Algorithmique (AL5)

TD n° 10 : Postier chinois, voyageur de commerce et algorithmes d'approximation

Exercice 1 : Le problème du postier

Un postier nouvellement nommé en milieu rural se demande comment organiser sa tournée pour pédaler le moins possible sur sa bicyclette. Il dispose de la carte de la zone à couvrir, et de vagues souvenirs de ses cours de théorie des graphes. Bien évidemment, pour assurer la distribution du courrier, il doit passer par toutes les rues. Le postier part de la poste pour commencer sa tournée et doit reposer sa bicyclette à la poste à la fin de la tournée.

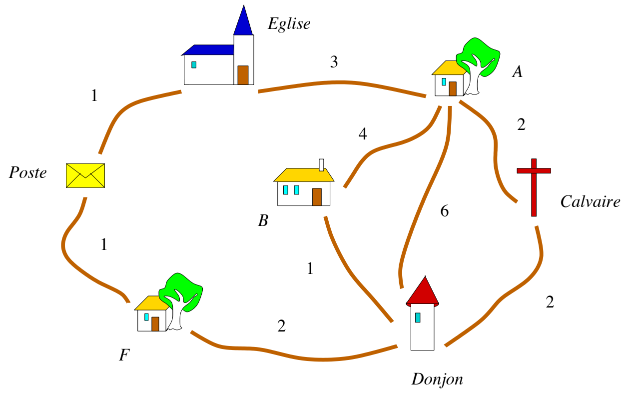
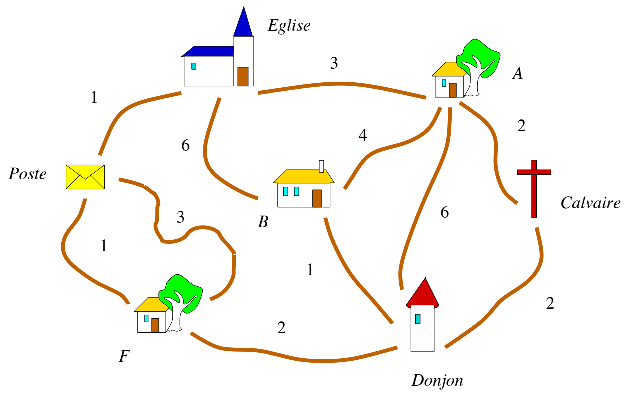


FIGURE 1 – Les valuations sur les chemins indiquent leur longueur en kilomètre.

1. Comment le postier peut-il trouver une tournée de distance minimale dans ce cas ?

De nouvelles maisons viennent de se construire sur la route entre l'église et le hameau B, et sur le chemin des aiguilles entre la poste et le lieu dit F. Les routes que doit maintenant desservir notre postier sont représentées ci-dessous.



Supposons que notre postier ait opté pour une tournée T. On peut alors associer à cette tournée la multigraphe $G_T = (V, E_T)$ où chaque arête est représentée autant de fois que la rue correspondante est parcourue par le postier.

2. Que peut on dire de la tournée du postier dans G_T ? Quelle est sa longueur ?

Exercice 2 : Tour des Cyclades

Pour célébrer l'obtention de votre licence, vous allez faire un voyage en voilier dans les Cyclades (un archipel de Grèce) cet été. Vous allez louer un voilier à l'île de Syros et ensuite vous souhaitez faire escale aux îles de Milos, Mykonos, Naxos, Paros et Santorin (pas forcément dans cet ordre) avant de retourner à Syros. Le tableau ci-dessous indique les distances (en milles nautiques) entre les différentes îles.

	Milos	Mykonos	Naxos	Paros	Santorin	Syros
Milos	×	70	59	52	65	49
Mykonos	70	×	24	27	74	25
Naxos	59	24	×	16	54	31
Paros	52	27	16	×	67	23
Santorin	65	74	54	67	×	74
Syros	49	25	31	23	74	×

Vous décidez d'utiliser l'algorithme de Christofides pour trouver un meilleur itinéraire.
Soit G le graphe complet à six sommets, dont les sommets correspondent aux îles, et le poids de chaque arête correspond à la distance entre les îles. (*Il n'est pas nécessaire de le dessiner.*)

1. Trouver un arbre couvrant de poids minimum de G. Quel algorithme avez-vous utilisé ?

2. Trouver (à la main) un couplage M de poids minimum dans G tel que $G + M$ est eulérien.

3. Déduire un itinéraire pour votre voyage.

4. Prouvez que le tour que vous avez trouvé est au plus 1.5 fois plus long qu'un tour optimal.

Exercice 3 : Couvertures par des sommets (Vertex cover)

Dans ce problème, on prend en entrée un graphe (V, E), et on renvoie un sous ensemble V' de V, tel que toute arrête dans E est incidente à au moins un sommet. On considère l'algorithme glouton suivant (rappel : $\delta(u)$ est l'ensemble d'arêtes incidentes au sommet u.) :

```
Algo2 (G) :
// G = (V,E)
V' := ∅
tant que E ≠ ∅:
   piocher uv dans E
   V' := V' ∪ {u, v}
   E := E \ {δ(u) ∪ δ(v)}
Retourner V'.
```

1. Expliquer pourquoi tout vertex cover (couverture par des sommets) de G a au moins autant de sommets que le nombre d'arêtes dans un couplage de G.

2. Montrer que l'ensemble de toutes les arêtes uv piochées dans la boucle `tant que` forme un couplage de taille $|V'|/2$.

3. En déduire que l'algorithme glouton est un algorithme de 2-approximation.