CM

En LP : $\text{VAL } \varphi \Leftrightarrow \text{SAT } \neg\varphi$

$\Rightarrow \mathcal{O}(n)$ contre $\mathcal{O}(2^n)$ (pire cas)

Calcul des séquents du premier ordre : (= LK)

Règles :

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \ell, \bar{\ell}} \text{(axe)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, \varphi, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi} (\vee)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi \qquad \vdash \Gamma, \psi}{\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi} (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, \exists x.\varphi, \varphi[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x.\varphi} (\exists)$$

$t \in L(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

$$\frac{\vdash \Gamma, \varphi[y/x]}{\vdash \Gamma, \forall x.\varphi} (\forall)$$

$y \notin fv(\Gamma, \forall x.\varphi)$

fv : variables libres (free variables)

Exemple: Formule du buveur

$$\exists x.\ B(x) \Rightarrow \forall y.\ B(y)$$

$$\mathrm{nnf}\big(\exists x.\ (\neg B(x) \vee \forall y.\ B(y))\big)$$

$$\exists x. \neg B(x) \vee \forall y\ B(y)$$

$$\dfrac{}{\vdash \neg B(x), \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y. B(y)), \boxed{B(y), \neg B(y)}, \forall y. B(y)}\ (ax)$$

$(\vee)$

$$\vdash \overbrace{\neg B(x), B(y)}^{\Gamma}, \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y. B(y)), \neg B(y) \vee \forall y. B(y)$$

$(\exists)$ y car $y \notin Fv(..)$ et $x \in Fv(...)$

$$\vdash \overbrace{\exists x.(\neg B(x) \vee \forall y. B(y)), \neg B(x)}^{\Gamma}, B(y)$$

$(\forall)$

$$\vdash \overbrace{\exists x.(\neg B(x) \vee \forall y. B(y))}^{\Gamma}, \neg B(x), \forall y. B(y)$$

$(\vee)$

$$\vdash \exists x.(\neg B(x) \vee \forall y. B(y)), \neg B(x) \vee \forall y. B(y)$$

$(\exists)$

$$\vdash \exists x.\ (\neg B(x) \vee \forall y.\ B(y))$$

Théorème: LK est correct

$$\Big(\text{Si } \vdash_{LK} \Gamma \text{ alors } \models 1 \Big)$$

prouvable — correct

Si un séquent Γ est satisfait par I, ρ

i.e. $I, \rho \models \Gamma$

alors il existe une formule $\Theta \in \mathrm{dom}(\Gamma)$

tq $I, \rho \models \Theta$

$$\big(\Gamma = \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n \text{ et si } \varphi_i = \varphi \text{ et } \varphi_j = \neg\varphi$$

alors $\Theta = \varphi \vee \neg\varphi$

Pour prouver P, il suffit de prouver que pour chaque règle, les prémisses $\Rightarrow$ les conclusions

$(\exists)$: On suppose $\models \Gamma, \exists x.\varphi, \varphi[^r/_x]$ et on démontre $\models \Gamma, \exists x.\varphi$ $(\Gamma, \exists x.\varphi \in VAL)$

Pour tout I, ρ, il existe une formule témoin $\Theta \in (\mathrm{dom}(\Gamma) \cup \{\exists x.\varphi, \varphi[^r/_x]\})$ telle que $I, \rho \models \Theta$

- <u>cas 1</u> : si $\Theta \in (\mathrm{dom}(\Gamma) \cup \{\exists x.\varphi\})$
  alors, comme $I, \rho \models \Theta$, $I, \rho \models \Gamma, \exists x.\varphi$

- <u>cas 2</u> : sinon $\Theta = \varphi[^r/_x]$
  On a $I, \rho \models \varphi[^r/_x]$

$$
\begin{aligned}
& I, \rho^{[r/x]} \models \varphi && \text{Lemme de substitution} \\
\Leftrightarrow\ & I, \rho[^{[\![r]\!]^I_\rho}/_x] \models \varphi \\
\Leftrightarrow\ & \exists e = [\![r]\!]^I_\rho \text{ dans } D_I \text{ tq } I, \rho[^e/_x] \models \varphi \\
\Leftrightarrow\ & I, \rho \models \exists x.\varphi && \text{car } \Gamma, \ldots = \text{disjonction} \\
\Leftrightarrow\ & I, \rho \models \Gamma, \exists x.\varphi
\end{aligned}
$$

$(\forall)$: On suppose $\models \Gamma, \varphi[^y/_x]$ tq $y \notin Fv(\Gamma, \forall x.\varphi)$ et montrons $\models \Gamma, \forall x.\varphi$

Pour tout I, ρ on a $I, \rho \models \Gamma, \varphi[^y/_x]$

Pour tout $e \in D_I$, $\exists \Theta_e$. $I, \rho[^e/_y] \models \Gamma, \varphi[^y/_x]$

- <u>cas 1</u> : Si il existe e tel que $\Theta_e \in \mathrm{dom}(\Gamma)$
  alors $I, \rho[^e/_y] \models \Theta_e$ (car $nb(Fv(\Theta_e)) = 0$)
  car $y \notin Fv(\ldots)$ donc $I, \rho \models \Theta$