TD 1. Ensembles et récurrence

Exercice 1. Compter des ensembles

Soit A l'ensemble $\{a, b, c\}$ et B l'ensemble $\{a, d\}$.

(a) Ecrire tous les éléments des ensembles $A \times B$, $A \cup B$ et $A \cap B$. Quelle sont les cardinalités de ces ensembles ?

(b) Ecrire tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$. Quelle est sa cardinalité ?

(c) Soit X un ensemble et x un élément qui n'est pas dans X. Montrer que, si X possède p sous-ensembles, alors $X \cup \{x\}$ possède $2p$ sous-ensembles.

(d) Montrer par récurrence que, si un ensemble X a une cardinalité de n, alors $\mathcal{P}(X)$ a une cardinalité de 2^n.

Exercice 2. Différence symétrique, inclusion-exclusion

(a) Montrer que, pour deux ensembles quelconques A et B, on a

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(b) Quel est l'opérateur logique correspondant à l'ensemble qui figure dans la question précédente ?

(c) Montrer que, pour A et B de cardinalité finie, on a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Exercice 3. Preuves par récurrence d'égalités arithmétiques

Écrire la preuve par récurrence que les égalités suivantes sont vraies pour tout $n \geq 1$.

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$

Exercice 4. Suites rythmiques

Un instrument peut jouer deux types de notes : une note courte (C) qui dure 1 seconde et une note longue (L) qui dure 2 secondes. On écrit R_n pour le nombre de séquences de notes de longueur totale égale à n secondes. Par exemple, LC, CL, et CCC sont trois séquences de notes de longueur 3.

(a) Pour chaque valeur de $n \in [1, 5]$, trouver les valeurs de R_n en décrivant toutes les séquences rythmiques possibles de longueur n.

(b) Étant donné les rythmes de longueur $n-1$ et $n-2$, comment trouver tous les rythmes de longueur n ?

(c) Écrire une formule permettant de calculer R_n en fonction de R_{n-1} et R_{n-2}.

(d) On définit maintenant $\varphi := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrez que $\varphi^2 = 1 + \varphi$.

(e) Donner une preuve par récurrence que $R_n \leq \varphi^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5. Découpages du plan

Le but de cet exercice est de calculer le nombre de régions obtenues en traçant n lignes droites dans le plan. Une seule droite divise toujours le plan en deux régions, et deux droites donnent quatre régions. Pour la suite de l'exercice, nous respecterons deux règles importantes : deux droites ne sont jamais tracées parallèlement l'une à l'autre, et trois droites ne s'intersectent jamais en un seul point.

(a) Compter le nombre de régions quand $n = 3$. Le nombre de régions dépend-il de la façon dont vous tracez les droites (pour autant que vous respectiez les deux règles ci-dessus) ?

(b) Lorsque vous avez déjà n droites, et que vous tracez une autre droite, combien de régions existantes va-t-elle traverser ?

(c) Dénotons par P_n le nombre de régions après avoir tracé n droites. Écrire une relation de récurrence pour P_n.
(d) Trouver une formule directe qui calcule P_n. *Indication.* Utiliser l'égalité de l'exercice 3a.

Exercice 6. Mots finis

Soit A un ensemble fini. L'ensemble des mots finis avec des lettres dans A est défini récursivement comme le plus petit ensemble W tel que :
— le mot vide est dans W, et
— pour tout élément a de A et tout élément w de W, la concaténation wa est aussi dans W.

(a) À quel type inductif de données correspondent les mots finis ? Écrire une définition de ce type.
(b) Si A est de cardinalité 2, alors combien de mots de longueur n y a-t-il ?
(c) Expliquer le lien entre la question (b) et question (d) de l'exercice 1.
(d) Écrire une définition récursive d'une fonction ℓ qui calcule la longueur d'un mot fini.
(e) Supposons que A est de cardinalité k. Montrer par récurrence qu'il y a k^n mots de longueur n.

Exercice 7. Parenthèses équilibrées

Dans cet exercice, nous considérons l'ensemble W de mots finis sur l'alphabet fini $\{(,)\}$. On dit que un tel mot w est *équilibré* si chaque parenthèse ouvrante a une parenthèse fermante correspondante plus loin dans le mot.

L'ensemble D de mots avec des parenthèses équilibrées est défini récursivement comme le plus petit sous-ensemble de W tel que
— le mot vide est dans D ;
— si w_1 et w_2 sont deux mots dans D, alors le mot $(w_1)w_2$ est dans D.
Pour $n \geq 0$, on écrit D_n pour le sous-ensemble des mots de longueur $2n$ dans D.

(a) Écrire les éléments des ensembles D_0, D_1, D_2, et D_3.
(b) Expliquer comment on peut construire D_n à partir des ensembles $D_0, \ldots, D_{n-1}$.
(c) Donner une rélation de récurrence qui permet de calculer $|D_n|$.

Note. Les mots dans l'ensemble D sont appelés *mots de Dyck*, et la suite des cardinalités $|D_n|$ est appelé la *suite de Catalan*.

Exercice 8. Arbres binaires

Un *arbre binaire* peut être défini informellement comme un arbre fini avec une racine dans lequel chaque noeud a au plus deux fils.

(a) Écrire une définition récursive de l'ensemble T d'arbres binaires.
(b) Donner une définition récursive de l'ordre « est un sous-arbre de » sur l'ensemble T. Expliquer pourquoi cet ordre est bien fondé.
(c) Écrire une définition récursive de la fonction h qui associe à chaque arbre binaire sa hauteur (entier naturel). On considère que la hauteur d'un arbre à un seul noeud est 0.
(d) Écrire une définition récursive de la fonction v qui associe à chaque arbre binaire le nombre de ses noeuds.
(e) Soit t un arbre binaire. Écrire une définition récursive de la fonction p_t qui associe à chaque noeud x dans t sa profondeur, c'est-à-dire, sa distance de la racine. On considère que la profondeur de la racine est 0.
(f) Une *feuille* est un noeud dans un arbre qui n'a aucun fils. On appelle un arbre binaire t *parfait* si chaque noeud a 0 ou 2 fils, et toutes les feuilles ont la même profondeur. Donner une définition inductive de l'ensemble P des arbres binaires parfaits.

Exercice 9. Formules propositionnelles

Soit P un ensemble fini de propositions. L'ensemble de formules propositionnelles sur P est défini récursivement comme le plus petit ensemble F tel que
— pour tout $p \in P$, on a $p \in F$;
— pour tout $\varphi \in F$, on a $\neg(\varphi) \in F$;
— pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a $(\varphi \vee \psi) \in F$.

(a) Écrire une fonction récursive h qui calcule le nombre d'opérateurs logique dans une formule.

(b) Écrire une fonction récursive t qui calcule la *profondeur* d'une formule propositionnelle, c'est-à-dire, le nombre maximal d'opérateurs imbriqués dans la formule.

(c) Deux formules sont dites *équivalentes* si elles ont la même table de vérité. Soit S un ensemble de formules propositionnelle sur P tel que chaque formule propositionnelle sur P est équivalente à une et une seule formule dans S. Trouver une formule qui calcule $|S|$ en termes de $|P|$.

(d) Écrire une fonction récursive s qui calcule l'ensemble de sous-formules d'une formule propositionnelle.

(e) Montrer que, pour toute formule φ, $|s(\varphi)| \leq 2h(\varphi) + 1$.

Exercice 10. Triominos

On appelle *triomino* une pièce composée de trois carrés en forme de la lettre L.

(a) On souhaite paver avec triominos une grille de taille 8×8, avec la case du coin supérieur droit enlevée. Décrivez une méthode récursive pour le faire.

(b) On écrit T_n pour le nombre de pièces de triominos nécessaires pour réaliser un pavage d'un plateau de taille $2^n \times 2^n$ avec le coin supérieur droit enlevé. Donner une formule récursive pour T_n.

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$T_n = \frac{4^n - 1}{3}.$$