SYSTÈME DE PREUVE

① - Calcul des séquents.

Notation: Multi-ensemble.

ex : $\varphi, \psi, \varphi, \varphi = \psi, \varphi, \varphi, \varphi$

avec φ, ψ en NNF.

Formellement :

m : Formule en NNF $\longrightarrow \mathbb{N}$

m est fini si $dom(m)$ est fini

où $dom(m) = \{\varphi \mid m(\varphi) > 0\}$

ici, m : $\varphi \to 3$

$\psi \to 1$

$- \to 0$

donc $m : \{\varphi, \psi\}$

Soit Γ ou Δ ou ... multi-ensembles.

$\varphi, \psi, \ldots$ des formules.

" Δ, Γ, φ " union de multi-ensembles.

avec $(\Delta, \Gamma, \varphi)(\psi) = \Delta(\psi) + \Gamma(\psi) + \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi = \psi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\dfrac{}{\vdash \Gamma, P, \neg P}\ (ax)$$

$$\dfrac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee)$$

Prémices

$$\dfrac{\vdash \Gamma, \varphi \qquad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge)$$

Conclusion

Exemple:

Loi de Pierce $(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P)$

1) On met en NNF

$$\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \vee P$$

$$((\neg P \vee Q) \wedge \neg P) \vee P \quad \in \quad NNF$$

2) On commence du bas

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash P, \neg P, Q}\ (ax)}{\vdash P, (\neg P \vee Q)}\ (\wedge) \qquad \dfrac{}{\vdash P, \neg P}\ (ax)}{\vdash (\neg P \vee Q) \wedge \neg P,\ \underbrace{P}_{\Gamma}}\ (\wedge)}{\vdash \overbrace{((\neg P \vee Q) \wedge \neg P)}^{\varphi} \vee \overbrace{P}^{\psi}}\ (\vee)$$

Exemple Idempotence de $\wedge$:

$$P \wedge P \iff P$$

1ère étape : $(\neg P \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg P \wedge (P \wedge P))$

⚠ On veut montrer $P \wedge P \iff P$ donc on ne peut pas l'utiliser.

→ Montrons le avec un calcul de séquent.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P, \neg P, P$}
\LeftLabel{($\vee$)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P, \neg P \vee P$}
\LeftLabel{($\vee$)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \vee \neg P \vee P$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P, P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ax)}
\UnaryInfC{$\vdash P, P$}
\RightLabel{($\wedge$)}
\BinaryInfC{$\vdash \neg P, P \wedge P$}
\RightLabel{($\vee$)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg P \vee (P \wedge P)$}
\RightLabel{($\wedge$)}
\BinaryInfC{$\vdash (\neg P \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee (P \wedge P))$}
\end{prooftree}
$$

Autre exemple :

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

1) en NNF : $\neg (P \wedge (Q \vee R)) \vee ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

$\equiv (\neg P \vee \neg (Q \vee R)) \vee ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

(en suppr les ()) $\equiv \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

2) À faire en exercices.

Exemple sur une Formule $\notin$ VAL

① - $(\neg P \vee Q) \wedge P$ $(\in$ NNF$)$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash \neg P, Q}}{\vdash \neg P \vee Q} \qquad \overline{\vdash P}}{\vdash (\neg P \vee Q) \wedge P}\ (\wedge)$$

Il n'existe pas de règles applicables aux - - - pour montrer la formule.

Propriétés de branches linéaire.

Dans une recherche de preuve dans un séquent $\vdash \Gamma$, les branches sont de longueur au plus $\|\Gamma\|$

On note la taille d'une formule en NNF

$$\|\neg P\| = \|P\| = 0$$

$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi \vee \psi\| = 1 + \|\varphi\| + \|\psi\|$$

(c'est le nombre de symbole $\wedge$, $\vee$)

Pour $\|\Gamma\| = \sum\limits_{\varphi \in dom(\Gamma)} \|\varphi\| \cdot \Gamma(\varphi)$

taille

nombre de fois que φ apparaît.

L'algorithme écrit dépend des règles :

Fonction prouvable($\vdash \Gamma$)
si $\Gamma = \Delta, p, p'$
Vrai

c'est notre axiome

si $\Gamma = \Delta, \varphi \vee \psi$
prouvable($\vdash \Delta, \varphi, \psi$)

$(\vee)$

si $\Gamma = \Delta, \varphi \wedge \psi$
prouvable($\vdash \Delta, \varphi$) and
prouvable($\vdash \Delta, \psi$)

$(\wedge)$

sinon Faux

cas où on ne trouve pas de règles.

Notation : $\vdash_{LK_0} \Gamma$ si $\vdash \Gamma$ est prouvable

Définition : • Un séquent $\vdash \Gamma$ est satisfait
si $\exists \varphi \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ (= "formule restante")
tel que $I \models \varphi$
"satisfait"

On écrit alors
$$I \models \Gamma \quad \left(I \models \bigvee_{\varphi \in \mathrm{dom}(\Gamma)} \varphi \right)$$

• Un séquent est valide
si $\forall I,\ I \models \Gamma \quad \left(I = \bigwedge_{\varphi \in \mathrm{dom}(\Gamma)} \varphi \right)$

Théorème : de correction : (prouvable ⇒ valide)

Soit $\vdash \Gamma$ un séquent

Si $\vdash_{LK_0} \Gamma$ alors $\models \Gamma$

si prouvable alors valide

Théorème : de complétude (valide ⇒ prouvable)

Soit $\vdash \Gamma$ un séquent

Si $\models \Gamma$ alors $\vdash_{LK_0} \Gamma$