Université Paris Cité

Connexité, arbres, parcours en largeur

CM nº2 — Algorithmique (AL5)

Matěj Stehlík

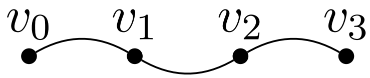
29/9/2023

Chaînes

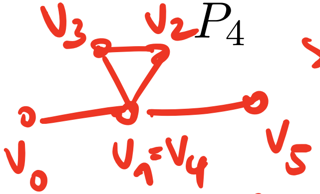
Définition

Une *chaîne* dans un graphe $G = (V, E)$ est une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, où :

- $v_i \in V$
- $e_i \in E$
- $e_{i+1} = v_i v_{i+1}$.



P_4

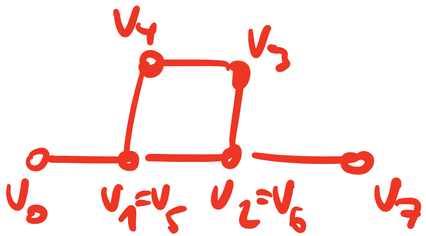


simple

pas élémentaire

- L'entier k est la *longueur* de la chaîne.
- Une chaîne est *élémentaire* si ses sommets sont deux-à-deux distincts.
- Une chaîne élémentaire avec n sommets (de longueur $n - 1$) est notée P_n.

Chaînes (suite)



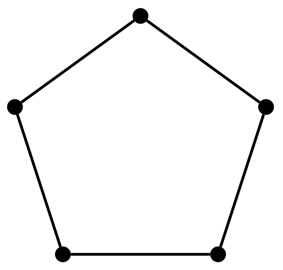
pas simple

- Les sommets v_0 et v_k sont les *extrémités* de la chaîne.
- Lorsque le graphe est simple (sans arêtes parallèles), une chaîne peut être définie simplement par la suite $(v_0, \ldots, v_k)$ de ses sommets.
- Une *sous-chaîne* d'une chaîne est définie comme une sous-suite, entre deux sommets, de la suite définissant la chaîne considérée.
- Une chaîne est dite *simple* si ses arêtes sont deux-à-deux distinctes.
- Élémentaire entraîne simple.

Cycles

Définition

Un *cycle* est une chaîne de longueur supérieure ou égale à 1 simple et fermée. C'est donc une chaîne de la forme $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_0)$ où $k \geq 1$ et les e_i sont distinctes.



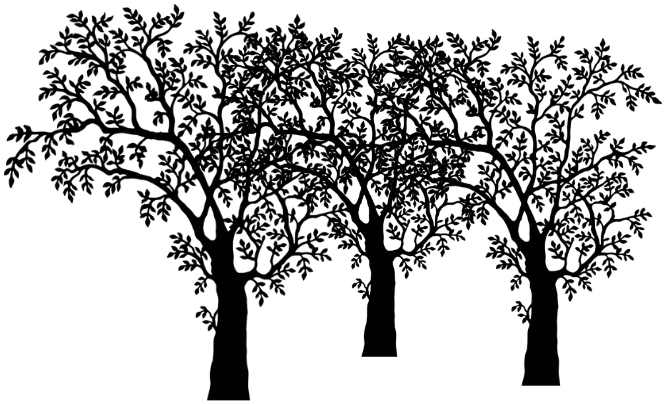
C_5

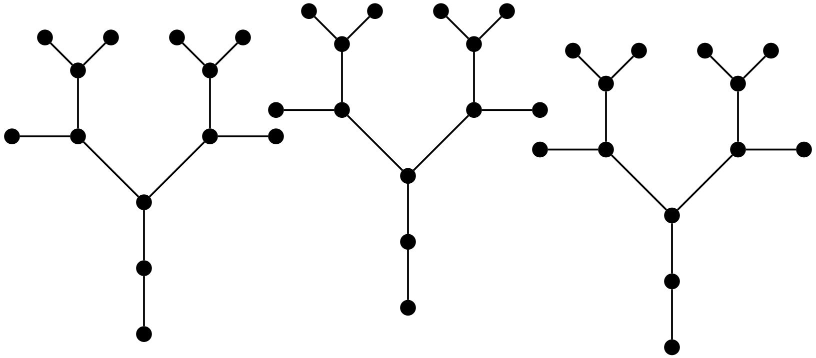
- L'entier k est la *longueur* du cycle ; le cycle est *pair* où *impair* suivant que sa longueur est paire ou impaire.
- Un cycle élémentaire avec n sommets (de longueur n) est noté C_n.

Forêts

Définition

Un graphe sans cycles s'appelle un graphe *acyclique*, ou une *forêt*.

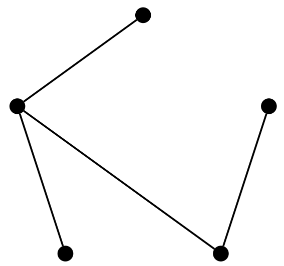




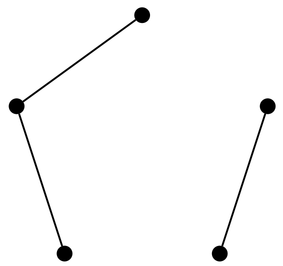
Connexité

Définition

- Un graphe G est *connexe* s'il existe une chaîne entre u et v, pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$.
- Une *composante connexe* d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal (par inclusion).



graphe connexe

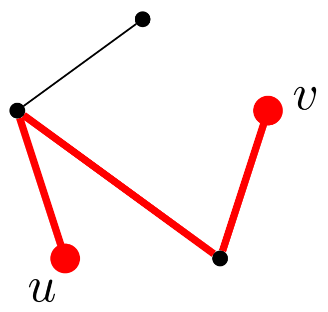


graphe non connexe

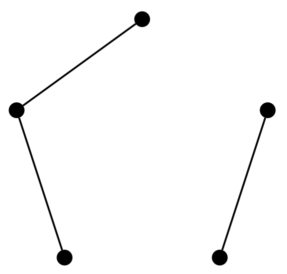
Connexité

Définition

- Un graphe G est *connexe* s'il existe une chaîne entre u et v, pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$.
- Une *composante connexe* d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal (par inclusion).



graphe connexe

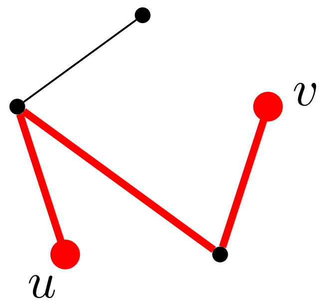


graphe non connexe

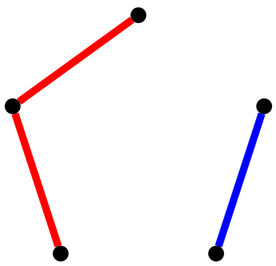
Connexité

Définition

- Un graphe G est *connexe* s'il existe une chaîne entre u et v, pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$.
- Une *composante connexe* d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal (par inclusion).



graphe connexe



graphe non connexe

Relation d'équivalence

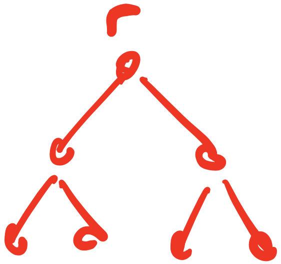
Remarque

- On peut aussi définir les composantes connexes en utilisant les relations d'équivalence.
- Soit $G = (V, E)$ un graphe et mettons $u \sim v$ si et seulement si il existe une chaîne entre u et v.
- On peut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Les classes d'équivalence induisent les composantes connexes de G.

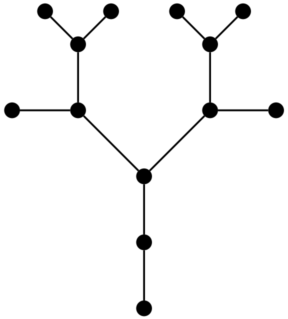
Arbres

Définition

Un *arbre* est un graphe connexe et acyclique.



arbre
enraciné
(d'informaticien)

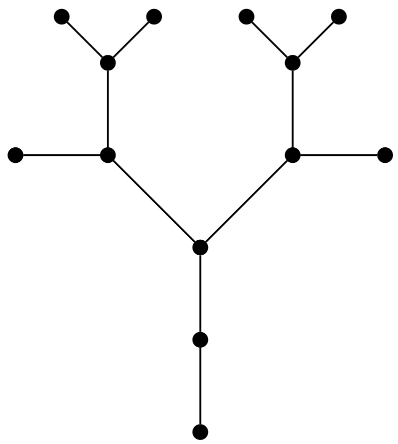


Plusieurs façons de définir un arbre. . .

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre (càd, G est connexe et acyclique)
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

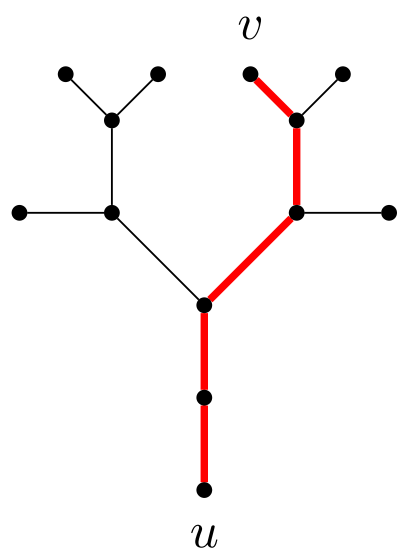


Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

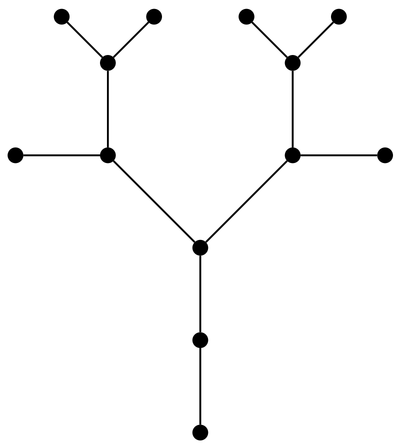


Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

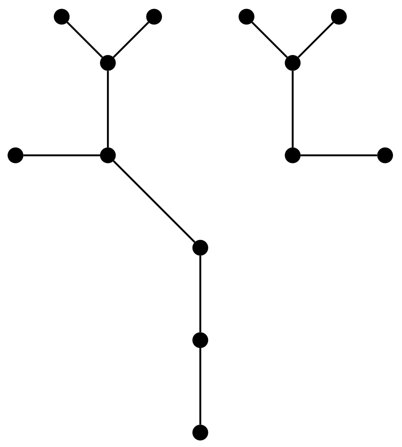


Plusieurs façons de définir un arbre. . .

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

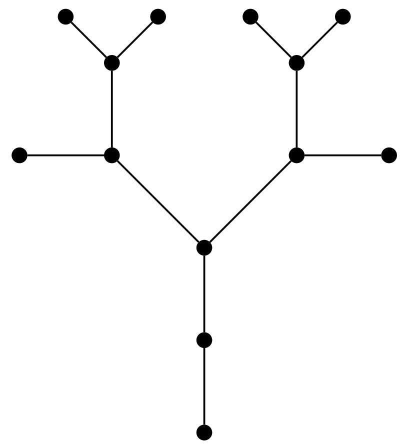


Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

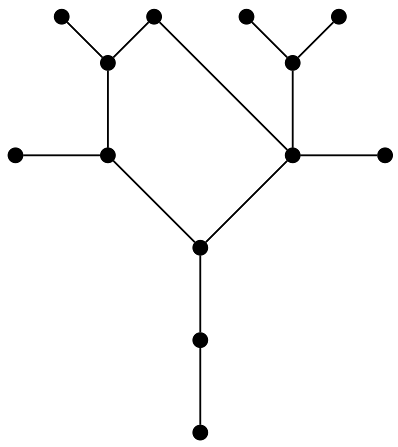


Plusieurs façons de définir un arbre. . .

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$



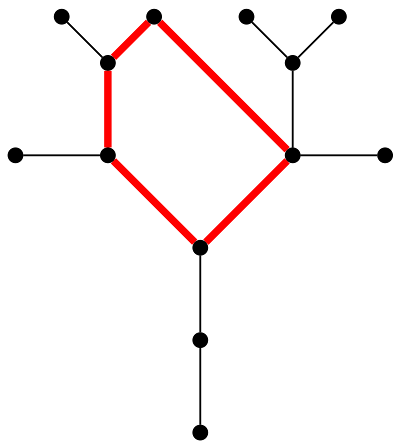
Plusieurs façons de définir un arbre...

Théorème (caractérisation des arbres)

Les énoncés suivants sont équivalents.

1. G est un arbre
2. Pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne élémentaire unique entre u et v
3. G est connexe, et si l'on supprime n'importe quelle arête, le graphe devient non connexe
4. G est acyclique, et si l'on rajoute une nouvelle arête à G, le nouveau graphe contiendra un cycle
5. G est connexe et $|V(G)| = |E(G)| + 1$

6. G est acyclique et $|V(G)| = |E(G)| + 1$.



Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.

Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.

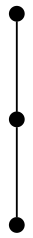
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



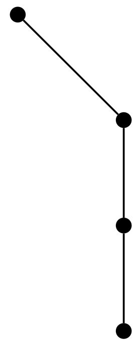
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



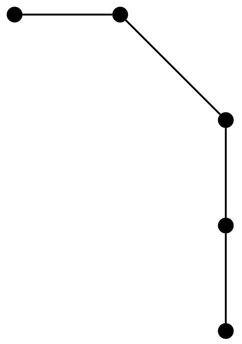
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



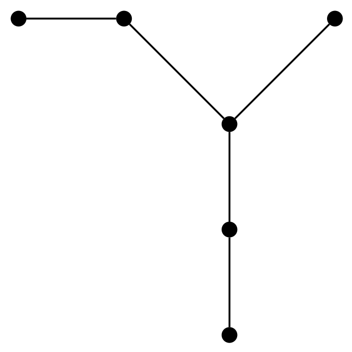
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



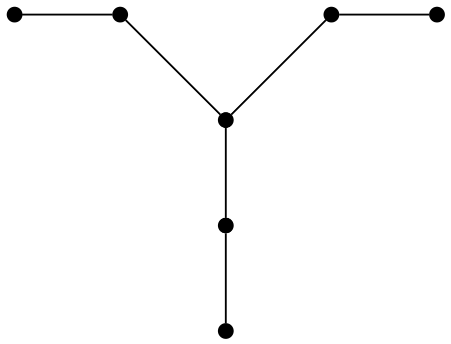
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



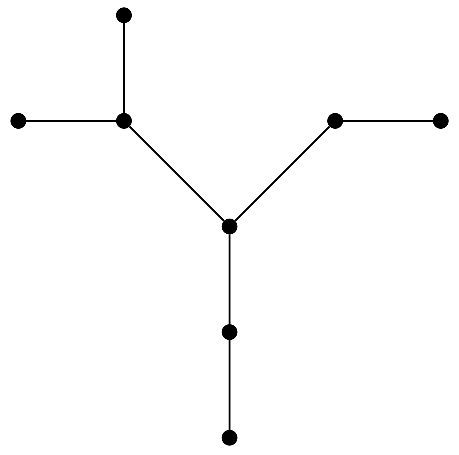
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



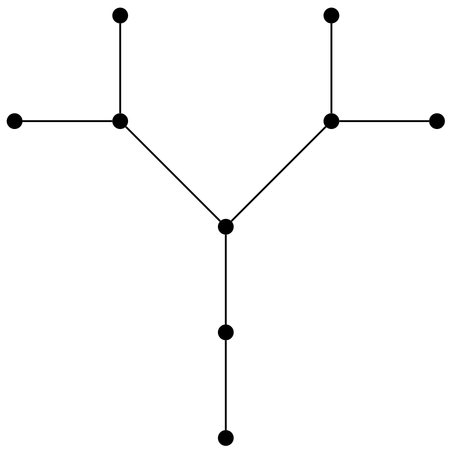
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



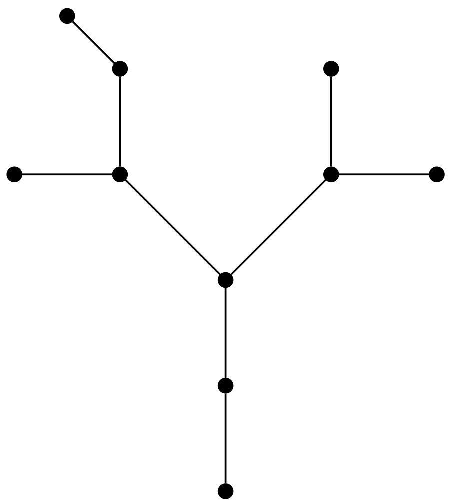
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



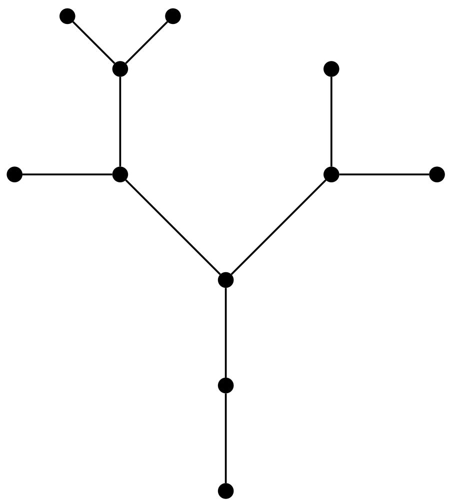
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



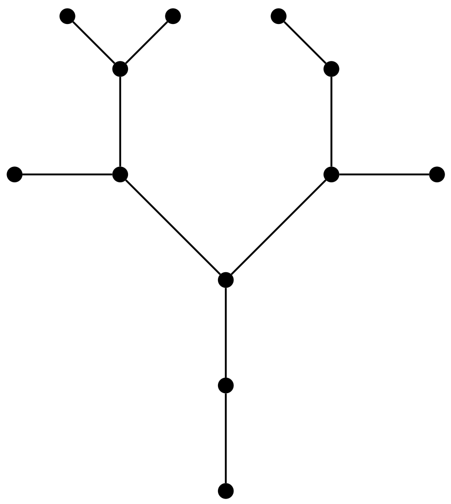
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.



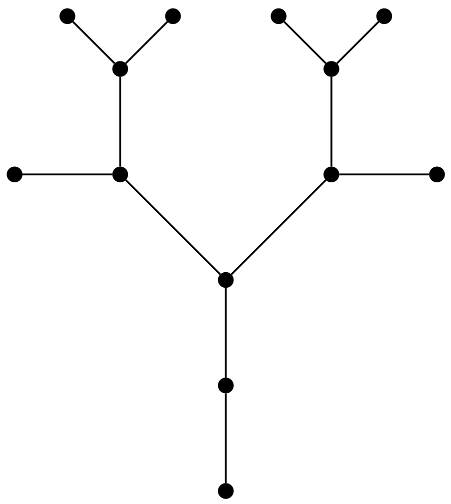
Faire pousser un arbre

Lemme

Tout arbre avec au moins deux sommets contient au moins deux feuilles.

Lemme

G est un arbre avec une feuille v ssi $G - v$ est un arbre.

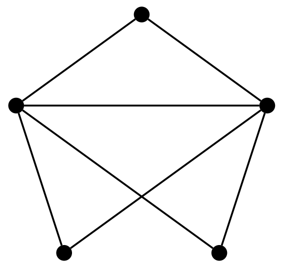


Arbre couvrant

Définition

= qui contient tous les sommets

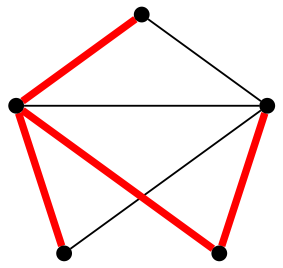
Soit G un graphe. Un *arbre couvrant de G* est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.



Arbre couvrant

Définition

Soit G un graphe. Un *arbre couvrant de* G est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.



Démonstration

Proposition

G est connexe $\iff$ G contient un arbre couvrant

Démonstration

- Soit G un graphe connexe.
- Retirons de G, tant qu'il est possible, une arête qui ne coupe pas le graphe (le graphe reste connexe).
- On obtient un sous-graphe partiel T qui est connexe par la condition sur les arêtes, et il n'a pas de cycles puisque s'il y aurait un cycle, on pourrait enlever une arête du cycle sans couper le graphe.
- T est donc un arbre.
- Le converse est évident.

Comment décider si un graphe est connexe ?

Une question fondamentale que l'on puisse se poser à propos d'un graphe :

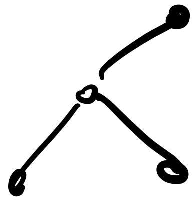
Question

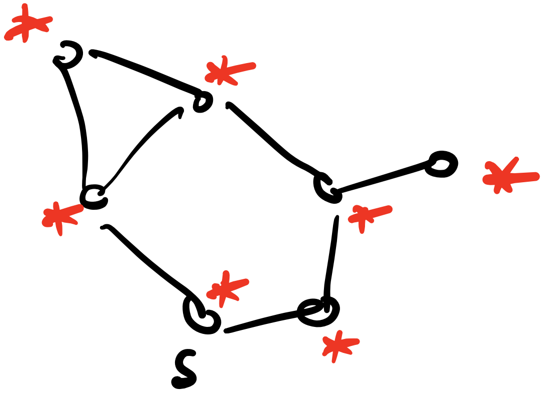
Le graphe G est-il connexe ?

Sinon, quelles sont les composantes connexes de G ?

- Pour des petits graphes, on peut le faire par inspection.
- Pour des grands graphes, il faut un algorithme !

Algorithme de marquage





Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $s \in V$

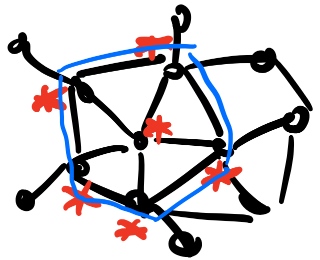
début

  marquer(s) ;

  tant que $\exists uv \in E$ où u est marqué et v non marqué **faire**

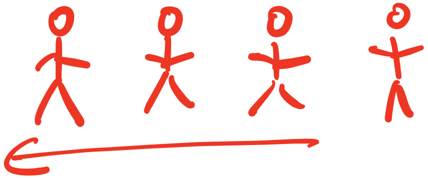
    marquer(v)

Comment améliorer cet algorithme ?



- Si, à un moment donné, tous les voisins d'un sommet marqué sont marqués, nous n'avons plus besoin de considérer ce sommet (puisque seul un sommet non marqué peut devenir marqué, et non l'inverse).
- Il suffit de ne considérer que les sommets marqués "sur le bord".
- En spécialisant l'ordre dans lequel nous recherchons les arêtes à partir des sommets marqués, nous obtenons des parcours spéciaux, adaptés à différents degrés pour de différents types de problèmes.
- Le *parcours en largeur* prend systématiquement les arêtes les plus proches à la racine.

Rappel : files



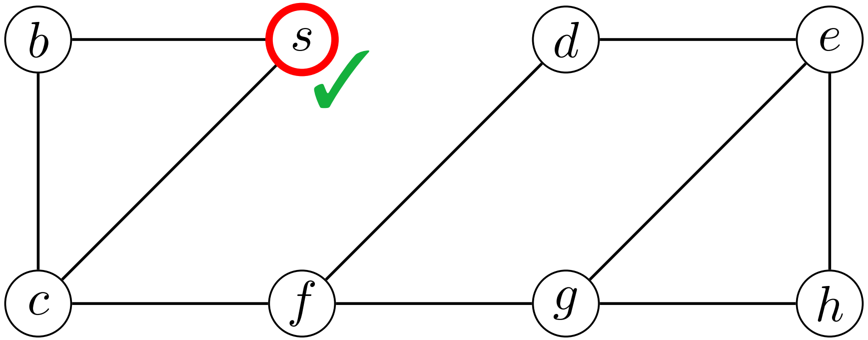
- Une *file* est une structure de données linéaire dans laquelle les éléments ne peuvent être insérés qu'en arrière, et les éléments ne peuvent être supprimés qu'en avant.
- La file suit le principe *FIFO* (first in, first out, soit premier entré, premier sorti), c'est-à-dire que l'élément inséré en premier dans la liste est le premier élément à être supprimé de la liste.
- *Enfiler* = insérer un élément dans (la fin de) une file
- *Défiler* = supprimer un élément de (la tête de) une file.

Parcours en largeur (BFS [1])

Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $s \in V$
début
  créer file(Q) ;
  marquer(s) ;
  enfiler(Q, s) ;
  tant que $Q \neq \emptyset$ **faire**
    $u \leftarrow$ défiler(Q) ;
    pour tous les $uv \in E$ **faire**
      si v non marqué **alors**
        marquer(v) ;
        enfiler(Q, v)

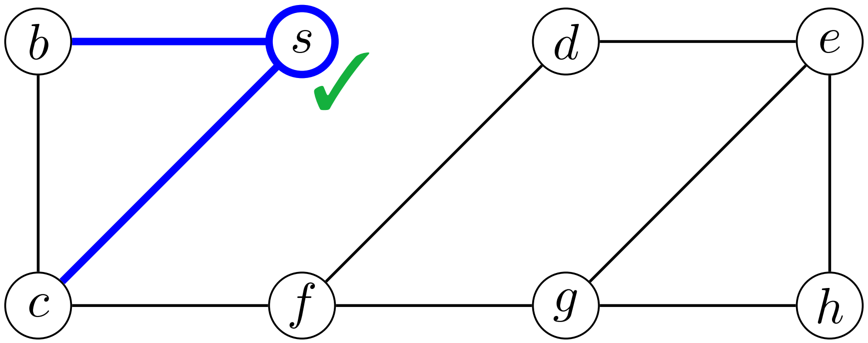
1. Breadth-first search

Illustration du parcours en largeur



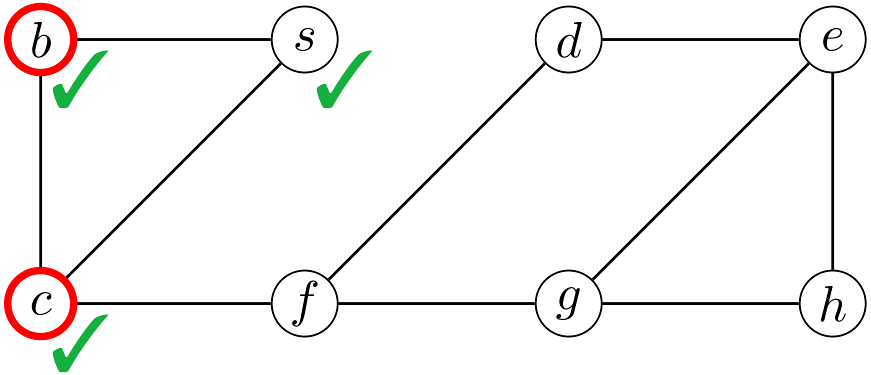
$Q = [s]$

Illustration du parcours en largeur



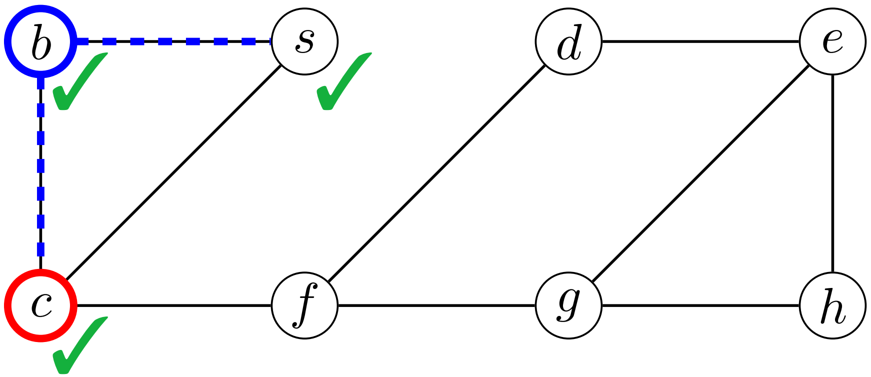
$Q = []$
$u = s$

Illustration du parcours en largeur



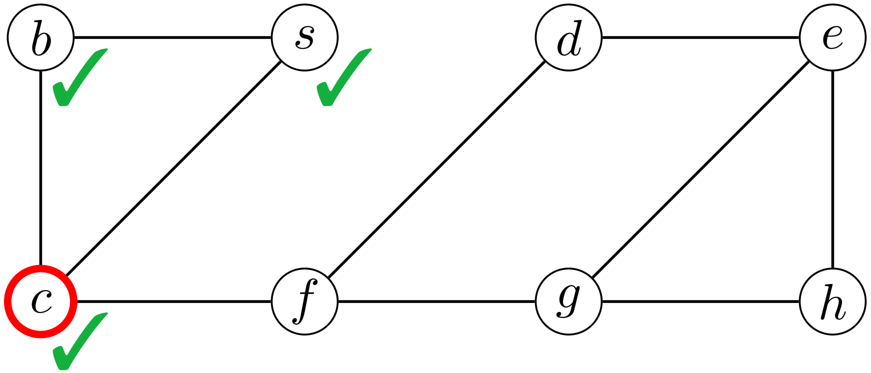
$$Q = [b, c]$$

Illustration du parcours en largeur



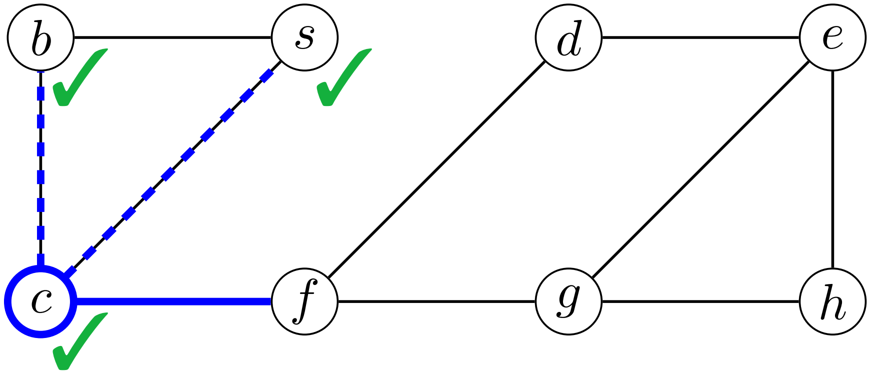
$$Q = [c]$$
$$u = b$$

Illustration du parcours en largeur



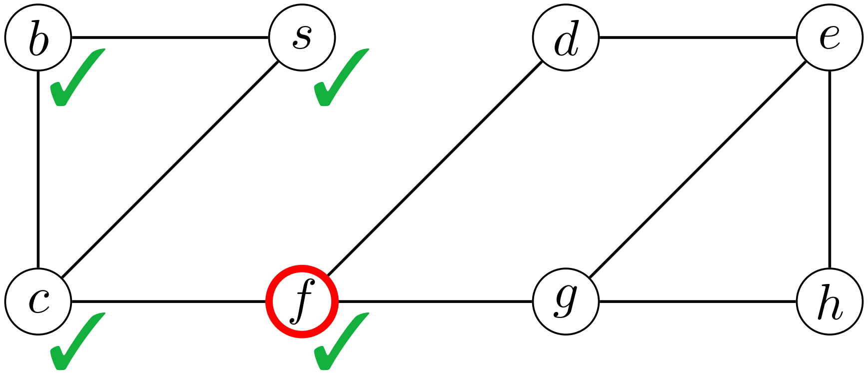
$$Q = [c]$$

Illustration du parcours en largeur



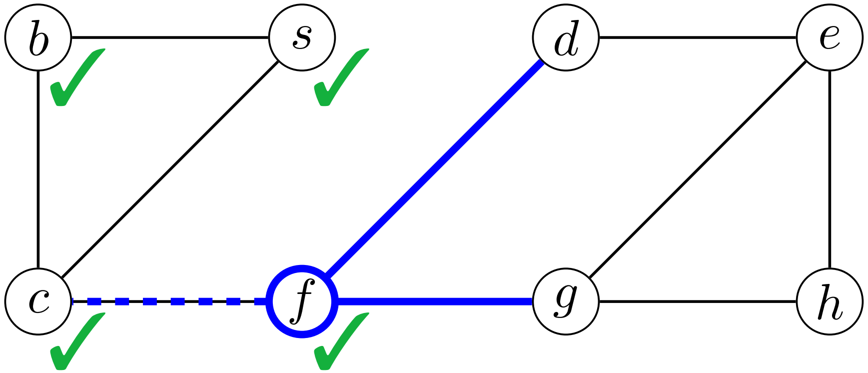
$$Q = []$$
$$u = c$$

Illustration du parcours en largeur



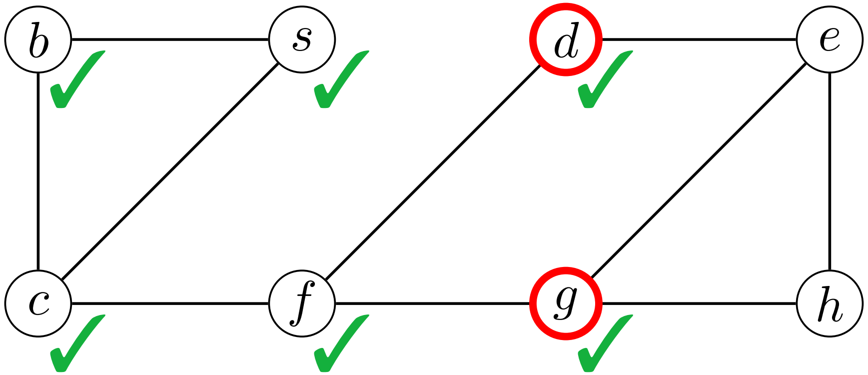
$Q = [f]$

Illustration du parcours en largeur



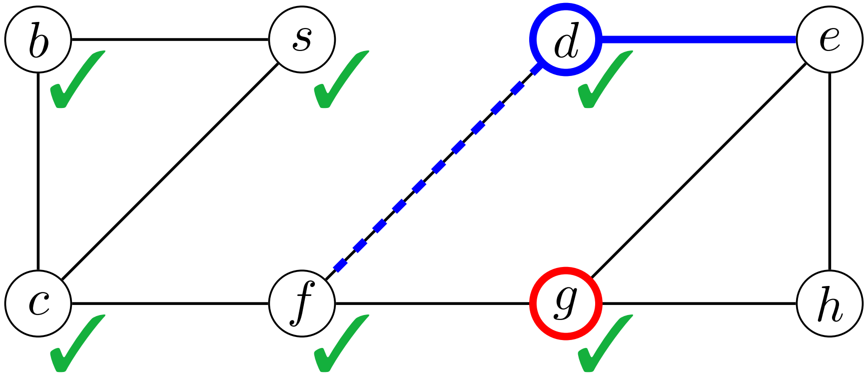
$Q = []$
$u = f$

Illustration du parcours en largeur



$$Q = [d, g]$$

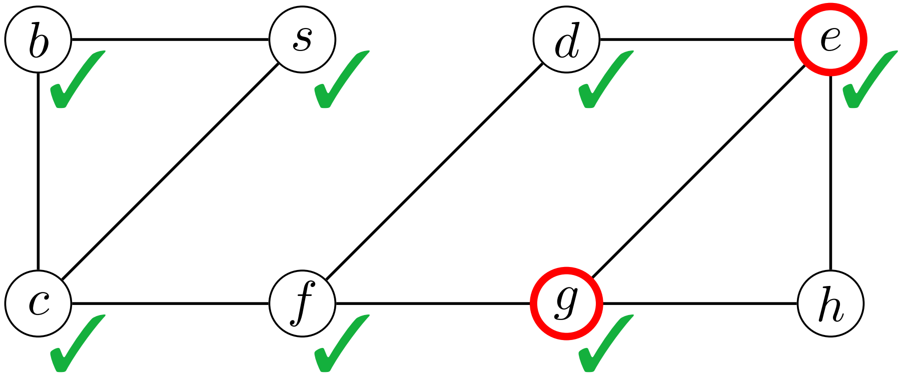
Illustration du parcours en largeur



$Q = [g]$

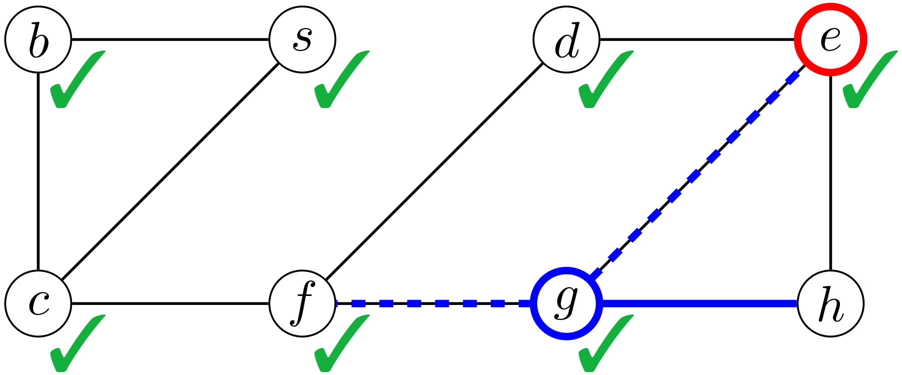
$u = d$

Illustration du parcours en largeur



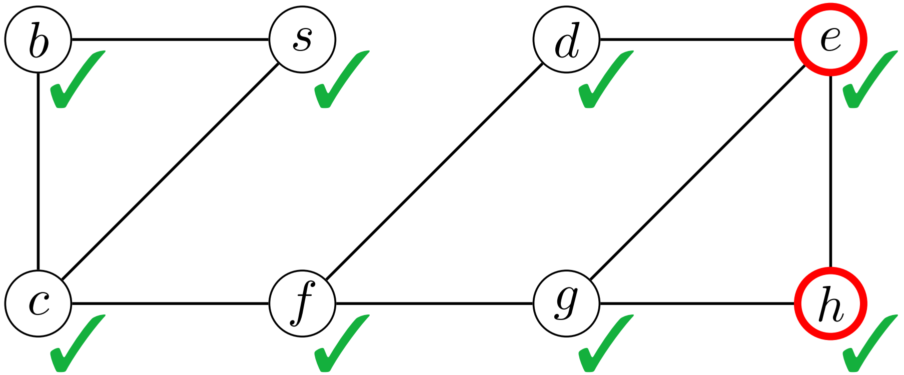
$$Q = [g, e]$$

Illustration du parcours en largeur



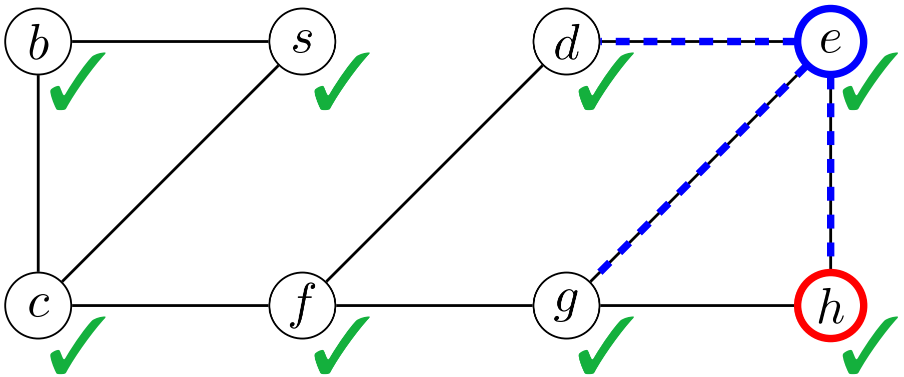
$$Q = [e]$$
$$u = g$$

Illustration du parcours en largeur



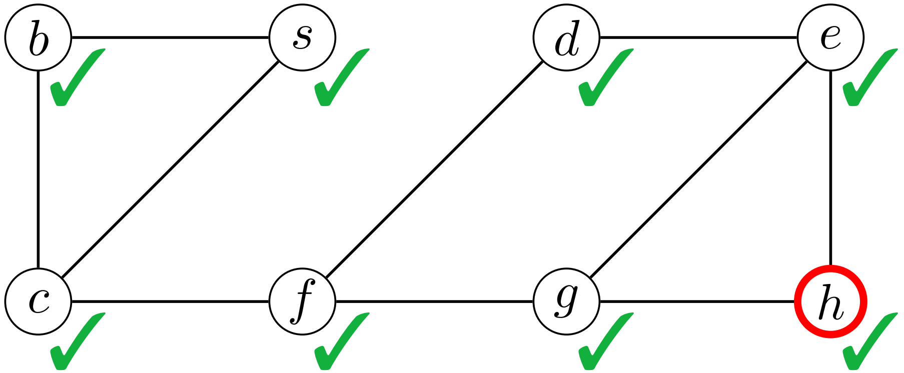
$Q = [e, h]$

Illustration du parcours en largeur



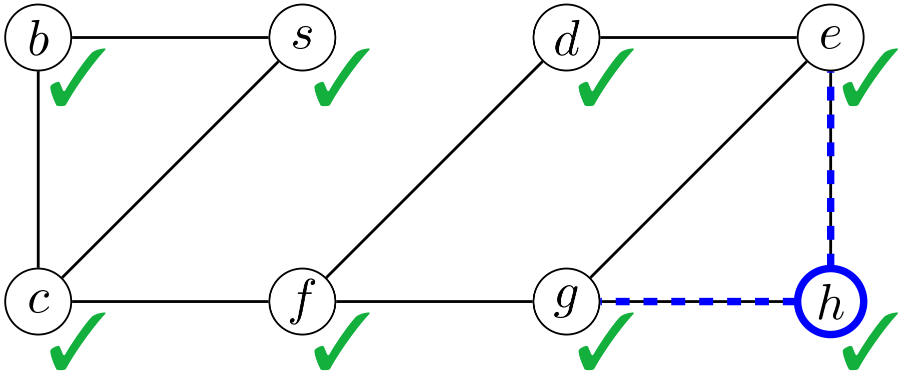
$$Q = [h]$$
$$u = e$$

Illustration du parcours en largeur



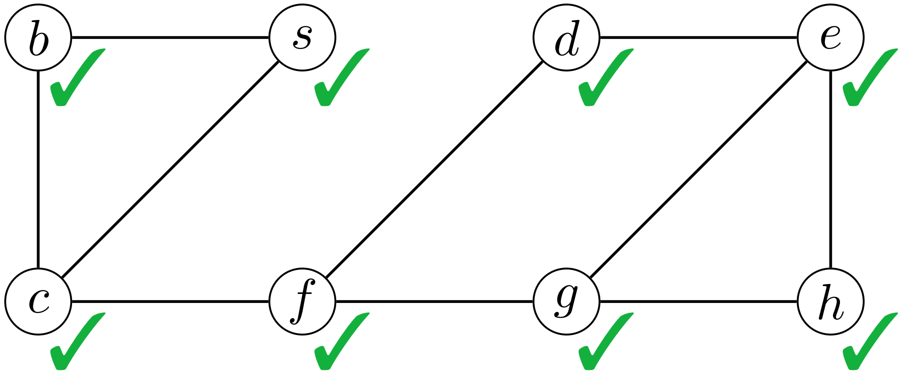
$Q = [h]$

Illustration du parcours en largeur



$Q = []$
$u = h$

Illustration du parcours en largeur

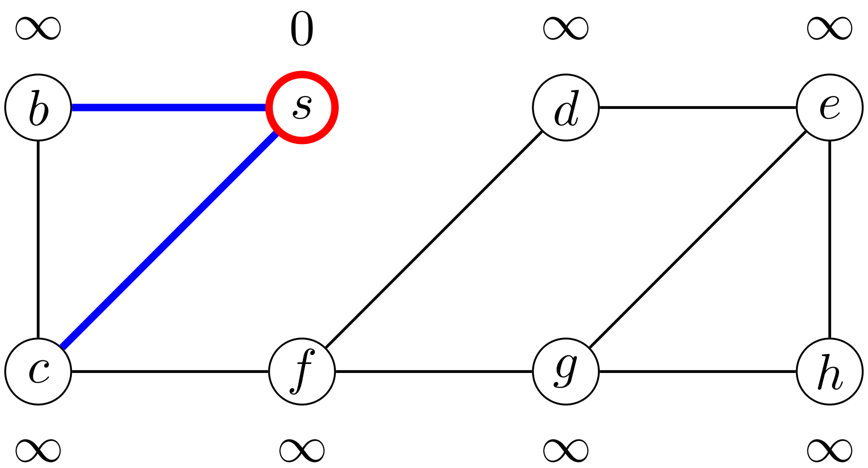


$Q = []$

Parcours en largeur (version avec distances)

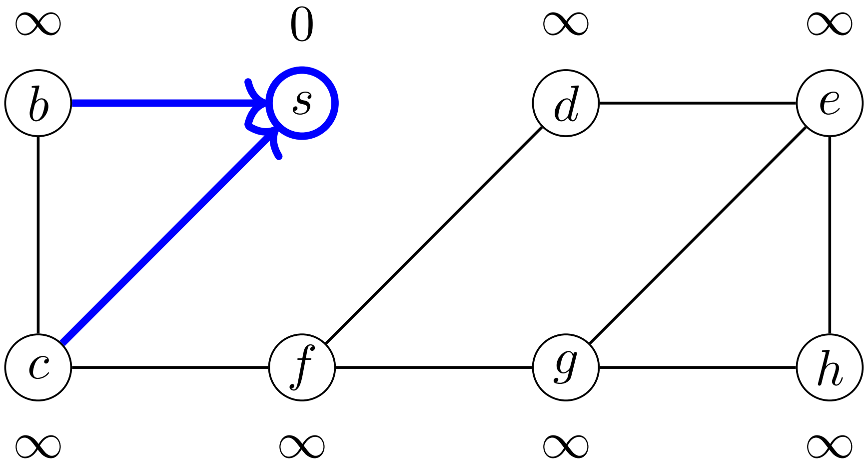
Entrées : graphe $G = (V, E)$ et sommet $s \in V$
Sorties : pour tout $v \in V$, la distance $d[v]$ de s à v
début
  pour tous les $u \in V \setminus \{s\}$ **faire**
    $d[u] \leftarrow \infty$;
    parent$[u] \leftarrow \emptyset$;
  $d(s) \leftarrow 0$;
  $Q \leftarrow [s]$;
  tant que $Q \neq \emptyset$ **faire**
    $u \leftarrow$ défiler(Q) ;
    pour tous les $uv \in E$ **faire**
      si $d[v] = \infty$ **alors**
        $d[v] = d[u] + 1$;
        enfiler(Q, v) ;
        parent$[v] \leftarrow u$;

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



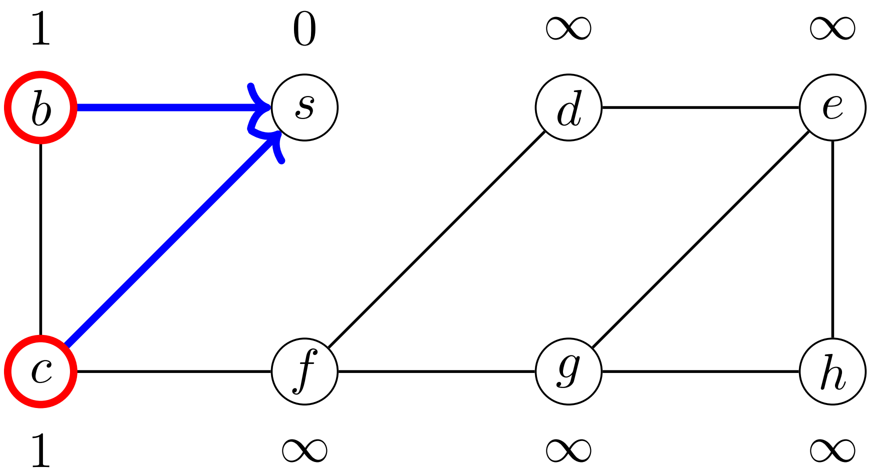
$Q = [s]$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



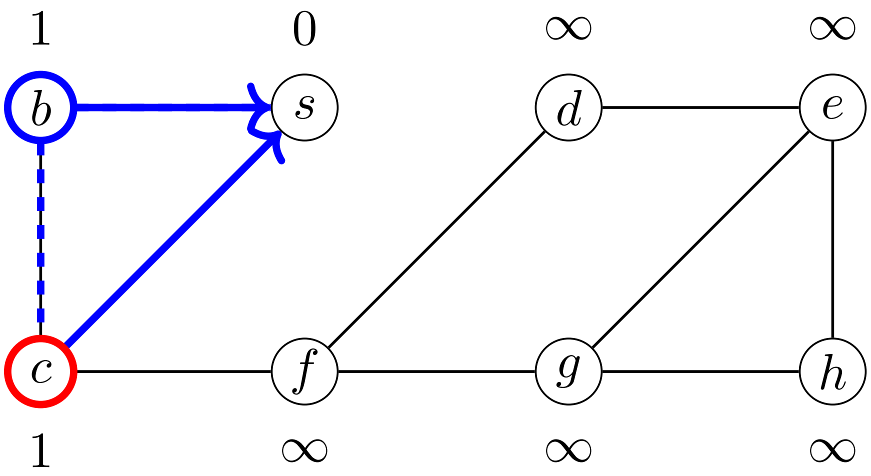
$Q = []$
$u = s$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



$Q = [b, c]$

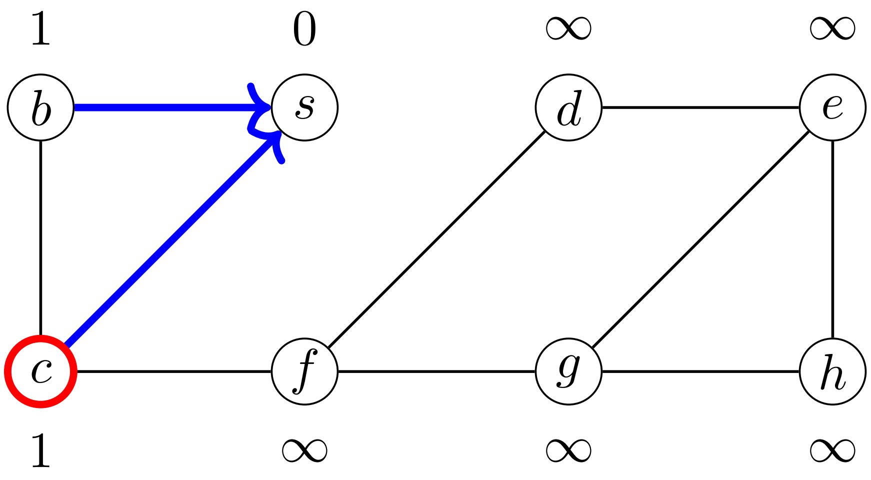
Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



$Q = [c]$

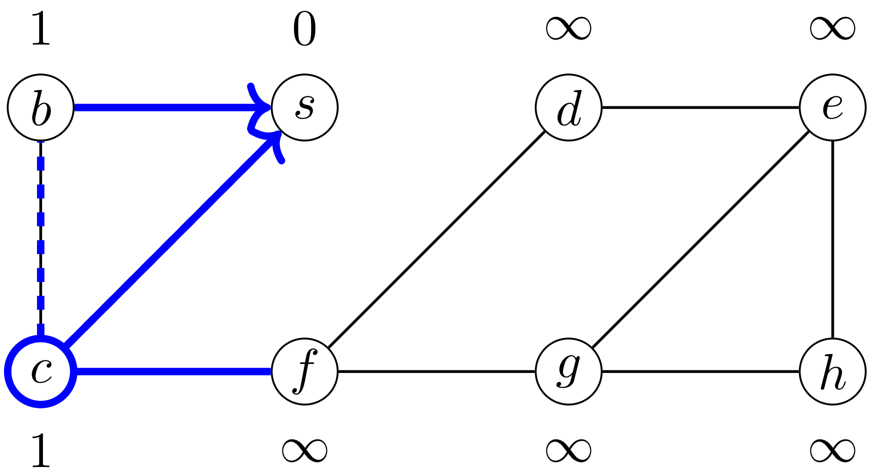
$u = b$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



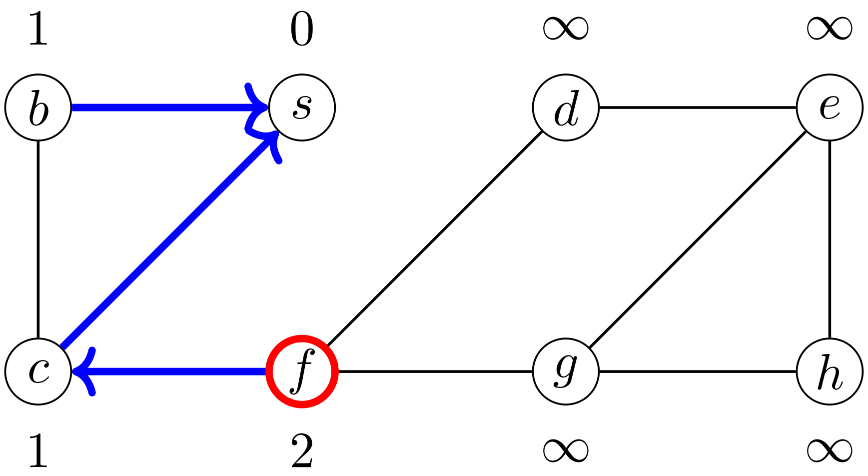
$Q = [c]$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



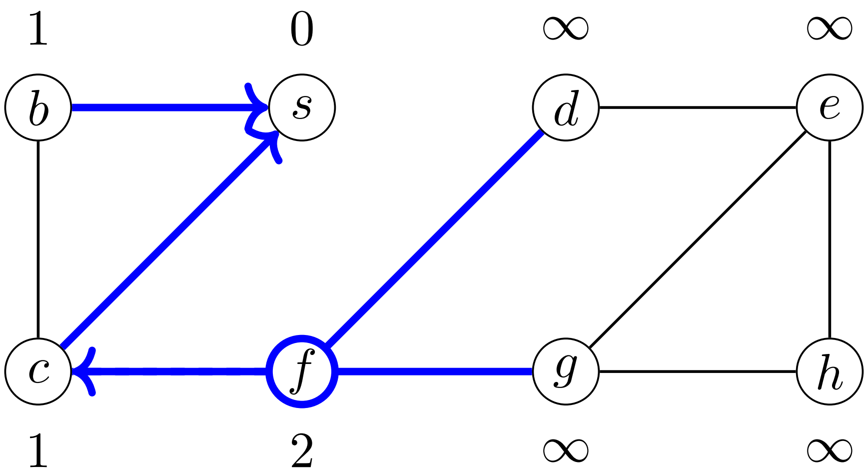
$Q = []$
$u = c$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



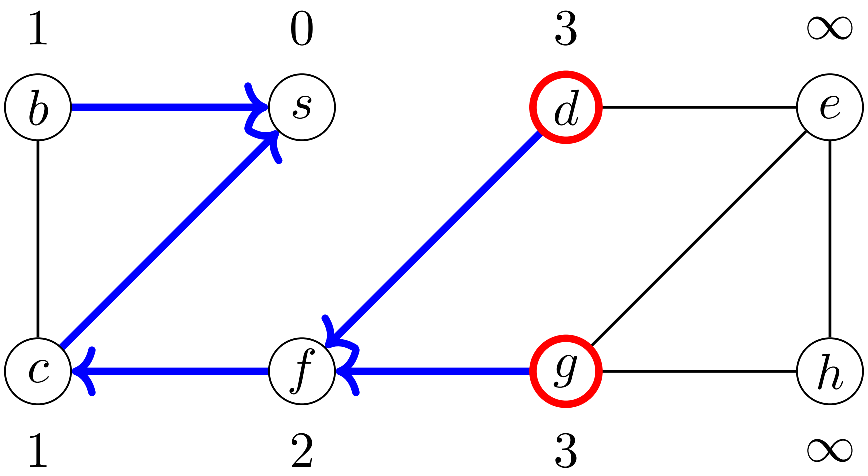
$Q = [f]$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



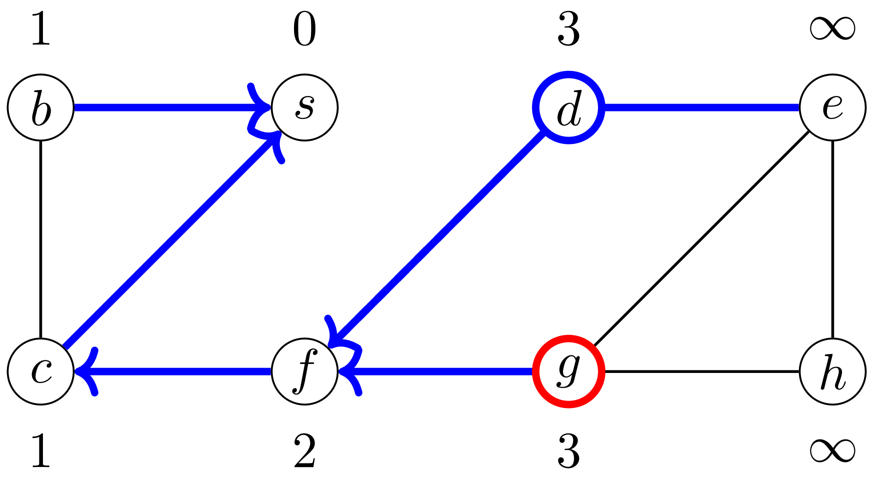
$Q = []$
$u = f$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



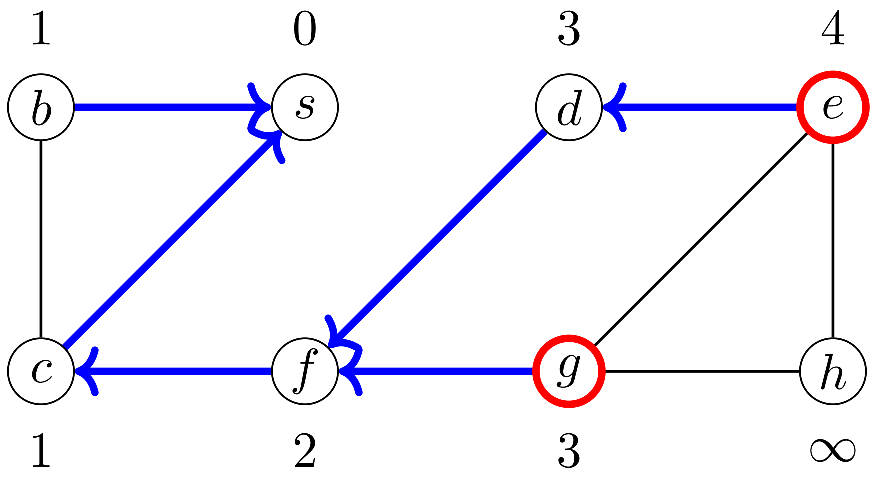
$$Q = [d, g]$$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



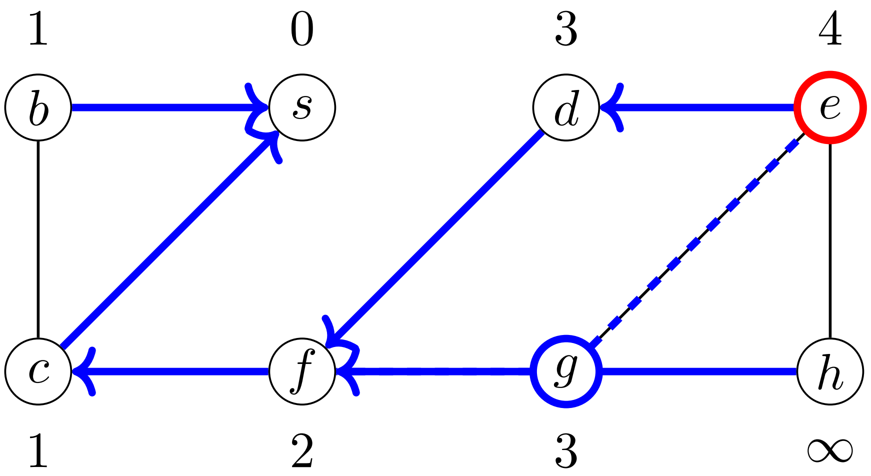
$Q = [g]$
$u = d$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



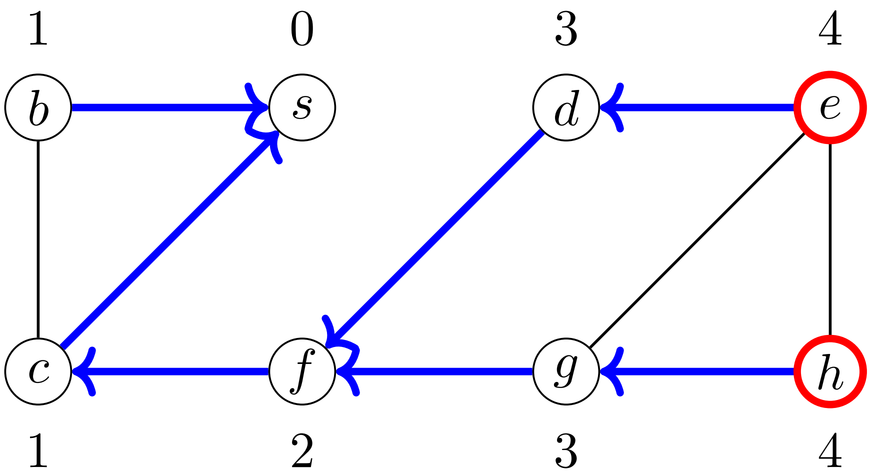
$Q = [g, e]$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



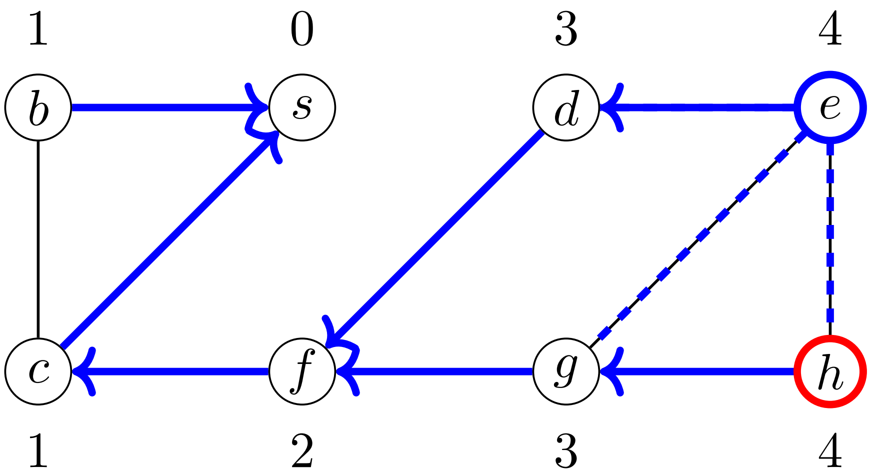
$Q = [e]$
$u = g$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



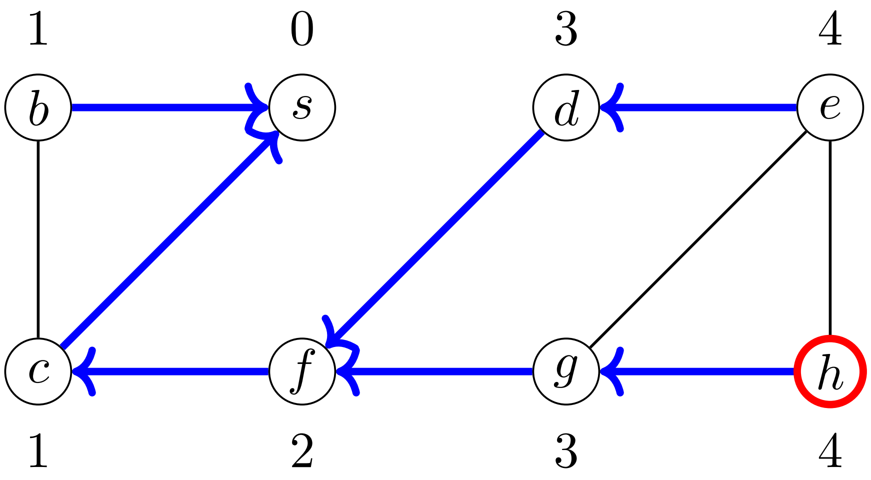
$Q = [e, h]$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



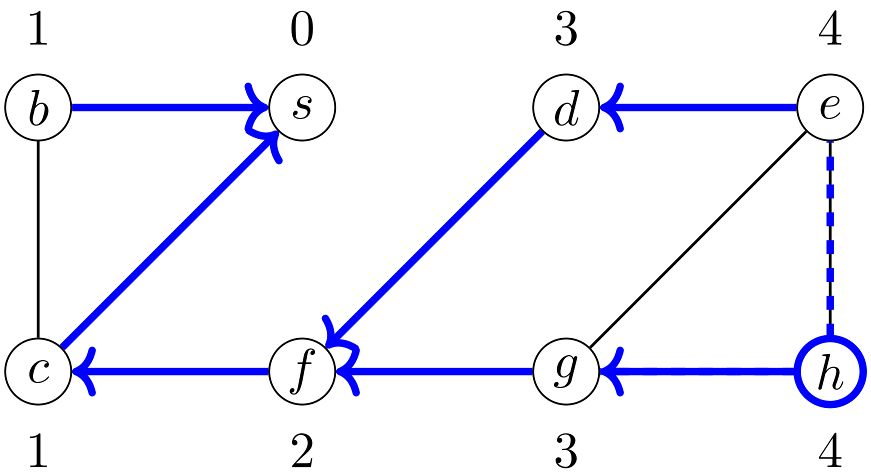
$Q = [h]$
$u = e$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



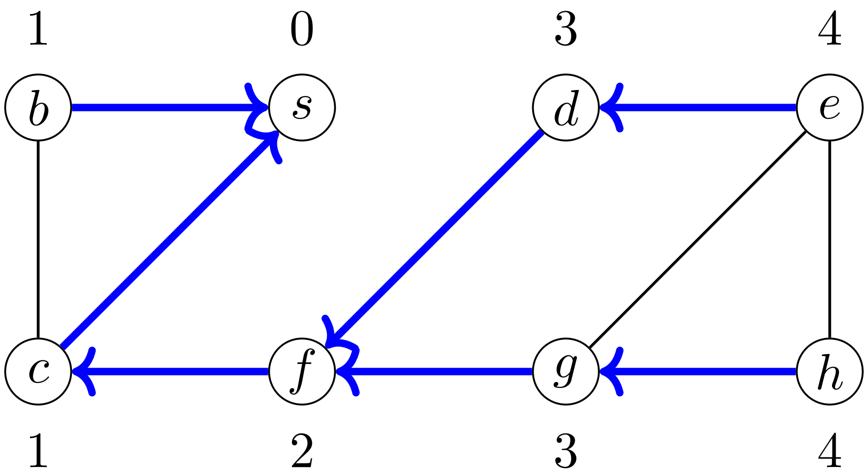
$$Q = [h]$$

Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



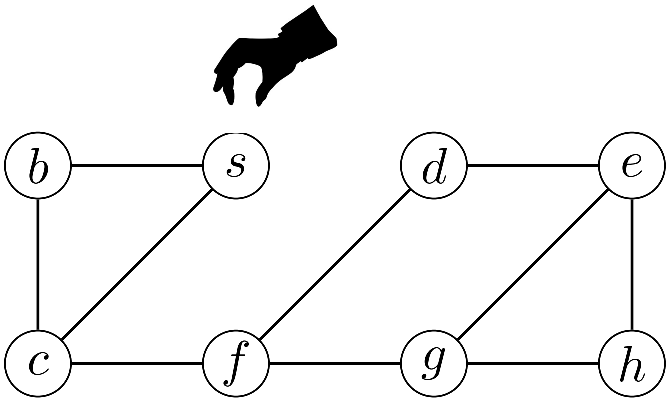
$Q = []$
$u = h$

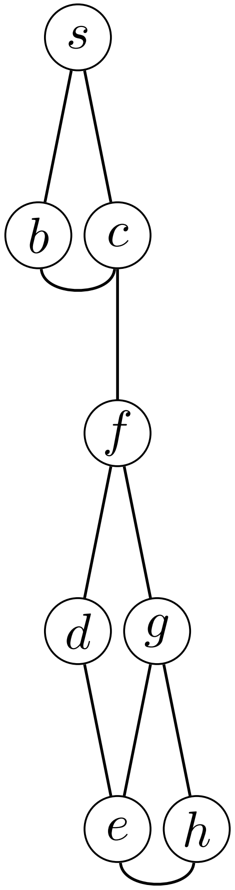
Illustration du parcours en largeur (version avec distances)



$$Q = []$$

Modèle physique





Complexité du BFS

- Supposons que $G = (V, E)$ est représenté par une liste d'adjacence.
- BFS considère chaque arête deux fois.
- Chaque sommet est enfilé et défilé une fois.
- La complexité de BFS est donc de $O(n + m)$, où $\underbrace{n = |V|}_{\#\text{ sommets}}$ et $\underbrace{m = |E|}_{\#\text{ arêtes}}$.
- La complexité est donc linéaire par rapport à la taille de la représentation.
- Quelle est la complexité du BFS si G est representé par une matrice d'adjacence ? $O(n^2)$

Correction du BFS

Lemme 1

Après terminaison du BFS, $d(v) \geq \text{dist}(s, v)$ pour tout sommet $v \in V$.

Lemme 2

2, 2, 3, 3, 3

Si au cours du BFS $Q = [v_1, v_2, \ldots, v_r]$, alors $d(v_r) \leq d(v_1) + 1$ et $d(v_i) \leq d(v_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Corollaire 1

Si le sommet v_i est enfilé dans Q avant v_j, alors $d(v_i) \leq d(v_j)$.

Démonstration du Lemme 2

Démonstration (1/2)

- On montre que la propriété est invariante par les opérations sur la file.
- Initiallement, $Q = [s]$: la propriété est vraie. (Cas de base)

Cas 1 : le sommet v_1 est défilé de Q.

- Si Q devient vide, alors la propriété devient trivialement vraie.
- Sinon, par l'hypothèse de récurrence, $d(v_1) \leq d(v_2)$ et $d(v_r) \leq d(v_1) + 1$, et donc $d(v_r) \leq d(v_2) + 1$.
- Les inégalités entre les autres éléments de Q restent inchangées.

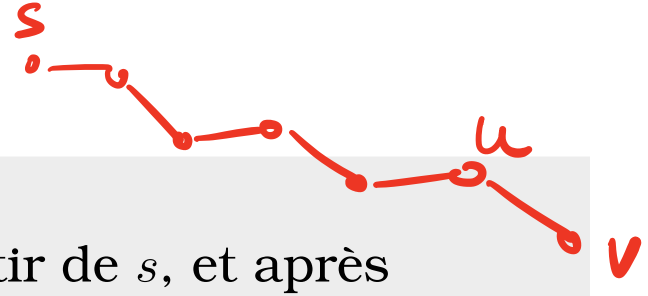
Démonstration du Lemme 2

Démonstration (2/2)

Cas 2 : un nouveau sommet v_{r+1} est enfilé dans Q.

- Soit u le dernier sommet défilé de Q, dont les voisins (parmi lesquels se trouve v_{r+1}) sont en train d'être examinés.
- Cas trivial : le défilage de u a vidé Q. Dans ce cas, tous les sommets de Q, y compris v_{r+1}, ont la même valeur de d (égale à $d(u)+1$).
- Sinon, par l'hypothèse de récurrence, $d(u) \leq d(v_1)$. Donc, $d(v_{r+1}) = d(u) + 1 \leq d(v_1) + 1$.
- On a aussi $d(v_r) \leq d(u) + 1 = d(v_{r+1})$ par l'hypothèse de récurrence.

Correction du BFS



Théorème

BFS découvre tous les sommets accessibles à partir de s, et après terminaison, $d(v) = \mathrm{dist}(s, v)$ pour tout $v \in V$.

Démonstration

- Supposons par l'absurde qu'il existe $v \in V$ tel que $d(v) \neq \mathrm{dist}(s, v)$.
- Soit v un tel sommet qui minimise $\mathrm{dist}(s, v)$.

(on sait : $d(v) \geq \mathrm{dist}(s,v)$)

- Grâce au Lemme 1, on a $d(v) > \mathrm{dist}(s, v)$.
- Considérons une chaîne de longueur minimale de s à v, et soit u le prédécesseur immédiat de v sur cette chaîne : $\mathrm{dist}(s, v) = \mathrm{dist}(s, u) + 1$.
- Par la minimalité de v, on a $d(v) > \mathrm{dist}(s, v) = \mathrm{dist}(s, u) + 1 = d(u) + 1$.

Correction du BFS (2/2)

Démonstration (2/2)

- Considérons le moment où u est défilé de Q.

Cas 1 v n'est pas marqué : $d(v) = d(u) + 1$

Cas 2 v a été traité : $d(v) \leq d(u)$

Cas 3 v est dans la file : il est inséré au moment du traitement d'un sommet w, extrait avant u, pour lequel $d(v) = d(w) + 1$. Par le Corollaire 1, on a $d(w) \leq d(u)$, et donc $d(v) \leq d(u) + 1$.

- Les trois cas contredisent l'inégalité $d(v) > d(u) + 1$ sur le transparent précédent.

Résumé du BFS

- Algorithme efficace pour explorer un graphe : de complexité $O(n+m)$.
- Parcourt les sommets à partir d'un sommet "source" par des couches :
  - s d'abord
  - ensuite les voisins de s,
  - ensuite les voisins des voisins de s,
  - etc...
- Bien adapté aux problèmes où l'on cherche un plus court chemin : par exemple, si l'on veut ranger le cube de Rubik en un nombre minimum de coups.

Bonus : l’énigme des bidons d’eau du film « Une journée en enfer »

- John et Zeus ont, en leur possession, deux bidons non gradués, un pouvant contenir 5 litres, et l’autre 3 litres.
- Il y a une fontaine à proximité.
- Ils ont recours à 3 opérations :
  1. verser le contenu d’un bidon dans l’autre, en ne s’arrêtant que lorsque le bidon source soit vide ou que le bidon de destination soit plein ;
  2. remplir un bidon avec de l’eau de la fontaine, jusqu’à que ce bidon soit plein ;
  3. vider un bidon.
- Comment faire pour avoir 4 litres dans le bidon de 5 litres, sans bien sûr avoir recours à un instrument de mesure ?