

L'intégral des démos bac

1 Suite croissante convergente

1.1 Énoncé

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers une limite finie l .

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$.

1.2 Démonstration

Raisonnons par l'absurde:

Supposons que: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > l$.

Alors, comme la suite u_n est croissante: $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > l$.

L'intervalle ouvert $]l - 1; u_{n_0}[$ contient l , mais ne peut contenir les u_n que pour $n < n_0$, donc il ne peut pas contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Cela contredit le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$.

2 Suite croissante non majorée

2.1 Énoncé

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

2.2 Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Soit A un réel quelconque.

Comme la suite n'est pas majorée par A , $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > A$.

Comme la suite est croissante, $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > A$.

Tous les termes de la suite sont donc dans l'intervalle $]A; +\infty[$ à partir d'un certain rang N .

Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3 Limites des suites géométriques

3.1 Énoncé

$q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

3.2 Démonstration

Soit $q > 1$.

Alors $\exists a \in \mathbb{R}_+^*, q = 1 + a$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, P_n: "q^n \geq 1 + na"$.

INITIALISATION:

Pour $n = 0$, $q^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$, donc $q^0 \geq 1 + 0 \times a$. La récurrence est donc initialisée.

HÉRÉDITÉ:

Supposons que pour un certain n quelconque de \mathbb{N} , P_n soit vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

HR: $q^n \geq 1 + na$

Mq: $q^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$

On a: $q^{n+1} = q \times q^n = q^n(1 + a)$

Or, par HR, $q^n \geq 1 + na$

Donc $q^{n+1} \geq (1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + a(n + 1) + na^2$

Or, comme $n \geq 0$ et $a^2 > 0$, $na^2 \geq 0$

Donc $q^{n+1} \geq 1 + a(n + 1)$

CONCLUSION:

P_0 est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \Rightarrow P_{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, q^n \geq 1 + na$.

Comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

4 Prérequis (Fonction exponentielle)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

5 1ère Démo (Fonction exponentielle)

5.1 Énoncé

Soit f la fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

5.2 Démonstration

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

Comme f est dérivable sur \mathbb{R} , il en est de même de la fonction $u : x \rightarrow f(-x)$ et, pour $x \in \mathbb{R}, u'(x) = -f'(x)$.

Donc g est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times u(x) + f(x) \times u'(x) \\ &= f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) \\ &= f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \quad : f' = f \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc g est constante sur \mathbb{R} .

Par ailleurs, $g(0) = f(0)f(-0) = (f(0))^2 = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) \times f(-x) = 1$.

De plus, si $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0$, alors $f(x_0) \times f(-x_0) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

6 Unicité de la fonction exponentielle

6.1 Énoncé

Il existe une unique fonction f définie sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, et on la note \exp .

6.2 Démonstration

EXISTENCE:

L'existence de la fonction exponentielle est admise.

UNICITÉ:

Soit g une autre fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
D'après la propriété précédente, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$, on peut donc définir la fonction:

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1$.

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} , donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{(f(x))^2} \\ &= \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{(f(x))^2} : f' = f; g' = g \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante sur \mathbb{R} .

De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$.

Donc $f = g$.

7 Limites de la fonction exponentielle

7.1 Énoncé

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

7.2 Démonstration

LIMITE EN $+\infty$

Montrons que: $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x > x$.

Soit $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = e^x - x$.

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = e^x - 1$.

$\forall x \geq 0, e^x > 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$ et comme $f(0) = e^0 = 1$,

$\forall x \geq 0, f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > x$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

LIMITE EN $-\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \frac{1}{e^{-x}}$$

Et:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

8 1ère Démo (Intégration)

8.1 Énoncé

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Alors la fonction F définie sur $[a; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et, pour tout x de $[a; b]$, $F'(x) = f(x)$.

Plus précisément, F est la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

8.2 Démonstration

Conformément au programme de TS, on montre ce théorème uniquement lorsque f est croissante sur $[a; b]$.

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur $[a; b]$. Soit $x_0 \in [a; b]$ et $h > 0$ tq $x_0 + h \in [a; b]$.

Idée: On va encadrer $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ pour calculer sa limite quand $h \rightarrow 0$

On a, d'après la relation de Chasles:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_a^{x_0+h} f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

Remarque: Comme f est croissante sur $[a; b]$, le domaine \mathcal{D} est compris entre les rectangles de base $[x_0; x_0 + h]$ et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$, ce qui va nous permettre d'encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$.

Comme f est croissante sur $[a; b]$, on a l'encadrement:

$$(x_0 + h - x_0) \times f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq (x_0 + h - x_0) \times f(x_0 + h)$$

C'est à dire:

$$h \times f(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq h \times f(x_0 + h)$$

D'où, en divisant par $h > 0$:

$$f(x_0) \leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} \leq f(x_0 + h)$$

Soit encore, puisque $F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$:

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

En procédant de même pour $h < 0$, on obtient: $f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

Comme f est continue sur $[a; b]$, on a donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Donc F est dérivable sur x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ceci étant vrai pour tout x_0 de $[a; b]$, F est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$.

9 2ème Démo (Intégration)

9.1 Énoncé

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

9.2 Démonstration

On se place dans le cas où f est définie sur l'intervalle **fermé** $[a; b]$.

On admet que, dans ce cas, f admet un minimum m sur $[a; b]$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur $[a; b]$.

Elle admet donc une primitive G sur $[a; b] : \forall x \in [a; b], G'(x) = f(x) - m$.

Soit $\forall x \in [a; b], F : x \mapsto G(x) + mx$.

Alors F est dérivable sur $[a; b]$ et, pour tout $x \in [a; b]$:

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) - m = f(x) - m + m = f(x)$$

Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a; b]$.

10 Indépendance de deux événements (Probabilités)

10.1 Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

10.2 Énoncé

Si A et B sont indépendants, alors \bar{A} et B le sont aussi.

10.3 Démonstration

Comme A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

A et \bar{A} forment un système d'événements complet, donc d'après la formule des probabilités totales:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

D'où:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(\bar{A}) \times P(B) \end{aligned}$$

Donc A et B sont indépendants.

11 La loi exponentielle est une loi sans mémoire

11.1 Énoncé

$$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \forall (t, h) \in \mathbb{R}_+^2, P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

11.2 Démonstration

$$\begin{aligned}P_{X \geq t}(X \geq t+h) &= \frac{P(X \geq t \wedge X \geq t+h)}{P(X \geq t)} \\&= \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} \\&= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\&= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\&= e^{-\lambda h} \\&= P(X \geq h)\end{aligned}$$

12 Unicité de u_α

12.1 Loi normale centrée réduite

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{t^2}{2}}$$

12.2 Énoncé

$$(T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0; 1) \wedge \alpha \in]0; 1[) \Rightarrow \exists!_{u_\alpha} \in \mathbb{R}^+, P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

12.3 Démonstration

Soit $\forall u \in [0; +\infty[, F(u) = P(-u \leq T \leq u) = 1 - \alpha$.

On a: $F(0) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = 1$: l'aire sous la cloche vaut 1.

Par ailleurs, par symétrie de ϕ par rapport à l'axe des ordonnées, on a:

$$F(u) = 2 \times P(0 \leq T \leq u) = \int_0^u \phi(t) dt \quad (\text{avec } \int_0^u \phi(t) dt \text{ la primitive de } \phi \text{ qui s'annule en } 0).$$

Donc $F'(u) = 2 \times \phi(u) > 0$ et par suite, F est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $(1 - \alpha) \in]0; 1[, \exists!_{u_\alpha} \in \mathbb{R}, F(u_\alpha) = 1 - \alpha$, c'est à dire telle que:

$$P(-u_\alpha \leq T \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

13 Intervalle de fluctuation avec une loi normale

13.1 Énoncé

13.2 Démonstration