Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)

Interrogation 2 : Logique, ensembles, fonctions et Complexes

Exercice 1. ($\approx$ 3.5 pts)

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Rappeler les définitions d'injectivité, surjectivité et bijectivité, ainsi que leurs négations.

2. Soit $A = \{\pi, \sqrt{3}, 10\}$ et $B = \{0, 1\}$

   a) Est-il possible de construire une surjection de A vers B ? Si oui, construire une telle surjection. Si non, donner une courte justification.

   b) Est-il possible de construire une injection de A vers B ? Si oui, construire une telle injection. Si non, donner une courte justification.

Correction.

1. Injectivité : $\forall (x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$

Négation injectivité : $\exists (x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$

Surjectivité : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

Négation surjectivité : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$

Bijectivité : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

Négation bijectivité : $\exists y \in \mathbb{R}, (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y) \vee (\exists x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = y)$

2. a) Oui, on peut construire une surjection définie par $f(\pi) = f(\sqrt{3}) = 0$ et $f(10) = 1$.

   b) Non, on ne peut pas construire une telle injection car $\mathrm{Card}(A) > \mathrm{Card}(B)$

Exercice 2. ($\approx$ 5.5 pts)

1. Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué et le module des complexes suivants

   a) $z_1 = -6i - 2$

   b) $z_2 = 9$

   c) $z_3 = i(2 + 3i)$

   d) $z_4 = 3i$

2. Donner le module et un argument des complexes suivants.

   a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

   b) $z_2 = i^{34}$

   c) $z_3 = e^{e^{i\beta}}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

Correction.

1. a) $\mathrm{Re}(z_1) = -2$, $\mathrm{Im}(z_1) = -6$, $\bar{z}_1 = 6i - 2$, $|z_1| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

   b) $\mathrm{Re}(z_2) = 9$, $\mathrm{Im}(z_2) = 9$, $\bar{z}_2 = 9$, $|z_2| = 9$

   c) $\mathrm{Re}(z_3) = -3$, $\mathrm{Im}(z_3) = 2$, $\bar{z}_3 = -2i - 3$, $|z_3| = \sqrt{13}$

   d) $\mathrm{Re}(z_4) = 0$, $\mathrm{Im}(z_4) = 3$, $\bar{z}_4 = -3i$, $|z_4| = 3$

2. a) $|z_1| = 6$, $\arg(z_1) = \dfrac{3\pi}{4}$

   b) $|z_2| = 1$, $\arg(z_2) = \pi$

   c) $|z_3| = e^{\cos(\beta)}$, $\arg(z_3) = \sin(\beta)$

Exercice 3. (≈ 2 pts)

1. Mettre sous forme algébrique $z_1 = \dfrac{2-i}{1+i}$

2. Mettre sous forme exponentielle $z_2 = 1 - i$

Correction.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2-i}{1+i} \\ &= \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2-2i-i+i^2}{1^2+1^2} \\ &= \frac{1-3i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 1-i \\ &= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$