Algorithmique (AL5)
TD n° 9 : Couplages de poids maximum dans des graphes bipartis

Exercice 1 :

Pour chacun des graphes bipartis de la figure 1, (1) donner un couplage maximum et (2) démontrer (en utilisant le théorème de König au besoin) qu'il est maximum.

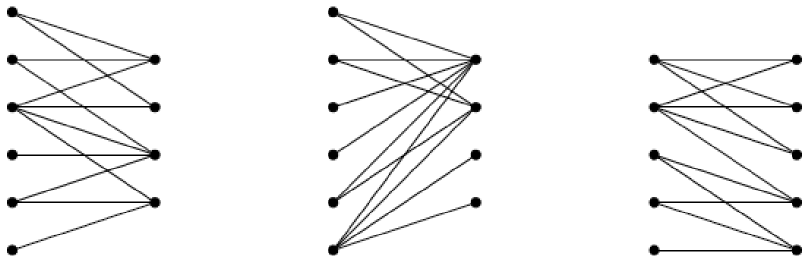

Figure 1 – Quelques graphes

Exercice 2 : Couplages bipartis de poids maximum

Dans cet exercice, on suppose que chaque arête e a un poids $w_e \geqslant 0$, et le but est de trouver, non pas un couplage de cardinal maximum, mais un couplage de poids maximum, où le poids d'un couplage est la somme des poids de ses arêtes. Pour chacune des assertions ci-dessous concernant les couplages de poids maximum dans des graphes bipartis, dire si elle est vraie ou fausse, et si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. L'arête de poids maximum, si elle est unique, est toujours dans au moins un couplage de poids maximum
2. L'arête de poids minimum, si elle est unique, n'est jamais dans aucun couplage de poids maximum
3. Soit n pair et G un graphe biparti tel que chacun des deux côtés a exactement $n/2$ sommets. Alors il existe un couplage de poids maximum avec exactement $n/2$ arêtes.
4. Soit n pair et G un graphe biparti complet tel que chacun des deux côtés a exactement $n/2$ sommets. Alors il existe un couplage de poids maximum avec exactement $n/2$ arêtes.
5. Soit n pair et G un cycle de longueur n. Alors tout couplage de poids maximum a exactement $n/2$ arêtes et contient une arête sur deux le long du cycle.
6. Soit n impair et G un chemin comprenant $n-1$ arêtes. Alors tout couplage de poids maximum a exactement $(n-1)/2$ arêtes et contient une arête sur deux le long du chemin.
7. Soit u un sommet de G de degré 1 (donc avec un seul voisin v). Alors l'arête uv appartient forcément au couplage de poids maximum.
8. On considère l'algorithme suivant : Soit M un couplage. Répéter, jusqu'à ne plus pouvoir faire d'opération améliorante, l'opération suivante : trouver une arête $e \notin M$ telle que $M \cup \{e\}$ soit un couplage, choisir celle qui a le plus grand poids, et l'ajouter à M (c'est-à-dire $M \leftarrow M \cup \{e\}$). Alors le résultat est un couplage de poids maximum.

Exercice 3 :

Affectation de candidats à des formations On considère le problème suivant : on a n candidats $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et m formations $f_1, f_2, \ldots, f_m$. La formation f_j a capacité $c_j \geqslant 1$. Le candidat a_i candidate à un ensemble S_i de formations.

1. Donner un algorithme pour décider s'il est possible d'affecter chaque candidat à une formation sans dépasser les capacités des formations.
2. On suppose que chaque candidat a ordonné les formations selon leur ordre de préférence, et que chaque formation a classé les candidats par ordre de préférence de la formation. On considère l'algorithme suivant (algorithme de Gale-Shapley) :
   Répéter :
   En parallèle, chaque formation fait une offre aux candidats suivants dans son classement, jusqu'à capacité
   En parallèle, chaque candidat regarde toutes les propositions qu'il a reçues depuis le début, répond "oui" à sa préférée et "non" aux autres propositions reçues. Quand il dit oui, il peut changer d'avis ultérieurement s'il reçoit une meilleure proposition, mais quand il dit "non", c'est définitif.
   Jusqu'à une itération où il ne se passe rien.
   On a alors l'affectation finale.

   Montrer que si les candidats candidatent à toutes les formations, et si la capacité totale des formations est supérieure ou égale au nombre de candidats, alors à la fin tout les candidats ont une affectation.
3. On suppose désormais que toutes les formations ont capacité égale à 1. Exécuter l'algorithme de Gale-Shapley pour l'entrée suivante : le candidat c_1 a la liste de préférence $f_1 f_2$, le candidat c_2 a la liste de préférence $f_2 f_1$, la formation f_1 a le classement $c_2 c_1$, et la formation f_2 a le classement $c_1 c_2$.
4. L'algorithme de Gale-Shapley bis est le même que l'algorithme de Gale-Shapley, sauf qu'il inverse le rôle des candidats et des formations. L'exécuter dans le cas de l'exemple précédant. Le résultat est-il le même ?
5. Exécuter l'algorithme de Gale-Shapley pour l'exemple suivant.

$$\begin{array}{rr}
\text{Formations : } \{x, y, z, w\} & \text{Candidats :}\{a, b, c, d\} \\
x : a > b > c > d & a : z > x > y > w \\
y : a > c > b > d & b : y > w > x > z \\
z : c > d > a > b & c : w > x > y > z \\
w : c > b > a > d & d : x > y > z > w
\end{array}$$

6. Peut-il être avantageux pour un candidat de tronquer sa liste de préférence et de ne candidater qu'à une partie des formations qui l'intéressent ?
7. Montrer que le couplage résultant de l'algorithme de Gale-Shapley possède la propriété suivante : il n'existe pas de candidat c affecté à une formation f et de formation f' ayant recruté un candidat c', tels que c aurait préféré f' plutôt que f, et f' aurait également préféré c plutôt que c'.
8. Pourquoi l'algorithme de Gale-Shapley est-il traditionnellement appelé "algorithme des mariages stables" ?
9. On suppose que toutes les formations ont le même classement des candidats. Montrer que l'algorithme de Gale-Shapley bis et l'algorithme de Gale-Shapley donnent le même résultat.

Exercice 4 :

On considère l'algorithme glouton pour chercher un couplage dans un graphe biparti :
$M \leftarrow \emptyset$
Répéter :
S'il existe une arête $uv \in E$ telle que u et v sont encore libres, alors on ajoute uv à M et u et v ne sont plus libres
Jusqu'à une itération où il ne se passe rien.
On a alors le couplage final.

1. Montrer que cet algorithme peut donner un couplage de cardinal maximum...
2. ... mais pas toujours : montrer que cet algorithme peut donner un couplage non maximum.
3. Montrer que si le couplage maximum a 120 arêtes, alors cet algorithme donne un couplage qui a au moins 60 arêtes. Donner un exemple pour montrer que ces valeurs (120, 60) peuvent être atteintes.
4. Pour améliorer le résultat de l'algorithme, on ajoute une deuxième phase :
   $M \leftarrow \emptyset$
   Répéter :
   S'il existe une arête $uv \in E$ telle que u et v sont encore libres, alors on ajoute uv à M et u et v ne sont plus libres
   Jusqu'à une itération où il ne se passe rien.
   Répéter :
   S'il existe trois arêtes $uv, vu', u'v'$ telles que $uv \notin M, vu' \in M, u'v' \notin M$ et telles que u et v' sont encore libres, alors on enlève vu' de M et on ajoute uv' et $u'v$ à M (et u et v ne sont plus libres)
   Jusqu'à une itération où il ne se passe rien.
   On a alors le couplage final.

   Montrer que si le couplage maximum a 120 arêtes, alors cet algorithme donne un couplage qui a au moins 80 arêtes. Donner un exemple pour montrer que ces valeurs (120, 80) peuvent être atteintes.
5. Généraliser