



Mathématiques discrètes

Projet : Mots de Christoffel et rasterisation

Consignes Le but du projet est de présenter une application dans laquelle les mathématiques discrètes jouent un rôle fondamental.

Le rendu final du projet consistera en un article destiné au grand public au format pdf de 800-1000 mots plus une annexe numérique, qui pourra contenir par exemple une démonstration interactive, une vidéo explicative et/ou des graphiques générés par du code écrit par vous-même ; cette annexe sera rendue sous la forme d'un lien vers un dépôt en ligne. La forme exacte et la technologie utilisée pour l'annexe peut varier et est donc laissée au libre choix des étudiants. L'article et son annexe seront jugés non seulement sur le contenu mais aussi sur la clarté de la présentation, la qualité de rédaction, et la créativité.

Contenu Le sujet détaille quelques points à développer mais ceux-ci sont seulement proposés comme point de départ de votre travail. Vous êtes encouragés à développer d'autres pistes en lien avec les mathématiques discrètes. De même, la bibliographie conseillée est un point de départ. Vous pouvez vous appuyer sur d'autres sources sur lesquelles vous porterez un œil critique et que vous prendrez soin de citer correctement.

Charte de bonne conduite Lisez attentivement la charte de bonne conduite. Portez une attention particulière à citer toutes vos sources, y compris les exemples et les images que vous utiliserez. L'utilisation d'outils d'IA tels que ChatGPT est formellement interdite. L'équipe pédagogique sera très attentive à tous ces aspects lors de la correction.

Calendrier Consultez la page Moodle du cours pour les dates des principales étapes du projet.

Bref descriptif du sujet

Le problème de savoir comment tracer une droite discrète entre deux points d'un écran pixelisé est un problème très ancien en informatique. Les mots de Christoffel apportent une réponse à ce problème.

Ceux-ci peuvent être définis de deux manières : de manière géométrique (on obtient une droite discrète de pente $\frac{b}{a}$, avec $a \wedge b = 1$), et à l'aide de l'algorithme ci-dessous.

```
x0=0, x1=1, w=""
Tant que (x1 != 0):
    x1=(x0+a) % (a+b)
    si (x1>=x0):
        w+="x"
    sinon :
```

w+="y"
x0=x1

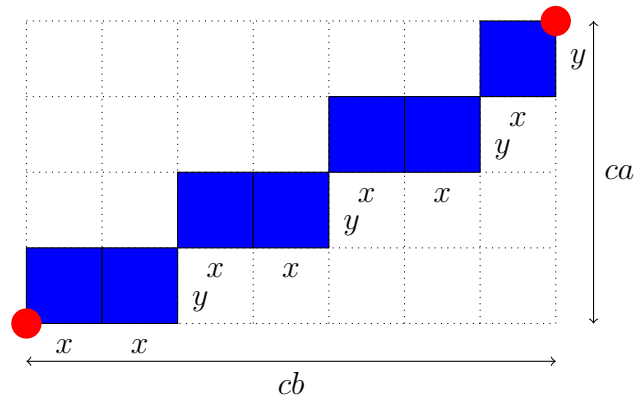


FIGURE 1 – Représentation géométrique du mot $xyxyxyxyxy$

Bibliographie conseillée

- *Combinatorics on Words : Christoffel Words and Repetitions in Words*, Berstel et al., 2008 : <https://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Articles/2008wordsbookMtlUltimate.pdf>

Pistes de développement

1. Donner une borne supérieure pour la probabilité qu'un mot sur x, y de longueur n pris au hasard soit un mot de Christoffel.
2. Coder un algorithme s'appuyant sur les mots de Christoffel.
3. Quel est le mot de Christoffel associé à une gamme musicale diatonique (la gamme utilisée usuellement en occident, sachant qu'il y a 7 notes réparties sur 12 demi-tons) ? Que peut-on en dire par comparaison avec la distribution des touches du piano ?