TD 10

Exercice 4:

Soit $\left(\mathbb{Q}, 1, \underbrace{(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}}_{\text{l'ensemble des fonctions de multiplications par } q \text{ (ex } F_{q\cdot}(q') = q\cdot q')}, +, <\right)$

a) $\exists x.\,(3 < 2x \wedge 4x < y)$ — par $(q\cdot)_{q\in\mathbb{Q}}$

$\Leftrightarrow \exists x.\,\left(\frac{3}{2} < x \wedge x < \frac{y}{4}\right)$ — axiome 2

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \frac{y}{4}$

$\Leftrightarrow y > 6$

b) $\exists x.\,\neg(2x < 3x)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(2x = 3x \vee 3x < 2x)$

$\Leftrightarrow (\underbrace{\exists x.\,2x = 3x}_{x=0}) \vee (\underbrace{\exists x.\,3x < 2x}_{x<0})$

$\Leftrightarrow 1$ (car valide $\vee$ valide)

c) $\forall x.\,((\exists y.\,(y < x \wedge 5 < y)) \Rightarrow z < 2x$

$\vdots$

$\Leftrightarrow \forall x.\,\forall y.\; x \leq y \vee y \leq 5 \vee z < 2x$

On remplace $\forall$ par $\neg\exists\neg$... et on distribue $\neg$

$\Leftrightarrow \neg \exists x. \neg (\forall y.\ x \leq y \vee y \leq 5 \vee z < 2x)$

$\Leftrightarrow \neg \exists x. \exists y.\ x > y \wedge y > 5 \wedge z \geq 2x$) ax 2

$\Leftrightarrow \neg \exists x.\ (x > 5) \wedge z \geq 2x$

$\Leftrightarrow \neg \exists x.\ 5 < x \wedge x \leq \frac{z}{2}$ ax 2

$\Leftrightarrow \neg \left(5 < \frac{z}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \neg (z > 10) \Leftrightarrow z \leq 10$

Exercice 5 :

$\varphi_5 = \forall x. \exists y. (\neg(y < x) \Rightarrow \forall z. (x < z \vee x = z))$

<u>cas 1:</u> x est minimal.

l'implication est trc vrai

car $1 \Rightarrow 1$

<u>cas 2:</u> x est non minimal.

Il suffit de choisir un y

satisfaisant $y < x$

donc on aura

$(0 \Rightarrow \dots) = 1$

donc φ_5 est valide dans tous les cas

$\Rightarrow \varphi_5 \in Th(A_{ols})$

TD 11

Exercice 1 :

a. Il faut 3 pièces : $50 + 50 + 10 = 110$

b. $S = 10x_1 + 20x_2 + 50x_3$

nb de pièces de 10 cents.

c. $S = \sum_{i=1}^{k} v_i . x_i$

d. $m = \sum_{i=1}^{k} x_i$

e. $\exists x_1 . \dots . \exists x_k \left(\sum_{i=1}^{k} x_i = m \wedge \sum_{i=1}^{k} x_i v_i = S \right) = \varphi(m)$

f. $\psi(m) = \forall m' . \varphi(m) \wedge (m' < m \Rightarrow \neg\varphi(m'))$

Exercice 4 :

a. Non si $x = v_2$, $y = v_0$ et $z = v_2$

on n'a pas $E(x, z)$

ainsi $I \not\models \varphi_{4,a}$

b. Non car si $x = v_3$, $y = v_0$

$\underset{1}{G(x)} \Leftrightarrow (\underset{1}{E(v_3, v_0)} \wedge \neg\underset{1}{(v_3 = v_0)} \Rightarrow \neg \underset{0}{G(v_0)}$

c. $\varphi_{n,c} = \bigwedge \left(\exists y.\ E(x,y) \wedge \forall z.\ \neg(z=y) \wedge \neg E(x,z)\right)$

$\neg G(x) \wedge$

I est un modèle.

TD 12

Exercice 5 :

$$\varphi_s = ((\forall x.\ H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(s)) \Rightarrow M(s)$$
$$= \neg((\forall x.\ H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(s)) \vee M(s)$$
$$= \neg(\forall x.\ H(x) \Rightarrow M(x)) \vee \neg H(s) \vee M(s)$$
$$= \neg(\forall x.\ \neg H(x) \vee M(x)) \vee \neg H(s) \vee M(s)$$
$$= (\exists x.\ H(x) \wedge \neg M(x)) \vee \neg H(s) \vee M(s)$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\vdash M(s), \neg H(s), \exists x. H(x) \wedge \neg M(x), H(s)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\vdash M(s), \neg H(s), \exists x. H(x) \wedge \neg M(x), \neg M(s)$}
\RightLabel{$(\wedge)$}
\BinaryInfC{$\vdash M(s), \neg H(s), \exists x. H(x) \wedge \neg M(x), H(s) \wedge \neg M(s)$}
\RightLabel{$(\exists)$}
\UnaryInfC{$\vdash M(s), \neg H(s), \exists x. H(x) \wedge \neg M(x)$}
\RightLabel{$(\vee)$}
\UnaryInfC{$\vdash M(s) \vee \neg H(s), \exists x. H(x) \wedge \neg M(x)$}
\RightLabel{$(\vee)$}
\UnaryInfC{$\vdash (\exists x.\ H(x) \wedge \neg M(x)) \vee \neg H(s) \vee M(s)$}
\end{prooftree}
$$