On peut interpréter la définition de la sémantique comme :

- Pour les fonctions : or : $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

  not : $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$

  and : $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$

Définition Ensemble $f_p(\varphi) \subseteq P_0$ des propositions de φ

$$f_p(P \vee Q) = \{P, Q\}$$

$$f_p(P) \overset{def}{=} \{P\}$$

$$f_p(\neg\varphi) \overset{def}{=} f_p(\varphi)$$

$$f_p(\varphi \vee \psi) \overset{def}{=} f_p(\varphi) \vee f_p(\psi)$$

$$f_p(\varphi \wedge \psi) \overset{def}{=} f_p(\varphi) \wedge f_p(\psi)$$

Lemme: Soit φ une formule propositionelle, Si I, I' tq $\forall P \in f_p(\varphi)$, $P^I = P^{I'}$ alors $[\![\varphi]\!]^I = [\![\varphi]\!]^{I'}$

Remarque: Soit φ une FP (= formule prop.) alors $[\![\varphi]\!]^{\cdot} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ où $n = |f_p(\varphi)| > 0$

Une fonction de type $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ avec $n > 0$ est une fonction booléenne.

Table de vérité :

Exemple : $[\![(\neg P \vee Q) \wedge P]\!]$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(\neg P \vee Q) \wedge P$	$P \wedge Q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

- Autres exemples de fonctions booléennes :

b_1	b_2	b_1 xor b_2	b_1 impl b_2	b_1 equiv b_2	b_1 nand b_2
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0

$\Rightarrow$ Cela permet d'enrichir la synthaxe !

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee p \mid \varphi \wedge p \mid \varphi \oplus p \mid \varphi \Rightarrow p$$
$$\mid \varphi \Leftrightarrow p \mid \varphi \uparrow p$$

$[\![\varphi \oplus \psi]\!]^I = [\![\varphi]\!]^I \text{ xor } [\![\psi]\!]^I$

—— $\Rightarrow$ —— impl ——

—— $\Leftrightarrow$ —— equiv ——

—— $\uparrow$ —— nand ——

Remarque : Le nombre de fonction $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ est 2^n

Pour toute fonction $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ on peut étendre la synthase avec

$$\varphi ::= \dots \mid F(\varphi, \varphi, \varphi, \dots, \varphi)$$

$$\text{et } [\![f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)]\!]^I \stackrel{def}{=} F([\![\varphi_1]\!]^I, \dots, [\![\varphi_n]\!]^I)$$

Lemme :

Soit $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ pour $n > 0$
Il existe φ tq $[\![\varphi]\!] = F$ et $F_p(\varphi) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

Démonstration pour $n=1$:

b	0	1	$\wedge$	not
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$\neg P_1 \wedge P_1 \quad \neg P_1 \vee P_1 \quad P_1 \quad \neg P_1$

Le cas général :

$$\varphi \overset{def}{=} \bigvee_{(b_1,\dots,b_n)\in \mathbb{B}^n} \varphi_{(b_1,\dots,b_n)}$$

avec $[\![\varphi_{(b_1,\dots,b_n)}]\!]^I = 1$ ssi $I^{P_i} = b_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$

Pour cela on écrit

$$\varphi_{(b_1,\dots,b_n)} \overset{def}{=} \bigwedge_{1\leq i\leq n} \ell_{i,b_i} \quad \text{où} \quad \ell_{i,b_i} = \begin{cases} P_i & \text{si } b_i = 1 \\ \neg P_i & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\Rightarrow, \bot\} \\ \{\neg, \wedge\} \\ \{\neg, \vee\} \end{array}\right\} \text{Systèmes complets}$$

Conséquences logique (CL) :

ψ est une CL de φ

notés $\varphi \models \psi$

ssi $\forall I$, si $I \models \varphi$ $[\![\varphi]\!]^I = 1$

alors $I \models \psi$ $[\![\psi]\!]^I = 1$

Lemme : Soient φ, ψ deux FP.
Alors $\psi \models \varphi$ ssi $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$

Lemme (de déduction) : Soit S un ensemble de FP, φ et ψ deux FP,
Alors, $S \cup \{\psi\} \models \varphi$
$\iff S \models \psi \models \varphi$
En particulier, $\psi \models \varphi \iff \psi \Rightarrow \varphi$
car $S = \emptyset$

Définition : Substitution propositionnelle σ est une fonction tq son domaine
$\mathrm{dom}(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \{ P \in \mathcal{P}_0 \mid \sigma(P) \neq P \}$
soit **fini**.
Si $\mathrm{dom}(\sigma) = \{P_1, \dots, P_n\}$

on note $\sigma = \left[\sigma(P_1)/P_1, \dots, \sigma(P_n)/P_n \right]$

Lemme : Soit φ une FP et σ, σ' deux substitutions prop, telles que

$\forall P \in \mathcal{P}_0$, $\sigma(P)$ soit logiquement équivalente à $\sigma'(P)$.
Alors φ_σ est logiquement équivalente à ψ_σ,