L'intégral des démos bac

1 Suite croissante convergente

1.1 Énoncé

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers une limite finie l.
Alors $\forall_n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.

1.2 Démonstration

Raisonnons par l'absurde:
Supposons que: $\exists_{n_0} \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > l$.
Alors, comme la suite u_n est croissante: $\forall_n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > l$.
L'intervalle ouvert $]l-1; u_{n_0}[$ contient l, mais ne peut contenir les u_n que pour $n < n_0$, donc il ne peut pas contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Cela contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Donc $\forall_n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.

2 Suite croissante non majorée

2.1 Énoncé

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

2.2 Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.
Soit A un réel quelconque.
Comme la suite n'est pas majorée par A, $\exists_N \in \mathbb{N}$, $u_N > A$
Comme la suite est croissante, $\forall_n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$.
Tous les termes de la suite sont donc dans l'intervalle $]A; +\infty[$ à partir d'un certain rang N.
Donc $\forall_A \in \mathbb{R}$, $\exists_N \in \mathbb{N}$, $\forall_n \geq N$, $u_n > A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3 Limites des suites géométriques

3.1 Énoncé

$q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

3.2 Démonstration

Soit $q > 1$.
Alors $\exists_a \in \mathbb{R}_+^*$, $q = 1 + a$.

Soit $\forall_n \in \mathbb{N}$, P_n : "$q^n \geq 1 + na$".
INITIALISATION:
Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $q^0 \geq 1 + 0 \times a$. La récurrence est donc initialisée.
HÉRÉDITÉ:
Supposons que pour un certain n quelconque de $\mathbb{N}$, P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.
HR: $q^n \geq 1 + na$
Mq: $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$

On a: $q^{n+1} = q \times q^n = q^n(1+a)$
Or, par HR, $q^n \geq 1 + na$
Donc $q^{n+1} \geq (1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + a(n+1) + na^2$
Or, comme $n \geq 0$ et $a^2 > 0$, $na^2 \geq 0$
Donc $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$
CONCLUSION:
P_0 est vraie, $\forall_n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence, $\forall_n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1 + na$.

Comme $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$.
Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

4 Prérequis (Fonction exponentielle)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $\forall_x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

5 1ère Démo (Fonction exponentielle)

5.1 Énoncé

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Alors, $\forall_x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

5.2 Démonstration

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction $u : x \to f(-x)$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -f'(x)$.
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) =& f'(x) \times u(x) + f(x) \times u'(x) \\ =& f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \\ =& f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \quad : f' = f \\ =& 0 \end{aligned}$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $g(0) = f(0)f(-0) = (f(0))^2 = 1$.
Donc $\forall_x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1$.

De plus, si $\exists_{x_0} \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$, alors $f(x_0) \times f(-x_0) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent.
Donc $\forall_x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

6 Unicité de la fonction exponentielle

6.1 Énoncé

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, et on la note *exp*.

6.2 Démonstration

ÉXISTENCE:
L'existence de la fonction exponentielle est admise.
UNICITÉ:
Soit g une autre fonction définie et dérivable sur sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
D'après la propriété précédente, $\forall_x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$, on peut donc définir la fonction:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

Montrons que $\forall_x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\forall_x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) =& \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2} \\ =& \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} \qquad : f' = f;\ g' = g \\ =& 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$.
Donc $\forall_x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$.
Donc $f = g$.

7 Limites de la fonction exponentielle

7.1 Énoncé

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

7.2 Démonstration

LIMITE EN $+\infty$
Montrons que: $\forall_x \in \mathbb{R}^+, e^x > x$.
Soit $\forall_x \in \mathbb{R}^+, f(x) = e^x - x$.
f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall_x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = e^x - 1$.
$\forall_x \geq 0$, $e^x > 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$
Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$ et comme $f(0) = e^0 = 1$,
$\forall_x \geq 0$, $f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > x$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
LIMITE EN $-\infty$

$$\forall_x \in \mathbb{R}, e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

Et:

$$\lim_{x \to +\infty} (-x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

8 1ère Démo (Intégration)

8.1 Énoncé

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$$

est dérivable sur $[a;b]$ et, pour tout x de [a;b], $F'(x) = f(x)$.
Plus précisément, F est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

8.2 Démonstration

Conformément au programme de TS, on montre ce théorème uniquement lorsque f est croissante sur $[a;b]$.

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a;b]$. Soit $x_0 \in [a;b]$ et $h > 0$ tq $x_0 + h \in [a;b]$.

Idée: On va encadrer $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ pour calculer sa limite quand $h \to 0$

On a, d'après la relation de Chasles:

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt} + \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt}$$

Remarque: Comme f est croissante sur $[a;b]$, le domaine $\mathscr{D}$ est compris entre les rectangles de base $[x_0;x_0+h]$ et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$, ce qui va nous permettre d'encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt}$.

Comme f est croissante sur $[a;b]$, on a l'encadrement:

$$(x_0+h-x_0) \times f(x_0) \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt} \le (x_0+h-x_0) \times f(x_0+h)$$

C'est à dire:

$$h \times f(x_0) \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt} \le h \times f(x_0+h)$$

D'où, en divisant pas $h > 0$:

$$f(x_0) \le \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt}}{h} \le f(x_0+h)$$

Soit encore, puisque $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{dt}$:

$$f(x_0) \le \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \le f(x_0+h)$$

En procédant de même pour $h < 0$, on obtient: $f(x_0+h) \le \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \le f(x_0)$.
Comme f est continue sur $[a;b]$, on a donc en x_0 $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Donc F est dérivable sur x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$.
Ceci étant vrai pour tout x_0 de $[a;b]$, F est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$.

9 2ème Démo (Intégration)

9.1 Énoncé

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

9.2 Démonstration

On se place dans le cas où f est définie sur l'intervalle **fermé** $[a;b]$.
On admet que, dans ce cas, f admet un minimum m sur $[a;b]$.
La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur $[a;b]$.
Elle admet donc une primitive G sur $[a;b]$: $\forall_x \in$[a ;b], $G'(x) = f(x) - m$.
Soit $\forall_x \in$[a ;b], $F : x \mapsto G(x) + mx$.
Alors F est dérivable sur $[a;b]$ et, pour tout $x \in$[a ;b]:

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) - m = f(x) - m + m = f(x)$$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a;b]$.

10 Indépendance de deux événements (Probabilités)

10.1 Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.
Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si $\boxed{P_A(B) = P(B)}$.

10.2 Énoncé

Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

10.3 Démonstration

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
A et $\bar{A}$ forment un système d'événements complet, donc d'après la formule des probabilités totales:
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
D'où:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Donc A et B sont indépendants.

11 La loi exponentielle est une loi sans mémoire

11.1 Énoncé

$X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\lambda) \Rightarrow \forall_{(t;h)} \in \mathbb{R}_+^2, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$

11.2 Démonstration

$$\begin{aligned}P_{X\geq t}(X \geq t+h) &= \frac{P(X \geq t \wedge X \geq t+h)}{P(X \geq t)}\\ &= \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)}\\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}\\ &= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}\\ &= e^{-\lambda h}\\ &= P(X \geq h)\end{aligned}$$

12 Unicité de u_α

12.1 Loi normale centrée réduite

$$\forall_t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \frac{1}{2\pi} \times e^{-\frac{t^2}{2}}$$

12.2 Énoncé

$T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1) \Rightarrow \forall_\alpha \in]0;1[, \exists!_{u_\alpha} \in \mathbb{R}^+, P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

12.3 Démonstration

Soit $\forall_u \in [0;+\infty[$, $F(u) = P(-u \leq T \leq u) = 1-\alpha$.
On a: $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} F(u) = 1$: l'aire sous la cloche vaut 1.
Par ailleurs, par symétrie de ϕ par rapport à l'axe des ordonnées, on a:
$F(u) = 2 \times P(0 \leq T \leq u) = \int_0^u \phi(t)\,\mathrm{d}t$ *(avec $\int_0^u \phi(t)\,\mathrm{d}t$ la primitive de ϕ qui s'annule en 0).*
Donc $F'(u) = 2 \times \phi(u) > 0$ et par suite, F est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $(1-\alpha) \in]0;1[$, $\exists!_{u_\alpha} \in \mathbb{R}$, $F(u_\alpha) = 1-\alpha$, c'est à dire telle que:

$$P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$

13 Intervalle de fluctuation avec une loi normale

13.1 Énoncé

Soient:

- X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$
- La fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$
- $\alpha \in]0;1[$
- $u_\alpha \in \mathbb{R}$, $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1-\alpha$, $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$

On note:

$$I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n \in I_n) = 1-\alpha$
Note: I_n s'appelle **l'intervalle de fluctuation asymptotique** de la fréquence F_n au seuil $1-\alpha$.

13.2 Démonstration

Soit:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, quand n devient grand, Z_n suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$

Or:

$$\begin{aligned}
-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha &= -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \\
&= -u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} \\
&= -u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} + np \leq X_n \leq u_\alpha \times \sqrt{np(1-p)} + np \\
&= p - u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\
&= p - u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}
\end{aligned}$$

D'où le résultat en passant à la limite.