Université
Paris Cité

Couplages

CM nº8 — Algorithmique (AL5)

Matěj Stehlík

17/11/2023

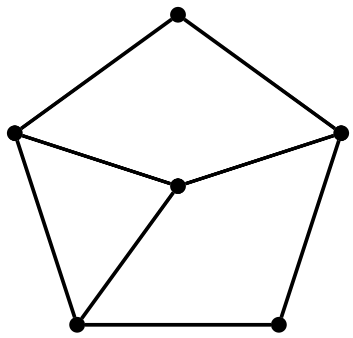
Couplages

Définition

- Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que $e \cap f = \varnothing$ pour toutes les arêtes $e, f \in M$.
- La taille maximum d'un couplage dans G est notée $\nu(G)$.

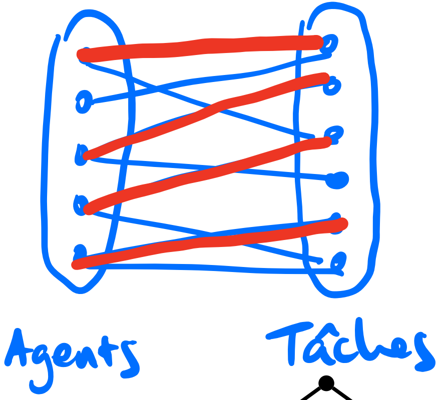
Application

Affectation de tâches.



couplage M

Couplages

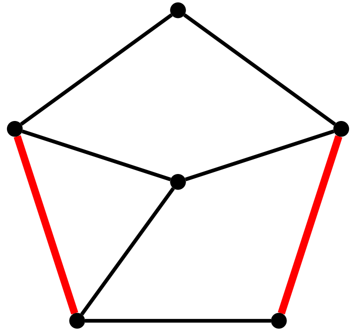


Définition

- Un *couplage* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que $e \cap f = \varnothing$ pour toutes les arêtes $e, f \in M$.
- La taille maximum d'un couplage dans G est notée $\nu(G)$. "nu"

Application

Affectation de tâches.



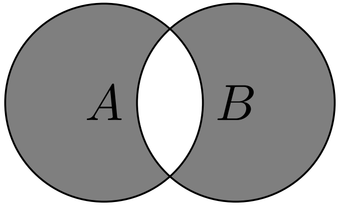
couplage M

La différence symétrique

Définition

La différence symétrique de A et B, notée $A \triangle B$, consiste des éléments dans A ou dans B, mais pas dans les deux.

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$



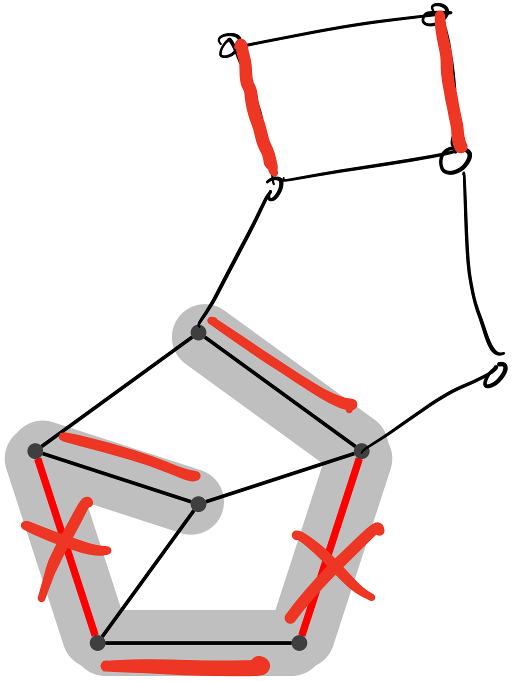
Chaînes alternées et augmentantes

Définition

- *Chaîne M-alternée* une chaîne dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M-augmentante* : chaîne M-alternée entre deux sommets non couplés.

Observation

Soit M un couplage dans un graphe et P une chaîne M-augmentante. Alors, $M \triangle P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.



couplage M

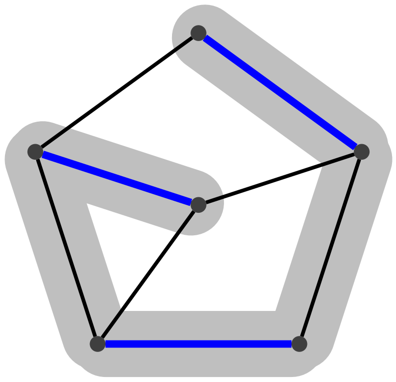
Chaînes alternées et augmentantes

Définition

- *Chaîne M-alternée* une chaîne dont les arêtes alternent entre celles de M et celles de $E \setminus M$.
- *Chaîne M-augmentante* : chaîne M-alternée entre deux sommets non couplés.

Observation

Soit M un couplage dans un graphe et P une chaîne M-augmentante. Alors, $M \triangle P$ est un couplage de taille $|M| + 1$.



couplage $M \triangle P$

Une caractérisation des couplages maximaux

Théorème de Berge

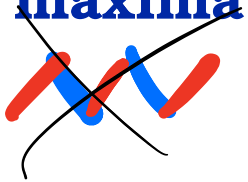
Un couplage M dans un graphe G est maximum ssi il n'y a pas de chaîne M-augmentante dans G.

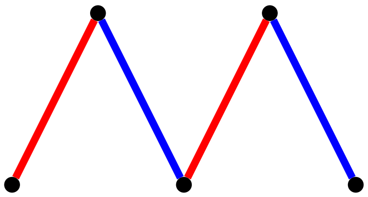
Démonstration

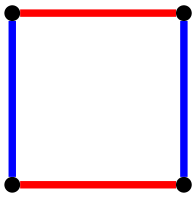
- S'il existe une chaîne M-augmentante, alors M n'est pas maximum.
- Supposons qu'il n'y a pas de chaîne M-augmentante.
- Soit M' un couplage maximum quelconque dans G.
- Les composantes connexes de $M \vartriangle M'$ consistent de cycles alternés (de longueur paire) et de chaînes alternées.

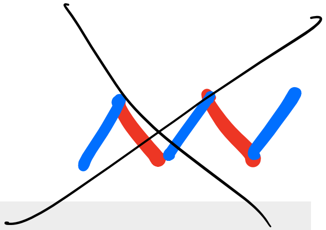
Une caractérisation des couplages maximaux

* Pas de chaîne M'-augmentante









Démonstration (suite)

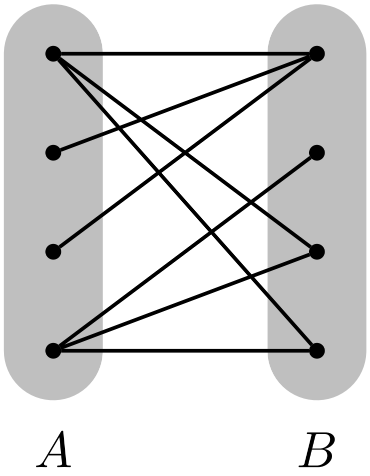
*

- Aucune chaîne alternée n'est M-augmentante par l'hypothèse.
- Donc toute composante connexe consistant d'une chaîne alternée est de longueur paire.
- On conclut que $|M| = |M'|$.

Couplages dans les graphes bipartis

- Le théorème de Berge fournit un algorithme pour trouver un couplage maximum :
  - commencer par un couplage de taille 1
  - s'il existe une chaîne augmentante, augmenter le couplage
  - répéter jusqu'à ce qu'il n'y a aucune chaîne augmentante.
- Chercher les chaîne augmentantes prend beaucoup de temps. . .
- Heureusement, il y a des algorithmes plus efficaces !
- Nous verrons que l'on peut utiliser l'algorithme de Ford–Fulkerson pour trouver un couplage maximum dans les graphes *bipartis*.

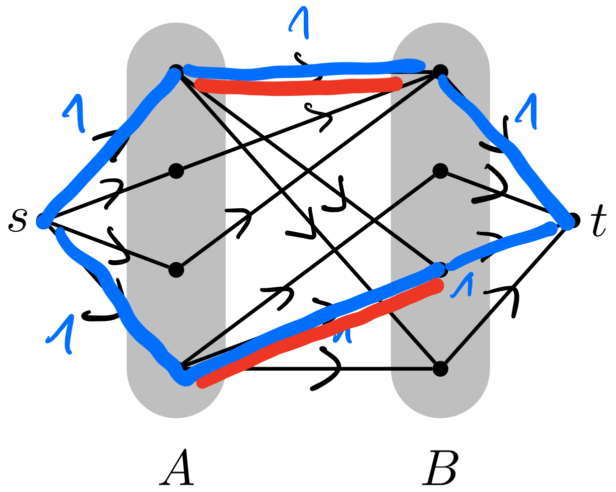
Graphes bipartis



- Un graphe $G = (V, E)$ est *biparti* s'il existe une partition $V = A \cup B$ telle que toutes les arêtes ont une extrémité dans A et l'autre dans B.
- On peut montrer qu'un graphe est biparti ssi il ne contient aucun cycle impair.

Comment passer des couplages aux flots

(A et B ici ne correspondent pas à A et B dans les s-t-coupes)



- Ajouter deux nouveaux sommets s et t
- Ajouter une arête entre s et chaque sommet de A
- Ajouter une arête entre t et chaque sommet de B
- Orienter toutes les arêtes de gauche à droite
- Donner une capacité de 1 à chaque arc.

$f(e) = 0$ ou 1 dans tous les arcs

Observation

Un flot entier f dans le réseau correspond à un couplage M dans le graphe original, où $\text{val}(f) = |M|$.

Algorithme pour les couplages maximaux dans les graphes bipartis

- Il suffit d'appliquer l'algorithme de Ford–Fulkerson au réseau construit !
- Comme toutes les capacités sont entières, l'algorithme va terminer.
- De plus, la valeur d'un flot maximum est de $O(n)$ car $\text{cap}(\{s\}, A \cup B \cup \{t\}) \leq n$.
- Donc, l'algorithme termine au bout de $O(n)$ itérations de la boucle `while`.
- Nous avons donc un algorithme de couplage maximum dans les graphes bipartis de complexité $O(mn)$. $O(n^3)$
- Cette complexité peut être amélioré à $O(m\sqrt{n})$ (algorithme de Hopcroft–Karp). $O(n^{2,5})$

Couplages et transversaux

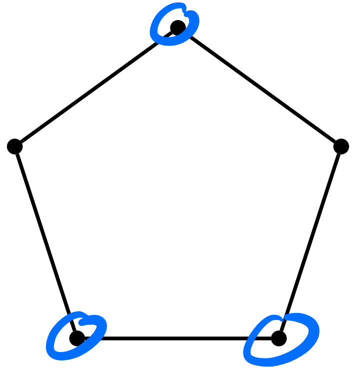
Définition

hitting set, vertex cover

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ tel que $T \cap e \neq \varnothing$ pour toute arête $e \in E$.
- La taille minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque

- Toute arête dans un couplage doit intersecter un sommet différent dans un transversal, donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.



couplage M

transversal T

$\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$

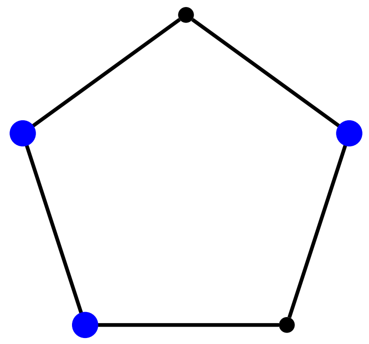
Couplages et transversaux

Définition

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ tel que $T \cap e \neq \varnothing$ pour toute arête $e \in E$.
- La taille minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque

- Toute arête dans un couplage doit intersecter un sommet différent dans un transversal, donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.



couplage M

transversal T

$\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$

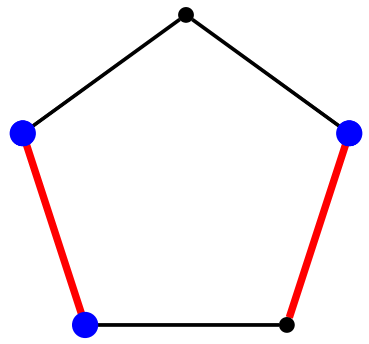
Couplages et transversaux

Définition

- Un *transversal* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ tel que $T \cap e \neq \varnothing$ pour toute arête $e \in E$.
- La taille minimum d'un transversal dans G est notée $\tau(G)$.

Remarque

- Toute arête dans un couplage doit intersecter un sommet différent dans un transversal, donc $\tau(G) \geq \nu(G)$.



couplage M

transversal T

$\nu(G) = 2 < 3 = \tau(G)$

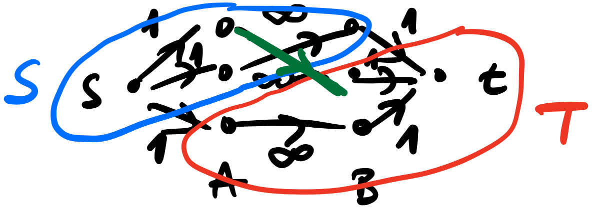
Le théorème de Kőnig

Théorème de Kőnig

Si G est biparti, alors $\tau(G) = \nu(G)$.

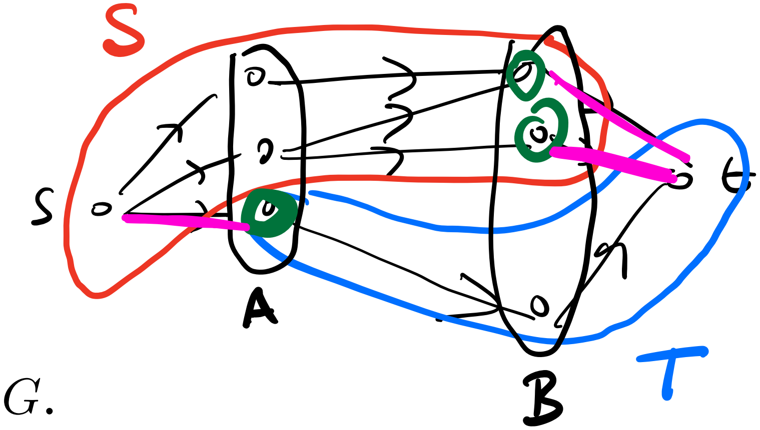
- Imaginons qu'il faut convaincre quelqu'un qu'un graphe G n'a pas de couplage de taille k.
- Un transversal de taille $k - 1$ est un *certificat* de la non existence d'un couplage de taille k (grâce à l'inégalité $\nu(G) \leq \tau(G)$)
- Malheureusement, ce type de certificat peut ne pas exister (par exemple, considérez le 5-cycle avec $k = 3$).
- Le théorème de Kőnig garantit l'existence d'un tel certificat *dans les graphes bipartis*.

Démonstration du théorème de Kőnig (1/2)



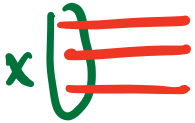
- Soit M un couplage (maximum) de $G = (V, E)$ de taille $\nu(G)$.
- Ajouter une source s et un puits t, et orienter les arcs de s vers t comme avant.
- Les capacités de tous les arcs incidents à s et t sont 1.
- Par contre, les capacités des autres arcs sont ∞.
- La capacité d'une s–t coupe minimale est finie, car $\operatorname{cap}(\{s\}, V \cup \{t\})$ est fini.
- Soit (S, T) une s–t coupe minimum dans G'.
- Aucun arc de A à B ne traverse la coupe (S, T) (sinon la capacité serait infinie).

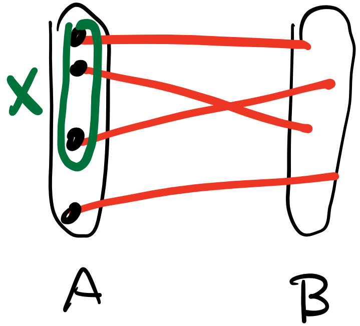
Démonstration du théorème de Kőnig (2/2)



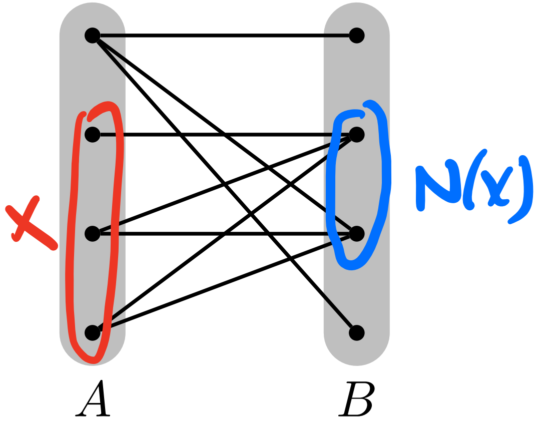
- Donc, $(A \setminus S) \cup (B \setminus T)$ est un transversal de G.
- Les arcs traversant la coupe (S, T) sont précisément les arcs de s à $A \cap T$ et les arcs de $B \cap S$ à t.
- Donc, $\text{cap}(S, T) = |A \cap T| + |B \cap S| = |A \setminus S| + |B \setminus T|$.
- Donc, $(A \setminus S) \cup (B \setminus T)$ est un transversal de G de taille $\text{cap}(S, T)$.
- On sait que $\text{cap}(S, T) = |M|$ grâce au théorème de flot max – coupe min.

Théorème de Hall





- Si $G = (A, B)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq V(G)$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats le plus importants de la théorie des couplages.

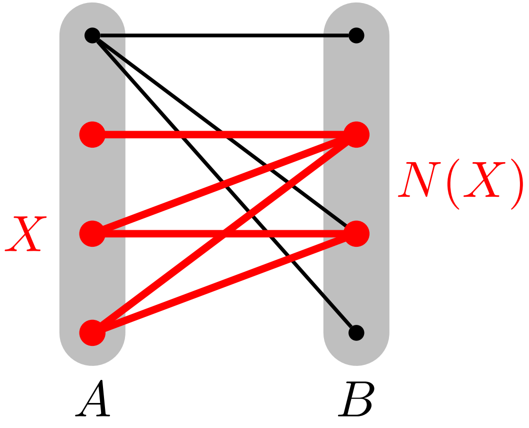


Théorème de Hall

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq A$.

Théorème de Hall

- Si $G = (A, B)$ est un graphe biparti tel que G admet un couplage qui couvre tous les sommets de A, alors forcément $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq V(G)$.
- Hall a montré que cette condition nécessaire triviale est aussi suffisante.
- Son théorème est l'un des résultats le plus importants de la théorie des couplages.



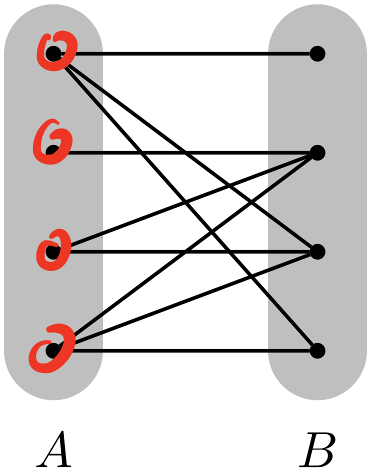
Théorème de Hall

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage couvrant tous les sommets de A ssi $|N(X)| \geq |X|$ pour tous $X \subseteq A$.

Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimal de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.

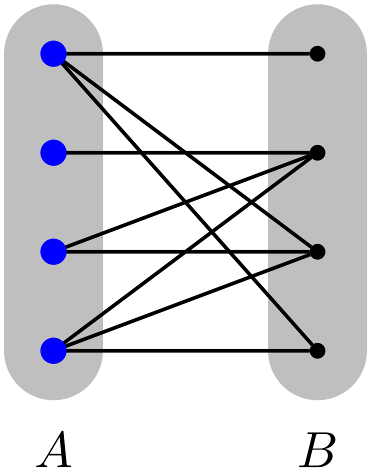


On veut montrer que $|T|=|A|$, car si c'est le cas, König implique que $\nu(G)=|A|$

Démonstration du théorème de Hall (1/2)

Démonstration

- La nécessité est évidente.
- Inversement, supposons que $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.
- Soit T un transversal minimal de G, càd, $|T| = \tau(G)$.
- On a $|T| \leq |A|$.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

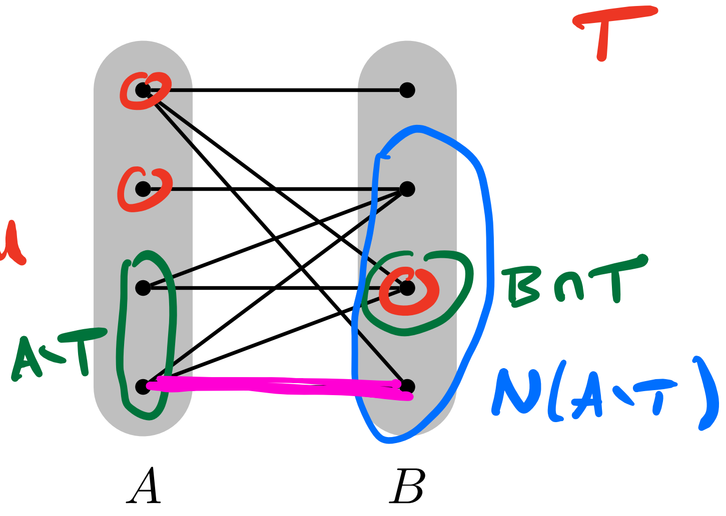
- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.

  $< |A|$

- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.

  grâce à la cond de Hall

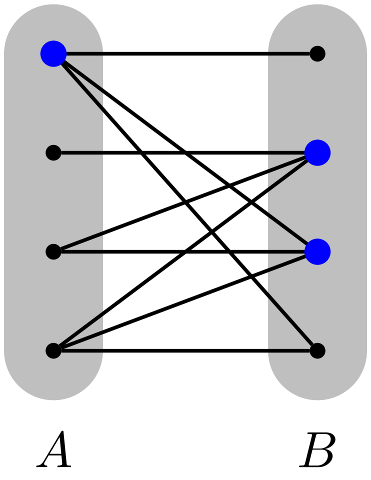
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

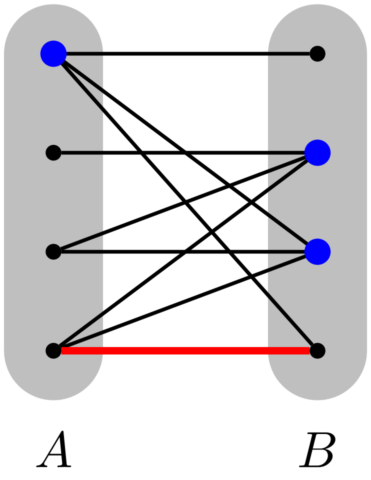
- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.



Démonstration du théorème de Hall (2/2)

Démonstration (suite)

- Supposons par l'absurde que $|T| < |A|$.
- Comme $|T| = |T \cap A| + |T \cap B|$, on a $|A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc $|N(A \setminus T)| \geq |A \setminus T| = |A| - |A \cap T| > |B \cap T|$.
- Donc il existe une arête avec une extrémité dans $A \setminus T$ et l'autre dans $B \setminus T$, contradiction avec l'hypothèse que T est un transversal.

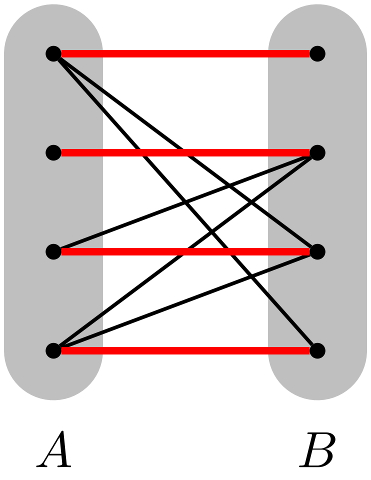


Conséquences du théorème de Hall

- Un couplage dans un graphe G est *parfait* si tous les sommets de G sont couverts.

Le lemme des mariages

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti. Alors G a un couplage parfait ssi $|A| = |B|$ et $|N(X)| \geq |X|$ pour tout $X \subseteq A$.



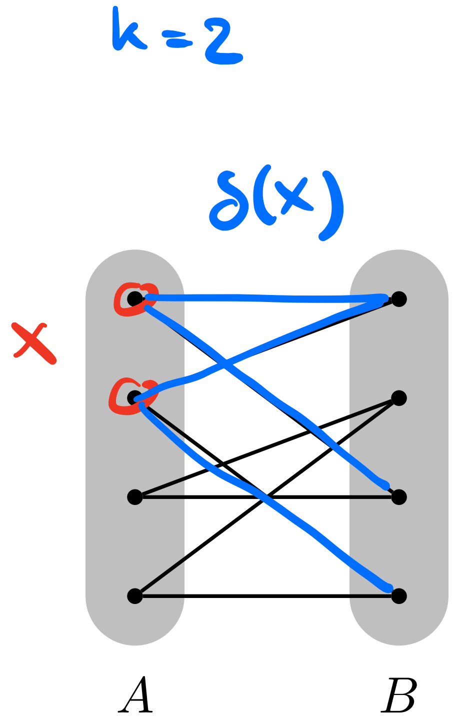
Couplages dans les graphes bipartis réguliers (1/2)

Corollaire

Soit $G = (A, B)$ un graphe biparti k-régulier (tous les sommets sont de degré k), pour un entier $k \geq 1$. Alors G a un couplage parfait.

Démonstration

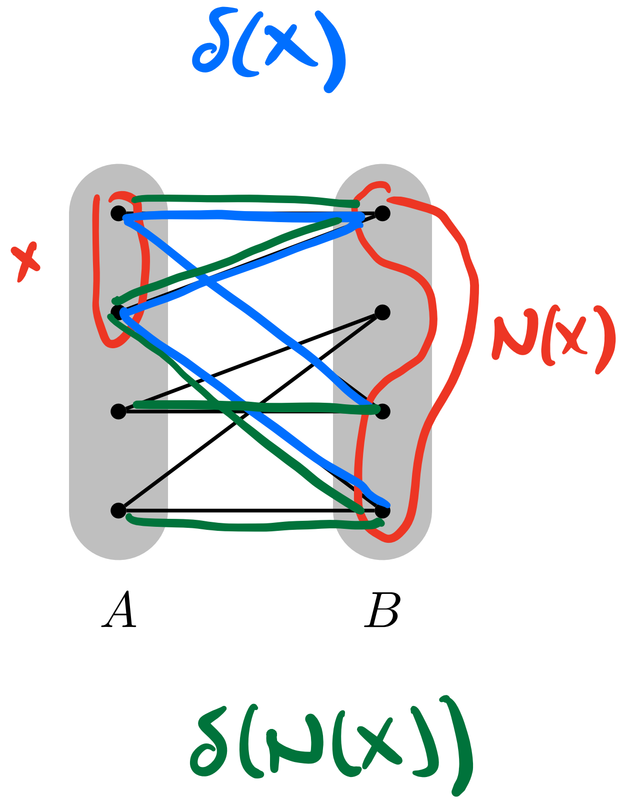
- Comme $k|A| = |\delta(A)| = |\delta(B)| = k|B|$, on a $|A| = |B|$.
- Soit $X \subseteq A$.
- Grâce à la régularité de G, $|\delta(X)| = k|X|$.



Couplages dans les graphes bipartis réguliers (2/2)

Démonstration (suite)

- Comme $\delta(X) \subseteq \delta(N(X))$, on obtient $k|X| = |\delta(X)| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|$.
- Donc, G a un couplage parfit par le lemme des mariages.



Une application aux cartes

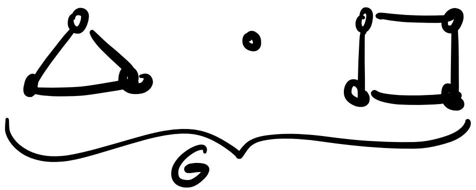
Exercise

On distribue un jeu de 52 cartes en faisant treize paquets de quatre cartes chacun. Il est possible de prendre une carte de chaque paquet de telle façon qu'on termine avec treize cartes contenant toutes les valeurs (un as, un 2, et ainsi de suite jusqu'à un roi).

Couplages dans les graphes non bipartis

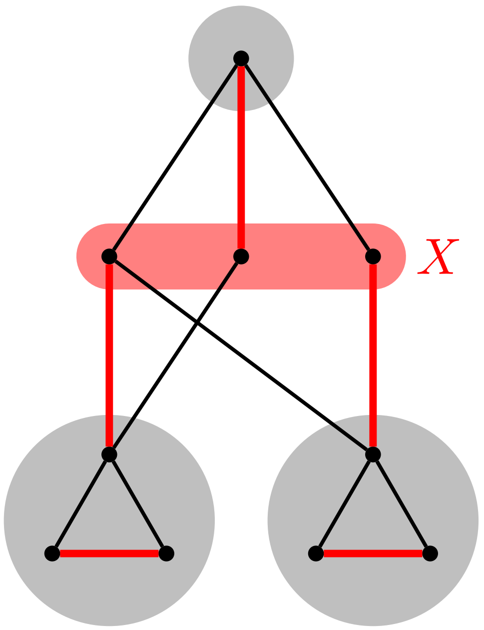
- Qu'en est-il de couplages dans les graphes *non bipartis*?
- Dans ce cas, on ne peut pas réduire le problème aux flots.
- Cependant, l'algorithme de Edmonds peut résoudre le problème de couplage maximum dans un graphe en temps $O(mn^2)$.
- L'algorithme se repose sur les chaînes augmentantes, mais il est trop complexe pour présenter dans ce cours.
- Edmonds a aussi donné un algorithme pour trouver un couplage de *poids* maximum, aussi de complexité $O(mn^2)$.

Couplages dans les graphes non bipartis



$q(G) = 2$

- Soit $q(G)$ le nombre de composantes impaires de G (ayant nombre de sommets impair).
- Si G a un couplage parfait, alors $q(G - X) \leq |X|$, pour tout $X \subseteq V(G)$.
- Tutte a prouvé que c'est une condition *suffisante* pour l'existence d'un couplage parfait.



$|X| = 3$

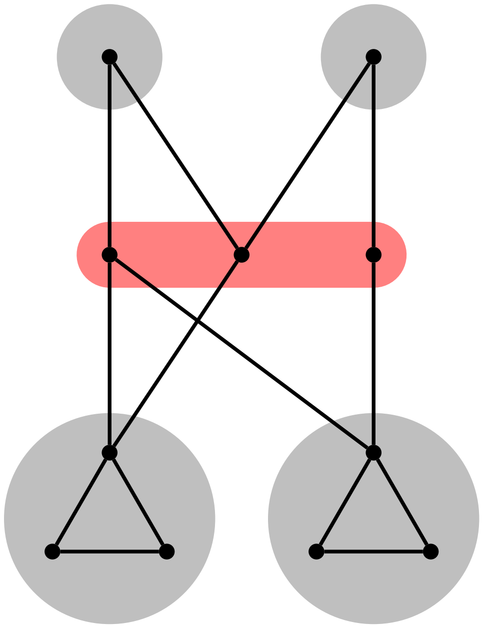
$q(X) = 3$

Couplages dans les graphes non bipartis

- Le théorème peut être considéré comme la version non bipartie du théorème des mariages.

Théorème de Tutte

Un graphe G a un couplage parfait ssi $q(G - X) \leq |X|$ pour tout $X \subseteq V(G)$.

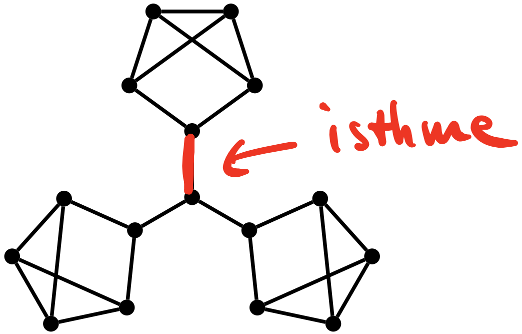


$|X| = 3$

$q(X) = 4$

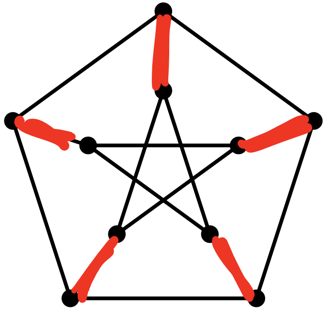
Application du théorème de Tutte

- Un graphe est 3-*régulier* (ou *cubique*) si tous les sommets sont de degré 3.
- Un *isthme* est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.



Théorème de Petersen

Tout graphe 3-régulier sans isthme a un couplage parfait.

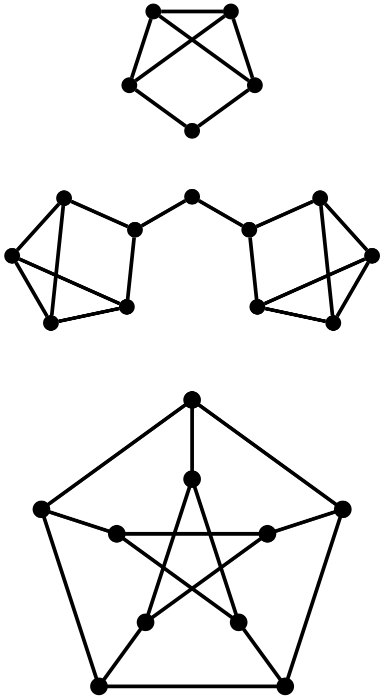


Application du théorème de Tutte

- Un graphe est 3-*régulier* (ou *cubique*) si tous les sommets sont de degré 3.
- Un *isthme* est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

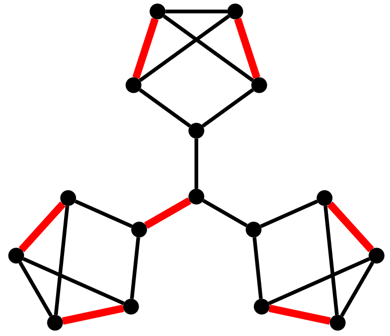
Théorème de Petersen

Tout graphe 3-régulier sans isthme a un couplage parfait.



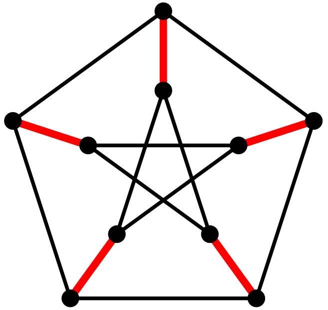
Application du théorème de Tutte

- Un graphe est 3-*régulier* (ou *cubique*) si tous les sommets sont de degré 3.
- Un *isthme* est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

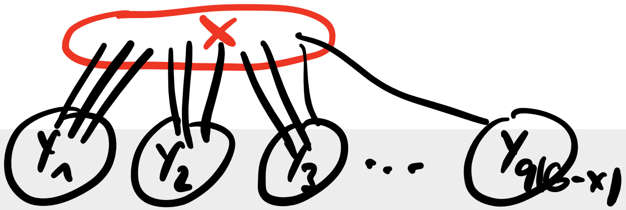


Théorème de Petersen

Tout graphe 3-régulier sans isthme a un couplage parfait.



Application du théorème de Tutte



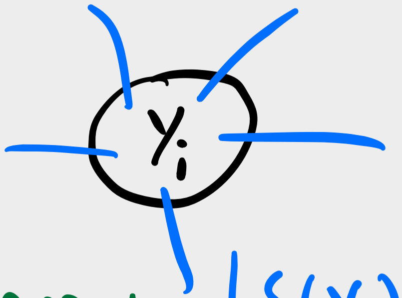
Démonstration

- Supposons par l'absurde que G n'a pas de couplage parfait.
- Par le théorème de Tutte, G contient un ensemble X tel que $q(G - X) > |X|$.
- Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{q(G-X)}$ les ensembles de sommets des composantes impaires de $G - X$.

pair ⇒ impair

impair

- On a $3|Y_i| = \sum_{v \in Y_i} d(v) = 2|E(G[Y_i])| + |\delta(Y_i)|$.
- En particulier, $|\delta(Y_i)|$ est impair.
- Comme G n'a pas d'isthmes, $|\delta(Y_i)| \geq 3$ pour tout i.
- Donc, $|\delta(X)| \geq \sum_{i=1}^{c(G-X)} |\delta(Y_i)| \geq 3q(G - X) > 3|X|$. ← on compte les arêtes qui sortent de Y_1, Y_2 ...
- Or, $|\delta(X)| \leq 3|X|$; contradiction. ← on compte les arêtes qui sortent de X



$|\delta(Y_i)|$ est impair