UFR d'Informatique
L3 Informatique, Math-Info et Japonais-Info

Grammaires et analyse syntaxique
Année 2024-2025

TD n°1

Langages et expressions rationnelles

Les exercices marqués d'un symbole (∗) sont facultatifs.

Exercice 1 *Soient A, B et C les langages dénotés respectivement par les expressions rationnelles $(bb \mid aba)^*$, $(b \mid aba)^*$ et $(ab \mid abb)^*$. Donner les trois mots les plus courts de $A \cup B$, de $A \cup C$, de $A \cap B$, de $A \cap C$, et finalement de $B \cap C$.*

Exercice 2 *Pour chacune des expressions rationnelles suivantes, donner une description en français du langage dénoté :*

1. $((1 \mid 0)0)^*(\epsilon \mid 0 \mid 1)$; *2.* $(1 \mid 01 \mid 001)^*(\epsilon \mid 0 \mid 00)$; *3.* $0^*(10^*10^*10^*)^*$.

Exercice 3 *Pour chacun des langages sur l'alphabet $\{0, 1\}$ suivants, écrire une expression rationnelle le dénotant et construire un automate déterministe le reconnaissant :*

1. *tous les mots de longueur paire ;*
2. *tous les mots contenant* 0 *;*
3. *tous les mots avec un nombre impair de* 1 *;*
4. *tous les mots qui n'ont pas plus de deux* 0 *consécutifs ;*
5. *tous les mots qui représentent un entier binaire (non-signé) pair.*
6. (∗) *tous les mots ne contenant pas le facteur* 010 *;*

Exercice 4 *On considère l'expression rationnelle $\mathcal{E}_1 = (a \mid \epsilon)(b \mid \epsilon)ab(a \mid \epsilon)(b \mid \epsilon)$.*

1. *Construire un automate $\mathcal{A}_1$ qui reconnaît le langage dénoté par $\mathcal{E}_1$.*
2. *Déterminiser et éliminer les ϵ-transitions de l'automate $\mathcal{A}_1$ selon la méthode ci-dessous :*

Déterminiser et éliminer les ϵ-transitions

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, I, F)$ un automate non-déterministe avec ϵ-transitions.
Pour $P \subseteq Q$, on définit :

$$\epsilon\text{-clôture}(P) = \{q \in Q \mid \exists p \in P, q \in \delta^*(p, \epsilon)\}.$$

On construit l'automate déterministe $\mathcal{A}' = (\Sigma, 2^Q, \delta', I', F')$ avec

— $I' = \epsilon\text{-clôture}(I)$,
— $\delta'(P, a) = \bigcup_{p \in P} \epsilon\text{-clôture}(\delta(p, a))$,
— $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$.

Il convient de construire les états de $\mathcal{A}'$ au fur et à mesure.

3. (∗) *Faire de même avec l'expression rationnelle $\mathcal{E}_2 = (a \mid ba)^*(b \mid ba)$.*

Exercice 5 *On considère maintenant l'alphabet* Σ *constitué de tous les caractères ASCII :*

```
!"#$%&'()*+,-./0123456789:;<=>?@ABCDEFGHIJKLMNO
PQRSTUVWXYZ[\]^_`abcdefghijklmnopqrstuvwxyz{|}~
```

On pourra utiliser la syntaxe `[a-z]` *pour reconnaître un caractère parmi un sous-ensemble de* Σ.
Écrire une expression rationnelle reconnaissant chacun des langages suivants :

1. *Les adresses e-mail de la forme* <prénom>.<nom>*@u-paris.fr*
2. *Pareil que la question précédente, mais en acceptant aussi les adresses en « @etu.u-paris.fr ».*
3. *Les noms de variables Java : ils peuvent contenir des lettres (majuscules ou minuscules), des chiffres, et le symbole underscore « _ » ; mais le premier caractère doit être une lettre.*

Exercice 6 $(*)$ *On rappelle quelques propriétés des langages rationnels :*

> **Propriétés de clôture des langages rationnels**
>
> — *Si* $\mathcal{L}_1$ *et* $\mathcal{L}_2$ *sont deux langages rationnels, alors* $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ *et* $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ *sont aussi des langages rationnels.*
>
> — *Si* $\mathcal{L}$ *est un langage rationnel sur* Σ, *alors* $\Sigma^* \setminus \mathcal{L}$ *est aussi un langage rationnel.*

On rappelle aussi le lemme de l'étoile (Pumping Lemma) :

> **Lemme de l'étoile**
>
> *Soit* $\mathcal{L}$ *un langage rationnel sur* Σ. *Alors :*
> *il existe un entier* $N \geq 1$
> *tel que pour tout mot* $u \in \mathcal{L}$ *avec* $|u| \geq N$
> *il existe des mots* $x, y, z \in \Sigma^*$ *avec* $|xy| \leq N$, $|y| \geq 1$, $u = xyz$
> *tel que pour tout entier* $k \geq 0$: $xy^kz \in \mathcal{L}$.

Pour chacun des langages suivants, dire s'il est rationnel ou pas.

1. $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ *2.* $\{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *3.* $\{a^n b^n c^n \mid n \leq 2025\}$
4. $\{u^2 \mid u \in \{a, b\}^*\}$ *5.* $\{a^m b^n \mid m \neq n\}$ *6.* $\{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ est un palindrome}\}$