

# L'intégral des démos bac

## 1 Suite croissante convergente

### 1.1 Énoncé

Soit  $(u_n)$  une suite croissante qui converge vers une limite finie  $l$ .

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$ .

### 1.2 Démonstration

Raisonnons par l'absurde:

Supposons que:  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > l$ .

Alors, comme la suite  $u_n$  est croissante:  $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > l$ .

L'intervalle ouvert  $]l - 1; u_{n_0}[$  contient  $l$ , mais ne peut contenir les  $u_n$  que pour  $n < n_0$ , donc il ne peut pas contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Cela contredit le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$ .

## 2 Suite croissante non majorée

### 2.1 Énoncé

Une suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$ .

### 2.2 Démonstration

Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée.

Soit  $A$  un réel quelconque.

Comme la suite n'est pas majorée par  $A$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > A$ .

Comme la suite est croissante,  $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > A$ .

Tous les termes de la suite sont donc dans l'intervalle  $]A; +\infty[$  à partir d'un certain rang  $N$ .

Donc  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## 3 Limites des suites géométriques

### 3.1 Énoncé

$q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

### 3.2 Démonstration

Soit  $q > 1$ .

Alors  $\exists a \in \mathbb{R}_+^*, q = 1 + a$ .

Soit  $\forall n \in \mathbb{N}, P_n: "q^n \geq 1 + na"$ .

INITIALISATION:

Pour  $n = 0$ ,  $q^0 = 1$  et  $1 + 0 \times a = 1$ , donc  $q^0 \geq 1 + 0 \times a$ . La récurrence est donc initialisée.

HÉRÉDITÉ:

Supposons que pour un certain  $n$  quelconque de  $\mathbb{N}$ ,  $P_n$  soit vraie. Montrons que  $P_{n+1}$  est vraie.

HR:  $q^n \geq 1 + na$

Mq:  $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$

On a:  $q^{n+1} = q \times q^n = q^n(1 + a)$

Or, par HR,  $q^n \geq 1 + na$

Donc  $q^{n+1} \geq (1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + a(n + 1) + na^2$

Or, comme  $n \geq 0$  et  $a^2 > 0$ ,  $na^2 \geq 0$

Donc  $q^{n+1} \geq 1 + a(n + 1)$

La propriété est donc héréditaire.

CONCLUSION:

$P_0$  est vraie,  $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$ , donc d'après le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1 + na$ .

$a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$ .

Donc d'après le théorème de comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

## 4 Prérequis (Fonction exponentielle)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si  $\forall x \in I, f'(x) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

## 5 1ère Démo (Fonction exponentielle)

### 5.1 Énoncé

Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .

Alors,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$  et  $f(x) \neq 0$ .

### 5.2 Démonstration

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) \times f(-x)$ .

Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , il en est de même de la fonction  $u : x \rightarrow f(-x)$  et, pour  $x \in \mathbb{R}, u'(x) = -f'(x)$ .

Donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times u(x) + f(x) \times u'(x) \\ &= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \quad : f' = f \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs,  $g(0) = f(0)f(-0) = (f(0))^2 = 1$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1$ .

De plus, si  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$ , alors  $f(x_0) \times f(-x_0) = 0$ , ce qui contredit le résultat précédent.

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ .

## 6 Unicité de la fonction exponentielle

### 6.1 Énoncé

Il existe une unique fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .  
Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, et on la note  $\exp$ .

### 6.2 Démonstration

EXISTENCE:

L'existence de la fonction exponentielle est admise.

UNICITÉ:

Soit  $g$  une autre fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g' = g$  et  $g(0) = 1$ .  
D'après la propriété précédente,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ , on peut donc définir la fonction:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

Montrons que  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$ .

La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2} \\ &= \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} : f' = f; g' = g \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$ .

Donc  $f = g$ .

## 7 Limites de la fonction exponentielle

### 7.1 Énoncé

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

### 7.2 Démonstration

LIMITE EN  $+\infty$

Montrons que:  $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x > x$ .

Soit  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = e^x - x$ .

$f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = e^x - 1$ .

$\forall x \geq 0, e^x > 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

Donc  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  et comme  $f(0) = e^0 = 1$ ,

$\forall x \geq 0, f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > x$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , on a, par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

LIMITE EN  $-\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

D'où:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

## 8 1ère Démonstration (Intégration)

### 8.1 Énoncé

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ .

Alors la fonction  $F$  définie sur  $[a; b]$  par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur  $[a; b]$  et  $\forall x \in [a; b], F'(x) = f(x)$ .

Plus précisément,  $F$  est la primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  qui s'annule en  $a$ .

### 8.2 Démonstration

*L'on ne montrera ce théorème que lorsque  $f$  est croissante sur  $[a; b]$ .*

Soit  $f$  une fonction continue, positive et croissante sur  $[a; b]$ .

Soient  $x_0 \in [a; b]$  et  $h > 0$  tel que  $x_0 + h \in [a; b]$ .

*Idée: On va encadrer  $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$  pour calculer sa limite quand  $h \rightarrow 0$*

On a, d'après la relation de Chasles:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_a^{x_0+h} f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

*Remarque: Comme  $f$  est croissante sur  $[a; b]$ , le domaine  $\mathcal{D}$  est compris entre les rectangles de base  $[x_0; x_0 + h]$  et de hauteurs  $f(x_0)$  et  $f(x_0 + h)$ , ce qui va nous permettre d'encadrer  $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ .*

Comme  $f$  est croissante sur  $[a; b]$ , on a l'encadrement:

$$(x_0 + h - x_0) \times f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq (x_0 + h - x_0) \times f(x_0 + h)$$

C'est à dire:

$$h \times f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq h \times f(x_0 + h)$$

D'où, en divisant par  $h > 0$ :

$$f(x_0) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Soit encore, puisque  $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ :

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

En procédant de même pour  $h < 0$ , on obtient:  $f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$ .

Comme  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , on a donc en  $x_0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ .

Donc d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$ . Donc  $F$  est dérivable sur  $x_0$  avec  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

Ceci étant vrai pour tout  $x_0$  de  $[a; b]$ ,  $F$  est dérivable sur  $[a; b]$  et  $F' = f$ .

## 9 2ème Démo (Intégration)

### 9.1 Énoncé

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

### 9.2 Démonstration

On se place dans le cas où  $f$  est définie sur l'intervalle **fermé**  $[a; b]$ .

On admet que, dans ce cas,  $f$  admet un minimum  $m$  sur  $[a; b]$ .

La fonction  $g : x \mapsto f(x) - m$  est alors continue et positive sur  $[a; b]$ .

Elle admet donc une primitive  $G$  sur  $[a; b]$  :  $\forall x \in [a; b], G'(x) = f(x) - m$ .

Soit  $\forall x \in [a; b], F : x \mapsto G(x) + mx$ .

Alors  $F$  est dérivable sur  $[a; b]$  et, pour tout  $x \in [a; b]$ :

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) - m = f(x) - m + m = f(x)$$

Ainsi,  $f$  admet  $F$  pour primitive sur  $[a; b]$ .

## 10 Indépendance de deux événements (Probabilités)

### 10.1 Indépendance

Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$ .

Si  $P(A) \neq 0$ ,  $A$  et  $B$  sont indépendants si, et seulement si  $\boxed{P_A(B) = P(B)}$ .

### 10.2 Énoncé

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $\bar{A}$  et  $B$  le sont aussi.

### 10.3 Démonstration

Comme  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

$A$  et  $\bar{A}$  forment un système d'événements complet, donc d'après la formule des probabilités totales:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

D'où:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Donc  $A$  et  $B$  sont indépendants.

## 11 La loi exponentielle est une loi sans mémoire

### 11.1 Énoncé

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \forall (t; h) \in \mathbb{R}_+^2, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

### 11.2 Démonstration

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t + h) &= \frac{P(\{X \geq t\} \cap \{X \geq t + h\})}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h) \end{aligned}$$

## 12 Unicité de $u_\alpha$

### 12.1 Loi normale centrée réduite

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{t^2}{2}}$$

### 12.2 Énoncé

$$T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1) \Rightarrow \forall \alpha \in ]0; 1[, \exists! u_\alpha \in \mathbb{R}^+, P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

### 12.3 Démonstration

Soit  $\forall u \in [0; +\infty[, F(u) = P(-u \leq T \leq u) = 1 - \alpha$ .

On a:  $F(0) = 0$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = 1$ : l'aire sous la cloche vaut 1.

Par ailleurs, par symétrie de  $\phi$  par rapport à l'axe des ordonnées, on a:

$$F(u) = 2 \times P(0 \leq T \leq u) = \int_0^u \phi(t) dt \quad (\text{avec } \int_0^u \phi(t) dt \text{ la primitive de } \phi \text{ qui s'annule en } 0).$$

Donc  $F'(u) = 2 \times \phi(u) > 0$  et par suite,  $F$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme  $(1 - \alpha) \in ]0; 1[, \exists! u_\alpha \in \mathbb{R}, F(u_\alpha) = 1 - \alpha$ , c'est à dire telle que:

$$P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

## 13 Intervalle de fluctuation avec une loi normale

### 13.1 Énoncé

Soient:

- $X_n$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n; p)$
- La fréquence  $F_n = \frac{X_n}{n}$
- $\alpha \in ]0; 1[$
- $u_\alpha \in \mathbb{R}, P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha, Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$

On note:

$$I_n = \left[ p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$

Note:  $I_n$  s'appelle l'**intervalle de fluctuation asymptotique** de la fréquence  $F_n$  au seuil  $1 - \alpha$ .

### 13.2 Démonstration

Soit:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, quand  $n$  devient grand,  $Z_n$  suit une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0; 1)$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Or:

$$\begin{aligned} -u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha &= -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \\ &= -u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \\ &= np - u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \\ &= p - u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= p - u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned}$$

D'où le résultat en passant à la limite.