Prof: matej@irif.com

Objectifs:
- Comprendre les graphes et ses algorithmes (parcours en largeur et profondeur, ...)
- Arbres couvrant de poids minimum, plus court chemin, couplage max, ...

Notations:
- Soit X un ensemble. $\binom{X}{2}$ est l'ensemble des parties à 2 éléments de X
- On note uv la partie $\{u; v\}$
- L'ordre et les répétitions ne sont pas pris en compte

Exemple: Soit $X = \{1, 2, 3\}$

alors $\binom{X}{2} = \{12, 13, 23\}$

on note ici 12 au lieu de $\{1, 2\}$

Définition:
- Un graphe est un couple d'ensemble $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E un sous-ensemble de $\binom{V}{2}$
- V se note aussi $V(G)$ (= sommets)
- E ———————— $E(G)$ (= arêtes)

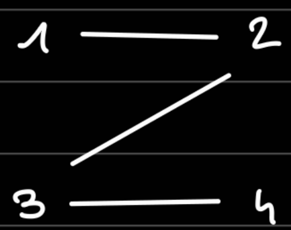
Exemple / interprétation:

Soit $G = (\{1,2,3,4\}, \{12, 34, 23\})$

ici $V = \{1,2,3,4\}$ et $\binom{V}{2} = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$

on a bien $E \in \binom{V}{2}$

et le dessin de G est donc:



Remarque: Dans $\binom{X}{2}$, $12 = 21$.

Pourquoi cet outil ?

↳ Les sommets modélisent des objets (ex: personnes, pages web, ...)

↳ Les arêtes modélisent des "relations" (binaires) entre ces objets (ex: amitiés, hyperliens, ...)

↳ Les arêtes peuvent être orientées (donc graphe orienté) ou pas

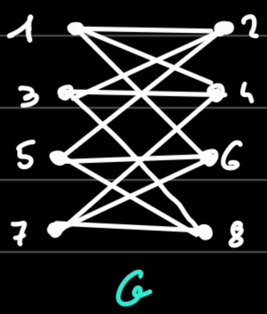
Définition: Soit $G(\{\dots, u, v, \dots\}, \{\dots, e, \dots\})$

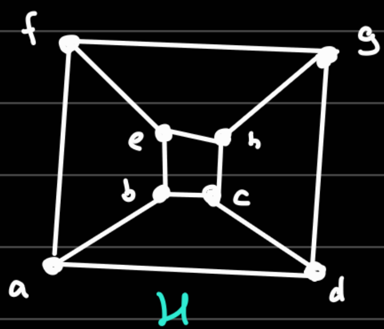
- u et v sont adjacents si $uv \in E(G)$
- e est incidente si $u \in e$
- Les 2 éléments de e sont des extrémités
- Le voisinage de u est l'ensemble $N_G(u)$ des sommets adjacents à u dans G (si $N_G(u) = \emptyset$, u est isolé)

- Les voisins de u sont les éléments de $N_G(u)$
- L'ensemble des arêtes incidente à u est notée $\delta_G(u)$

Définition: Soit G, H deux graphes, G est isomorphe à H si il existe une bijection F de $V(G)$ sur $V(H)$ tq $\forall xy \in E(G)$, $xy \in E(G) \Leftrightarrow F(x)F(y) \in E(H)$

Exemple:





Soit $f(1) = a$ $\quad 12 \in G \Leftrightarrow ab \in H$

$f(2) = b$ $\quad 14 \in G \Leftrightarrow ad \in H$

$f(3) = c$ $\quad 34 \in G \Leftrightarrow cd \in H$

$f(4) = d$ $\quad \vdots$

$\vdots$

Ici G et H sont isomorphes mais c'est très long à écrire, alors que les graphes sont petits ...

Définition: Soit $G = (V, E)$

Le graphe-complémentaire $\overline{G}$ est

$$\overline{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right)$$

Comment représenter un graphe en mémoire ?

① - Matrice d'adjacente

· Soit G à n sommets

· On numérote les sommets : $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$

· La matrice adjacente est la matrice M carrée $n \times n$ sur $\{0;1\}$ tq

$$M_{ij} = 1 \iff v_i v_j \in E(G)$$

Rmq: M est symétrique sur la diagonale.

② - Matrice d'incidence

Soit G un graphe à n sommets et m arêtes

· On numérote $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$

· On numérote $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$

· La matrice d'incidence de G est la matrice M sur $\{0,1\}$ de taille $n \times m$ tq :

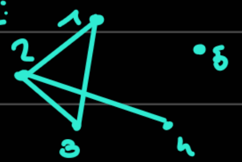
$$M_{ij} = 1 \iff v_i \in e_j$$

③ - Liste d'adjacence :

· Soit G un graphe

· Une représentation en liste d'adjacence de G est la donnée, pour chaque sommet v de G de la liste des voisins de G

Ex:



1: [2,3]

2: [1,3,4]

3: [1,2]

4: [2]

5: []

Définition: Le degré de v dans G est le nombre d'arêtes incidentes à v.
(C'est donc le nombre de voisins de v)

$$d_G(v) = |N_G(v)|$$

- Si $d_G(v) = 0$, v est isolé
- Si $d_G(v) = 1$, v est une feuille

Théorème: La somme des degrés est égale au double du nombre d'arête.

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$

On en déduis que $d_G(v)$ est paire

Donc si on a un sommet impair, on doit pouvoir trouver un autre sommet tq sa densités est impair.
Donc le nombre de sommet de degré impair est pair.

Exemple: Sept personnes sont à une fête.
Est-il possible que chacun d'entre eux serre la main de 3 autres personnes?

Ici si on trace un graphe, $V(G)$ = les personnes
On veut donc

$$\forall v \in V(G),\ d_G(v) = 3$$

or il y a 7 sommets

donc $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 7 \times 3 = 21$ n'est pas pair.

C'EST IMPOSSIBLE

Définition: Soit $n \geq 1$
Le graphe complet à n sommets
est le graphe $K_n = \left(\{1, \dots, n\}, \binom{\{1, \dots, n\}}{2}\right)$

Rmq: $\forall v \in V(K_n)$, $d_{K_n}(v) = n-1$

Variantes de graphes:

- Multigraphe: Possibilité d'avoir des boucles.
- Graphe orienté: Relation d'ordre entre les sommets
- Hypergraphe: Relation d'arité ≥ 2

Opérations élémentaires: (= temps constant)

- Affectation
- Comparaisons
- Opérations arithmétiques et logiques
- Accès à une case du tableau.
- Appel d'une sous-routine