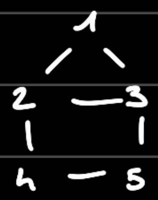
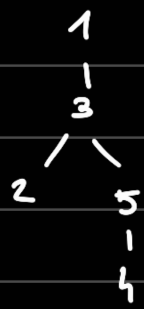
Arbres couvrants de poids minimum

Dans ce chapitre, on revient sur les graphes non-orientés pondérés.

> **Rappel:** Un graphe G est un arbre
> $\iff$ G est connexe et acyclique.
>
> **Rappel:** Un graphe G est connexe
> $\iff$ G contient un arbre couvrant.

Exemple: G = 



est un arbre couvrant.

Maintenant, on veut un arbre couvrant de poids minimum.

↳ Etant donné un graphe pondéré G
Trouver un arbre couvrant de G de poids minimum. (en anglais: "Minimum spanning tree" qu'on abregera ACM)

Soit G un graphe connexe avec une pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$ des arêtes.
Trouver un arbre couvrant T de G tq

$$\sum_{e \in E(G)} w(e) \text{ est minimum.}$$

On verra 2 algorithmes différents pour résoudre le problème :

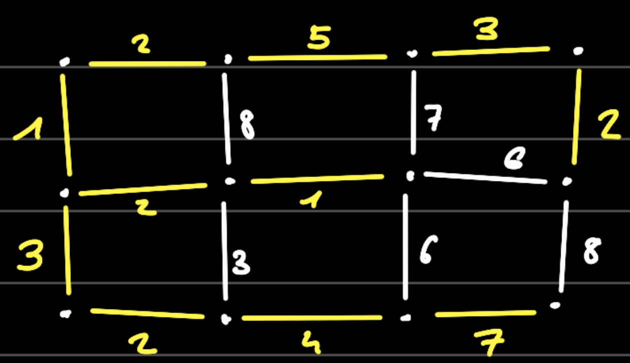
- Kruskal
- Prim

L'idée est de construire une solution en ajoutant les arêtes 1 par 1, toujours prenant celle qui donne les meilleurs bénéfices.

① - L'algorithme de Kruskal

Idée : Ajouter à chaque fois l'arête qui ne crée pas de cycle.

Exemple :



L'algorithme :

Entrée : Graphe connexe avec pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$

Sortie : Ensemble d'arêtes $X \subseteq E$ d'un arbre couvrant de G.

$X \leftarrow \emptyset$

$E' \leftarrow$ tri de E par poids croissant.

Pour tous les $e \in E'$:

si $(V, X \cup \{e\})$ est acyclique :

$X \leftarrow X \cup \{e\}$

↳ Comment déterminer si $(V, X \cup \{e\})$ est acyclique?

Manière naïve: BFS/DFS m fois

↳ $O(m(n+m))$

donc $O(n^4)$ pour les graphes denses