



Mathématiques discrètes

Projet : Suites de de Bruijn

Consignes Le but du projet est de présenter une application dans laquelle les mathématiques discrètes jouent un rôle fondamental.

Le rendu final du projet consistera en un article destiné au grand public au format pdf de 800-1000 mots plus une annexe numérique, qui pourra contenir par exemple une démonstration interactive, une vidéo explicative et/ou des graphiques générés par du code écrit par vous-même ; cette annexe sera rendue sous la forme d'un lien vers un dépôt en ligne. La forme exacte et la technologie utilisée pour l'annexe peut varier et est donc laissée au libre choix des étudiants. L'article et son annexe seront jugés non seulement sur le contenu mais aussi sur la clarté de la présentation, la qualité de rédaction, et la créativité.

Contenu Le sujet détaille quelques points à développer mais ceux-ci sont seulement proposés comme point de départ de votre travail. Vous êtes encouragés à développer d'autres pistes en lien avec les mathématiques discrètes. De même, la bibliographie conseillée est un point de départ. Vous pouvez vous appuyer sur d'autres sources sur lesquelles vous porterez un œil critique et que vous prendrez soin de citer correctement.

Charte de bonne conduite Lisez attentivement la charte de bonne conduite. Portez une attention particulière à citer toutes vos sources, y compris les exemples et les images que vous utiliserez. L'utilisation d'outils d'IA tels que ChatGPT est formellement interdite. L'équipe pédagogique sera très attentive à tous ces aspects lors de la correction.

Calendrier Consultez la page Moodle du cours pour les dates des principales étapes du projet.

Bref descriptif du sujet

Une *suite de de Bruijn* est un mot circulaire qui contient tous les mots d'une longueur fixe exactement une fois.

Plus précisément, si A est un ensemble de cardinalité k alors une *suite de de Bruijn* d'ordre n est un n^k -uplet $(b(0), b(1), \dots, b(n^k - 1))$ d'éléments de A qui a la propriété que, pour tout n -uplet de lettres $(a(0), a(1), \dots, a(n - 1))$, il existe une unique indice $0 \leq i < n^k$ telle que, pour tout $0 \leq j < n$, $a(j) = b(i + j \bmod n^k)$.

Par exemple, pour $A = \{0, 1\}$, il existe deux suites de de Bruijn d'ordre 3, à circularité près : 00010111 et sa complémentaire 11101000.

Le mathématicien néerlandais N.G. de Bruijn a décrit ces suites en 1946, mais elles ont une histoire riche et intéressante, notamment dans la musique et la poésie indiennes anciennes. Plus récemment, les suites de de Bruijn ont eu diverses utilisations en informatique.

Bibliographie conseillée

- N.G. de Bruijn, “Acknowledgement of Priority to C. Flye Sainte-Marie on the counting of circular arrangements of $2n$ zeros and ones that show each n -letter word exactly once”, (1975) <http://alexandria.tue.nl/repository/books/252901.pdf>
- R.W. Hall, “Math for Poets and Drummers”, p. 16-18 (2007) <https://web.archive.org/web/20120212145748/http://www.sju.edu/~rhall/mathforpoets.pdf>
- A. Ralston, “De Bruijn Sequences – A Model Example of the Interaction of Discrete Mathematics and Computer Science”, Mathematics Magazine, Vol. 55, No. 3 (1982) <https://www.jstor.org/stable/2690079>

Pistes de développement

- Écrire un programme qui engendre les suites de de Bruijn d’ordre n pour un alphabet de cardinalité k .
- Analyser la complexité de l’algorithme qu’utilise votre programme. Est-elle optimale ?
- Montrer que le nombre de suites de de Bruijn d’ordre n pour un alphabet de cardinalité k est égal à $\frac{(k!)^{n^{k-1}}}{k^n}$.
- Étudier et expliquer la riche histoire des séquences de Bruijn, notamment leur utilisation dans la prosodie sanskrite et l’intérêt des mathématiciens français au XIXe siècle.
- Décrire une utilisation des séquences de Bruijn en informatique, en particulier en cryptographie.