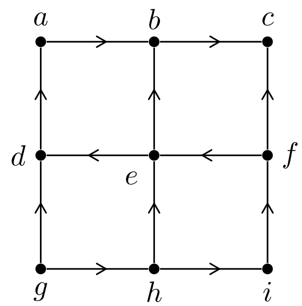
Algorithmique (AL5)	Contrôle terminal	12 janvier 2024

Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer. Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso. Les appareils électroniques sont interdits. Le document fait 2 pages et contient 7 exercices. Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.

Exercice 1. Parcours en profondeur (3 points)



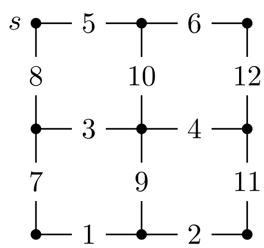
Soit $G = (V, E)$ le graphe orienté ci-contre.

Question 1. Exécuter DFS (parcours en profondeur) sur G, et indiquer pour chaque sommet u la valeur de $\mathrm{pre}(u)$ (prévisite) et de $\mathrm{post}(u)$ (postvisite). Chaque fois que vous avez le choix entre plusieurs sommets, choisir celui qui est le premier par ordre alphabétique ; en particulier, prendre a comme le sommet de départ.

Question 2. En déduire que G est un DAG (graphe orienté acyclique).

Question 3. En utilisant la question 1, donner un tri topologique de G.

Exercice 2. Arbre couvrant de poids minimum (2 points)

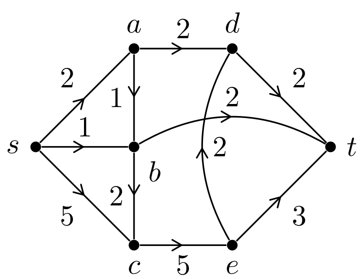


Soit G le graphe pondéré ci-contre. Puisque toutes les arêtes ont un poids différent, vous pouvez vous référer aux arêtes par leur poids. Les algorithmes de Kruskal et de Prim construisent un arbre couvrant T de G en ajoutant certaines arêtes de G, dans un certain ordre.

Question 1. Dans quel ordre les arêtes de T sont-elles ajoutées si l'on utilise l'algorithme de Kruskal ?

Question 2. Dans quel ordre les arêtes de T sont-elles ajoutées si l'on utilise l'algorithme de Prim, en partant du sommet s ?

Exercice 3. Flot max et coupe min (2 points)

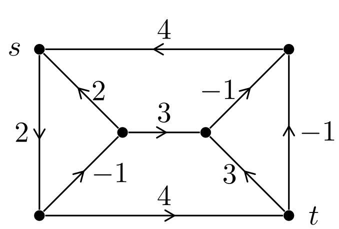


Soit G le réseau ci-contre :

Question 1. Trouver un s–t flot maximum dans G et indiquer sa valeur. Indiquer le nom de l'algorithme utilisé. *(Vous n'avez pas à justifier votre réponse. Il suffit de donner le flot maximum, il n'est pas nécessaire de donner les étapes intermédiaires.)*

Question 2. Trouver une s–t coupe dans G dont la capacité est égale à la valeur du flot.

Exercice 4. Plus court chemin (2 points)



Question 1. Déterminer la distance du sommet s aux autres sommets dans le graphe ci-contre. Indiquer le nom de l'algorithme utilisé. *(Vous n'avez pas à justifier votre réponse. Il suffit de donner les distances, il n'est pas nécessaire de donner les étapes intermédiaires.)*

Question 2. Comment l'algorithme peut-il être modifié pour vérifier qu'il n'y a pas de cycles négatifs dans le graphe ?

Exercice 5. Vrai ou faux (3 points)

Répondre vrai ou faux à chacune des questions ci-dessous. *Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.*

1. Tout graphe avec n sommets et $n-1$ arêtes est acyclique.
2. Pour trouver un plus long chemin dans un graphe orienté acyclique (DAG), on peut multiplier tous les poids par -1 et ensuite appliquer l'algorithme de Bellman–Ford.
3. L'algorithme de Prim fonctionne correctement lorsqu'il y a des arêtes de poids négatif.
4. L'algorithme de Dijkstra fonctionne correctement lorsqu'il y a des arêtes de poids négatif.
5. L'algorithme de Floyd–Warshall peut être utilisé pour détecter un cycle négatif.
6. Toute arête de poids maximum dans un graphe connexe pondéré appartient à un arbre couvrant de poids maximum.

Exercice 6. Problème du voyageur de commerce (4 points)

Emily est arrivée à Paris et s'est logée à un hôtel tout près du Panthéon. Le lendemain elle souhaite visiter les cinq sites touristiques suivants (en partant du Panthéon). Les temps de marche (en minutes) entre les différents sites qu'elle trouve sur le web sont donnés dans le tableau.

(A) l'Arc de Triomphe,

(E) la tour Eiffel,

(L) le palais du Louvre,

(N) la cathédrale Notre-Dame,

(P) le Panthéon,

(S) la basilique du Sacré-Cœur.

	A	E	L	N	P	S
A	$\times$	29	46	63	71	59
E	29	$\times$	43	58	59	71
L	46	43	$\times$	17	26	44
N	63	58	17	$\times$	16	60
P	71	59	26	16	$\times$	70
S	59	71	44	60	70	$\times$

Emily applique l'algorithme de Christofides. L'algorithme se décompose en quatre étapes, correspondant aux questions 1 à 4 ci-dessous. Soit G le graphe complet à six sommets, dont les sommets correspondent aux sites, et le poids de chaque arête correspond au temps de marche entre les sites. (*Il n'est pas nécessaire de dessiner le graphe* G.)

Question 1. Trouver un arbre couvrant T de poids minimum de G. Quel algorithme avez-vous utilisé ?

Question 2. Déterminer l'ensemble U des sommets de degré impair dans T.

Question 3. Trouver (à la main) un couplage parfait M de poids minimum dans le sous-graphe $G[U]$ induit par les sommets dans U.

Question 4. En déduire un itinéraire pour Emily.

Exercice 7. Couplages (4 points)

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti à $2n$ sommets, avec bipartition $V = A \cup B$, où $|A| = |B| = n$ et tout sommet est de degré supérieur ou égal à $n/2$. Rappelons que, étant donné un sous-ensemble $X \subseteq V$ de sommets de G, $N(X)$ dénote l'ensemble de sommets de G ayant au moins un voisin dans X.

Question 1. Soit $X \subseteq A$. Montrer que si $|X| \leq n/2$, alors $|N(X)| \geq |X|$.

Question 2. Soit $X \subseteq A$. Montrer que si $|X| > n/2$, alors $N(X) = B$.

Question 3. En utilisant un théorème du cours (indiquer le nom), déduire que G a un couplage parfait.

Question 4. Donner un exemple qui montre que la condition sur les degrés ne peut pas être relâchée (c'est-à-dire, qu'il existe un graphe biparti G avec bipartition $V = A \cup B$, où $|A| = |B| = n$, tout sommet est de degré supérieur ou égal à $n/2 - 1$, et G n'a pas de couplage parfait).