RETOUR s/ LE COURS :

- En Logique prop :
  - SAT ($\exists I$ tq $[\![\varphi]\!]^I = 1 \Rightarrow I$ est un modèle du φ)
  - VAL ($\forall I . [\![\varphi]\!]^I = 1$)

- En logique du 1er ordre :
  - SAT
  - "A un modèle"
  - VAL

↳ Pourquoi ?

En Logique de premier ordre (L1O)

- l'interpretation est :
  - Le domaine des variables
  - fonctions et relations

- Les valuation ρ :
  - Valeur possible des variables (dans le domaine) apparaissant dans la formule. (correspond à l'inter-pretation en LP)

ainsi en L1O :

$\varphi \in SAT \Leftrightarrow \exists \rho$ dans une interpretation I tq $[\![\varphi]\!]^I_\rho = 1$

- Validité :

$\varphi \in SAT \Leftrightarrow \forall \rho$ dans toutes interpretations I tq $[\![\varphi]\!]^I_\rho = 1$

- Avoir un modèle est donc :

Ψ a un modèle $\Leftrightarrow$ $\forall \rho$ dans une interprétation I tq $[\![\Psi]\!]^I_\rho = 1$

$\Updownarrow$

I est un modèle

Exercice 3 : ⚠ On ne remplace pas les valuations sur une variable liée ⚠

a) 1. $\varphi_0 = \neg \exists x . x < zero$

~~(I,ρ) ne la satisfait pas~~. (I,ρ) la satisfait car x est liée.

I est un modèle

(car dans $\mathbb{N}$, il n'existe pas de ρ qui $\models \varphi_0$

2. $\varphi_1 = \forall x . \exists y . x < y$ $\rightsquigarrow$ ensemble non-majoré

(I,ρ) satisfait φ_1

I est un modèle.

3. $\varphi_2 = \underbrace{\exists y . \forall x . (x < y}_{\rightsquigarrow \text{ ensemble majoré.}} \vee x = y)$

(I,ρ) ne la satisfait pas (car $\rho(x) = 1$, $\rho(y) = 3$ et avant le $\vee$ est faux)

I n'est pas un modèle.

4. $\varphi_3 = (x<y) \wedge \neg \exists z . ((x<z) \wedge (z<y))$

(I,ρ) ~~la satisfait~~ ne satisfait pas φ_3

I n'est pas un modèle

b) Pour $\rho(x) = 1$, $\rho(y) = 2$ (deux entiers consécutifs de manière générale)

c) Soit D_I ~~les réels de 0 à 5.~~ $= \mathbb{Z}^-$

Si une formule φ est close (pas de variables libres) alors φ SAT $\Leftrightarrow$ φ a un modèle

Exercice 4:

1) VAL

2) a un modèle

$$B^I = \emptyset$$

↑

"Quelle est la partie du domaine de I qui renvoie true par B"

D^I = domaine

B^I = partie telle que B renvoie true pour I

3) NON SAT ⇝ Astuce : souvent on prouve la $\neg$VAL ou $\neg$SAT en posant $x = y$

4) VAL (avec $x = y$)

5) • Si on avait eu $\exists y. (G(x,y) \Rightarrow G(x,x))$ alors $\in$ VAL $(x = y)$

• Mais on a

$$(\exists y.\ G(x,y)) \Rightarrow G(x,x)$$

→ a un modèle e.g. $G^I = D_I \times D_I$ mais pas valide

6) $\underbrace{\neg B(y)}_{\text{pour } \rho(y):\ \neg B(y)} \wedge \underbrace{(\exists y .\ B(y))}_{\exists y \text{ tq } B(y)}$

pour $\rho(y)$

$\neg B(y)$

$\exists y$ tq $B(y)$

$\in$ SAT

7)