

# FTML 2025 – Exercice 1

## Estimateur de Bayes

Marc GUILLEMOT, Emre ULUSOY, Rayan DRISSI, Gabriel MONTEILLARD

July 5, 2025

### Objectif

Définir un problème supervisé avec une fonction de perte, en déduire l'estimateur de Bayes  $f^*(x)$  qui minimise le risque conditionnel, puis simuler des données pour le visualiser et calculer le Bayes Risk.

### Cadre du problème

**Contexte choisi : prédiction de la température corporelle d'un patient à partir de la température extérieure.**

- $X \in \mathbb{R}$  : température extérieure en °C
- $Y \in \mathbb{R}$  : température corporelle du patient
- Distribution conjointe :

$$Y = 37 + 0.1 \cdot (X - 20) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 0.5^2)$$

- Fonction de perte :

$$\ell(y', y) = (y' - y)^2$$

### Estimateur de Bayes

Par définition, l'estimateur de Bayes est l'espérance conditionnelle :

$$f^*(x) = \mathbb{E}[Y \mid X = x] = 37 + 0.1 \cdot (x - 20)$$

### Risque de Bayes

Le risque de Bayes est la perte quadratique moyenne atteinte par l'estimateur optimal :

$$R(f^*) = \mathbb{E}[(f^*(X) - Y)^2] = \mathbb{E}[\varepsilon^2] = \text{Var}(\varepsilon) = 0.25$$

## Simulation numérique

Un jeu de données de  $N = 10^6$  points est généré selon la distribution ci-dessus. La visualisation suivante montre que l'estimateur  $f^*$  suit bien la moyenne conditionnelle :

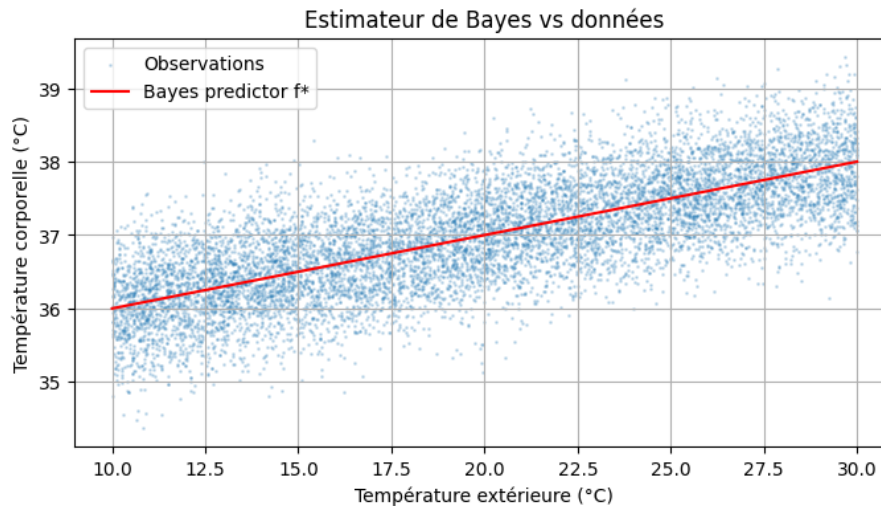


Figure 1: Estimateur de Bayes  $f^*(x)$  sur les données simulées

## Comparaison empirique

On compare  $f^*$  à un estimateur constant naïf  $f_{\text{naïf}}(x) = \mathbb{E}[Y]$ . Le risque empirique est mesuré via la MSE :

- Risque de Bayes (empirique) : **0.2506**
- Risque de l'estimateur naïf : **0.5841**
- Gain absolu : **0.3334**
- Ratio : **2.33x** meilleur

## Conclusion

L'estimateur de Bayes permet de diviser par plus de deux le risque quadratique par rapport à une prédiction constante, confirmant ainsi l'intérêt théorique et pratique de modéliser correctement la dépendance conditionnelle de  $Y$  en  $X$ . Ce résultat valide également la qualité de la simulation.