Mathématiques discrètes
Feuille n° 4 : Graphes planaires et bipartis

Exercice 1 : K_5 et $K_{3,3}$ sont-ils planaires ?

Notons n le nombre de sommets d'un graphe planaire connexe, a son nombre d'arêtes et f le nombre de faces d'une de ses représentations planaires.

1. Montrer que $2a \geqslant 3f$ puis en déduire que $a \leqslant 3n - 6$ *(Indication : On pourra compter l'ensemble des couples (face, arête de la face)*

2. Le graphe K_5 est-il planaire ? Que dire des autres K_n ?

3. Montrer que si le graphe est aussi sans triangle, on a $a \leqslant 2n - 4$.

4. $K_{3,3}$ est-il planaire ?

5. un graphe planaire connexe peut-il avoir tous ses sommets de degré au moins 6 ?

6. Que peut-on dire du graphe de la figure 1 ?

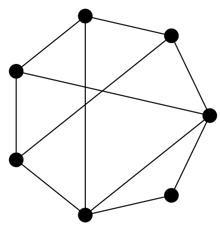


FIGURE 1 – Que dire de ce graphe ?

Exercice 2 : Polyèdres

1. Montrer qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes.

2. Donner la composition d'un ballon de foot en hexagones et pentagones. (*Indication :*

Exercice 3 : Formule d'Euler

Donner une preuve de la formule d'Euler par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe.

Exercice 4 :

Pour tout graphe G, son complémentaire $\bar{G}$ est le graphe sur le même ensemble de sommets avec tout couple de sommets $\{x, y\}$ étant soit une arête de G, soit une arête de $\bar{G}$ (ou exclusif). Soit $n \geqslant 3$ et C_n le graphe formé d'un cycle de n sommets, et soit $\overline{C_n}$ le complément de C_n.

1. Donner le nombre $m(n)$ d'arêtes de $\overline{C_n}$, pour tout $n \geqslant 3$.

2. Donner le nombre $c(n)$ de composantes connexes de $\overline{C_n}$, pour tout $n \geqslant 3$.

3. Donner le degré $d(n)$ des sommets de $\overline{C_n}$, pour tout $n \geqslant 3$.

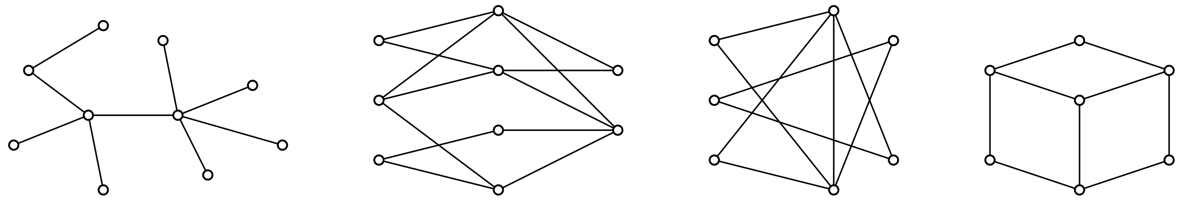
4. Vrai ou faux ? Si Vrai, donner la preuve, sinon démontrer ou donner un contre-exemple.

1. Pour tout $n \geqslant 3$, $\overline{C_n}$ est inclus dans $\overline{C_{n+1}}$.
2. Pour tout n tel que $3 \leqslant n \leqslant 6$, $\overline{C_n}$ est planaire.
3. $\overline{C_8}$ est planaire.
4. Pour tout $n \geqslant 8$, $\overline{C_n}$ n'est pas planaire.

Exercice 5 : graphes bipartis

On dit qu'un graphe est *biparti* si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles B (sommets blancs) et N (sommets noirs) tels que, si deux sommets sont adjacents, l'un appartient à B et l'autre à N.

1. Parmi les graphes suivants, lesquels sont bipartis ?



2. Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies ?

a. G biparti $\implies$ tout sous-graphe de G biparti

b. G biparti $\implies$ toute composante connexe de G bipartie

c. tout sous-graphe strict de G biparti $\implies$ G biparti

d. toute composante connexe de G bipartie $\implies$ G biparti

Exercice 6 :

1. Montrer qu'un graphe biparti ne possède aucun cycle de longueur impaire.

2. Réciproquement, soit $G = (V, E)$ un graphe connexe ne possédant aucun cycle de longueur impaire, et soit u un sommet de G.

a. Montrer que pour tout sommet v de G, les longueurs de tous les chemins de u à v dans G ont la même parité.

b. Soit N l'ensemble des sommets à distance paire de u, et $B = V \setminus N$. Montrer qu'il n'existe pas d'arête entre deux sommets de N, ni entre deux sommets de B.

3. Généraliser le résultat précédent au cas G non connexe.

Exercice 7 :

1. Combien y a-t-il de graphe bipartis avec t sommets blancs et $n - t$ sommets noirs ? Montrer que tout graphe biparti à n sommets a au plus $n^2/4$ arêtes.

2. Montrer que dans tout graphe biparti k-régulier avec $k > 0$, le nombre de sommets noirs est égal au nombre de sommets blancs.

3. Montrer qu'il est impossible de paver avec des dominos un échiquier 8x8 dont les deux coins opposés ont été retirés.