Si $\varphi \equiv \psi$
alors $\varphi_\sigma \equiv \psi_\sigma$

Si φ et σ, σ' tq $\forall P,\ \sigma(P) \leftrightarrow \sigma'(P)$
alors φ_σ est logiquement équivalente à $\varphi_{\sigma'}$.

Exemple: $\varphi = P \wedge Q$

$\sigma = [\,{}^{Q \to R}/_{Q}\,]$

$\sigma' = [\,{}^{\neg R \to \neg Q}/_{Q}\,]$

$$P \wedge (Q \to R) \leftrightarrow P \wedge (\neg R \to \neg Q)$$

Rappel de la loi de Morgan:

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

Donc:

distributivité : $\varphi \vee (\psi \wedge \psi') \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \psi')$

Factorisation : $\varphi \wedge (\psi \vee \psi') \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi')$

$$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg \varphi \to \neg \psi)$$

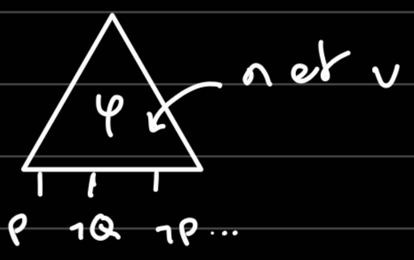
$$(\varphi \to (\psi \to \psi')) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \to \psi')$$

Formes normales

1 - Forme normale négative

Déf : Une formule est en (FNN) si uniquement les littéraux possèdent des $\neg$

$\to$

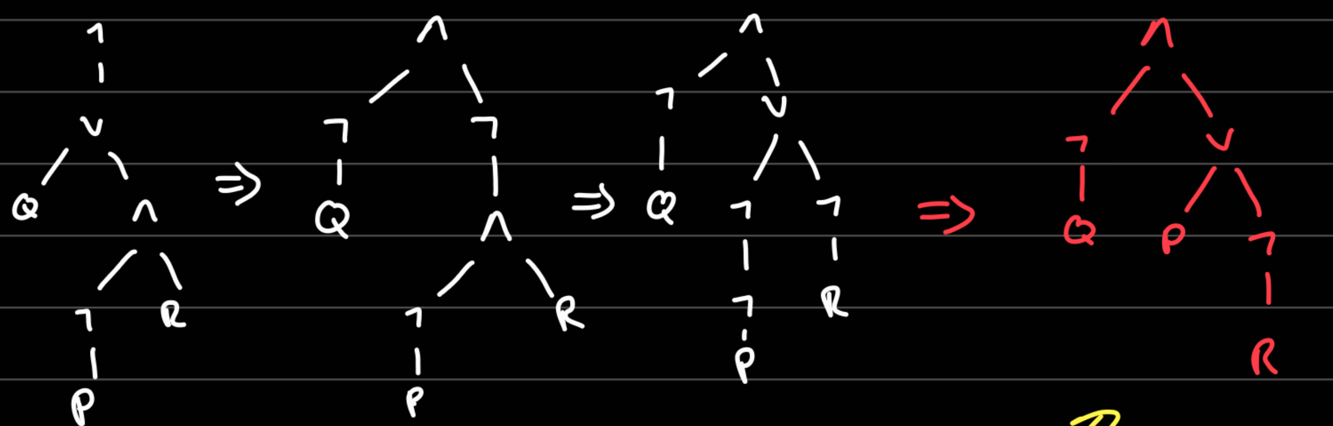


l'arbre possède uniquement $\wedge$ et $\vee$

les feuilles peuvent posséder des $\neg$

Exemple :

Soit :



FNN $= \neg Q \wedge (P \vee \neg R)$

Pour transformer on a utilisé les formules ci-dessus

On peut imaginer l'algorithme qui transforme φ en FNN $nnf(\varphi)$:

$nnf(p) = p$

$nnf(\varphi \vee \psi) = nnf(\varphi) \vee nnf(\psi)$

$\_\_\_\_\_\_ \wedge \_\_\_\_\_\_ \wedge \_\_\_\_\_\_$

$nnf(\neg p) = \neg p$

$nnf(\neg\neg \varphi) = nnf(\varphi)$

$nnf(\neg(\varphi \vee \psi)) = nnf(\neg \varphi) \wedge nnf(\neg \psi)$

$\_\_\_\_\_\_ \wedge \_\_\_\_\_\_ \vee \_\_\_\_\_\_$

Remarque: On utilise De Morgan car c'est l'équivalence logique qui porte s/ la négation

Au pire l'algorithme double la taille de φ.

Propriété: $nnf(\varphi) \equiv \varphi$

↳ Soit φ déjà sous FNN, comment mettre $\neg\varphi$ sous forme normale négative ?

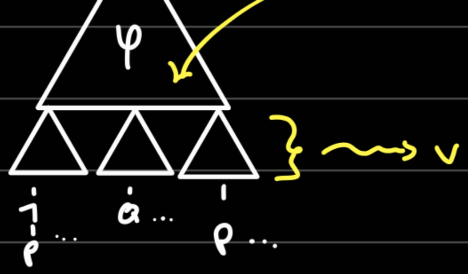
Il suffit de :

- Pour tous les littéraux p, p devient $\neg p$
- Les $\vee$ deviennent $\wedge$.
- $\_\_\_ \wedge \_\_\_\_\_\_ \vee$.

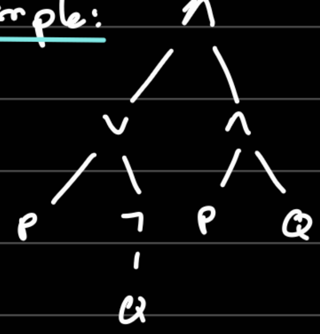
Notation: $\overline{\varphi} \equiv nnf(\neg\varphi)$

la formule duale de φ

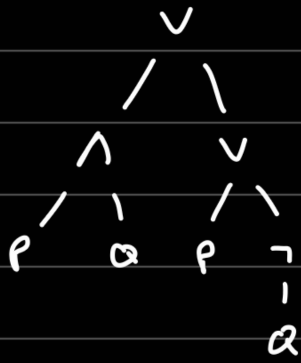
② - Forme normale conjonctive:



Exemple :



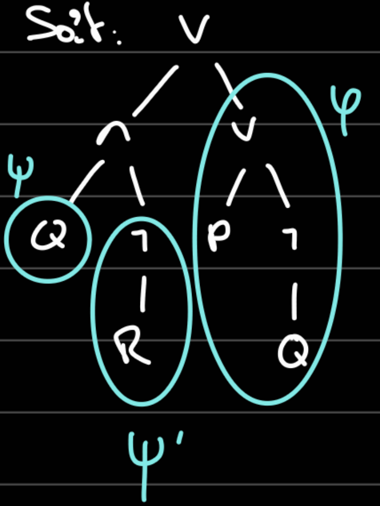
$\in$ FNC



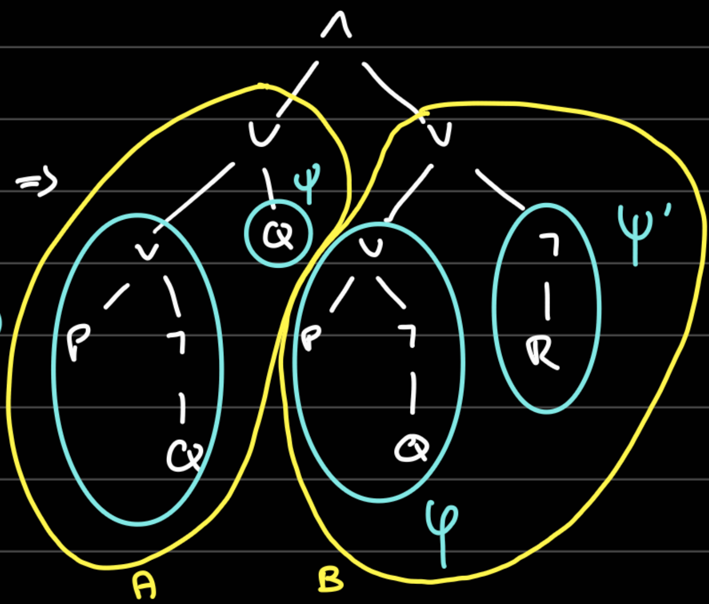
$\notin$ FNC

On utilise surtout la distributivité

Soit :



$\Rightarrow$

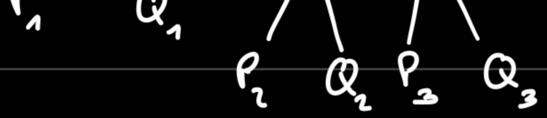


On a 2 clauses A et B

Le temps de changement est au pire 2^n

$$\bigvee_{1\leq i\leq n} P_i \wedge Q_i \Leftrightarrow \bigwedge_{J\subseteq\{1,\dots,n\}} C_J$$

$C_J = \bigvee$ …



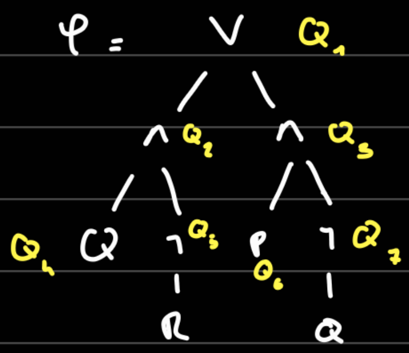
$\bigvee_{1 \le i \le n} \ldots\, l_{i,j}$

$l_{i,j} = P_i$ si $i \in J$,
Q_i sinon

Définition : φ et ψ sont équi-satisfiables si $\varphi \in SAT \Leftrightarrow \psi \in SAT$

$\exists I,\ I \models \varphi \Leftrightarrow \exists I',\ I' \models \psi$

Exemple : $\varphi =$



1. Association de chaque noeuds à Q_i

$$\begin{aligned}\psi = Q_1 &\wedge Q_1 \Rightarrow Q_2 \vee Q_3 \\ &\wedge Q_2 \Rightarrow Q_4 \wedge Q_5 \\ &\wedge Q_3 \Rightarrow Q_6 \wedge Q_7 \\ &\wedge Q_4 \Rightarrow Q \\ &\wedge Q_5 \Rightarrow \neg R \\ &\wedge Q_6 \Rightarrow P \\ &\wedge Q_7 \Rightarrow \neg Q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ici}\quad \psi = Q_1 &\wedge (\neg Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3) \\ &\wedge (\neg Q_2 \vee Q_4) \wedge (\neg Q_2 \vee Q_5) \\ &\wedge (\neg Q_3 \vee Q_6) \wedge (\neg Q_3 \vee Q_7) \\ &\wedge (\neg Q_4 \vee Q) \wedge (\neg Q_5 \vee \neg R) \\ &\wedge (\neg Q_6 \vee P) \wedge (\neg Q_7 \vee \neg Q)\end{aligned}$$

ψ est en 3-CNF

Si $I \models \varphi$

alors $I' : P \to 0$

$R \to 0$

$Q \to 1$

$Q_1 \to 1 \qquad Q_4 \to 1$

$Q_2 \to 1 \qquad Q_5 \to 1$

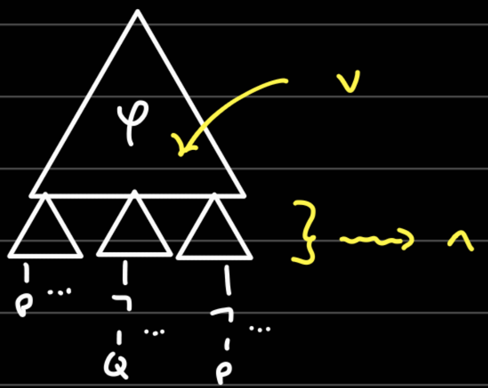
$Q_3 \to 0 \qquad Q_6 \to 0$

$Q_7 \to 0$

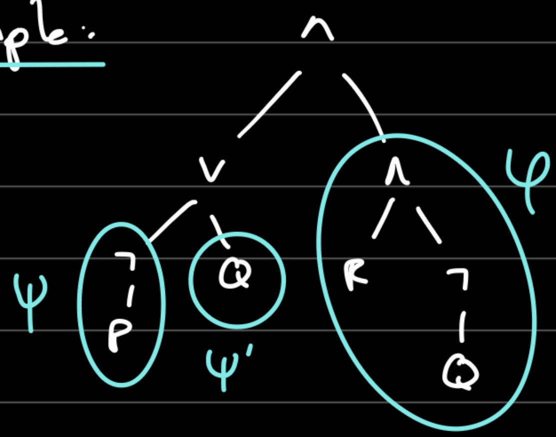
$$\begin{aligned}\psi = \; & Q_1 \wedge Q_1 \Rightarrow Q_2 \vee Q_3 \\ & \wedge\ Q_2 \Rightarrow Q_4 \wedge Q_5 \\ & \wedge\ Q_3 \Rightarrow Q_6 \vee Q_7 \\ & \wedge\ Q_4 \Rightarrow Q \\ & \wedge\ Q_5 \Rightarrow (\neg R) \\ & \wedge\ Q_6 \Rightarrow P \\ & \wedge\ Q_7 \Rightarrow (\neg Q)\end{aligned}$$

Pour avoir I tq $\varphi^I = 1$, on garde juste l'interprétation des littéraux trouvés.

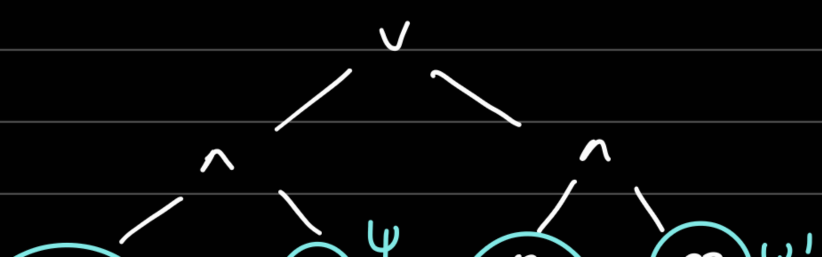
③ - Forme normale disjonctive (FND)

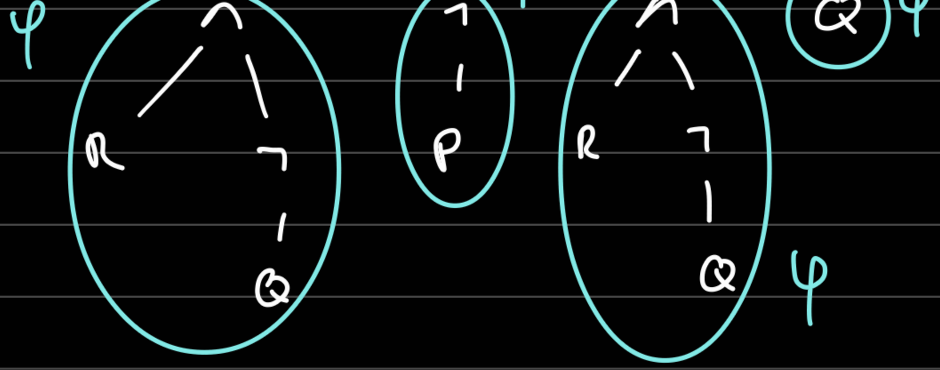


Exemple :



⇓





$\in$ FND

Mais encore ici coût exponentiel 2^n au pire cas.

RÉSUMÉ :

FNN : Facile à calculer

FNC : Forme très utile pour SAT par exemple, mais construction en temps exponentiel.
Heureusement il existe méthode pour une construction linéaire.

FND : Même problème que FNC mais sans réelle solution pour une construction linéaire