

L'intégral des démos bac

1 Suite croissante convergente

1.1 Énoncé

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers une limite finie l .
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$.

1.2 Démonstration

Raisonnons par l'absurde :
Supposons que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > l$.
Alors, comme la suite u_n est croissante : $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > l$.
L'intervalle ouvert $]l - 1; u_{n_0}[$ contient l , mais ne peut contenir les u_n que pour $n < n_0$, donc il ne peut pas contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Cela contredit le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$.

2 Suite croissante non majorée

2.1 Énoncé

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

2.2 Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit A un réel quelconque.
Comme la suite n'est pas majorée par A , $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > A$.
Comme la suite est croissante, $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > A$.
Tous les termes de la suite sont donc dans l'intervalle $]A; +\infty[$ à partir d'un certain rang N .
Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3 Limites des suites géométriques

3.1 Énoncé

$$q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

3.2 Démonstration

Soit $q > 1$.
Alors $\exists a \in \mathbb{R}_+^*, q = 1 + a$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : "q^n \geq 1 + na"$.

INITIALISATION :

Pour $n = 0, q^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $q^0 \geq 1 + 0 \times a$. La récurrence est donc initialisée.

HÉRÉDITÉ :

Supposons que pour un certain n quelconque de \mathbb{N} , P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

HR : $q^n \geq 1 + na$

Mq : $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$

On a : $q^{n+1} = q \times q^n = q^n(1+a)$

Or, par HR, $q^n \geq 1 + na$

Donc $q^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + a(n+1) + na^2$

Or, comme $n \geq 0$ et $a^2 > 0$, $na^2 \geq 0$

Donc $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$

La propriété est donc héréditaire.

CONCLUSION :

P_0 est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + na$.

$a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

4 Prérequis (Fonction exponentielle)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

5 1ère Démo (Fonction exponentielle)

5.1 Énoncé

Soit f la fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

5.2 Démonstration

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

Comme f est dérivable sur \mathbb{R} , il en est de même de la fonction $u : x \rightarrow f(-x)$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -f'(x)$.

Donc g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times u(x) + f(x) \times u'(x) \\ &= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \quad : f' = f \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc g est constante sur \mathbb{R} .

Par ailleurs, $g(0) = f(0)f(-0) = (f(0))^2 = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1$.

De plus, si $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = 0$, alors $f(x_0) \times f(-x_0) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

6 Unicité de la fonction exponentielle

6.1 Énoncé

Il existe une unique fonction f définie sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, et on la note \exp .

6.2 Démonstration

EXISTENCE :

L'existence de la fonction exponentielle est admise.

UNICITÉ :

Soit g une autre fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

D'après la propriété précédente, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$, on peut donc définir la fonction :

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$.

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} , donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2} \\ &= \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} : f' = f; g' = g \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante sur \mathbb{R} .

De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$.

Donc $f = g$.

7 Limites de la fonction exponentielle

7.1 Énoncé

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

7.2 Démonstration

LIMITE EN $+\infty$

Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x > x$.

Soit $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = e^x - x$.

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = e^x - 1$.

$\forall x \geq 0, e^x > 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$ et comme $f(0) = e^0 = 1$,

$\forall x \geq 0, f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > x$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

LIMITE EN $-\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

8 1ère Démo (Intégration)

8.1  nonc 

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
Alors la fonction F définie sur $[a; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et $\forall x \in [a; b], F'(x) = f(x)$.
Plus précisément, F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

8.2 Démonstration

L'on ne montrera ce théorème que lorsque f est croissante sur $[a; b]$.

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$.
Soient $x_0 \in [a; b]$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$.

Idée : On va encadrer $\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$ pour calculer sa limite quand $h \rightarrow 0$

On a, d'après la relation de Chasles :

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_a^{x_0+h} dt + \int_{x_0}^a f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

Remarque : Comme f est croissante sur $[a; b]$, le domaine \mathcal{D} est compris entre les rectangles de base $[x_0; x_0 + h]$ et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$, ce qui va nous permettre d'encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$.

Comme f est croissante sur $[a; b]$, on a l'encadrement :

$$(x_0 + h - x_0) \times f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq (x_0 + h - x_0) \times f(x_0 + h)$$

C'est à dire :

$$h \times f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq h \times f(x_0 + h)$$

D'où, en divisant par $h > 0$:

$$f(x_0) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Soit encore, puisque $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$:

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

En procédant de même pour $h < 0$, on obtient : $f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

Comme f est continue sur $[a; b]$, on a donc en x_0 , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Donc F est dérivable sur x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ceci étant vrai pour tout x_0 de $[a; b]$, F est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$.

9 2ème Démo (Intégration)

9.1 Énoncé

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

9.2 Démonstration

On se place dans le cas où f est définie sur l'intervalle **fermé** $[a; b]$.

On admet que, dans ce cas, f admet un minimum m sur $[a; b]$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur $[a; b]$.

Elle admet donc une primitive G sur $[a; b]$: $\forall x \in [a; b], G'(x) = f(x) - m$.

Soit $\forall x \in [a; b], F : x \mapsto G(x) + mx$.

Alors F est dérivable sur $[a; b]$ et, pour tout $x \in [a; b]$:

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) - m = f(x) - m + m = f(x)$$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a; b]$.

10 Indépendance de deux événements (Probabilités)

10.1 Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

10.2 Énoncé

Si A et B sont indépendants, alors \bar{A} et B le sont aussi.

10.3 Démonstration

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

A et \bar{A} forment un système d'événements complet, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Donc A et B sont indépendants.

11 La loi exponentielle est une loi sans mémoire

11.1 Énoncé

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \forall (t; h) \in \mathbb{R}_+^2, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

11.2 Démonstration

$$\begin{aligned} P_{X \geq t}(X \geq t + h) &= \frac{P(\{X \geq t\} \cap \{X \geq t + h\})}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= P(X \geq h) \end{aligned}$$

12 Unicité de u_α

12.1 Loi normale centrée réduite

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{t^2}{2}}$$

12.2 Énoncé

$$T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1) \Rightarrow \forall \alpha \in]0; 1[, \exists! u_\alpha \in \mathbb{R}^+, P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

12.3 Démonstration

Soit $\forall u \in [0; +\infty[, F(u) = P(-u \leq T \leq u) = 1 - \alpha$.

On a : $F(0) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = 1$: l'aire sous la cloche vaut 1.

Par ailleurs, par symétrie de ϕ par rapport à l'axe des ordonnées, on a :

$$F(u) = 2 \times P(0 \leq T \leq u) = \int_0^u \phi(t) dt \quad (\text{avec } \int_0^u \phi(t) dt \text{ la primitive de } \phi \text{ qui s'annule en } 0).$$

Donc $F'(u) = 2 \times \phi(u) > 0$ et par suite, F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $(1 - \alpha) \in]0; 1[, \exists! u_\alpha \in \mathbb{R}, F(u_\alpha) = 1 - \alpha$, c'est à dire telle que :

$$P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

13 Intervalle de fluctuation avec une loi normale

13.1 Énoncé

Soient :

— X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$

— La fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$

— $\alpha \in]0; 1[$

— $u_\alpha \in \mathbb{R}, P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha, Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1)$

On note :

$$I_n = \left[p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$

Note : I_n s'appelle l'**intervalle de fluctuation asymptotique** de la fréquence F_n au seuil $1 - \alpha$.

13.2 Démonstration

Soit :

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, quand n devient grand, Z_n suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Or :

$$\begin{aligned} -u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha &= -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \\ &= -u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \\ &= np - u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \\ &= p - u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ &= p - u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned}$$

D'où le résultat en passant à la limite.

14 Théorème du toit

14.1 Énoncé

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles, \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 deux plans distincts tels que $d_1 \subset \mathcal{P}_1$ et $d_2 \subset \mathcal{P}_2$. Si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants, alors leur droite Δ d'intersection est parallèle à d_1 et d_2 .

14.2 Énoncé

Notons \vec{u} un vecteur directeur de d_1 et d_2 (qui sont parallèles), et \vec{w} un vecteur directeur de Δ . Notons (\vec{u}, \vec{v}_1) un couple de vecteurs directeurs de \mathcal{P}_2 .

$$\begin{aligned}\Delta \subset \mathcal{P}_1 &\Rightarrow \exists (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2, \vec{w} = x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v}_1. \\ \Delta \subset \mathcal{P}_2 &\Rightarrow \exists (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2, \vec{w} = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v}_2.\end{aligned}$$

On a donc $x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v}_1 = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v}_2$, c'est à dire $(x_1 - x_2) \vec{u} = y_2 \vec{v}_2 - y_1 \vec{v}_1$.

Si $x_1 \neq x_2$, alors $\vec{u} = \frac{y_2}{x_1 - x_2} \vec{v}_1 - \frac{y_1}{x_1 - x_2} \vec{v}_2$ et les vecteurs \vec{u} , \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont donc coplanaires ce qui est impossible car les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants. Donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = 0$ et $y_2 = 0$ car les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires. Au final, $\vec{w} = x_1 \vec{u}$ et Δ est parallèle à d_1 et d_2 .

15 Orthogonalité entre une droite et un plan

15.1 Énoncé

Si une droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 d'un plan \mathcal{P} , alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

15.2 Énoncé

Soit d une droite de \mathcal{P} .

Soient \vec{v} un vecteur directeur de Δ , \vec{u}_1 et \vec{u}_2 des vecteurs respectifs de d_1 et d_2 et \vec{u} un vecteur directeur de d .

Comme les droites d , d_1 et d_2 sont incluses dans \mathcal{P} , les vecteurs \vec{u} , \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont coplanaires et

$$\exists (a; b) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2.$$

$$\text{On a alors } \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = a(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + b(\vec{v} \cdot \vec{u}_2).$$

$$\text{Or, } \Delta \perp d_1 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0 \text{ et } \Delta \perp d_2 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = 0.$$

$$\text{Donc } \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et } \Delta \perp d.$$

16 Théorème de Gauss (Spé)

16.1 Énoncé

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, (a|bc \wedge \text{PGCD}(a; b) = 1) \Rightarrow a|c.$$

16.2 Démonstration

$$a|bc \Rightarrow bc = ka, k \in \mathbb{Z}^*$$

a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$.

$$\text{Donc } cau + cbv = c.$$

$$\text{Or, } bc = ka, \text{ donc } cau + kav = c \Leftrightarrow a(cu + kv) = c.$$

$$cu + kv \in \mathbb{Z}, \text{ donc } a|c.$$

17 Corollaire de Gauss (Spé)

17.1 Énoncé

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, (a|b \wedge b|c \wedge \text{PGCD}(a; b) = 1) \Rightarrow ab|c.$$

17.2 Démonstration

$$a|c \Rightarrow c = ka, k \in \mathbb{Z}$$

$$b|c \Rightarrow c = k'b, k' \in \mathbb{Z}$$

a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2$, $au + bv = 1$.

Donc $cau + cbv = c$.

Or, $c = ka$ et $c = k'b$, donc $k'bau + kabv = c \Leftrightarrow ab(k'u + kv) = c$.

$k'u + kv \in \mathbb{Z}$, donc $ab|c$.