

Licence 1ère année, MATHÉMATIQUES ET CALCUL 1 (MC1)
Interrogation 2 : Logique, ensembles, fonctions et Complexes

Exercice 1. (≈ 3.5 pts)

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rappelez les définitions d'injectivité, surjectivité et bijectivité, ainsi que leurs négations.
- Soit $A = \{\pi, \sqrt{3}, 10\}$ et $B = \{0, 1\}$
 - Est-il possible de construire une surjection de A vers B ? Si oui, construire une telle surjection. Si non, donner une courte justification.
 - Est-il possible de construire une injection de A vers B ? Si oui, construire une telle injection. Si non, donner une courte justification.

Correction.

- Injectivité : $\forall (x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = f(x') \implies x = x'$
Négation injectivité : $\exists (x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$
Surjectivité : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$
Négation surjectivité : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$
Bijectivité : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, y = f(x)$
Négation bijectivité : $(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y) \vee (\exists x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'))$
- Oui, on peut construire une surjection définie par $f(\pi) = f(\sqrt{3}) = 0$ et $f(10) = 1$.
 - Non, on ne peut pas construire une telle injection car $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$

Exercice 2. (≈ 5.5 pts)

- Donner la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué et le module des complexes suivants
 - $z_1 = -6i - 2$
 - $z_2 = 9$
 - $z_3 = i(2 + 3i)$
 - $z_4 = 3i$
- Donner le module et un argument des complexes suivants.
 - $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3e^{i\frac{\pi}{2}}$
 - $z_2 = i^{34}$
 - $z_3 = e^{e^{i\beta}}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$

Correction.

- $\text{Re}(z_1) = -2, \text{Im}(z_1) = -6, \bar{z}_1 = 6i - 2, |z_1| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
 - $\text{Re}(z_2) = 9, \text{Im}(z_2) = 0, \bar{z}_2 = 9, |z_2| = 9$
 - $\text{Re}(z_3) = -3, \text{Im}(z_3) = 2, \bar{z}_3 = -2i - 3, |z_3| = \sqrt{13}$
 - $\text{Re}(z_4) = 0, \text{Im}(z_4) = 3, \bar{z}_4 = -3i, |z_4| = 3$
- $|z_1| = 6, \arg(z_1) = \frac{3\pi}{4}$
 - $|z_2| = 1, \arg(z_2) = \pi$
 - $|z_3| = e^{\cos(\beta)}, \arg(z_3) = \sin(\beta)$

Exercice 3. (≈ 2 pts)

1. Mettre sous forme algébrique $z_1 = \frac{2-i}{1+i}$

2. Mettre sous forme exponentielle $z_2 = 1-i$

Correction.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2-i}{1+i} \\ &= \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2-2i-i+i^2}{1^2+1^2} \\ &= \frac{1-3i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 1-i \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$
