CMTD 03-12

TD 4 :

Retour sur exercice 3 :

P_a : "Tout graphe planaire connexe G a a arêtes, $S(G)$ sommets et $F(G)$ le nombre de faces vérifie $S(G) - a + F(G) = 2$ "

Initialisation : $a = 0$ (G = (•))

$$S(G) - a + F(G) = 1 - 0 + 1 = 2$$

C'est vérifié.

Hérédité : 2 cas (l'arête connecte / ne déco pas)
$\Rightarrow$ Récurrence FORTE s/ le nombre d'arêtes.
(cf poly)

Exercice 2 :

2) On pose $s = |V(G)|$
$a = |E(G)|$
p = nbr pentagone
h = nbr hexagone.

Osq $5p = 3h$

nbr d'hex. autour des penta

nbr de pent autour des hex

Osq $s - a + p + h = 2$

$F = p + h$

par définition

Euler

On a aussi $3s = 2a$ $\left(\forall v \in V(G), \deg(v) = 3\right.$
par le lemme de poignée de main $\Rightarrow \sum_{v \in V} \deg(v) = s \cdot 3$
$\left. = 2a. \right)$

$\Rightarrow 3(s - a + f = 2)$

$\Leftrightarrow 3s - 3a + 3(p+h) = 6$

$\Leftrightarrow 3p + 3h - 6 = a$ $\longrightarrow$ $3s = 2a \Rightarrow 3s - 3a = -a$

$\Leftrightarrow 8p - 6 = a$ $\longrightarrow$ $3h = 5p$

On a aussi $\nearrow$ On compte le nombre d'arêtes autour d'un pentagone + |a| autour d'un hexa (et on a tout compté 2 fois)

$5p + \underbrace{6h}_{= 2 \cdot 3h = 2 \cdot 5p = 10p} = 2a \Leftrightarrow 15p = 2a$

$$\begin{cases} 8p - 6 = a \\ 15p = 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16p - 12 = 2a \\ 15p = 2a \end{cases}$$

$\Leftrightarrow p = 12$

or $h = \frac{5}{3} p$

$= 20$

Il faut donc 20 hexagones et 12 pentagones

TD5 sur les probas

Exercice :

$\Omega = \{ (a, b) \text{ tq } a \in \{1,2,\dots,6\} \text{ et } b \in \{\text{pile}, \text{face}\}\}$

$|\Omega| = 12$

1) $\{(2,P),(2,F), \dots , (6,P), (6,F)\}$ $\frac{1}{2}$

2) $\{(1,P), \dots, (6,P)\}$ $\frac{1}{2}$

3) $\{(1,P), (3,P), (5,P)\}$ $\frac{1}{4}$

4) ... $\frac{1}{2}$

Exercice 2.

52 cartes , 13 par couleurs

A = " Carte ♡ " $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

B = " Dame " $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

C = " Rouge " $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

1) $A \cap B = \{\text{"Dame de coeur"}\}$

$|A \cap B| = 1$

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

3) $A \cap B \cap C = \{\text{"Dame de coeur rouge"}\}$
$= A \cap B$

2) $B \setminus A = \{\text{"Dame ♣"}, \text{"Dame ♠"}, \text{"Dame ♢"}\}$
$|B \setminus A| = 3$
$P(B \setminus A) = \frac{3}{52}$

4) $A \cup B \cup C = \{\text{Dame ou rouge ou coeur}\}$
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
$= 13 + 4 + 26 + 1 - 13 - 2$
$P(A \cup B \cup C) = \frac{28}{52}$

5) $B^c = \{\text{"Tout sauf dame"}\}$
$|B^c| = |\Omega| - |B|$
$P(B^c) = \frac{52-4}{52} = \frac{12}{13}$

6) $(B \cap C)^c = \{\text{"Tout sauf dams rouges"}\}$

$|(B \cap C)^c| = |\Omega| - |B \cap C|$
$= 52 - 2$

$P((B \cap C)^c) = \frac{50}{52} = \frac{25}{26}$

Exercice 3:

A = "La pièce est pile"
B = A^c

1) $\Omega = \{A, B\}$

$P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{2^n}$

3) $1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

4) $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

5) $\sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n}$

Tirages indépendants.

Si un tirage se compose de plusieurs tirage indépendants.
Si on tire un elt dans (Ω, P) puis indépendamment dans (Ω', P') alors la distribution jointe sera un tirage dans $(\Omega \times \Omega', P \cdot P')$

Définition: Une proba est uniforme ssi

$$\forall w \in \Omega, \quad P(w) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Exercice 4:

A = "Le nombre donné est "probablement premier""

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

1) $\frac{1}{4^k}$

2) On veut $P($"n probab. prime" k fois$) < \frac{1}{100}$

ssi $\frac{1}{4^k} < \frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow \quad 4^k > 100$

$\Leftrightarrow \quad k > \log_4(100)$

$\Leftrightarrow \quad k$ suffisr.

Exercice 5:

$$P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

1) $\left(\frac{4}{5}\right)^5$ 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$