Retour sur le TD1 :

Preuve de $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$:

On compte l'ens des paires (e, v) tq $v \in e$

D'une part chaque arête à 2 sommets distincts donc il y a $2|E|$ tels couples.
D'autre part, chaque sommets $v \in$ à $\deg(v)$ tels couple.

donc $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Exercice 7 :

On modélise la situation par un graphe
Pour chaque $v \in V$,
$0 \leqslant \deg(v) \leqslant n-1$

Les degrés possibles sont :
$[\![1 ; n-1]\!]$ ou $[\![0 ; n-2]\!]$

$\underbrace{[\![1 ; n-1]\!]}_{\text{card} = n-1}$ $\quad$ $\underbrace{[\![0 ; n-2]\!]}_{\text{card} = n-1}$

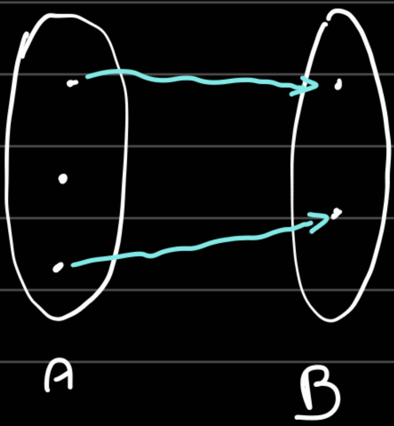
Or il n'existe pas d'injections d'un ensemble de n éléments vers un ensemble à $n-1$ éléments

$n = \text{card}\left(E = \{ \deg(v) : \forall v \in V(G) \}\right)$

Injection : Soit $f : A \to B$

où $|A| = n$

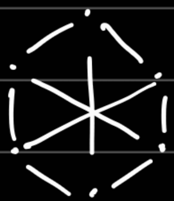
$|B| = n-1$



Chaque image a 1 seul antécédent.

Exercice 8 :

1)  $= K_4$



Impossible pour les

2) graphes $(2k+1)$-réguliers.

On reprend

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Donc la somme des degrés doit être un nombre pair.

Or si $G(V, E)$ tq
$|V| = 2k+1$
et G est $2k'+1$ régulier, alors

On a $\sum_{v \in V} deg(v)$

$$= (2k+1) \times (2k'+1)$$
$$= 4kk' + 2k + 2k' + 1$$
$$= 2(2kk' + 2k + 2k') + 1$$

est impair.

or $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$

donc doit être cela doit être un nombre pair.

Donc si G est $(2k+1)$-régulier, alors $|V(G)|$ est pair.

Exercice 9:

2) Considérons $G(V, E)$ k-régulier à n sommets

D'après le lemme de poignée de main,

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

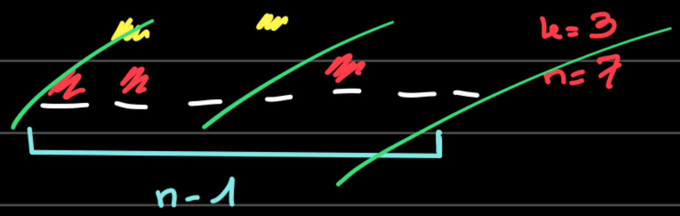
$$= k \cdot n$$

si k impair, $k \cdot n$ n'est pair que si n est pair.
Il n'y a donc $\emptyset$ graphe k régulier sur n sommets si k et n sont impairs.

2) Si k impair, alors n est pair.
Sinon n peut être pair ou impair.

Exercice 10 :

1) Peindre k cases en vert parmi n cases est identique à laisser vide $n-k$ cases parmi n.

2) 

Choisir k cases verte parmi n cases (vertes ou orange) revient à choisir la couleur de la case la plus à gauche, et si elle est verte, choisir $k-1$ autres cases verte.
si elle est orange, choisir k cases vertes

parmi les $n-1$ restantes

Soit $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

3) $\binom{n}{k}\binom{k}{l}$ revient à colorier k cases parmi n, puis colorier l cases parmi les k coloriées.

Soit $l \leq k \leq n$

On peut le voir plutôt comme :

On colorie l cases dans n. puis je colorie $k-l$ cases dans les $n-l$ restantes.

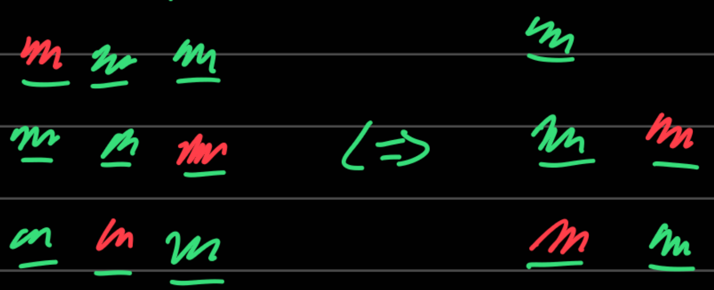
5) $\binom{p-1}{k-1}$

— — — — — $k=2$

$n=$

$$\cancel{\binom{1}{1}} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \cancel{\binom{4}{1}}$$

$k=2$, $n=3$



On compte les cases vertes $\binom{n}{k}$

Une deuxième manière de colorier est de choisir le coloriage des $p-1$ cases à droite de la case coloriée.

Les $n-p$ cases sont oranges.
Cela revient à compter le nombre de coloriages de $p-1$ cases avec $k-1$ cases vertes : il y en a $\binom{p-1}{k-1}$

p peut varier entre n et k

Il y a donc $\sum_{p=k}^{n} \binom{p-1}{k-1}$ coloriages possibles.