DM n°1 :

Exercice 1 :

a) $nnf(\varphi_1) \equiv nnf\Big(\big[(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee P \vee Q)\big]$

$\wedge \big[S \vee ((\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))\big]$

$\wedge \neg S\Big)$

$\equiv nnf\big((\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee P \vee Q)\big)$

$\wedge\, nnf\big(S \vee ((\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))\big)$

$\wedge\, nnf(\neg S)$

$\equiv \big[nnf(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge nnf(\neg R \vee P \vee Q)\big]$

$\wedge \big[nnf(S) \vee nnf((\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))\big]$

$\wedge \neg S$

$\equiv \big[nnf(\neg(P \vee Q)) \vee nnf(R)\big] \wedge \big[nnf(\neg R) \vee nnf(P) \vee nnf(Q)\big]$

$\wedge \big[S \vee (nnf(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge nnf(\neg Q \vee P))\big]$

$\wedge \neg S$

$$\equiv [(\neg P \wedge Q) \vee R] \wedge [\neg R \vee P \vee Q]$$
$$\wedge [S \vee (((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))]$$
$$\wedge \neg S$$

2) On voit que $\neg\neg F(\varphi_1)$ est déjà presque en CNF.

$$[(\neg P \wedge Q) \vee R] \wedge [\neg R \vee P \vee Q]$$
$$\wedge [S \vee (((\neg P \wedge Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))]$$
$$\wedge \neg S$$

$$\equiv [(R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q)] \wedge [\neg R \vee P \vee Q]$$
$$\wedge [S \vee (((R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q)) \wedge (\neg Q \vee P))]$$
$$\wedge \neg S$$

$$\equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (\neg R \vee P \vee Q)$$
$$\wedge [(S \vee ((R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q))) \wedge (S \vee (\neg Q \vee P))]$$
$$\wedge \neg S$$

$$\equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (\neg R \vee P \vee Q)$$
$$\wedge [(S \vee R \vee \neg P) \wedge (S \vee R \vee Q) \wedge (S \vee \neg Q) \wedge (S \vee P)]$$
$$\wedge \neg S$$

$$\equiv (R \vee \neg P) \wedge (R \vee Q) \wedge (\neg R \vee P \vee Q)$$
$$\wedge (S \vee R \vee \neg P) \wedge (S \vee R \vee Q)$$
$$\wedge (S \vee \neg Q) \wedge (S \vee P) \wedge \neg S$$

3) Réécrivons φ_1 (en CNF maintenant) sous forme d'ensemble de clauses

$$\{\{R,\neg P\},\{R,Q\},\{\neg R,P,Q\},\{S,R,\neg P\},\{S,R,Q\},\{S,\neg Q\},\{S,P\},\{\neg S\}\}$$

On appliquera ici en priorité la règle unitaire :

$$\{\{R,\neg P\},\{R,Q\},\{\neg R,P,Q\},\{S,R,\neg P\},\{S,R,Q\},\{S,\neg Q\},\{S,P\},\boxed{\{\neg S\}}\}$$

$$\downarrow \text{unit}(\neg S)$$

$$\{\{R,\neg P\},\{R,Q\},\{\neg R,P,Q\},\{R,\neg P\},\{R,Q\},\{\neg Q\},\boxed{\{P\}}\}$$

$$\downarrow \text{unit}(P)$$

$$\{\boxed{\{R\}},\{R,Q\},\{R\},\{R,Q\},\{\neg Q\}\}$$

$$\downarrow \text{unit}(R)$$

$$\{\boxed{\{\neg Q\}}\}$$

$$\downarrow \text{unit}(\neg Q)$$

$$\{\}$$

<u>Remarques</u> : • Le choix de la clause unitaire à simplifier se fait ici en fonction du nombre de clauses qu'on pourra supprimer.

• Je n'ai pas écrit le cas où $\neg P$ si $\{P\}$ est la clause unitaire (par exemple) car on sait qu'il aboutit à un échec.

4) On a bien φ_1 satisfiable car après toutes les simplifications, on tombe sur $\{\}$.

Le modèle est donné ici par la valeur affectée à chaque variables propositionnelles lors des simplifications :

$$\boxed{\begin{array}{ll} Q = 0 & S = 0 \\ P = 1 & R = 1 \end{array}}$$

Exercice 2 :

Soit $\varphi_2 \equiv (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

1) $nnf(\varphi_2) \equiv nnf(\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R)))$

$$\begin{aligned}
&\equiv nnf(\neg(\neg P \vee Q)) \vee nnf(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R)) \\
&\equiv (nnf(P) \wedge nnf(\neg Q)) \vee (nnf(\neg(\neg Q \vee R)) \vee nnf(\neg P \vee R)) \\
&\equiv (P \wedge \neg Q) \vee ((nnf(Q) \wedge nnf(\neg R)) \vee (nnf(\neg P) \vee nnf(R))) \\
&\equiv \underline{(P \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R))}
\end{aligned}$$

2) Le calcul des séquents avec le système vu en cours donne ceci :

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, R, P, Q}\,(ax) \qquad \dfrac{}{\vdash \neg P, R, P, \neg R}\,(ax)}{\vdash \neg P, R, Q\wedge\neg R, P}\,(\wedge)
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg P, R, \neg Q, Q}\,(ax) \qquad \dfrac{}{\vdash \neg P, R, \neg Q, \neg R}\,(ax)}{\vdash \neg P, R, Q\wedge\neg R, \neg Q}\,(\wedge)
  }{
    \dfrac{\vdash P\wedge\neg Q, Q\wedge\neg R, \neg P, R}{
      \dfrac{\vdash P\wedge\neg Q, Q\wedge\neg R, \neg P\vee R}{\vdash P\wedge\neg Q, (Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\vee R)}\,(\vee)
    }\,(\vee)
  }\,(\wedge)
}{\vdash (P\wedge\neg Q)\vee((Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\vee R))}\,(\vee)
$$

3) On voit que tout modèle aboutit à un axiome. Donc φ_2 est valide.

Exercice 3 :

a) On a la formule suivante :

$$\varphi_{3,\leq k} \overset{def}{=} \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{\substack{v\neq v' \\ v,v'\in V}} (\neg p_{i,v} \vee \neg p_{i,v'})$$

b)

$$\varphi_{3,c} \overset{def}{=} \bigwedge_{\{v,v'\}\in E} \bigvee_{i=1}^{k} (p_{i,v} \vee p_{i,v'})$$

c) On prenant la conjonction de $\varphi_{3,\leq k-1}$ et $\varphi_{3,c}$ on obtient la formule voulue :

$$\psi'_3 \equiv \varphi_{3,\leq k-1} \wedge \varphi_{3,c}$$
$$\equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{k-1} \bigwedge_{v \neq v'} (\neg Q_{i,v} \vee \neg Q_{i,v'}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\{v,v'\} \in E} \bigvee_{i=1}^{k} (Q_{i,v} \vee Q_{i,v'}) \right)$$

d) Moralement, si la plus petite couverture est de taille k, une couverture de taille k-1 ne peut pas exister.

On peut le modéliser par :

$$\boxed{\psi_3 \overset{\text{def}}{=} \bigwedge_{k=2}^{n} (\neg \psi'_{3,k-1} \wedge \psi'_{3,k})}$$

(car si $\psi'_{3,k-1}$ est satisfiable (il existe une couverture de taille k-1), alors la formule doit être fausse, autrement elle est vraie seulement si $\psi'_{3,k}$ est vrai)