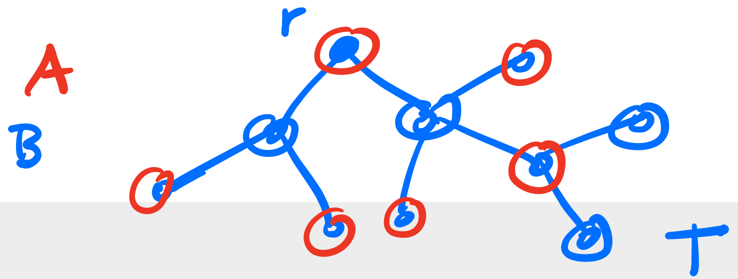
Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles impairs comme sous-graphe.

Démonstration

$\Longrightarrow$

- Un cycle de longueur impaire n'est pas biparti.
- Donc, si G est biparti, alors G ne contient aucun cycle impair.

Caractérisation de graphes bipartis

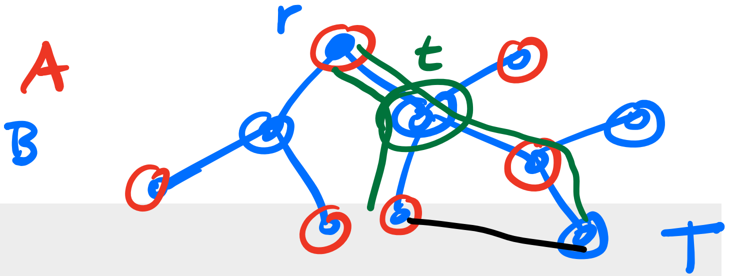


Démonstration (suite)

$\Longleftarrow$

- Soit G un graphe connexe ne contenant aucun cycle impair comme sous-graph. (Si le graphe n'est pas connexe, on considère chaque composante connexe séparément).
- Soit T un arbre couvrant de G, et fixons un sommet r de T.
- Soit A l'ensemble de sommets de G dont la distance à r est paire, est soit $B = V \setminus A$.
- Nous montrerons que A et B sont des classes chromatiques d'une 2-coloration de G.

Caractérisation de graphes bipartis



Démonstration (suite)

- Il suffit de montrer que toute arête uv de G a une extrémité dans A et l'autre dans B.
- Si $uv \in E(T)$, c'est évidemment le cas.
- Si $uv \in E(G) \setminus E(T)$, le graphe $T \cup \{e\}$ contient un cycle élémentaire C.
- Comme $T \cup \{uv\} \subseteq G$, le cycle C est de longueur paire.
- La ~~la~~ chaîne élémentaire unique entre u et v dans T doit être de longueur impaire.
- Donc, u et v sont dans des parties différentes de (A, B).

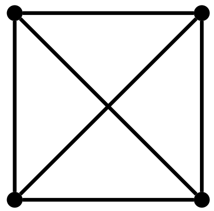
Graphes planaires

Définition

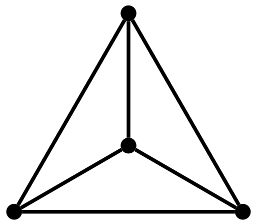
Un graphe $G = (V, E)$ est *planaire* s'il peut être représenté dans le plan $\mathbb{R}^2$ de sorte que deux arêtes distinctes ne se croisent pas. On appelle une telle représentation un *plongement* de G dans le plan, ou parfois un graphe *plan*.

Application

Design de circuits imprimés en microélectronique



K_4



plongement de K_4 dans le plan

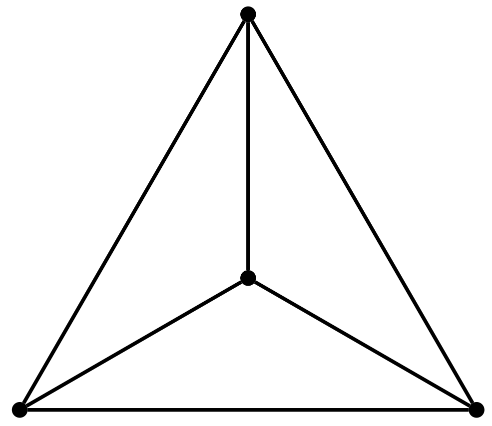
Les faces

Définition

Soit G un graphe plongé dans le plan $\mathbb{R}^2$. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ sont les *faces* de G.

Exemple

Le plongement de K_4 dans le plan a 4 faces.



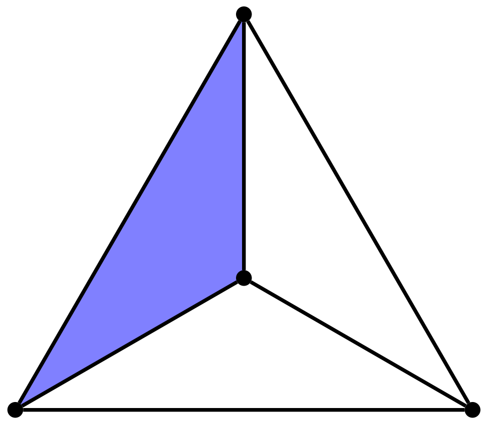
Les faces

Définition

Soit G un graphe plongé dans le plan $\mathbb{R}^2$. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ sont les *faces* de G.

Exemple

Le plongement de K_4 dans le plan a 4 faces.



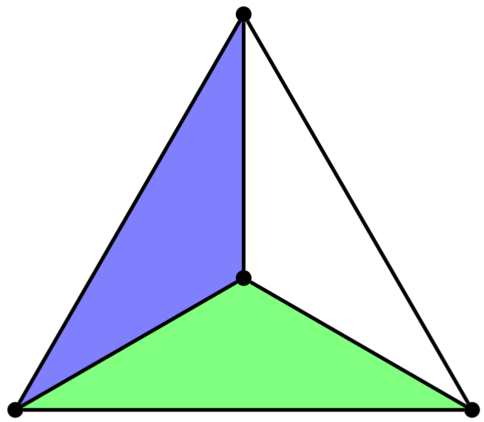
Les faces

Définition

Soit G un graphe plongé dans le plan $\mathbb{R}^2$. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ sont les *faces* de G.

Exemple

Le plongement de K_4 dans le plan a 4 faces.



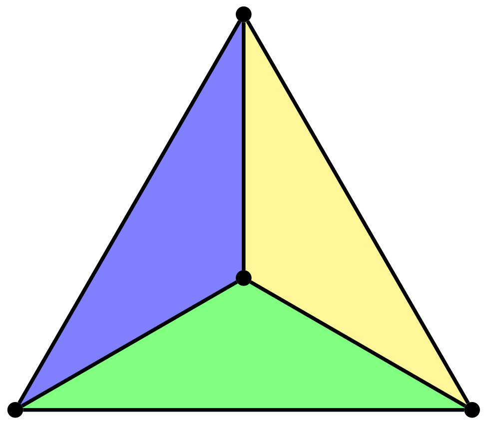
Les faces

Définition

Soit G un graphe plongé dans le plan $\mathbb{R}^2$. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ sont les *faces* de G.

Exemple

Le plongement de K_4 dans le plan a 4 faces.



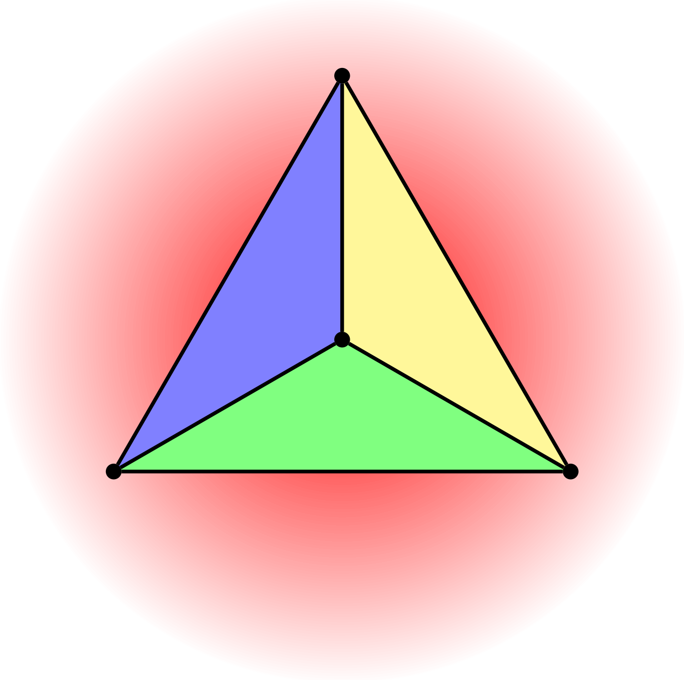
Les faces

Définition

Soit G un graphe plongé dans le plan $\mathbb{R}^2$. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$ sont les *faces* de G.

Exemple

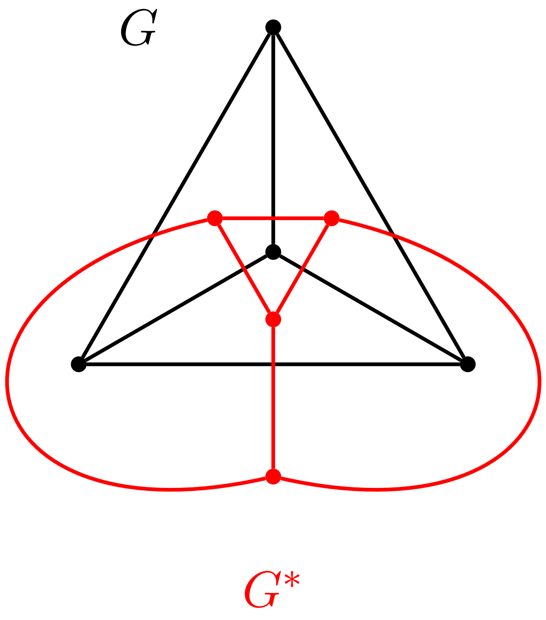
Le plongement de K_4 dans le plan a 4 faces.



Le graphe dual

Définition

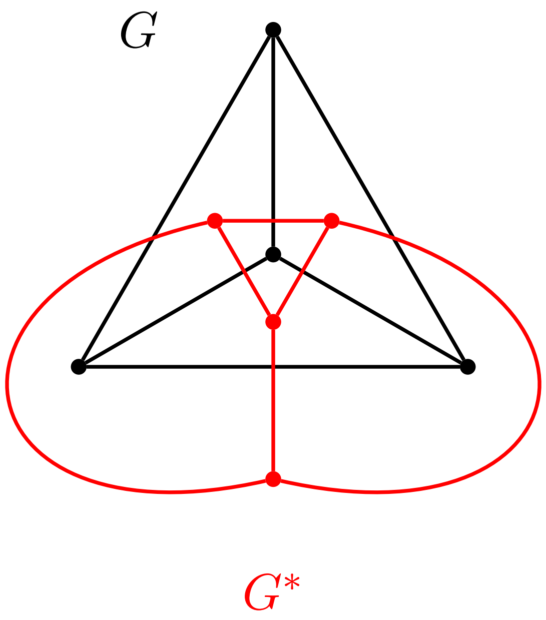
- Soit G un graphe plongé dans le plan.
- On définit le graphe *dual* G^* de G comme suit.
- À chaque face f de G correspond un sommet f^* de G^*
- À chaque arête e de G correspond un arête e^* de G.
- Deux sommets f^*, g^* de G^* sont les extrémités de l'arête e^* si et seulement si l'arête e sépare les faces f et g de G.



Le graphe dual

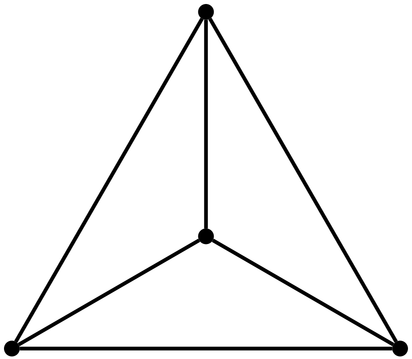
Remarques

- Le graphe dual n'est défini que pour un graphe planaire *plongé*
- G et G^* peuvent être des multigraphes (on permet des arêtes parallèles et des boucles).
- Il y a une bijection entre les arêtes de G et de G^*.
- En particulier, $|E(G)| = |E(G^*)|$.

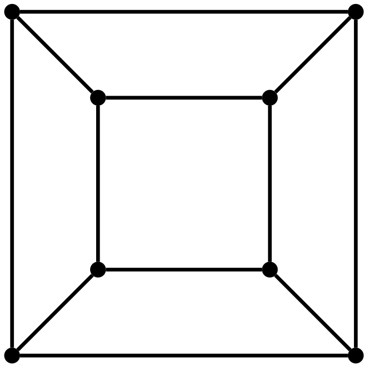


La formule d'Euler

Théorème (formule d'Euler)
Soit G un graphe connexe plongé dans le plan, avec n, sommets, m arêtes et f faces. Alors, $n - m + f = 2$.



$$n = 4$$
$$m = 6$$
$$f = 4$$

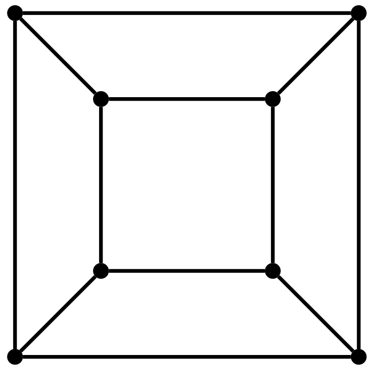


$$n = 8$$
$$m = 12$$
$$f = 6$$

Démonstration de la formule d'Euler

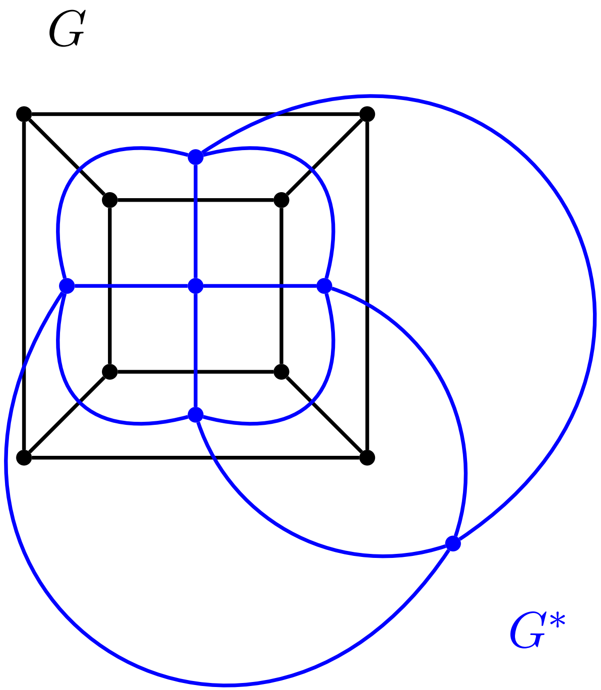
- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.

G



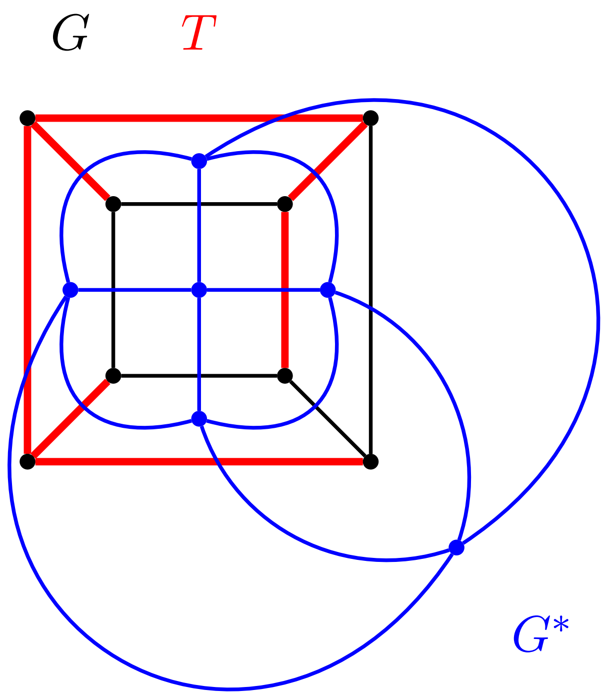
Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.



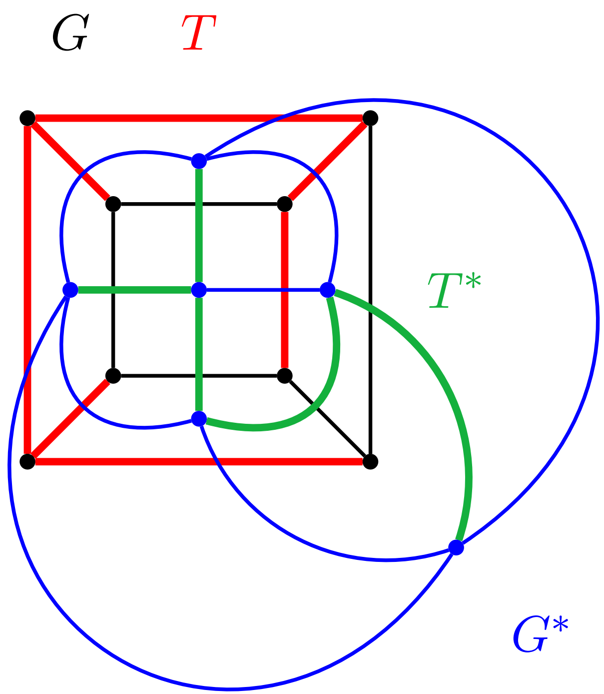
Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.
- T : arêtes d'un arbre couvrant de G.



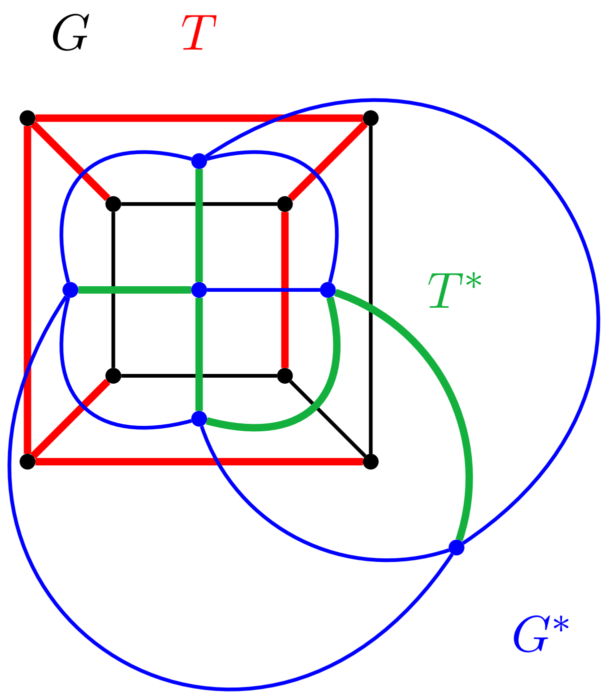
Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.
- T : arêtes d'un arbre couvrant de G.
- T^* : arêtes de G^* correspondant aux arêtes de $E(G) \setminus T$.



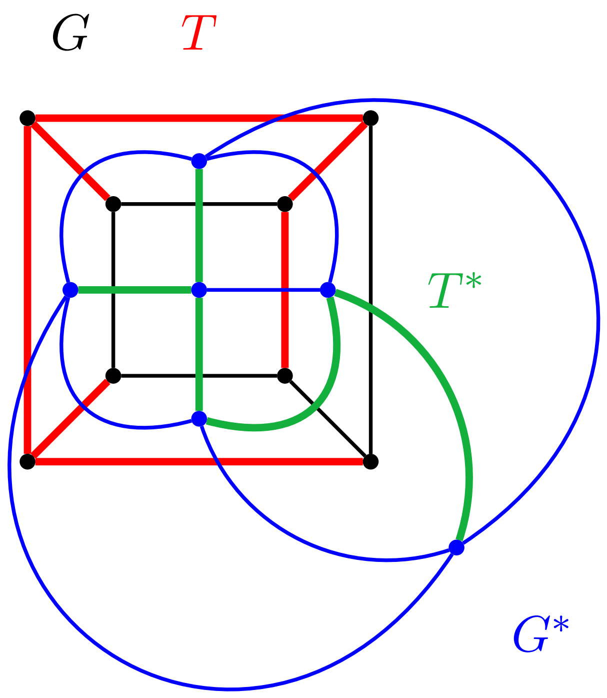
Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.
- T : arêtes d'un arbre couvrant de G.
- T^* : arêtes de G^* correspondant aux arêtes de $E(G) \setminus T$.
- (V, T) acyclique $\implies$ (V^*, T^*) connexe.



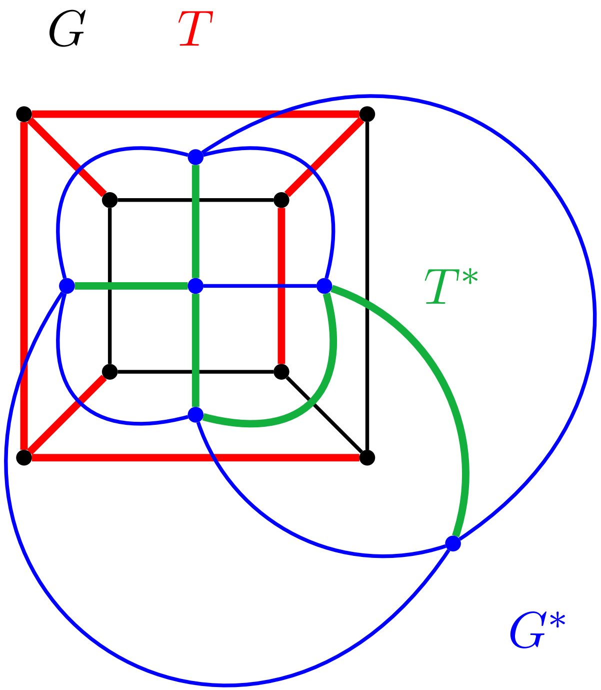
Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.
- T : arêtes d'un arbre couvrant de G.
- T^* : arêtes de G^* correspondant aux arêtes de $E(G) \setminus T$.
- (V, T) acyclique $\implies$ (V^*, T^*) connexe.
- (V, T) connexe $\implies$ (V^*, T^*) acyclique.



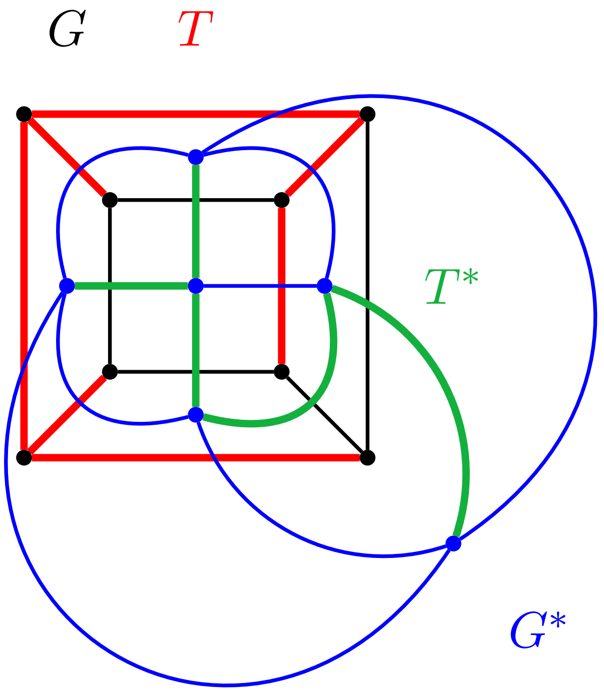
Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.
- T : arêtes d'un arbre couvrant de G.
- T^* : arêtes de G^* correspondant aux arêtes de $E(G) \setminus T$.
- (V, T) acyclique $\implies$ (V^*, T^*) connexe.
- (V, T) connexe $\implies$ (V^*, T^*) acyclique.
- T^* forment un arbre couvrant de G^*



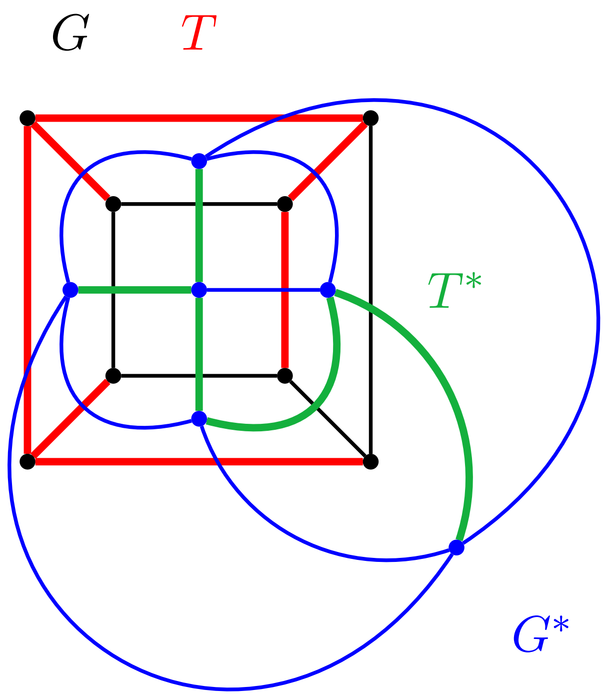
Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.
- T : arêtes d'un arbre couvrant de G.
- T^* : arêtes de G^* correspondant aux arêtes de $E(G) \setminus T$.
- (V, T) acyclique $\implies$ (V^*, T^*) connexe.
- (V, T) connexe $\implies$ (V^*, T^*) acyclique.
- T^* forment un arbre couvrant de G^*
- $|T| = n - 1$ et $m - |T| = |T^*| = f - 1$.

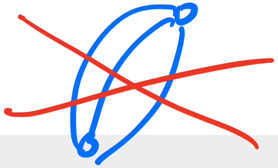


Démonstration de la formule d'Euler

- $G = (V, E)$ graphe plan connexe.
- $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe dual.
- T : arêtes d'un arbre couvrant de G.
- T^* : arêtes de G^* correspondant aux arêtes de $E(G) \setminus T$.
- (V, T) acyclique $\implies$ (V^*, T^*) connexe.
- (V, T) connexe $\implies$ (V^*, T^*) acyclique.
- T^* forment un arbre couvrant de G^*
- $|T| = n - 1$ et $m - |T| = |T^*| = f - 1$.
- $m = (n-1) + (f-1) = n + f - 2$.



Nombre d'arêtes dans les graphes planaires

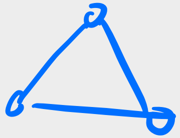


Corollaire

Soit G un graphe planaire avec n sommets et m arêtes. Alors, $m \leq 3n - 6$.

Démonstration

- Soit G un graphe planaire.
- Chaque face de G est bordée par au moins 3 arêtes.
- Tous les sommets de G^* ont degré au moins 3.
- $2m = \sum_{v \in V(G^*)} d(v) \geq \sum_{v \in V(G^*)} 3 = 3f$.
- Donc, $f \leq 2m/3$.
- Par la formule d'Euler, $m - n + 2 = f \leq 2m/3$.
- On conclut que $m \leq 3n - 6$.



Dégénérescence des graphes planaires

Corollaire

Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 5. C'est-à-dire, tout graphe planaire est 5-dégénéré.

Démonstration

- Soit G un graphe planaire avec n sommets et m arêtes.
- Supposons par l'absurde que $d(v) \geq 6$ pour tous les sommets de G.
- Donc, le nombre d'arêtes de G est

$$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} 6 = 3n.$$

- Cela contredit le corollaire précédent, qui affirme que $m \leq 3n - 6$.

Nombre d'arêtes dans les graphes planaires sans triangle

Corollaire

sans triangle

Soit G un graphe planaire avec n sommets et m arêtes. Alors, $m \leq 2n - 4$.

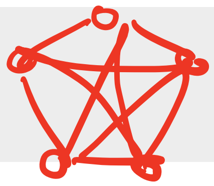
Démonstration

- Soit G un graphe planaire.
- Chaque face de G est bordée par au moins 4 arêtes.
- Tous les sommets de G^* ont degré au moins 4.
- $2m = \sum_{v \in V(G^*)} d(v) \geq \sum_{v \in V(G^*)} 4 = 4f$.
- Donc, $f \leq m/2$.
- Par la formule d'Euler, $m - n + 2 = f \leq m/2$.
- On conclut que $m \leq 2n - 4$.

Exemples de graphes non planaires

Corollaire

Le graphe complet K_5 n'est pas planaire.



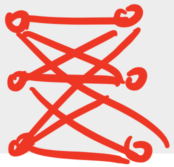
K_5

Démonstration

- On a $m = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$.

Corollaire

Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ n'est pas planaire.



$K_{3,3}$

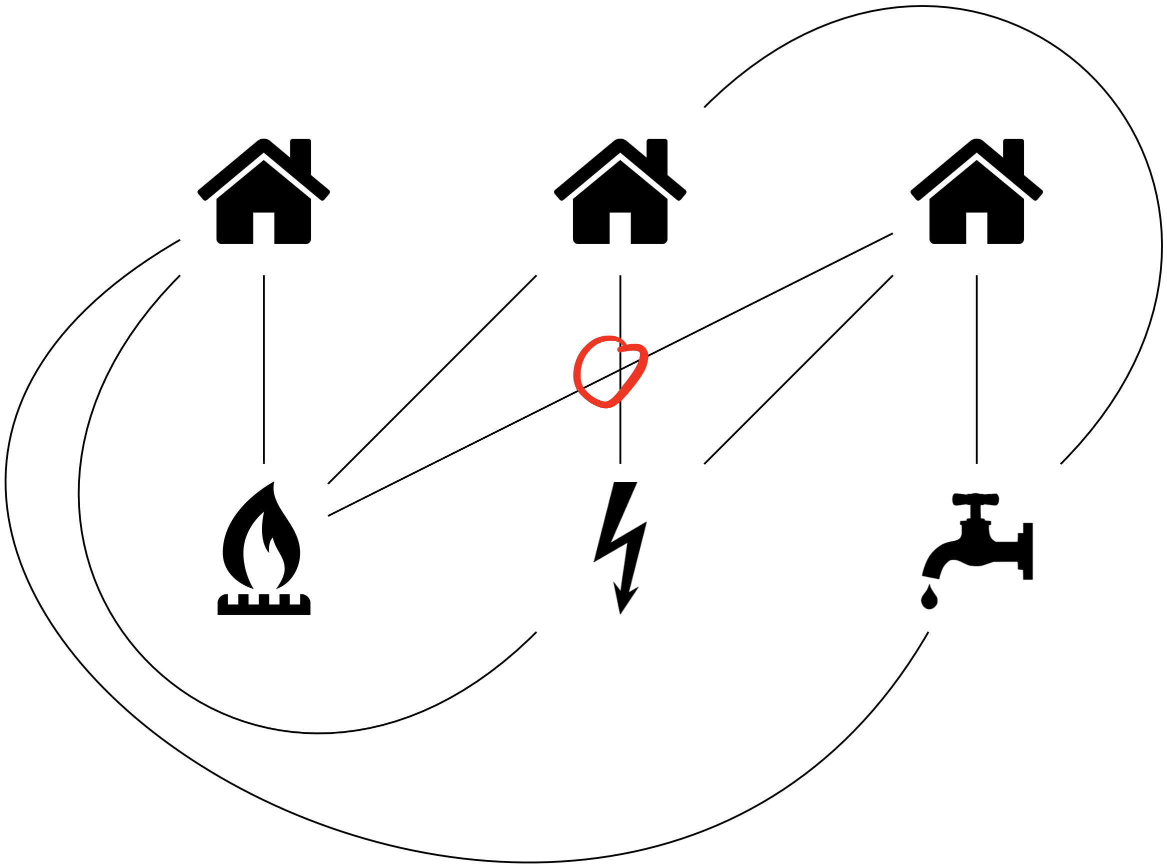
Démonstration

- On a $m = 9 > 8 = 2 \cdot 6 - 4 = 2n - 4$.

L'énigme des trois maisons

(Est-ce que $K_{3,3}$ est planaire ?)

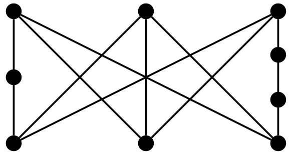
NON



Caractérisation des graphes planaires

Définition

Une *subdivision* d'un graphe est le résultat de l'ajout d'un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes.



Une subdivision de $K_{3,3}$

Théorème de Kuratowski

Un graphe G est planaire si et seulement si G ne contient pas de subdivision de K_5 ni de $K_{3,3}$.

À quoi ça sert ?

- Imaginons qu'on doit convaincre quelqu'un qu'un graphe G est ou non planaire.
- Certificat de planarité : un plogement de G dans le plan.
- Certificat de non planarité : une subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$ comme sous-graphe.
- Le théorème de Kuratowski *garantit l'existence* d'un certificat de planarité ou de non planarité.

Coloration de cartes

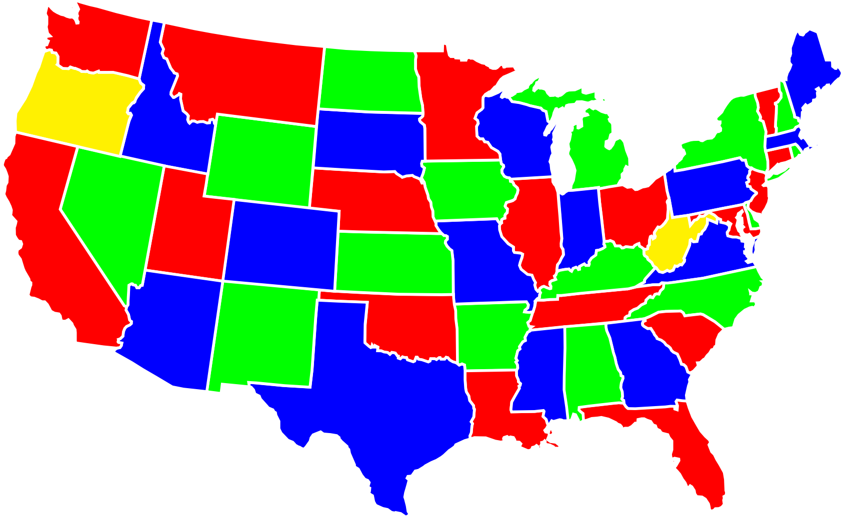
Problème des 4 couleurs (Guthrie 1852)

Est-il possible, en n'utilisant que quatre couleurs différentes, de colorier n'importe quelle carte découpée en régions connexes, de sorte que deux régions adjacentes reçoivent toujours deux couleurs distinctes ?

Coloration de cartes

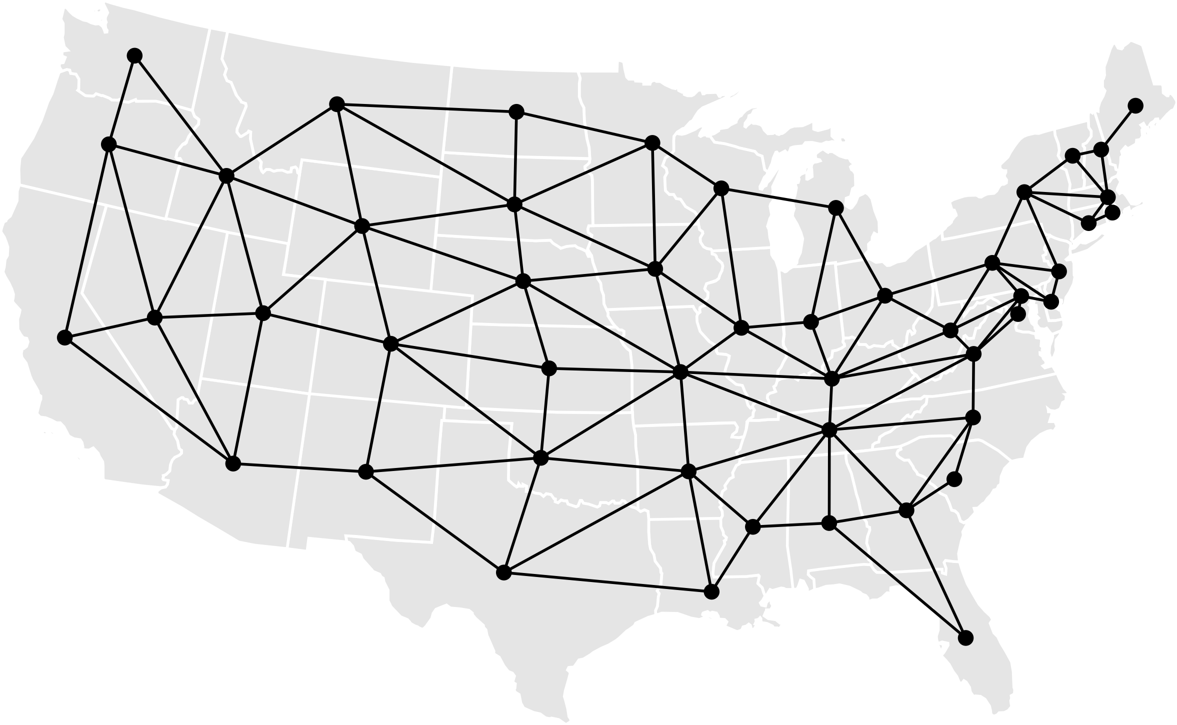
Problème des 4 couleurs (Guthrie 1852)

Est-il possible, en n'utilisant que quatre couleurs différentes, de colorier n'importe quelle carte découpée en régions connexes, de sorte que deux régions adjacentes reçoivent toujours deux couleurs distinctes ?

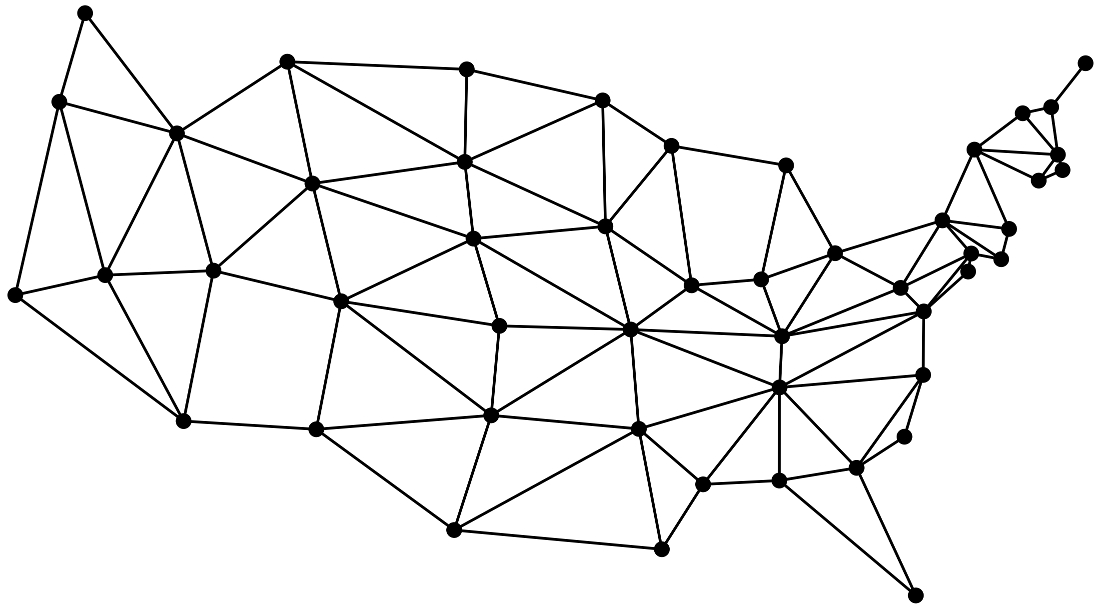


Passage des cartes aux graphes planaires

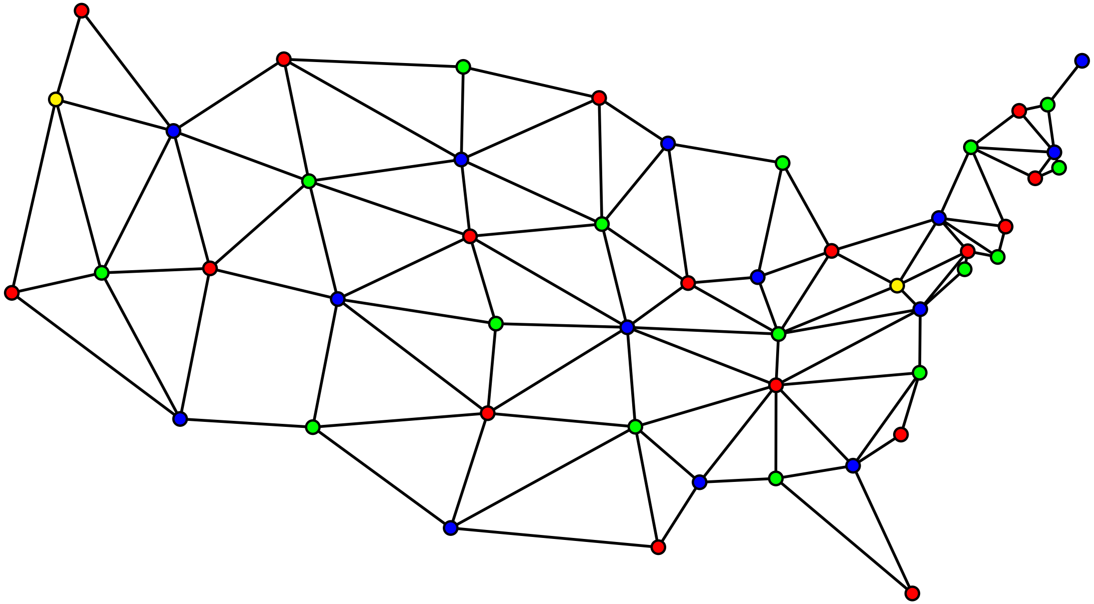
Passage des cartes aux graphes planaires



Passage des cartes aux graphes planaires



Passage des cartes aux graphes planaires



Théorème des 4 couleurs

Théorème (Appel et Haken 1976)
Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.

- Démonstration extrêmement compliquée, vérification de milliers de cas avec un ordinateur.
- Nous allons prouver un résultat plus faible.

Théorème des 6 couleurs

Théorème

Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 6$.

Démonstration

- Si G est planaire, alors G est 5-dégénéré par le corollaire précédent.
- Par le théorème du cours magistral précédent, $\chi(G) \leq 6$.

- On peut faire mieux...

Théorème des 5 couleurs

Théorème

Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 5$.

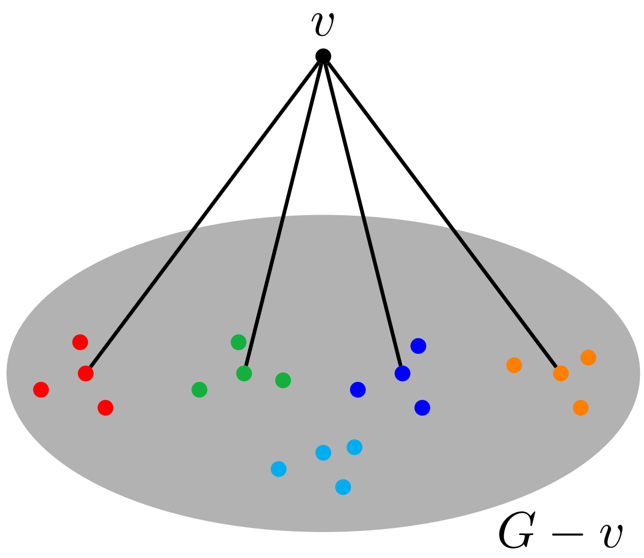
Démonstration (1/6)

- Par récurrence sur le nombre de sommets.
- Soit $A(n)$ l'assertion "Tout graphe planaire avec au plus n sommets a nombre chromatique au plus 5".
- Case de base $A(1)$ est trivial.
- Supposons que $A(n)$ est vraie, où $n \geq 1$.
- Soit G un plongement d'un graphe planaire à $n+1$ sommets.

Théorème des 5 couleurs

Démonstration (2/6)

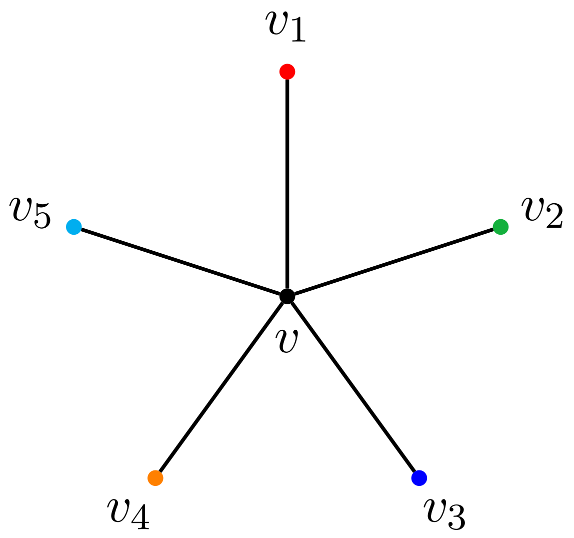
- On peut 5-colorier $G - v$ par l'hypothèse de récurrence.
- Si G a un sommet v de degré au plus 4, on peut étendre la coloration à une 5-coloration de G.
- Donc, on peut supposer que tous les sommets sont de degré au moins 5.
- Par le corollaire à la formule d'Euler, il y a un sommet v de degré exactement 5.



Théorème des 5 couleurs

Démonstration (3/6)

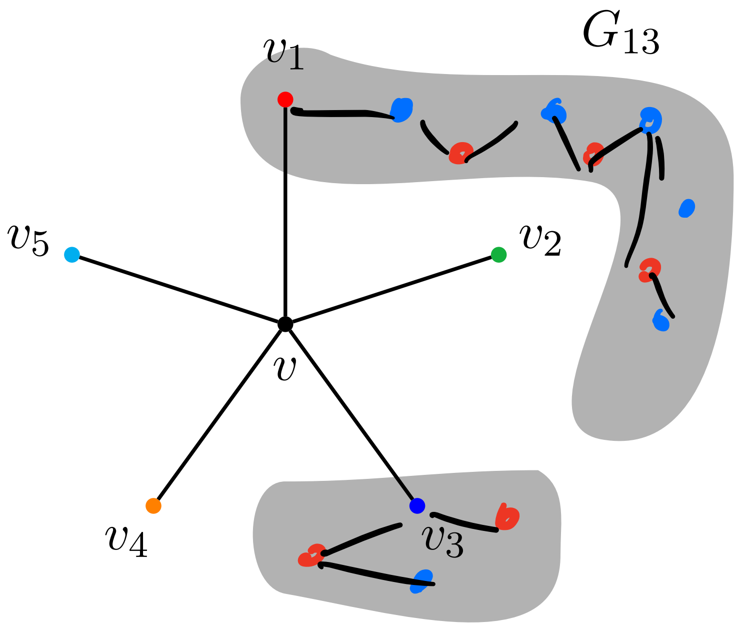
- Toute 5-coloration de $G - v$ peut être étendue à une 5-coloration de G, sauf si toutes les couleurs apparaissent dans le voisinage de v.
- Supposons sans perte de généralité que v_i est colorié i.
- Soit G_{ij} le sous-graphe de G induit par tous les sommets coloriés i ou j.



Théorème des 5 couleurs

Démonstration (4/6)

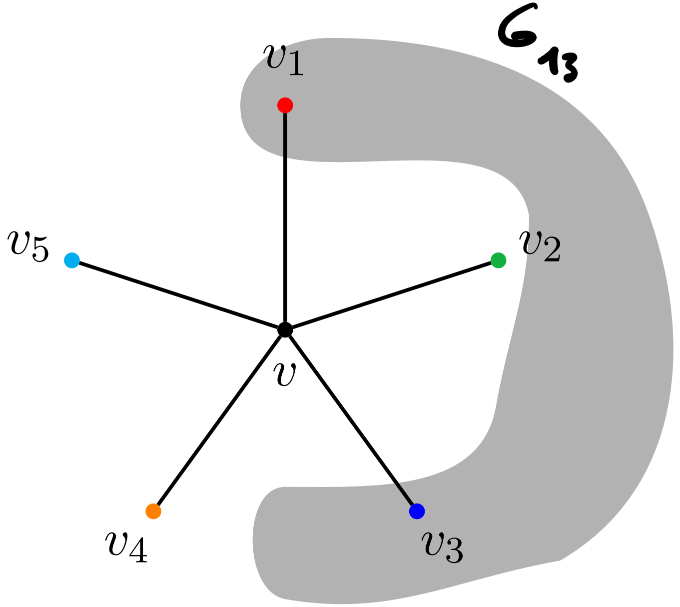
- Supposons que la composante connexe de G_{13} contenant v_1 ne contient pas v_3.
- Échangeons les couleurs 1 et 3 dans cette composante.
- On obtient une 5-coloration de $G - v$ où la couleur 1 n'apparaît pas dans le voisinage de v.
- On peut alors étendre cette coloration à une 5-coloration de G ; contradiction.



Théorème des 5 couleurs

Démonstration (5/6)

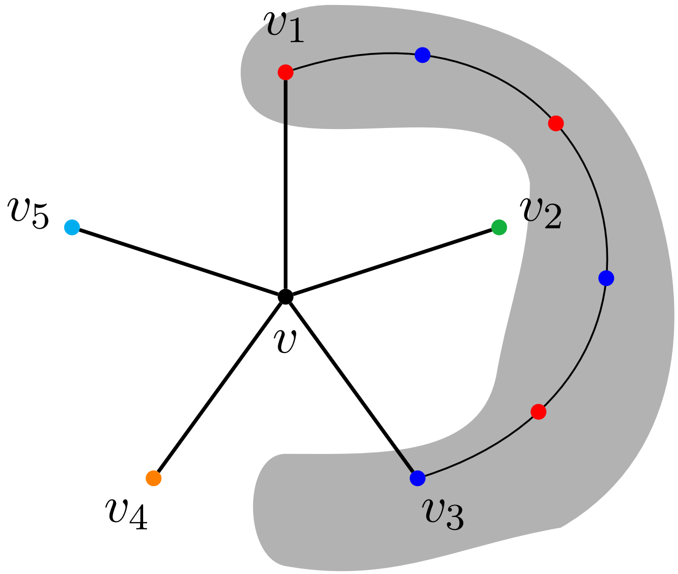
- Donc, v_1 et v_3 sont dans la même composante connexe de G_{13}.
- En particulier, il existe une chaîne P_{13} dans G_{13} entre v_1 et v_3.
- Par le même argument, il existe une chaîne P_{24} dans G_{24} entre v_2 et v_4.
- Les chaînes P_{13} et P_{24} s'intersectent, et comme elles sont sommet-disjointes, une arête de P_{13} doit croiser une arête de P_{24}.
- Cela contredit l'hypothèse qu'on a un plongement de G dans le plan.



Théorème des 5 couleurs

Démonstration (5/6)

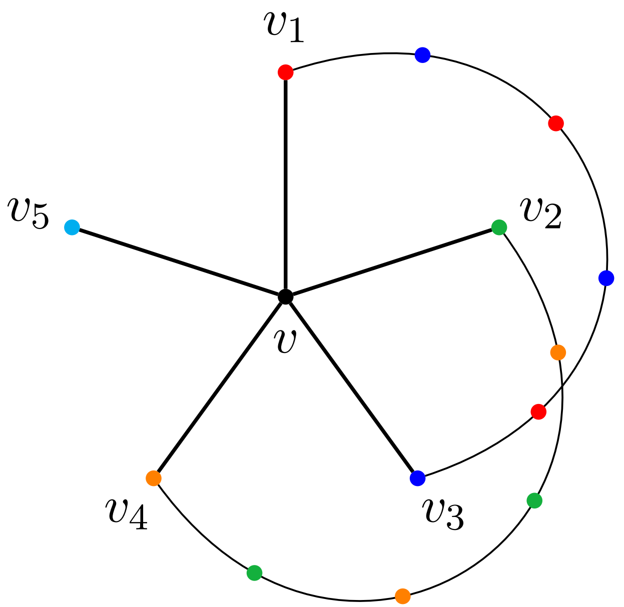
- Donc, v_1 et v_3 sont dans la même composante connexe de G_{13}.
- En particulier, il existe une chaîne P_{13} dans G_{13} entre v_1 et v_3.
- Par le même argument, il existe une chaîne P_{24} dans G_{24} entre v_2 et v_4.
- Les chaînes P_{13} et P_{24} s'intersectent, et comme elles sont sommet-disjointes, une arête de P_{13} doit croiser une arête de P_{24}.
- Cela contredit l'hypothèse qu'on a un plongement de G dans le plan.



Théorème des 5 couleurs

Démonstration (5/6)

- Donc, v_1 et v_3 sont dans la même composante connexe de G_{13}.
- En particulier, il existe une chaîne P_{13} dans G_{13} entre v_1 et v_3.
- Par le même argument, il existe une chaîne P_{24} dans G_{24} entre v_2 et v_4.
- Les chaînes P_{13} et P_{24} s'intersectent, et comme elles sont sommet-disjointes, une arête de P_{13} doit croiser une arête de P_{24}.
- Cela contredit l'hypothèse qu'on a un plongement de G dans le plan.



Théorème des 5 couleurs

Démonstration (6/6)

- Donc, on peut toujours étendre une 5-coloration de $G - v$ à une coloration de G.
- Cela démontre que $A(n+1)$ est vraie.
- Le théorème est alors prouvé par récurrence.