L'intégral des démos bac

1 Suite croissante convergente

1.1 Énoncé

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers une limite finie l.
Alors $\forall_n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.

1.2 Démonstration

Raisonnons par l'absurde:
Supposons que: $\exists_{n_0} \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > l$.
Alors, comme la suite u_n est croissante: $\forall_n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > l$.
L'intervalle ouvert $]l-1; u_{n_0}[$ contient l, mais ne peut contenir les u_n que pour $n < n_0$, donc il ne peut pas contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Cela contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Donc $\forall_n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.

2 Suite croissante non majorée

2.1 Énoncé

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

2.2 Démonstration

Soit (u_0) une suite croissante non majorée.
Soit A un réel quelconque.
Comme la suite n'est pas majorée par A, $\exists_N \in \mathbb{N}$, $u_N > A$
Comme la suite est croissante, $\forall_n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$.
Tous les termes de la suite sont donc dans l'intervalle $]A; +\infty[$ à partir d'un certain rang N.
Donc $\forall_A \in \mathbb{R}$, $\exists_N \in \mathbb{N}$, $\forall_n \geq N$, $u_n > A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3 Limites des suites géométriques

3.1 Énoncé

$q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

3.2 Démonstration

Soit $q > 1$.
Alors $\exists_a \in \mathbb{R}_+^*$, $q = 1 + a$.

Soit $\forall_n \in \mathbb{N}$, P_n : "$q^n \geq 1 + na$".
INITIALISATION:
Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $q^0 \geq 1 + 0 \times a$. La récurrence est donc initialisée.
HÉRÉDITÉ:
Supposons que pour un certain n quelconque de $\mathbb{N}$, P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.
HR: $q^n \geq 1 + na$
Mq: $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$

On a: $q^{n+1} = q \times q^n = q^n(1+a)$
Or, par HR, $q^n \geq 1 + na$
Donc $q^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + a(n+1) + na^2$
Or, comme $n \geq 0$ et $a^2 > 0$, $na^2 \geq 0$
Donc $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$
CONCLUSION:
P_0 est vraie, $\forall_n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence, $\forall_n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1 + na$.

Comme $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$.
Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

4 Prérequis (Fonction exponentielle)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $\forall_x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

5 1ère Démo (Fonction exponentielle)

5.1 Énoncé

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Alors, $\forall_x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

5.2 Démonstration

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction $u : x \to f(-x)$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -f'(x)$.
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) =& f'(x) \times u(x) + f(x) \times u'(x) \\ =& f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ =& f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \quad : f' = f \\ =& 0 \end{aligned}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $g(0) = f(0)f(-0) = (f(0))^2 = 1$.
Donc $\forall_x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1$.

De plus, si $\exists_{x_0} \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$, alors $f(x_0) \times f(-x_0) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent.
Donc $\forall_x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

6 Unicité de la fonction exponentielle

6.1 Énoncé

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, et on la note *exp*.

6.2 Démonstration

ÉXISTENCE:
L'existence de la fonction exponentielle est admise.
UNICITÉ:
Soit g une autre fonction définie et dérivable sur sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
D'après la propriété précédente, $\forall_x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$, on peut donc définir la fonction:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

Montrons que $\forall_x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\forall_x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2} \\
&= \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} \qquad : f' = f;\ g' = g \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$.
Donc $\forall_x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$.
Donc $f = g$.

7 1ère Démo (Intégration)

7.1 Énoncé

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
Alors la fonction F définie sur $[a; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$$

est dérivable sur $[a; b]$ et, pour tout x de [a;b], $F'(x) = f(x)$.
Plus précisément, F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a.

7.2 Démonstration

Conformément au programme de TS, on montre ce théorème uniquement lorsque f est croissante sur $[a; b]$.

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$. Soit $x_0 \in [a; b]$ et $h > 0$ tq $x_0 + h \in [a; b]$.

Idée: On va encadrer $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ pour calculer sa limite quand $h \to 0$

On a, d'après la relation de Chasles:

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}-\int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{dt}=\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}+\int_{x_0}^{a} f(t)\ \mathrm{dt}=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}$$

Remarque: Comme f est croissante sur $[a;b]$, le domaine $\mathscr{D}$ est compris entre les rectangles de base $[x_0;x_0+h]$ et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$, ce qui va nous permettre d'encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}$.

Comme f est croissante sur $[a;b]$, on a l'encadrement:

$$(x_0+h-x_0)\times f(x_0)\leq\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}\leq(x_0+h-x_0)\times f(x_0+h)$$

C'est à dire:

$$h\times f(x_0)\leq\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}\leq h\times f(x_0+h)$$

D'où, en divisant pas $h>0$:

$$f(x_0)\leq\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}}{h}\leq f(x_0+h)$$

Soit encore, puisque $F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{dt}$:

$$f(x_0)\leq\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leq f(x_0+h)$$

En procédant de même pour $h<0$, on obtient: $f(x_0+h)\leq\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leq f(x_0)$.
Comme f est continue sur $[a;b]$, on a donc en x_0 $\lim\limits_{h\to0} f(x_0+h)=f(x_0)$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$. Donc F est dérivable sur x_0 avec $F'(x_0)=f(x_0)$.
Ceci étant vrai pour tout x_0 de $[a;b]$, F est dérivable sur $[a;b]$ et $F'=f$.

8 2ème Démo (Intégration)

8.1 Énoncé

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

8.2 Démonstration

On se place dans le cas où f est définie sur l'intervalle **fermé** $[a;b]$.
On admet que, dans ce cas, f admet un minimum m sur $[a;b]$.
La fonction $g:x\mapsto f(x)-m$ est alors continue et positive sur $[a;b]$.
Elle admet donc une primitive G sur $[a;b]$: $\forall_x\in$[a ;b], $G'(x)=f(x)-m$.
Soit $\forall_x\in$[a ;b], $F:x\mapsto G(x)+mx$.
Alors F est dérivable sur $[a;b]$ et, pour tout $x\in$[a ;b]:

$$F'(x)=G'(x)+m=g(x)-m=f(x)-m+m=f(x)$$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a;b]$.