TD n°9

Exercice n°1 :

1) $\text{nnf}(\exists x . (B(x) \Rightarrow \forall y . B(y)))$

$\equiv \exists x (\text{nnf}(B(x) \Rightarrow \forall y . B(y)))$
$\equiv \exists x . (\text{nnf}(\neg B(x) \vee \forall y . B(y)))$
$\equiv \exists x . (\text{nnf}(\neg B(x)) \vee \text{nnf}(\forall y . B(y)))$
$\equiv \exists x . (\neg B(x) \vee \forall y . B(y))$

2) $\text{nnf}(\neg \forall x . \exists y . \forall z . (\neg R(x, z) \vee B(y)))$
$\equiv \exists x . \text{nnf}(\neg(\exists y . \forall z . \neg R(x, z) \vee B(y)))$
$\equiv \exists x . \forall y . \text{nnf}(\neg \forall z . (\neg R(x, z) \vee B(y)))$
$\equiv \exists x . \forall y . \exists z . \text{nnf}(\neg(\neg R(x, z) \vee B(y)))$

$\equiv \exists x . \forall y . \exists z . R(x, z) \wedge \neg B(y)$

3) $\text{nnf}(\exists x . B(x) \wedge \neg R(x, y)) \Rightarrow \neg \forall y . R(y, y))$
$\equiv \text{nnf}(\neg(\exists x . B(x) \wedge \neg R(x, y)) \vee \neg \forall y . R(y, y))$
$\equiv \text{nnf}(\neg(\exists x . B(x) \wedge \neg R(x, y))) \vee \text{nnf}(\neg \forall y . R(y, y))$
$\equiv (\text{nnf}(\neg(\exists x . B(x))) \vee \text{nnf}(R(x, y))) \vee \text{nnf}(\exists y . \neg R(y, y))$
$\equiv (\text{nnf}(\forall x . \neg B(x)) \vee \text{nnf}(R(x, y))) \vee \exists y . \neg R(y, y)$
$\equiv ((\forall x . \neg B(x)) \vee R(x, y)) \vee \exists y . \neg R(y, y)$

Exercice 2 :

1) cF (14.2 du cours)

2) $\left(\forall x . P(x)\right) \vee \neg P(x) = \varphi_1$ $\quad \varphi_2 : \forall x . \left(P(x) \vee \neg P(x)\right)$

On ne peut pas utiliser 1)a. car
$x \in Fv(\varphi)$

Ex 3+4 maison

TD 10 :

Exercice 1.

a. i) équivalence
R-congruente

ii) équivalence
pas R-congruente ($\underset{a}{\overset{b}{\shortparallel}}$ $\underset{c}{\overset{c}{\shortparallel}}$ mais $R(b,c) \Rightarrow R(a,c)$ est fausse)

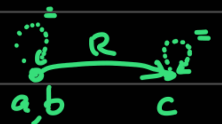
iii) non équivalente $(\neg(b = b))$
non R-congrue car pas équivalente

iv) non équivalente car $a=b \wedge b=c$ mais pas $a = c$
non R-congrue

v) équivalente
R-congrue

b) ii. équivalent
F-congrue

c) i. Quotient est l'interprétation elle même.
v. Quotient : $([\{a,b\}],[\{c\}])$

↳ 

Exercice 3 (TD 8) :

1	$\neg\forall x F$	$\exists x \neg F$
2	$(\forall x F) \wedge G$	$\forall x (F \wedge G)$
3	$(\forall x F) \vee G$	$\forall x (F \vee G)$
4	$(\forall x F) \to G$	$\exists x (F \to G)$
5	$G \wedge (\forall x F)$	$\forall x (G \wedge F)$
6	$G \vee (\forall x F)$	$\forall x (G \vee F)$
7	$G \to (\forall x F)$	$\forall x (G \to F)$
8	$\neg\exists x F$	$\forall x \neg F$
9	$(\exists x F) \wedge G$	$\exists x (F \wedge G)$
10	$(\exists x F) \vee G$	$\exists x (F \vee G)$
11	$(\exists x F) \to G$	$\forall x (F \to G)$
12	$G \wedge (\exists x F)$	$\exists x (G \wedge F)$
13	$G \vee (\exists x F)$	$\exists x (G \vee F)$
14	$G \to (\exists x F)$	$\exists x (G \to F)$

1) $\exists x. (B(x) \Rightarrow \forall y. B(y))$
$\Leftrightarrow \exists x. (\forall y. (B(x) \Rightarrow B(y))$

2) $\neg \forall x. \exists y. \forall z. (\neg R(x,y) \wedge B(y))$
$\Leftrightarrow \exists x. \neg \exists y. \forall z. (\neg R(x,y) \wedge B(y))$
$\Leftrightarrow \exists x. \forall y. \neg \forall z. (\neg R(x,y) \wedge B(y))$
$\Leftrightarrow \exists x. \forall y. \exists z. \neg(\neg R(x,y) \wedge B(y))$
$\Leftrightarrow \exists x. \forall y. \exists z. R(x,y) \vee \neg B(y)$

3) $(\exists x. B(x) \wedge \neg R(x,y)) \Rightarrow \neg \forall y. R(y,y)$
$\Leftrightarrow (\exists x. B(x) \wedge \neg R(x,y)) \Rightarrow \exists y. \neg R(y,y)$
$\Leftrightarrow \exists y. ((\exists x. B(x) \wedge \neg R(x,y)) \Rightarrow \neg R(y,y))$
$\Leftrightarrow \exists y. \forall x. (B(x) \wedge \neg R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,y))$

⚠ y est lié en bougeant $\{\exists, \forall\}$ on "crée" une var liée ⚠

$\Rightarrow$ Prendre φ_3 en nnf
$(\forall x. \neg B(x) \vee R(x,y)) \vee \exists y. \neg R(y,y)$

y est lié $\Rightarrow$ α-renommage. $([z/y])$

$(\forall x. \neg B(x)) \vee R(x,y) \vee \exists z. \neg R(z,z)$
$\Rightarrow (\forall x. \exists z. \neg B(x) \vee \neg R(z,z)) \vee R(x,y)$

Exercice 4 :

$s(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \ell$

$s(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} s(\varphi) \vee s(\psi)$

$s(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} s(\varphi) \wedge s(\psi)$

$s(\forall x.\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \forall x. s(\varphi)$

$s(\exists x.\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (s(\varphi))[f_{\varphi,x}(\vec{x}_\varphi)/x]$

$\neg \forall x\, \varphi \Leftrightarrow \neg(\forall x.\varphi) \Leftrightarrow \exists x.\neg\varphi$

et $\neg \exists x\, \varphi \Leftrightarrow \neg(\exists x.\varphi) \Leftrightarrow \forall x.\neg\varphi$

1) $\forall x.\exists y.(B(x) \vee \neg R(y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x.\, B(x) \vee \neg R(g(x,z), z))$

$\Leftrightarrow \forall x.\, B(x) \vee \neg R(g(x,z), z))$

2) $\exists x.\forall y.\exists z.(R(x,y) \vee \neg R(y,z))$

$\Leftrightarrow \forall y.\exists z.(R(\phi, y) \vee \neg R(y,z))$

$\Leftrightarrow \forall y.\, R(\phi, y) \vee \neg R(y,z))$