TD n°10

Propriétés de grammaires et langages algébriques

Exercice 1 *Transformer chacune des grammaires suivantes en une grammaire sous forme normale de Chomsky engendrant le même langage, au mot vide près.*

$$\mathcal{G}_1 : \begin{array}{l} S \to AB \mid aS \mid a \\ A \to Ab \mid \varepsilon \\ B \to AS \end{array} \qquad \mathcal{G}_2 : \begin{array}{l} S \to bA \mid aB \\ A \to bAA \mid aS \mid a \\ B \to aBB \mid bS \mid b \end{array} \qquad \mathcal{G}_3 : \begin{array}{l} S \to bA \mid aB \\ A \to bAA \mid aS \mid a \mid \varepsilon \\ B \to aBB \mid bS \mid b \mid \varepsilon \end{array} \qquad \mathcal{G}_4 : \begin{array}{l} S \to A \mid B \\ A \to aAB \mid \varepsilon \\ B \to S \mid bA \end{array}$$

Exercice 2 *Soit w un mot de longueur n et $\mathcal{G}$ une grammaire sous forme normale de Chomsky capable de produire w. Combien de fois* peut*-on utiliser une règle de la forme $X \to x$ dans une dérivation de w dans $\mathcal{G}$? Combien de fois* doit*-on utiliser une telle règle ? Mêmes questions pour les règles de la forme $X \to X_1X_2$. Que peut-on en conclure sur la longueur de toute dérivation de w dans $\mathcal{G}$?*

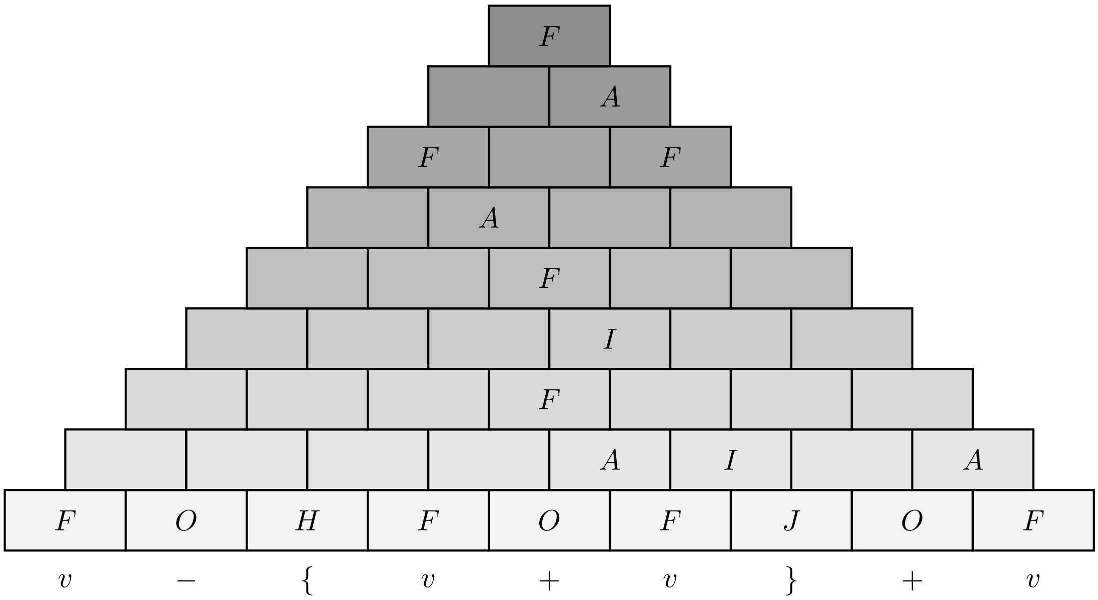
Déduire de ces réponses un algorithme naïf pour savoir si un mot donné est engendré par une grammaire algébrique (quelconque) également donnée.

Exercice 3 *Appliquer l'algorithme de Cocke–Younger–Kasami dans les cas suivants.*

$$\begin{array}{l} E \to EA \mid HI \mid d \\ A \to OE \\ I \to EJ \\ O \to + \mid - \\ H \to (\\ J \to) \end{array} \qquad \begin{array}{l} S \to SS \mid AB \mid AC \mid DE \mid DF \\ C \to SB \\ F \to SE \\ A \to (\\ B \to) \\ D \to [\\ E \to] \end{array} \qquad \begin{array}{l} S \to ZY' \mid YZ' \\ Z \to 0 \\ Y \to 1 \\ Z' \to ZS \mid YZ'' \mid 0 \\ Y' \to YS \mid ZY'' \mid 1 \\ Z'' \to Z'Z' \\ Y'' \to Y'Y' \end{array}$$

$w_1 = d - (d + d)$ $\qquad w_2 = (()[][])$ $\qquad w_3 = 11010100$

Exercice 4 *Voici une trace de l'application de l'algorithme de Cocke–Younger–Kasami. En extraire un maximum d'informations sur la grammaire et le mot analysé.*



Exercice 5 *L'ensemble des langages algébriques est-il clos par étoile ? par miroir ?*

On rappelle :

Lemme d'itération pour les langages alg.
Soit $\mathcal{L}$ un langage algébrique. Alors :

il existe un entier $p \geq 1$

tel que pour tout mot $s \in \mathcal{L}$ avec $|s| \geq p$,

il existe une décomposition $s = uvwxy$ avec $|vwx| \leq p$, $|vx| \geq 1$

tel que pour tout entier $k \geq 0$: $uv^kwx^ky \in \mathcal{L}$.

Négation de la propriété du lemme d'it.

$\forall p$ avec $p \geq 1$:

$\exists s \in \mathcal{L}$ avec $|s| \geq p$

$\forall u, v, w, x, y$ avec $s = uvwxy$, $|vwx| \leq p$, $|vx| \geq 1$

$\exists i$ tel que $uv^iwx^iy \notin \mathcal{L}$

Exercice 6 *Le langage* $\mathcal{L}_0 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$ *est-il algébrique ?*

Exercice 7 *Lesquels des langages suivant sont algébriques ? Justifier.*

— $\mathcal{L}_1 = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$
— $\mathcal{L}_2 = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 0\}$
— $\mathcal{L}_3 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$
— $\mathcal{L}_4 = \{a^n b^m c^r \mid r = n * m\}$
— $\mathcal{L}_5 = \{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\}$
— $\mathcal{L}_6 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
— $\mathcal{L}_7 = \{w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^* \mid \sum_{i \geq 0} w_i \textit{ est un nombre premier}\}$

Exercice 8 *Pour tout langage* $\mathcal{L}$*, on définit le langage* $\square(\mathcal{L}) = \{ww \mid w \in \mathcal{L}\}$.

1. *Donner un langage reconnaissable infini* $\mathcal{U}$ *tel que* $\square(\mathcal{U})$ *soit reconnaissable.*
2. *Donner un langage reconnaissable* $\mathcal{V}$ *tel que* $\square(\mathcal{V})$ *soit algébrique mais non reconnaissable.*
3. *Montrer que le langage* $\mathcal{W} = (a + b)^*$ *est tel que* $\square(\mathcal{W})$ *n'est pas algébrique.*
4. *Montrer que le complément de* $\square(\mathcal{W})$ *est algébrique.*